2.1.6

3)

a)

$\cdot$	I	R_i	$\overline{R_j}$	X_k
I	I	R_i	$\overline{R_j}$	X_k
R_i	R_i	R_j	I	X_k
$\overline{R_j}$	$\overline{R_j}$	I	R_i	X_k
X_k	X_k	X_k	X_k	I

b) 1) Cumple cerradura bajo $\circ$, se aprecia en el punto a

2) $(I \circ R_i) \circ X_k = I \circ (R_i \circ X_k)$ 5) tiene elemento neutro I

3) $I \circ K = K$

4) Tiene Inversos

c) $\{I, R_i, R_j\}$ subgrugo ciclico de orden 3

$\circ$	I	R_i	R_j
I	I	R_i	R_j
R_i	R_i	R_j	T
R_j	R_j	I	R_i

Cumple con 1, 2, 3, 4, 5 del punto b

$\{I, X_k\}$ subgrupo ciclico grado 2

$\circ$	I	X_k
I	I	X_k
X_k	X_k	I

cumple con (1, 2, 3, 4 y 5) del punto b

d) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

X	I	A	B	C	D	E
I	I	A	D	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	I	D	A	B	I

No es cerrada bajo la operacion

Cumple con (1, 2, 3, 4 y 5)

Adicionalmente. Las tablas son equivalentes a 61 por tanto es Isomorfa e)

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_3	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

La tabla no es equivalente
Por tanto no es isomorfo a G_4

f) Para el triangulo Isoceles

$\cdot$	I	s_1
I	I	s_i
s_1	s_i	I

Por el eje de simetria y la Identidad

Para el triangulo escaleno
solo la Identidad, pues no tiene eje de simetria.

10) $|P_n\rangle \rightleftarrows P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

a) $P_n(x)_a$, $P_n(x)_b \in P_n \rightarrow$ suma
$P_n(x)_a + P_n(x)_b = a_j x^i + b_j x^i = (a_j + b_j)(x^i)$, $(a_j + b_j) \in C_i$
$\alpha P_n a = (\alpha a_j) x^i$, $\alpha a_j \in C_i \rightarrow$ Multiplicación

b) si $a_j \in \mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}$. Entonces sigue siendo un espacio vectorial

c)

I) $\{0, P_{n-1}\}$ es subespacio de P_n
-) Pues esta cerrado bajo: La suma y multiplicación por un escalar

II) se sabe que la suma de un numero par + otro par da como resultado otro par, ademas cualquier numero (z) multiplicado por un par da como resultado un par, por tanto es cerrado por la multiplicacion escalar y es subespacio.

III) no. $ax^2 - ax^2 = 0$ y $0 \notin$ al subespacion (no cerrado bajo suma)
de igual manera para IV) $(x-1) - (x-1) = 0$

2.2.4

6)

a)

$\cdot\ |a\rangle + |b\rangle = a^0 + a^i|q_i\rangle + b^0 + b^i|q_i\rangle = a^0 + b^0 + (a^i b^i|q_i\rangle$

$= c^0 + c^i|q_i\rangle$

$\cdot\ \alpha|c\rangle = \alpha c^\alpha|q_\alpha\rangle = \alpha c^0|q_0\rangle + \alpha c^1 q_1 + \alpha c^2|q_2 + \alpha c^3 q_3\rangle$

Si es espacio vectorial cerrado bajo suma y multplicación

b) $|b\rangle = (b^0, \mathbf{b}),\ |r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$

$|d\rangle = |b\rangle \circ |r\rangle = (b^0|q_0\rangle + b^1|q_1\rangle + b^2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle \circ$
$(r^0|q_0\rangle + r^1|q_1\rangle + r^2|q_2\rangle + r^3|q_3\rangle)$

$\rightarrow d^0 = b^0 r^0 (|q_0\rangle \overset{1}{\cancel{\circ}} |q_0\rangle) + b^1 r^1 (|q_1\rangle \overset{-1}{\cancel{\circ}} |q_1\rangle) + b^2 r^2 (|q_2\rangle \cancel{\circ |q_2\rangle}^{-1})$
$+ b^3 r^3 (|q_3\rangle \circ \cancel{|q_3\rangle})^{-1}$

