1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & K & 8 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & K+3 & 14 \end{array}\right] \times(-2)$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & K-7 & 0 \end{array}\right]$

40 %

a) $\forall_K$ o sist. é possível, mas se $K=7$ ficamos c/ $0=0$ — nunca fica impossível. | 30%

b) Se $K=4$, então $z=0$ e portanto $2y=7 \Leftrightarrow y=\frac{7}{2}$ e $x = 6-2y = 6-7 = -1$. Logo o conjunto solução, singular, é $\left\{\left(-1, \frac{7}{2}, 0\right)\right\}$. | 30 %

2) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$2 \times (10\% + 5\% + 10\%) = $
$= 50\%$

a) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1-z-w \\ 2 & 6 & 2-z-3w \end{array}\right]$ $\Big\}\ 10\%$

e o denominador $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3.2 = 0$. Logo, $\Big\}\ 5\%$

(o sistema será impossível ou indeterminado:), não é possível obter AMBAS as variáveis x e y. $\Big\}\ 10\%$

Para x, z, resolvemos:

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-3y-w \\ 2 & 1 & 2-6y-3w \end{array}\right]$ e o denominador é

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$ — o sistema é, pela regra de Cramer, (in)determinado para x, z como função de y e w (assumidos parâmetros). $\Big\}\ 15\%$

$2 \times (10\% + 15\%)$
$= 50\%$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-3y-w & 1 \\ 2-6y-3w & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -\big(1-3y-w-(2-6y-3w)\big) =$

$= 1-3y-2w;$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3y-w \\ 2 & 2-6y-3w \end{vmatrix}}{-1} = -\cancel{2}+\cancel{6y}+3w+\cancel{2}-\cancel{6y}-2w =$

$= w.$

3) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 24 \\ 1 & 3 & 16 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

50%

+

50%

e, como o determinante se obtém calculando somas algébricas de produtos de nºs inteiros, o determinante é um nº inteiro — multiplicado por oito —, logo obtemos um múltiplo de 8.

4) Em $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \times(-1) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+1 & 2x+1 \\ x^2 & x^2+2x+1 & 4x^2+4x+1 \end{vmatrix} = 0 \iff \end{array}$$

100%

... (?)

("3 × 30% +

\+ 40%")

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \times(-1) & \end{array} \\ \iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & x+1 \\ x^2 & 2x+1 & 3x^2+4x+1 \end{vmatrix} = 0 \iff \end{array}$$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & x \\ x^2 & 2x+1 & 3x^2+2x \end{vmatrix} = 0 \iff \text{(por Sarrus)}$$

$$\iff 0 = 3x^2+2x - x(2x+1) \iff x\left[3x+2-2x-1\right] = 0 \iff$$

$$\iff x = 0 \lor x = -1.$$

a. Klvet:

$$\begin{array}{c} \times(-x^2) \quad \times(-x) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+1 & 2x+1 \\ x^2 & (x+1)^2 & (2x+1)^2 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\times(-(2x+1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & \underbrace{(x+1)^2 - x^2}_{\substack{=(x+1-x)\cdot \\ \cdot(x+1+x) \\ = 2x+1}} & \underbrace{(2x+1)^2 - x^2}_{\substack{=(2x+1-x)\cdot \\ \cdot(2x+1+x) \\ =(x+1)\cdot(3x+1)}} \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \\ 0 & 0 & (x+1)\left[3x+\cancel{1}-2x-\cancel{1}\right] \end{vmatrix} = 0 \iff$$

(par Sarrus ou ...)

$$\iff (x+1)x = 0 \iff x = -1 \lor x = 0.$$

$4 \times (15\% + 10\%)$ a de ⊙ 15% = 'equacionar e resolver'
⊙ 10% = 'discussão'.

5) $\beta \in \mathbb{R}$

a) Verdadeira porque fixado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

o sistema $(a,b,c) = x(1,1,1) + y(0,1,1) \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-1)} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-b \end{array}\right]$$

é impossível sempre que $c \neq b$: existem vetores de $\mathbb{R}^3$ que se não podem escrever como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

→ N.B. pelo menos os meus alunos não estão ainda preparados para usar a 'dimensão'!

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-1)} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \beta & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{array}\right]$$ e portanto

por NENHUM $\beta \in \mathbb{R}$, se $c \neq b$, o vetor (a,b,c) se pode escrever como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$: a alínea é falsa.

c) $\exists \beta \in \mathbb{R}: \quad \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff$

$\iff (\beta, 2, 2) = x(1,1,1) + y(0,1,1) \iff$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \times(-1) \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \times(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

portanto, $\forall_{\beta \in \mathbb{R}}$, o sistema é possível: a afirmação é verdadeira.

d) $\underbrace{x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{t} = \vec{0}}$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $x=y=z=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

é sempre possível e será determinado — solução única '$x=y=z=0$' —, se $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Ora $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times(-1) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Laplace

Resposta: a afirmação é verdadeira.