2^a Frequência/Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Departamento de Matemática, Universidade de Évora

2^a Frequência: Resolva os Grupos III e IV (em folhas de teste separadas) - 1h30+30m de tolerância

Exame: Resolva os Grupos I, II e III (em folhas de teste separadas) - 2h30+30m de tolerância

Grupo I

1. Para os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & & = & c \\ x & +3y & +z & +aw & = & 0 \\ 2x & +6y & +bz & +3w & = & -c \end{cases}$$

   a) Para $c = 0$, este sistema de equações pode ser impossível? E possível e determinado? Justifique as afirmações convenientemente.

   b) Para $a = b = c = 1$, determine o conjunto solução do sistema de equações, apresentando todos os cálculos.

2. Para A, B e C matrizes quadradas arbitrárias da mesma dimensão, com $C \neq 0$, considere a afirmação

$$AC = BC \Rightarrow A = B.$$

   Demonstre-a, se for verdadeira, ou dê um exemplo de três matrizes A, B e C que não verifiquem a afirmação.

3. Considere a matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $|D|$ e a característica da matriz D.

Grupo II

4. Considere a operação "Δ", definida por

$$\Delta : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y)\, \Delta\, (z, w) = (x + z, yw).$$

   "Δ" é associativa? Justifique.

5. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$, se existirem, são os vectores

$$x - x^2 - x^3, -1 - 2x + kx^2 + x^3,\ -1 + x^2,\ 2 + x - x^2 + x^3$$

   linearmente dependentes no espaço vectorial $R_3[x]$? Justifique.

6. Sejam $v = (1, 0, 3)$, $t = (0, 1, 1)$ e $w = (1, -1, 2)$. Considere as afirmações seguintes e diga quais são falsas e quais são verdadeiras. Justifique cada uma das respostas.

   a) Os vectores v, w não geram $\mathbb{R}^3$.

   c) O vector v pode ser obtido como combinação linear dos vectores t e w.

   c) Os vectores v, t, w formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Grupo III

7. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ os subespaços $F = \langle (1,-1,-2,1), (0,1,-2,0) \rangle$ e $G = \{(x,y,z,w) \ : \ x+2y-z-w=0, y-z-w=0\}$.

   a) Determine uma base para G.

   b) Determine uma base para $F+G$ e $\dim(F \cap G)$.

8. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(x,y,z) = (x+y-z, x+3y+z).$$

   a) Mostre que φ é linear.

   b) Determine $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$.

   c) φ é um monomorfismo? φ é um epimorfismo? Justifique ambas as respostas.

9. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

   em relação à base $(1,2,0), (0,1,0), (0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $(1,1), (-1,1)$ de $\mathbb{R}^2$.

   Determine a matriz da aplicação linear φ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

10. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

    a) Determine os valores próprios de B.

    b) Determine os seus vectores próprios.

    c) Diga se B é ou não diagonalizável. Justifique.

11. Verifique se obtém um produto interno em $\mathbb{R}^3$ pondo

$$(x_1,x_2,x_3)|(y_1,y_2,y_3) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

Grupo IV

12. Considere a aplicação bilinear $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada pela seguinte matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

    (a) Determine a forma quadrática associada a f.

    (b) Classifique, justificando, f quanto à positividade (definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa ou indefinida).