$d^0 = b^0 r^0 - b^1 r^1 - b^2 r^2 - b^3 r^3 = b^0 r^0 - b^i/_i = b^0 r^0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$

$\rightarrow d = (b^0 r^1 + r^0 b^1 - b^2 r^3 + b^3 r^2)|q_1\rangle$
$(b^0 r^2 + r^0 b^2 - b^1 r^3 + b^3 r^1)|q_2\rangle$
$(b^0 r^3 + r^0 b^3 - b^2 r^1 + b^1 r^2)|q_3\rangle$

$\underbrace{\qquad\qquad}$

$b^0 \mathbf{r} + r^0 \mathbf{b} + \varepsilon_{ijk}\, b_j r_k |q_i\rangle = b^0 \mathbf{r} + r^0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$

c)

$d^0 = b^0 r^0 - \mathbb{b} \cdot \mathbb{r} = \mathbb{a} | y_0 \rangle \to$ P. real

$\mathbb{d} = r^0 \mathbb{b} + b^0 \mathbb{r} + \mathbb{b} \times \mathbb{r}$

$\to |r^0 \mathbb{b} + b^0 \mathbb{r} = S^{\alpha J} \delta^0_q / q_j \rangle$ Proponemos

$\to S^{0j} / q_j \rangle = (S^{0j} + S^{j0}) / q_j \rangle = r^0 b_j + b^0 r_j / q_j \rangle$

$\to r^0 \mathbb{b} + b^0 \mathbb{r}$ ▽

$A^{(jk)i} b_j r_k / q_i \rangle = \varepsilon^{ijk} b_j r_k / q_i \rangle$ Proponemos

$\to A^{(jk)i} = -A^{kij}$

$\to \varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$ $\Big\}$ $A^{(jk)i} = \varepsilon^{ijk}$ ▽

d)

$S^{ij} = r^0 b^1 + r^0 b^2 + r^0 b^3 + b^0 r^1 + b^0 r^2 + b^0 r^3$

$A^{(jk)i} \cdot b_j r_k = \varepsilon^{ijk} b_i r_j / q_k \rangle = (\mathbb{b} \times \mathbb{r}) +$

Vectores $a^i e_i = a$ $\quad a \to a^i - e_i = -a$

Pseudovectores

$de - a \times b \to (-a) \times (-b) = C$

$| d \rangle \to d^0 - d^i / q_i \rangle \to$ no es ni vector ni Pseudovector

e) $|q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0$ $\quad |q_3\rangle = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3$

$|q_1\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$

$|q_2\rangle = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$

$|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |q_0\rangle = 1$

$|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = i^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$

$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(-1) = -|q_0\rangle$

$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = |q_3\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = i^2\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3 = -|q_3\rangle$

$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = i^2\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 = |q_1\rangle$

$|q_3\rangle \odot |q_2\rangle = i^2\sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1 = -|q_1\rangle$ $\rightarrow$ Podemos inferir que habrán otras 8 ecuaciones

$(|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle) = (i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, \sigma_0)$ y $|b\rangle \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix} \Rightarrow x(\sigma_0) + b(i\sigma_1) + a(i\sigma_2) + y(i\sigma_3)$

g) $\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

1) $\langle a|a\rangle = |a\rangle^* \odot |a\rangle = a^0 - a^i|q_i\rangle \odot a^0 + a^i|q_i\rangle$

$= a^0 a^0 + (a^i - a^i|q_i\rangle) + a^0 a^i|q_i\rangle - a^0 a^i|q_i\rangle$

$= (a^0)^2 \rightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$

2) $\langle a|a\rangle = 0$ solo si $|a\rangle = 0$, esto es falso porque si $|a\rangle = 0 + a^i|q_i\rangle$ cumple que $\langle a|a\rangle = 0$ $\rightarrow$ No es buena definición de producto interno

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \overline{a|b}\rangle - |q_i\rangle \odot \langle \overline{a|b}\rangle \odot |q_i\rangle\right]$

x) $\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}\left[a^{0\,2} - |q_i\rangle \odot a^{0\,2} \odot |q_i\rangle\right]$

$\frac{1}{2}\left[|a|^2 - |q_i\rangle \odot (a^0)^2 |q_i\rangle\right] = \frac{1}{2}\left[a^{0\,4}|q_i\rangle + (a^1)^2\right]$

