Ejercicios Tema 3 - Intervalos de Confianza. Taller 1

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso completo de estadística inferencial con R y Python

Contenidos

1 Intervalos de confianza taller 1

1.1 Ejercicio 1

El fabricante SMART_LED fabrica bombillas led inteligentes y de alta gama. Supongamos que la vida de de estas bombillas sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Si tomamos una muestra aleatoria de tamaño n de estas bombillas y representamos por X_i la duración de la $i-$ésima bombilla para $i = 1, \ldots, n$, ¿cuál es la función de densidad conjunta de la muestra?

1.2 Ejercicio 2

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ variables aleatorias que son una muestra aleatoria simple de una v.a. X. a. Dividimos la muestra en dos partes: de forma que la primera son los 5 primeros valores y la segunda los restantes. ¿Son independientes las dos partes? b. Volvemos a dividir la muestra en dos partes: la primera está formada por los 5 valores más pequeños y la segunda por el resto. ¿Son independientes las dos partes?

1.3 Ejercicio 3

Un fabricante de motores pone a prueba 6 motores sobre el mismo prototipo de coche de competición. Para probar que los motores tienes las mismas prestaciones se someten a distintas pruebas en un circuito. Las velocidades máximas en 10 vueltas al circuito de cada motor tras la prueba son $190, 195, 193, 177, 201$ y 187 en Km/h. Estos valores forman una muestra aleatoria simple de la variable X = velocidad máxima de un motor en 10 vueltas. Se pide calcular los valores observados de los siguientes estadísticos de la muestra: a. $\overline{X}$. b. $\tilde{S}^2$. c. Mediana. d. $X_{(4)}$ (valor que ocupa el cuarto lugar ordenados los valores de menor a mayor).

1.4 Ejercicio 4

¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de de una muestra de tamaño $n = 10$ de una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 1)$ sea mayor que 0.9? ¿Cuál es la probabilidad de sea menor que $\frac{1}{2}$?

1.5 Ejercicio 5

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria normal de parámetros μ y σ. Denotemos por $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq, \ldots, \leq X_{(n)}$ la muestra ordenada de menor a mayor. a. Calcular la funciones de densidad del mínimo $X_{(1)}$ y del máximo $X_{(n)}$ b. ¿Alguna de estas variables sigue una distribución normal?

1.6 Ejercicio 6

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a X de media μ y varianza σ^2 desconocidas. Definimos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ y } T = \frac{\sqrt{n}\cdot(\overline{X} - \mu)}{\sigma}.$$

a. ¿Cuál es la distribución de T?
b. ¿Es T un estadístico?

1.7 Ejercicio 7

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal estándar. Calculad $P\left(2.56 < \sum\limits_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right)$.

1.8 Ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(X_i-2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$

2 Soluciones

2.1 Solución ejercicio 1

Tenemos una m.a.s. de tamaño n $X_1, X_2, ...X_n$ de una v.a. X con distribución $Po(\lambda)$. Bajo estas condiciones $P(X_i = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$

La función de probabilidad (densidad) de la muestra es el propducto de las de cada X_i, concretamente:

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) &= P(X_i = x_1)\cdot P(X_i = x_2)\cdot \ldots \cdot P(X_i = x_n) \\
&= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{x_1!\cdot x_2! \ldots \cdot x_n!}\mathrm{e}^{-n\cdot\lambda}.
\end{aligned}$$

2.2 Ejercicio 2

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ variables aleatorias que son una muestra aleatoria simple de una v.a. X. a. Dividimos la muestra en dos partes: de forma que la primera son los 5 primeros valores y la segunda los restantes. ¿Son independientes las dos partes? b. Volvemos a dividir la muestra en dos partes: la primera está formada por los 5 valores más pequeños y la segunda por el resto. ¿Son independientes las dos partes?

2.3 Ejercicio 3

Un fabricante de motores pone a prueba 6 motores sobre el mismo prototipo de coche de competición. Para probar que los motores tienes las mismas prestaciones se someten a distintas pruebas en un circuito. Las velocidades máximas en 10 vueltas al circuito de cada motor tras la prueba son $190, 195, 193, 177, 201$ y 187 en Km/h. Estos valores forman una muestra aleatoria simple de la variable $X =$ velocidad máxima de un motor en 10 vueltas. Se pide calcular los valores observados de los siguientes estadísticos de la muestra: a. $\overline{X}$. b. $\tilde{S}^2$. c. Mediana. d. $X_{(4)}$ (valor que ocupa el cuarto lugar ordenados los valores de menor a mayor).

2.4 Ejercicio 4

¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de de una muestra de tamaño $n = 10$ de una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 1)$ sea mayor que 0.9? ¿Cuál es la probabilidad de sea menor que $\frac{1}{2}$?

2.5 Ejercicio 5

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria normal de parámetros μ y σ. Denotemos por $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq, \ldots, \leq X_{(n)}$ la muestra ordenada de menor a mayor. a. Calcular la funciones de densidad del mínimo $X_{(1)}$ y del máximo $X_{(n)}$ b. ¿Alguna de estas variables sigue una distribución normal?

2.6 Ejercicio 6

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una v.a X de media μ y varianza σ^2 desconocidas. Definimos

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ y } T = \frac{\sqrt{n} \cdot (\overline{X} - \mu)}{\sigma}.$$

a. ¿Cuál es la distribución de T?
b. ¿Es T un estadístico?

2.7 Ejercicio 7

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal estándar. Calculad $P\left(2.56 < \sum_{i=1}^{10} X_i^2 < 18.31\right)$.

2.8 Ejercicio 8

Consideremos la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño $n = 10$ de una v.a X normal $N(\mu = 2, \sigma = 4)$. Definimos la siguiente variable aleatoria $Y = \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - 2)^2}{16}$. Calculad $P(Y \leq 2.6)$