Álgebra Linear

Teoria, Exercícios resolvidos e Exercícios propostos com soluções

Os autores deste livro são professores universitários com doutoramento em Matemática, especialidade de Álgebra.

Tendo uma experiência de leccionação de Álgebra Linear a milhares de alunos de diversas licenciaturas, este livro constitui o fruto dessa experiência.

Neste livro a Álgebra Linear é apresentada, ao nível de um primeiro curso, num texto autocontido, com início pelo estudo das Matrizes, tema que a experiência de leccionação dos autores ditou ser de compreensão privilegiada. Consequentemente os restantes capítulos têm uma abordagem que explora esse tema.

Este livro visa conciliar rigor científico com uma apresentação da matéria de uma forma motivadora, ilustrada por mais de 150 exemplos/exercícios resolvidos estrategicamente intercalados ao longo do texto e por mais de 1000 exercícios propostos com as respectivas soluções.

ISBN 978-972-592-239-2

9 789725 922392

ESCOLAR EDITORA

Álgebra Linear

Teoria, Exercícios resolvidos e Exercícios propostos com soluções

Isabel Cabral Cecília Perdigão Carlos Saiago

Isabel Cabral Cecília Perdigão Carlos Saiago

Álgebra Linear

Teoria, Exercícios resolvidos e Exercícios propostos com soluções

ESCOLAR EDITORA

Prefácio

A Álgebra Linear constitui uma matéria fundamental para a compreensão dos conteúdos de disciplinas diversas, incluídas em primeiros e segundos ciclos de licenciaturas em Engenharia, Economia, Gestão, Física e Matemática, entre outras.

Neste livro é apresentada, ao nível de um primeiro curso, num texto auto contido que inclui as bases teóricas necessárias para a completa compreensão do tema em estudo.

Indo ao encontro do que consideramos ser pedagogicamente aconselhável, conceitos e resultados são apresentados, sempre que possível, precedidos de uma motivação e, visando a sua consolidação, surgem estrategicamente intercalados ao longo do texto mais de 150 exemplos/exercícios resolvidos. Estes exemplos/exercícios resolvidos têm a função adicional de esclarecer os casos particulares em que, pela nossa experiência de leccionação, são mais frequentes as dúvidas e os erros.

Essa mesma experiência proporcionou-nos a percepção dos diversos graus de dificuldade na compreensão, por parte dos alunos, dos vários assuntos e ditou que este curso tivesse o seu início pelo capítulo das Matrizes, tema de compreensão privilegiada. Consequentemente os restantes capítulos têm também uma abordagem que, na medida do possível, explora esse tema.

Conforme consta no Índice, o texto está dividido em seis capítulos que, por sua vez, estão subdivididos em secções.

Para facilitar a consulta, nomeadamente quando há referência a conceitos ou resultados anteriormente apresentados, atenda-se a que definições, proposições, teoremas, corolários e exemplos/exercícios resolvidos têm uma numeração conjunta crescente.

Os exercícios propostos são em número superior a 1500, contabilizando as alíneas. Os que constituem um primeiro controlo sobre a aprendizagem surgem ao longo do texto e os restantes no final de cada capítulo, com o título de exercícios suplementares.

Os exercícios suplementares encontram-se subdivididos pelas secções correspondentes dos capítulos e, dentro de cada secção, procuram respeitar a ordem de apresentação da matéria no texto.

Pretendemos que este livro de Álgebra Linear seja de leitura agradável, presente a matéria com rigor científico e, não podendo explorar as numerosas plicações do tema, proporcione ao leitor as bases necessárias para identificar outros contextos os diversos temas aqui abordados bem como para efectuar, utonomamente e sem dificuldade, a transição para as aplicações que lhe são articularmente interessantes.

Críticas, sugestões e todas as observações que visem o melhoramento deste exto serão bem-vindas e podem ser enviadas para o endereço `ice@fct.unl.pt`.

Agradecemos a todos os que, das mais diversas formas, proporcionaram a ealização deste livro. Em particular, agradecemos aos professores que contribuíram para a nossa formação, aos alunos a quem ensinámos este assunto e os nossos colegas de trabalho.

