

ESTUDIO DE MÉTODOS COMPUTACIONALES PARA ONDAS GRAVITACIONALES

Juan Murillo¹, Carlos Contreras¹, Isaac Arévalo¹, Luis Zambrano¹

¹ Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Introducción

Las ondas gravitacionales son perturbaciones del espacio-tiempo, predichas por Einstein, que se producen al acelerar masas muy grandes. Su detección (ej. por LIGO) permite estudiar nuevos fenómenos cósmicos, como las colisiones de agujeros negros.

En este trabajo analizamos datos de simulaciones numéricas de ondas gravitacionales generadas por un sistema binario de agujeros negros. El estudio se centra en el desarrollo e implementación de métodos computacionales para el procesamiento y análisis de estas señales, específicamente:

- **Interpolación de la fase:** Implementación de diversos métodos de interpolación (lagrange, spline cubico, pchip) para reconstruir la fase de la onda gravitacional a partir de datos discretos.
- **Cálculo de frecuencia:** Obtención de la frecuencia instantánea mediante diferenciación numérica de la fase utilizando métodos de diferencias finitas (hacia adelante, hacia atrás y centradas).
- **Evolución post-newtoniana:** Resolución numérica (RK4,RK45,LSODA) de la ecuación diferencial post-newtoniana para la evolución de la frecuencia orbital del sistema binario.
- **Análisis de detección:** Cálculo de la razón señal-ruido mediante integración numérica (riemann, trapezio, simpson) de funciones relacionadas con la respuesta del detector.

Este enfoque integral permite validar y comparar diferentes técnicas computacionales aplicadas al análisis de señales gravitacionales, proporcionando herramientas esenciales para la extracción de parámetros físicos y la caracterización de fuentes astrofísicas.

Modelo teórico

Interpolación por PCHIP

PCHIP es una interpolación cúbica por tramos que ajusta las pendientes para evitar oscilaciones y preservar la monotonicidad.

$$H_k(t) = y_k h_{00}(t) + y_{k+1} h_{10}(t) + m_k \Delta x h_{01}(t) + m_{k+1} \Delta x h_{11}(t),$$

Diferenciación por diferencias finitas

Las diferencias finitas aproximan derivadas reemplazando $f(x)$ por combinaciones lineales de valores vecinos.

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & (\text{progresiva}), f'(x) &\approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} & (\text{regresiva}), f'(x) &\approx \\ &\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} & (\text{centrada}) \end{aligned}$$

Encontrar raíces mediante Newton-Raphson

Newton-Raphson aproxima la raíz iterando con la línea tangente de $f(x)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Integración por Simpson

La regla de Simpson aproxima la integral usando un polinomio cuadrático en cada par de subintervalos.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Solución de ecuaciones diferenciales mediante runge-kutta

Runge-Kutta (RK4) resuelve EDOs aproximando el siguiente paso con una combinación ponderada de cuatro evaluaciones de la derivada.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), & k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), & k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), & k_4 &= \\ &f(t_n + h, y_n + hk_3), & y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Diferencias

RK clásico (RK4): Método de Runge-Kutta de orden fijo (4) y paso fijo, sin control de error.

RK Fehlberg (RKF45): Usa un par incrustado 4(5): calcula dos soluciones (orden 4 y 5) para estimar el error local y así ajustar el paso automáticamente.

RK Dormand-Prince (DOPRI5 / RK45): También es un método incrustado 4(5), pero optimizado para que la solución de mayor orden (5) sea más precisa → suele requerir

menos evaluaciones y es el usado por defecto en muchos solvers (incluyendo RK45 de SciPy).

Resultados

Análisis de Fase y Frecuencia GW

La interpolación de fase se realizó con PCHIP por su mayor exactitud. La frecuencia GW, como derivada de la fase, se calculó por diferencias finitas y derivada de la interpolación.