$|f\rangle = f^0 + f|q_i\rangle$

$\rightarrow \langle a|a\rangle \geq 0$

x) si $|f\rangle = f^0 + f^1|q_i\rangle$ donde $f^0 \neq 0$

$\langle f|f\rangle = \frac{1}{2}(f^0)^2 \neq 0$

i) $n(|b\rangle) = \||a\rangle\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$n(|b\rangle) = \sqrt{|b\rangle^* |b\rangle} = \sqrt{|b^0|^2} = |b^0| \geq 0$

si $|b\rangle = b^0 + b^1|q_i\rangle$ con $b^0 = 0$ y $b^1|q_i\rangle \neq 0$

Se pueden encontrar infinitos vectores tal que su norma es 0 por lo que no actua como espacio vectorial normado

j) $|\overline{a}\rangle = \frac{|a\rangle^*}{\||a\rangle\|^2} = \frac{a^0|q_0\rangle + a^1|q_i\rangle}{(a^0)^2}$

$\rightarrow$ ¡ $|a\rangle \odot |\overline{a}\rangle = 1 = |q_0\rangle$

$(a^0|q_0\rangle + a^1|q_i\rangle) \odot \left(\frac{a^0}{(a^0)^2}|q_0\rangle - \frac{a^1}{(a^0)^2}|q_i\rangle\right)$

$|q_0\rangle|q_0\rangle - \frac{a^1}{(a^0)}|q_0\rangle|q_i\rangle + \frac{a^1 a^0}{(a^0)^2}|q_i\rangle|q_0\rangle - \frac{(a^1)^2}{(a^0)^2}|q_i\rangle|q_i\rangle$

$= 1 - \frac{a^1}{a^0}|q_i\rangle + \frac{a_i}{a^0}|q_i\rangle + \frac{(a^1)^2}{(a^0)^2}$

$= \left(\frac{a^1}{a^0}\right)^2 + 1 \neq 1$

k) Se puede ver que si cumple con las propiedades de un grupo, por ejemplo comprobando su elemento inverso que es:

$(-|q_i\rangle)$, esto porque $|q_i\rangle \odot (-|q_i\rangle) = (-(-1)) = 1$

l) $|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle \rightarrow |v'\rangle = (|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle) \cdot |v\rangle$

$= \left(\left(\frac{a^i}{a^0}\right)^2 + 1 \right) \odot |v\rangle = \underbrace{\left(\left(\frac{a^i}{a^0}\right)^2 + 1 \right)}_{\alpha} |v\rangle = |v'\rangle$

$n(|v'\rangle) = 0 \rightarrow$ No tiene parte real

$n(\alpha |v_i\rangle) = 0 \rightarrow$ No tiene parte real

$\Rightarrow$ Se considera la norma

5)

a) Verifiquemos si $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ son L.I

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a + d = 0 \quad b - ci = 0$

$a - d = 0 \quad b + ci = 0$

$\rightarrow a = -d$ y $a = d$ solo si $d = 0$

$\rightarrow b = ci$ y $b = -ci$ solo si $c = 0$

Por lo que $a = b = c = d = 0$ y es L.I

Usamos la matriz de Pauli para tratar de obtener la matriz hermetica

$$A = \begin{bmatrix} a+d & b+ci \\ b-ci & a-d \end{bmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$= a\sigma_0 + d\sigma_3 + b\sigma_1 + c\sigma_2$

Scribe

b) $\langle a|b\rangle \Rightarrow T_r(A^\dagger B)$

$\langle \sigma_0|\sigma_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_0|\sigma_2\rangle = tr(\sigma_0\sigma_2) = tr(\sigma_2) = 0$

$\langle \sigma_0|\sigma_3\rangle = tr(\sigma_0\sigma_3) = tr(\sigma_3) = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = tr\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = tr\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = 0$

$\langle \sigma_2|\sigma_3\rangle = tr\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} = 0$ Son ortogonales

c.) Podemos construir un subespacio con las matrices reales $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_0\}$ notando que son base para matrices 2×2 de la forma

$a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_3 = \begin{pmatrix}a+d & b\\ b & a-d\end{pmatrix}$

Tambien podemos construir subespacios de matrices imaginarias puras con $\{\sigma_2\}$ de la forma

$i\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & ci\\ -ci & 0\end{pmatrix}$