I. Cabral, C. Perdigão, C. Saiago
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Setembro 2008

Índice

1 Matrizes 1
1.1 Generalidades . . . 1
1.2 Operações com matrizes . . . 6
1.3 Inversa de uma matriz quadrada . . . 21
1.4 Transposição e conjugação de matrizes . . . 27
1.5 Transformações e matrizes elementares . . . 34
1.6 Formas de escada e característica de uma matriz . . . 44
1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis . . . 57
Exercícios suplementares . . . 65
Soluções dos exercícios . . . 82

2 Sistemas de Equações Lineares 87
Exercícios suplementares . . . 108
Soluções dos exercícios . . . 115

3 Determinantes 117
3.1 Uma definição por recorrência . . . 117
3.2 Algumas propriedades do determinante . . . 125
3.3 Transformações elementares e determinantes . . . 132
3.4 Determinante do produto de matrizes . . . 140
3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta . . . 146
3.6 Regra de Cramer . . . 150
3.7 Outras formas de definir determinante . . . 152
Exercícios suplementares . . . 158
Soluções dos exercícios . . . 169

4 Espaços Vectoriais 171
4.1 Definição, exemplos e propriedades . . . 171
4.2 Subespaços vectoriais . . . 182
4.3 Dependência e independência linear . . . 208
4.4 Bases e dimensão . . . 216
4.5 O Teorema das Dimensões . . . 233
4.6 Matrizes e espaços vectoriais . . . 243

4.7 Mais sobre a característica de uma matriz 253
Exercícios suplementares 261
Soluções dos exercícios 277

5 Aplicações Lineares 281
5.1 Definição, exemplos e propriedades 281
5.2 Operações com aplicações 288
5.3 Imagem e núcleo 292
5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos 311
5.5 Matriz de uma aplicação linear 320
Exercícios suplementares 337
Soluções dos exercícios 353

6 Valores e Vectores Próprios 357
6.1 Definição, exemplos e propriedades 357
6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis 383
Exercícios suplementares 393
Soluções dos exercícios 403

Apêndice 405
Notações envolvendo conjuntos 405
Algumas definições e resultados em $\mathbb{C}$ 407
Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ 412
Produto cartesiano de conjuntos 414
Algumas estruturas algébricas 417
Soluções dos exercícios 423

Bibliografia 425

Notação 427

Índice Remissivo 431

CAPÍTULO 1

Matrizes

1.1 Generalidades

Ao longo do texto consideramos que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e aos seus elementos (reais ou complexos) chamamos ***escalares***.

Consideramos ainda que é conhecida a noção de produto cartesiano de dois conjuntos tal como a de n-uplo de elementos de $\mathbb{K}$ (elemento de $\mathbb{K}^n$), referidas em Apêndice.

Definição 1.1 Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se ***matriz*** de tipo $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, a qualquer aplicação de $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ em $\mathbb{K}$.

Como cada uma dessas aplicações fica perfeitamente determinada se conhecermos o elemento, único, de $\mathbb{K}$ correspondente a cada par (i, j), com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, é usual indicar tais imagens num quadro com m filas horizontais, a que chamamos ***linhas***, e n filas verticais, a que chamamos ***colunas***, em que a imagem do par (i, j) é o elemento de $\mathbb{K}$ que se encontra na linha i e na coluna j. Assim, surge frequentemente, a seguinte definição de matriz.

Definição 1.2 Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se ***matriz*** do tipo $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, a qualquer quadro que se obtenha dispondo mn elementos de $\mathbb{K}$ segundo m linhas e n colunas, isto é, a qualquer quadro da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \text{com } A_{ij} \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Os escalares A_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, dizem-se os ***elementos*** ou ***entradas*** da matriz A.

Para cada i, $i = 1, \ldots, m$, e para cada j, $j = 1, \ldots, n$, dizemos que A_{ij} é o elemento ou entrada (i, j) de A.

Chamamos ***linha*** i de A, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, ao elemento de $\mathbb{K}^n$, isto é, ao n-uplo $(A_{i1}, \ldots, A_{in})$. Chamamos ***coluna*** j de A, com $j \in \{1, \ldots, n\}$, ao elemento de $\mathbb{K}^m$, isto é, ao m-uplo $(A_{1j}, \ldots, A_{mj})$.

Notação 1.3 • A matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ da definição pode ser apresentada abreviadamente na forma $A = [A_{ij}]_{m\times n}$, ou, simplesmente, $A = [A_{ij}]$ se o tipo da matriz for óbvio pelo contexto ou não for importante para a questão em estudo.

- O conjunto das matrizes do tipo $m\times n$, sobre $\mathbb{K}$, será representado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se $m = n$ também se utiliza a notação $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Em geral, denotaremos as matrizes por letras maiúsculas do alfabeto latino e as respectivas entradas pela mesma letra, maiúscula ou minúscula, com índices indicando a respectiva posição na matriz. Sempre que houver ambiguidade utiliza-se uma vírgula entre o índice correspondente à linha e o índice correspondente à coluna. Assim, o elemento da posição $(2, 13)$ da matriz B será denotado por $B_{2,13}$ ou por $b_{2,13}$.