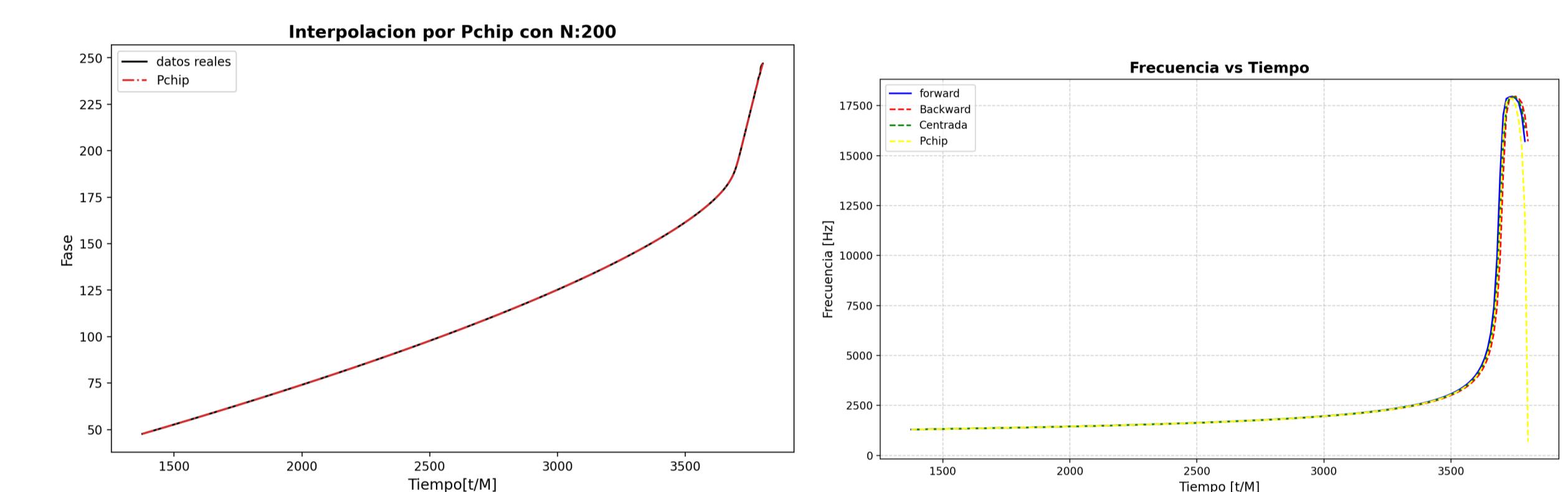


Figure 1: Interpolación PCHIP de la fase

Mediante Newton-Raphson:

- Tiempo ISCO: 3622.14
- Frecuencia ISCO: 4398.08 Hz

Validación con Modelo PN

Comparación en unidades normalizadas entre frecuencias SXS y postnewtonianas.

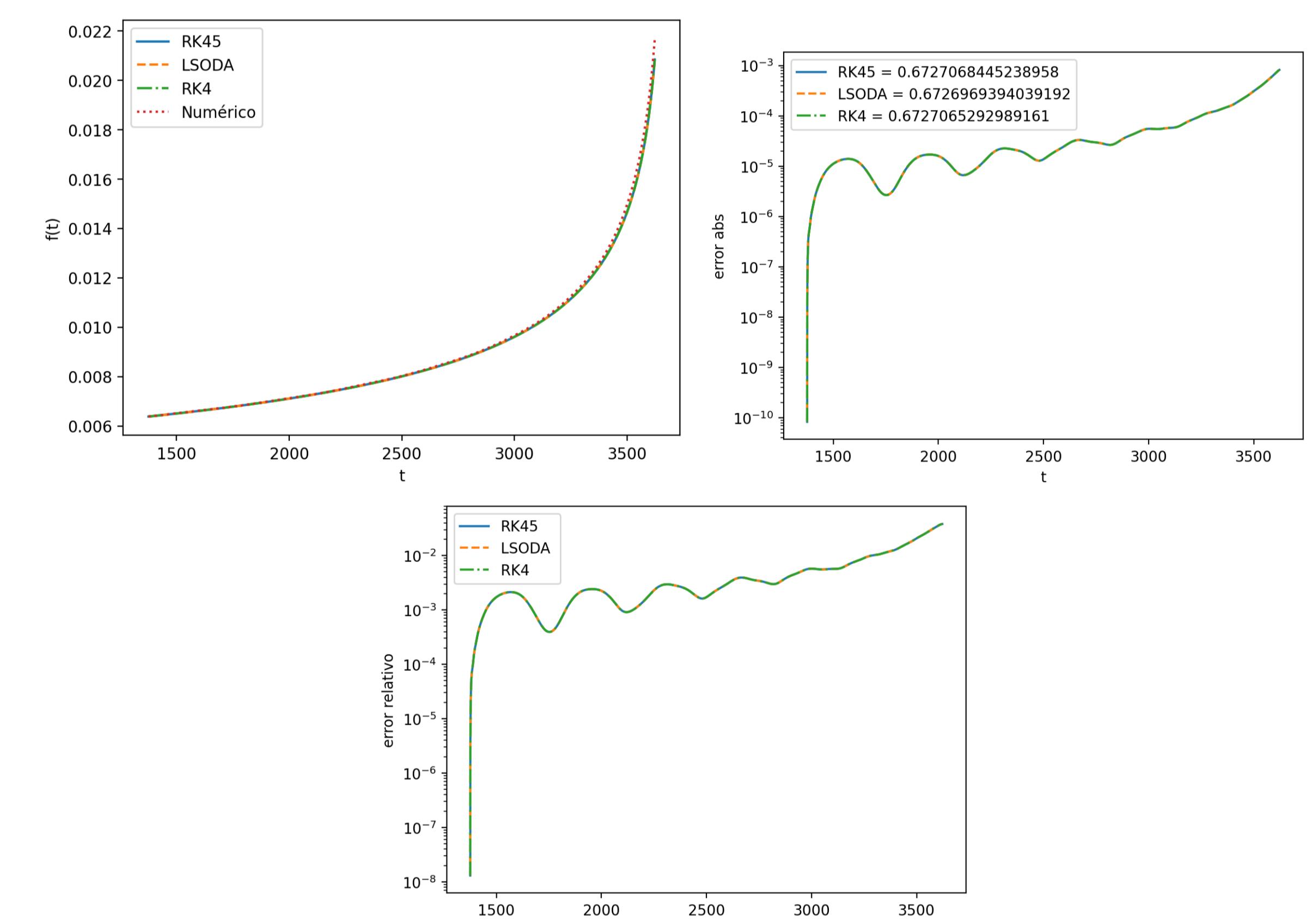


Figure 2: Frecuencias SXS vs postnewtonianas

Cálculo del SNR

La frecuencia ISCO se calcula como:

