1^a Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica I
Departamento de Matemática, Universidade de Évora
9 de Novembro de 2018

Justifique convenientemente todas as respostas, apresentando todos os cálculos que efetuar
Resolva os Grupos I, II e III em folhas de teste separadas
2h00+30m de tolerância

Grupo I

1. Considere os seguintes sistemas de equações lineares:

   a)
$$\begin{cases} 4x - y &= z + a \\ x - z &= 0 \\ bx &= 1 + y \end{cases}$$

   Discuta o sistema em função dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$.

   b)
$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2x - 4y + 3z + w = -1 \\ x + 2y - 3z + w = 2. \end{cases}$$

   Determine a solução do sistema.

2. Considere a equação matricial

$$(CX^T - I_2)B^{-1} = 2A,$$

   onde A, B e C são matrizes invertíveis de dimensão adequada.

   a) Resolva a equação matricial acima, i.e., determine a matriz X.

   b) Para as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \; C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

   obtenha os coeficientes da matriz X obtida na alínea anterior.

Grupo II

3. Seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcule A^{-1}.

4. Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Considere a operação "$\odot$", definida por

$$\odot: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \odot (z, w) = (-xz, y^2 + w^2).$$

"$\odot$" é comutativa? Justifique.

6. Construa, no espaço vetorial real $R[x]$, um sistema de vetores equivalente a

$$1 + x + x^2, x - x^2, 2 - x + x^2$$

que inclua o vetor $2 + x - x^2$.

Grupo III

7. Seja

$$E = \langle (1, 0, -1, 2), (1, -1, 4, 0), (2, -1, 3, 2), (0, 1, -5, 2) \rangle.$$

Determine uma base para E. Qual a dimensão de E?

8. Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, sejam $u = (1, 3, -1)$, $v = (1, 1, 1)$, $t = (2, 0, 1)$ e $\mathrm{w} = (1, -1, \beta)$. Considere as afirmações seguintes e diga quais são falsas e quais são verdadeiras. Justifique cada uma das respostas, efectuando os cálculos necessários.

   a) Os vectores u, v, t e w são linearmente independentes.

   b) O vector w é combinação linear de u e v, para algum valor de β.

   c) Os vectores $u, v,$ e t são linearmente independentes.

   d) Os vectores $u, v,$ e t formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

9. a) Considere a afirmação seguinte: "Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$ quaisquer. Então

   $$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)."$$

   Demonstre-a, se for verdadeira, ou dê um contra-exemplo, no caso de ser falsa.

   b) Mostre que se A é uma matriz do tipo $n \times n$ com $A^2 = A$, então pelo menos uma das matrizes A ou $A - I_n$ não é invertível.