Exemplo 1.4

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 2+3i \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tem-se $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$, a linha 2 de A é $(-1, 0, 3)$ e a coluna 3 de A é $(2 + 3i, 3)$.

A definição de igualdade de matrizes surge de forma natural.

Definição 1.5 Dizemos que as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são ***iguais***, e escrevemos $A = B$, se $A_{ij} = B_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Note que só podem ser iguais matrizes que sejam do mesmo tipo (isto é, com o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas) e serão iguais se, além disso, os elementos que ocupam a mesma posição em ambas as matrizes, a que chamaremos elementos ***homólogos***, forem iguais.

Exemplo 1.6

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & i \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & i \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

são iguais se, e só se, $a = 3$ e $b = -i$.

Vejamos alguma terminologia e notações básicas envolvendo matrizes.

Definição 1.7 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
A diz-se uma ***matriz linha*** se $m = 1$.
A diz-se uma ***matriz coluna*** se $n = 1$.
A diz-se uma ***matriz quadrada*** se $m = n$. Neste caso diz-se que A é quadrada de ***ordem*** n ou, simplesmente, que A é uma matriz de ordem n.

Exemplo 1.8

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha.

$C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha e uma matriz coluna.

$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz (quadrada) de ordem 2.

Definição 1.9 Seja $A = [A_{ij}]$ uma matriz de ordem n, isto é, uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aos elementos $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$ chamamos os ***elementos diagonais*** de A.

Chamamos ***diagonal principal*** de A ao n-uplo $(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn})$ e ***diagonal secundária*** de A ao n-uplo $(A_{1n}, A_{2,n-1}, \ldots, A_{n1})$.

Dizemos que A é ***triangular superior*** se

$$A_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i > j,$$

(isto é, se $i > j$ implica $A_{ij} = 0$) ou equivalentemente, se A tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é ***triangular inferior*** se

$$A_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i < j,$$

(isto é, se $i < j$ implica $A_{ij} = 0$) ou equivalentemente, se A tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é ***triangular*** se A é triangular superior ou triangular inferior.

Dizemos que A é uma ***matriz diagonal*** se

$$A_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j,$$

(isto é, se $i \neq j$ implica $A_{ij} = 0$) ou equivalentemente, se A tem a forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

que pode ser representada abreviadamente por $\operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn})$.

Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma ***matriz escalar***. Um matriz escalar é, pois, uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}.$$

À matriz escalar de ordem n cujos elementos diagonais são todos iguais a 1 chamamos ***matriz identidade*** de ordem n e representamos por I_n. Notemos que $I_n = [\delta_{ij}]$, sendo δ_{ij} o símbolo de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = j \\ 0\,, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Exemplo 1.10

A matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ é triangular superior, a diagonal principal de A é $(3, -2, 4)$ e a diagonal secundária é $(1, -2, 0)$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal mas não é uma matriz escalar.

As matrizes $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes escalares.

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonal se, e só se, é simultaneamente triangular superior e triangular inferior.

Exercício 1.1 Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique:

(a) O tipo de cada matriz.
(b) Quais das matrizes são quadradas.
(c) Quais das matrizes são triangulares inferiores.
(d) Quais das matrizes são diagonais.
(e) Quais das matrizes são escalares.

Exercício 1.2 Indique a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que:

(a) $A_{ij} = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} o símbolo de Kronecker.

(b) $A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i < j \end{cases}$.

(c) $A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j \text{ é par} \\ -1, & \text{se } i + j \text{ é ímpar} \end{cases}$.

1.2 Operações com matrizes

Vejamos algumas operações envolvendo matrizes.

Comecemos pela ***operação de adição*** em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, que faz corresponder a cada par (A, B) de matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma, e uma só, matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida como se segue.

Definição 1.11 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***matriz soma da*** matriz A com a matriz B, e denotamos por $A + B$, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i, j) é $A_{ij} + B_{ij}$, isto é,

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 1.12

Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-3) & -3 + 1 & 0 + 4 \\ 0 + 2 & 5 + 0 & 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vejamos que a adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem propriedades idênticas às da adição em $\mathbb{K}$, que podem ser recordadas no Apêndice.

Proposição 1.13 *Tem-se*

1. $\forall_{A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + B = B + A$
(comutatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).

2. $\forall_{A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$
(associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).

3. $\exists_{U\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + U = A = U + A$
(existência de elemento neutro da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).

4. $\forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad \exists_{V\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + V = U = V + A$
(existência de oposto, para a adição, de qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$).

Demonstração:

Demonstra-se cada igualdade mostrando que a matriz do primeiro membro (membro da esquerda) e a matriz do segundo membro (membro da direita) da igualdade são do mesmo tipo (isto é, têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas) e os seus elementos homólogos são iguais.