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{c^3}{6^{3/2} \pi G M_t} = 1565.57 \text{ Hz}$$

la integral por simpson dio 1463.36 produce un SNR de 38.25, muy por encima del umbral de detectabilidad $\rho > 8$ de LIGO.

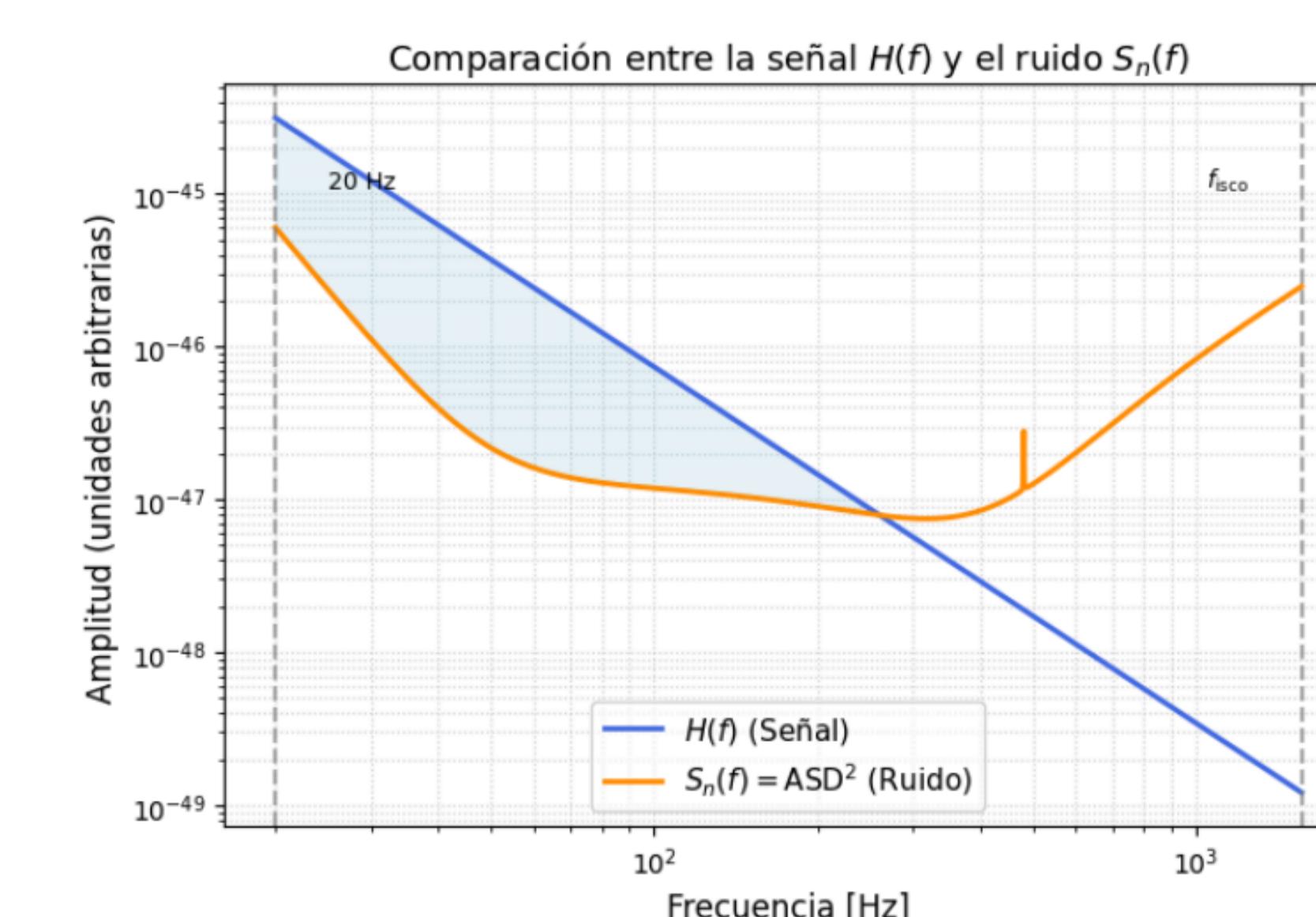


Figure 3: Respuesta en frecuencia $H(f)$ y espectro de ruido $S_n(f)$.