Demonstramos as propriedades 2, 3 e 4, deixando a 1 como exercício.

2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Note-se que

$$(A + B) + C \quad \text{e} \quad A + (B + C)$$

são ambas matrizes do tipo $m\times n$. De acordo com a definição de adição de matrizes, tem-se

$$\Big((A + B) + C\Big)_{ij} = (A + B)_{ij} + C_{ij} = (A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij}$$

e

$$\Big(A + (B + C)\Big)_{ij} = A_{ij} + (B + C)_{ij} = A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}).$$

Como A_{ij}, B_{ij} e C_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e em $\mathbb{K}$ a adição é associativa, concluímos que os elementos homólogos

$$\Big((A + B) + C\Big)_{ij} \quad \text{e} \quad \Big(A + (B + C)\Big)_{ij}$$

são iguais, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Logo

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

3. Pretende-se demonstrar que

$$\exists_{U \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad \forall_{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad A + U = A = U + A,$$

ou equivalentemente, como todas as matrizes são de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e a adição é comutativa, que existe $U = [U_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A + U)_{ij} = A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

A igualdade anterior é equivalente a cada uma das seguintes

$$\begin{aligned} A_{ij} + U_{ij} &= A_{ij} & ,i &= 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n \\ U_{ij} &= -A_{ij} + A_{ij} & ,i &= 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n \\ U_{ij} &= 0 & ,i &= 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Assim $U = [U_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com

$$U_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

verifica a propriedade 3.

4. Demonstre-se que

$$\forall_{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad \exists_{V \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad A + V = 0_{m\times n} = V + A.$$

Atendendo às observações feitas em 3 basta demonstrar que existe $V = [V_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A + V)_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Tem-se a equivalência da igualdade anterior com cada uma das seguintes:

$$\begin{aligned} A_{ij} + V_{ij} &= 0 & ,i &= 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \\ V_{ij} &= -A_{ij} & ,i &= 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Logo $V = [V_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com

$$V_{ij} = -A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

verifica a propriedade 4.

OBSERVAÇÃO:

- Atendendo à comutatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dizemos então que $A + B$ é a "soma das matrizes A e B".
- Atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ podemos escrever, sem ambiguidade, $A + B + C$.
- Tendo em atenção a demonstração de 3 da proposição anterior, o elemento neutro da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é único e é a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas. Designamos tal matriz por ***matriz nula*** de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e será representada por $0_{m\times n}$ ou simplesmente por 0, se não houver ambiguidade.
- Também de acordo com a demonstração de 4 da proposição anterior, para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz V aí referida é única. Tal matriz será representado por $-A$ tendo-se

$$(-A)_{ij} = -A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

- Se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ representamos por $A - B$ a matriz $A + (-B)$.

Vejamos agora a ***operação de multiplicação de um escalar por uma matriz***. Trata-se de uma operação que associa a cada elemento de $\mathbb{K}$ e a cada elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ um, e um só, elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definido da seguinte forma.

Definição 1.14 Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***produto do escalar α pela matriz*** A, e denotamos por αA, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i, j) é αA_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Atendendo à definição anterior tem-se trivialmente

$$0A = 0_{m\times n},$$

para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e

$$\alpha 0_{m\times n} = 0_{m\times n},$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$. Vejamos outras propriedades da operação de multiplicação de um escalar por uma matriz.

Proposição 1.15 *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ *e, em particular,* $(-1)A = -A$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

Demonstração:

Demonstremos a propriedade 2.
Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Como $\alpha A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\beta A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ concluímos que $\alpha A + \beta A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal como a matriz $(\alpha+\beta)A$. Verifiquemos que os elementos homólogos das matrizes $(\alpha+\beta)A$ e $\alpha A + \beta A$ são iguais.

Tem-se

$$\Big((\alpha+\beta)A\Big)_{ij} = (\alpha+\beta)A_{ij}$$

e

$$(\alpha A + \beta A)_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij},$$

$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$.

Como, em $\mathbb{K}$, a multiplicação é distributiva em relação à adição, sabemos que $(\alpha+\beta)A_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij}$. Logo

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$$

A demonstração das restantes propriedades fica como exercício. Notemos que demonstrar a igualdade

$$\alpha(-A) = -(\alpha A)$$

da propriedade 5 é equivalente a demonstrar que

$$\alpha A + \alpha(-A) = 0_{m\times n}.$$

■

Exercício 1.3 Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $A + B + C$.
(b) $2A + 2C + 2B$.
(c) $A - B$.
(d) $2A - 3(B + C)$.

Exercício 1.4 Dadas as matrizes de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine, se possível, uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que

$$X + A = 2(X - B).$$

Vejamos agora como se define a multiplicação de matrizes. A primeira ideia que provavelmente nos ocorre é considerar que só se pode multiplicar uma matriz A por uma matriz B se ambas pertencem a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e a matriz resultante será a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que se obtém multiplicando os elementos homólogos de A e de B. Tal multiplicação designa-se por multiplicação de Hadamard e a matriz resultante, designada por ***produto de Hadamard*** de A por B, é frequentemente denotada por $A \circ B$. Por exemplo, o produto de Hadamard das matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A \circ B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$. (Veja as propriedades desta operação.)

No entanto, a maioria da documentação de Álgebra Linear quando refere a operação de "multiplicação de matrizes" designa uma operação mais complicada de efectuar que a multiplicação de Hadamard. A razão de ser de tal definição só será compreendida mais tarde, no capítulo das Aplicações Lineares.

A operação de ***multiplicação de matrizes*** faz corresponder a cada par (A, B) de matrizes, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, uma, e uma só, matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ definida como se segue.

Definição 1.16 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se ***matriz produto*** da matriz A pela matriz B, e representa-se por AB, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj},$$

$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p.$

Como se pode ver pela definição, o produto AB, isto é, o produto da natriz A pela matriz B (por esta ordem), apenas está definido se o número le colunas de A é igual ao número de linhas de B. Neste caso, o número de inhas de AB é igual ao número de linhas de A e o número de colunas de AB : igual ao número de colunas de B. O elemento (i, j) de AB obtém-se a partir los elementos da linha i de A e dos elementos da coluna j de B, conforme é ndicado na definição. Esquematicamente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.17

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

Note que, neste caso, o produto BA não está definido, visto o número de colunas de B ser diferente do número de linhas de A.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 9\times 0 & 9\times 1 & 9\times 2 \\ -8\times 0 & -8\times 1 & -8\times 2 \\ -1\times 0 & -1\times 1 & -1\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 18 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.5 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

Determine, se possível, AB e BA.

Exercício 1.6 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível, o produto:

(a) AB;
(b) BA;
(c) CD;
(d) DC.

Exercício 1.7 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Mostre que:

(a) $AB \neq BA$;
(b) $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
(c) $BA = CA$ e $A \neq 0$ mas $B \neq C$.

Exercício 1.8 Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Mostre que:

(a) $DD' = D'D$ é uma matriz diagonal.
(b) $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 1.9 Justifique as afirmações:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem a linha i nula então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a linha i nula.
(b) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem a coluna k nula então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a coluna k nula.
(c) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem as linhas i e j iguais, com $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $i \neq j$, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as linhas i e j iguais.
(d) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem as colunas k e l iguais, com $k, l \in \{1, \ldots, p\}$ e $k \neq l$, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as colunas k e l iguais.

Tenhamos em atenção agora o seguinte exemplo:

Exemplo 1.18

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que, neste caso, se tem

(a) $AB \neq BA$;

(b) $AB = 0$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;

(c) $A \neq 0$ e $AB = AC$, com $B \neq C$.

Verificamos através do exemplo anterior que algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes.

Proposição 1.19 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam B, C matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$
(associatividade da multiplicação).

2. $A(B+C) = AB + AC$
(distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição),
$(B+C)A = BA + CA$
(distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição).

3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{K}$.

4. $AI_n = A = I_m A$.

5. *A multiplicação de matrizes não é comutativa.*

6. *Existem matrizes A e B tais que $AB = 0$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.*

7. *Existem matrizes A, B, C tais que*

$$A \neq 0 \ \text{ e } \ AB = AC, \ \text{com } B \neq C,$$

$$BA = CA \ \text{ e } \ A \neq 0, \ \text{com } B \neq C.$$

Demonstração:

1. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Como $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ e $BC \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{K})$ então $(AB)C$ e $A(BC)$ são ambas matrizes de $\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})$. Da definição de produto de matrizes sabemos ainda que o elemento (i,j) da matriz $(AB)C$, $\left((AB)C\right)_{ij}$, é $\sum_{k=1}^{p}(AB)_{ik}C_{kj}$. Como $(AB)_{ik} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sk}$, concluímos que

$$\left((AB)C\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sk}\right)C_{kj}.$$

De modo análogo,

$$\left(A(BC)\right)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}\left(\sum_{k=1}^{p} B_{sk}C_{kj}\right).$$

Utilizando as propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição, associativa da multiplicação e da adição e comutativa da adição em $\mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left((AB)C\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sk}\right)C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n}\left(A_{is}B_{sk}\right)C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{n} A_{is}\left(B_{sk}C_{kj}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{is}\left(B_{sk}C_{kj}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n} A_{is}\left(\sum_{k=1}^{p} B_{sk}C_{kj}\right) = \left(A(BC)\right)_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo

$$(AB)C = A(BC).$$

2. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Vejamos que

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Como $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B+C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz

$$A(B+C) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}).$$

Dado que $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ e $AC \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ então

$$AB + AC \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K}).$$

Logo $A(B+C)$ e $AB+AC$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$.

Da definição de produto de matrizes sabemos que o elemento (i,j) da matriz $A(B+C)$ é

$$\Big(A(B+C)\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj}.$$

Como, pela definição de soma de matrizes, se tem

$$(B+C)_{kj} = B_{kj} + C_{kj},$$

concluímos que

$$\Big(A(B+C)\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}).$$

Por outro lado,

$$(AB+AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj}.$$

Utilizando, por esta ordem, as propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição, comutativa e associativa da adição em $\mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned}\Big(A(B+C)\Big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= (AB+AC)_{ij}.\end{aligned}$$

Logo

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Analogamente se demonstra que, para $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, se tem $(A+B)C = AC + BC$.

3. Demonstremos apenas a igualdade

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B,$$

uma vez que a demonstração da igualdade $\alpha(AB) = A(\alpha B)$ é análoga.

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Observe-se que as matrizes $\alpha(AB)$ e $(\alpha A)B$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ pelo que falta apenas demonstrar que

$$\Big(\alpha(AB)\Big)_{ij} = \Big((\alpha A)B\Big)_{ij}.$$

Pela definição de produto de um escalar por uma matriz e posteriormente pela forma como está definido o produto de matrizes, tem-se

$$\Big(\alpha(AB)\Big)_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Por outro lado, pela definição de produto de matrizes e posteriormente pela definição de produto de um escalar por uma matriz, tem-se

$$\Big((\alpha A)B\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha A_{ik}B_{kj}.$$

Como α, A_{ik} e B_{kj} são elementos de $\mathbb{K}$ e em $\mathbb{K}$ a multiplicação é distributiva em relação à adição, podemos obter, conforme pretendíamos,

$$\Big((\alpha A)B\Big)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

4. Demonstremos apenas a igualdade

$$AI_n = A,$$

uma vez que a demonstração da igualdade $I_m A = A$ é análoga.

Como A e AI_n pertencem ambas a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ teremos apenas de demonstrar que

$$A_{ij} = (AI_n)_{ij}.$$

Recordemos que $I_n = [\delta_{ij}]$, com $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Assim

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij}\delta_{jj} = A_{ij}1 = A_{ij},$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Observemos que as propriedades 5, 6 e 7 estão já demonstradas (veja-se o Exemplo 1.18 e (c) do Exercício 1.7).

∎

Como vimos, em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, a multiplicação de matrizes não é comutativa. Tal significa que existem $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AB \neq BA$. Contudo, podem existir matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AB = BA$. Neste caso, dizemos que A e B são ***comutáveis*** ou que A e B ***comutam***. É o que sucede, por exemplo, se considerarmos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ arbitrária e tomarmos $B = 0_{n\times n}$ ou $B = I_n$ ou $B = A$.

Exercício 1.10 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Designa-se por ***comutador*** ou ***produto de Lie*** de A por B (por esta ordem) a matriz representada habitualmente por $[A, B]$, definida da seguinte forma:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Mostre que, quaisquer que sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se tem:

(a) $[A, B] = [B, A]$ se, e só se, A e B comutam.
(b) $[A, B] = -[B, A]$.
(c) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$.
(d) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.

Exercício 1.11 Mostre que uma matriz comuta com $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se, e só se, é da forma $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.12 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1.$$

Justifique que $\alpha_1 A + \beta_1 B$ e $\alpha_2 A + \beta_2 B$ comutam se, e só se, A e B comutam.

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Pela forma como está definida a multiplicação de matrizes concluímos que a multiplicação de A por A, está definida se, e só se, $n = m$. Consideremos então a seguinte definição.

Definição 1.20 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***potência de expoente k de A***, com $k \in \mathbb{N}_0$, à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representamos por A^k, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição 1.21 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$. Tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.

2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

Demonstração:

Demonstremos a propriedade 1, por indução em l, ficando a demonstração da propriedade 2 como exercício.

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}_0$.

Se $l = 0$ então

$$A^k A^l = A^k A^0 = A^k I_n = A^k = A^{k+0} = A^{k+l}.$$

Hipótese de Indução: $A^k A^l = A^{k+l}$.

Demonstremos que $A^k A^{(l+1)} = A^{k+(l+1)}$.

Atendendo à definição de potência de uma matriz e a que a multiplicação de matrizes é associativa, temos

$$A^k A^{(l+1)} = A^k(A^l A) = (A^k A^l)A.$$

Pela hipótese de indução, $(A^k A^l)A = A^{k+l}A$ e, de acordo com a definição de potência de uma matriz, tem-se

$$A^{k+l}A = A^{(k+l)+1}.$$

Então
$$A^kA^{(l+1)} = A^{(k+l)+1} = A^{k+(l+1)},$$
uma vez que a adição em $\mathbb{K}$ é associativa.

Logo, para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}_0$, tem-se
$$A^kA^l = A^{k+l}.$$

∎

OBSERVAÇÃO: Notemos que

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ e, portanto, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ se, e só se, $AB = BA$.
- $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$ e, portanto, $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ se, e só se, $AB = BA$.
- $(AB)^2 = (AB)(AB)$ e, como a multiplicação em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ não é comutativa, podem existir matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que
$$(AB)^2 \neq A^2B^2.$$

  Por exemplo, para
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$
  tem-se
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  e
$$(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2B^2.$$

Exercício 1.13 Sem calcular $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ e $A^2 - B^2$, mostre que para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se tem:

(a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
(b) $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.
(c) $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$.

Sugestão: Atenda à observação anterior.

Exercício 1.14 Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal. Calcule D^k, com $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercício 1.15 Indique, se existirem, matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que:

(a) $A^2 = I_2$, com $A \neq I_2$ e $A \neq -I_2$.
(b) $A^2 = -I_2$.
(c) $A^2 = 0$, com $A \neq 0$.
(d) $AB = 0$, com $A \neq B$, e A e B não têm nenhum elemento nulo.

1.3 Inversa de uma matriz quadrada

Definição 1.22 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é ***invertível***, ou que A tem inversa, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que
$$AB = I_n = BA.$$

Teorema 1.23 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = I_n = BA$.*

Demonstração:
Suponhamos que $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são tais que
$$AB = I_n = BA \quad \text{e} \quad AC = I_n = CA$$
e demonstremos que $B = C$. Basta atender a que
$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$
∎

Definição 1.24 Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = I_n = BA$ designa-se por ***inversa*** de A e é denotada por A^{-1}.

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível tem-se, pois,
$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Exemplo 1.25

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, sendo a sua inversa a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. De facto
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

2. I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$ pois
$$I_nI_n = I_n = I_nI_n.$$

Exercício 1.16 Justifique que a matriz
$$V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
é invertível e que a sua inversa é $V_{-\alpha}$.

Exercício 1.17 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Atendendo ao Exercício 1.9, justifique que:

(a) Se A tem uma linha (respectivamente, coluna) nula então A não é invertível.
(b) Se A tem as linhas i e j iguais, com $i \neq j$, então A não é invertível.

Exercício 1.18 Indique:

(a) Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz diagonal seja invertível.
(b) D^{-1}, sendo $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal invertível.

Exercício 1.19 Dê exemplo de matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que:

(a) A e B são invertíveis e $A + B$ não é invertível.
(b) $A + B$ é invertível e nem A nem B são invertíveis.

Sugestão: Considere matrizes diagonais.

Exercício 1.20 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = I_n$. Mostre que A é invertível e indique a sua inversa.

Exercício 1.21 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + \alpha A + \beta I_n = 0$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Mostre que A é invertível e indique a sua inversa.

Notemos que pode suceder que para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ exista $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que
$$BA = I_n$$
e
$$AC \neq I_m, \quad \text{para qualquer } C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$
Por exemplo, se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$
então qualquer matriz da forma
$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & d \end{bmatrix}, \quad \text{com } a, d \in \mathbb{R},$$
verifica
$$BA = I_2.$$
No entanto, qualquer que seja $C = [C_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se
$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & * & * \\ * & * & * \\ C_{11} & * & * \end{bmatrix} \neq I_3,$$
pois em I_3 os elementos das posições $(1,1)$ e $(3,1)$ são distintos.

Na Secção 1.7 estudaremos outras formas para justificar que uma matriz quadrada é invertível, sem ser através da Definição 1.22.

O resultado seguinte estabelece então que, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, para demonstrarmos que a sua inversa é B temos de verificar apenas que um dos produtos AB ou BA é I_n.

Teorema 1.26 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.*

1. Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.

2. Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.

Demonstração:

1. Como A é invertível, A^{-1} existe (e é única). Da igualdade

$$AB = I_n$$

resulta, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por A^{-1},

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}I_n \\ (A^{-1}A)B &= A^{-1} \\ I_nB &= A^{-1} \\ B &= A^{-1}, \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar. Da definição de inversa resulta então que $A^{-1}A = BA = I_n$.

2. Tem uma demonstração inteiramente análoga à anterior, partindo da igualdade $BA = I_n$ e seguidamente multiplicando ambos os membros, à direita, por A^{-1}.

■

Exercício 1.22 Sejam $A, B, B' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se A é invertível e $AB = AB'$ então $B = B'$.
(b) Se A é invertível e $BA = B'A$ então $B = B'$.
(c) Se A não é invertível pode ter-se $AB = AB'$ com $B \neq B'$.

Exercício 1.23 Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível com

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Mostre que:

(a) Existe uma, e uma só, matriz B tal que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

e determine-a.

(b) Existe uma, e uma só, matriz C tal que $AC = A^2 + A$ e determine-a.

Proposição 1.27 *1. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. Se $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e

$$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}.$$

3. Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4. Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}.$$

5. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, A^k é invertível e

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k.$$

(Cada matriz da igualdade anterior é frequentemente representada por A^{-k}.)

Demonstração:

1. A demonstração é trivial se atendermos à definição de inversa.

2. Notemos que, como $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, existe α^{-1}. Tem-se então

$$(\alpha A)\left(\alpha^{-1}A^{-1}\right) = \left(\alpha\alpha^{-1}\right)\left(AA^{-1}\right) = 1I_n = I_n$$

e analogamente se concluiria que

$$\left(\alpha^{-1}A^{-1}\right)(\alpha A) = I_n.$$

3. Demonstremos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \quad \text{e} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n.$$

Como

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

concluímos o que pretendíamos.

4. A demonstração faz-se por indução em k e utilizando a propriedade 3. (Exercício.)

5. Basta considerar, em 4, $A_1 = \cdots = A_k$.

∎

Sabemos que, em $\mathbb{K}$, a multiplicação é comutativa, o que vimos não suceder em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, e que em $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ todo o elemento tem oposto para a multiplicação. No entanto, em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n\times n}\}$ tal não sucede, uma vez que pode ter-se

$$A \neq 0 \text{ e } A \text{ não é invertível.}$$

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o elemento da posição $(1,1)$ da matriz AB é 0 e, portanto, $AB \neq I_2$. O mesmo se passa com qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que tenha uma linha ou uma coluna nula ou que tenha as linhas (respectivamente, colunas) i e j iguais, com $i \neq j$ (atenda-se ao Exercício 1.17).

Exercício 1.24 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se A e AB são invertíveis então B é invertível.

(b) Se B e AB são invertíveis então A é invertível.

Exercício 1.25 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que A, B e $AB - BA$ são invertíveis. Conclua que $BA^{-1} - A^{-1}B$ é também invertível.

Sugestão: Multiplique $AB - BA$, à esquerda e à direita, por uma matriz invertível de forma a obter $BA^{-1} - A^{-1}B$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição 1.28 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Define-se a ***transposta*** de A, e representamos por $A^\top$, a matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$\left(A^\top\right)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

(O elemento da linha i e coluna j de $A^\top$ é igual ao elemento da linha j e coluna i de A. Notemos que tal corresponde a afirmar que a linha i de $A^\top$ é igual à coluna i de A, $i = 1, \ldots, n$, ou equivalentemente, que a coluna j de $A^\top$ é igual à linha j de A, $j = 1, \ldots, m$.)

A transposição de matrizes goza das propriedades seguidamente enunciadas.

Proposição 1.29 *Qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e quaisquer que sejam A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas estejam definidas, tem-se*

1. $(A^\top)^\top = A$.
2. $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. $(A^k)^\top = (A^\top)^k$, *para todo $k \in \mathbb{N}$.*
6. *Se A é invertível então $A^\top$ é invertível e*

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Demonstração:

As demonstrações das propriedades 1, 2 e 3 não oferecem dificuldade, sendo deixadas como exercício.

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Então $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Vejamos que os elementos homólogos de $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ são iguais, isto é, que

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij},\ i = 1,\ldots,p,\ j = 1,\ldots,m.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\left(B^\top A^\top\right)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \left(B^\top\right)_{ik} \left(A^\top\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = (AB)_{ji} = \left((AB)^\top\right)_{ij}.\end{aligned}$$

Logo

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

5. A demonstração faz-se por indução em k e utilizando a propriedade 4. (Exercício.)

6. Basta verificar que

$$A^\top \left(A^{-1}\right)^\top = I_n = \left(A^{-1}\right)^\top A^\top.$$

Utilizando a propriedade 4, tem-se

$$A^\top \left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^{-1}A\right)^\top = {I_n}^\top = I_n$$

e analogamente se demonstra que $\left(A^{-1}\right)^\top A^\top = I_n$.

■

Exemplo 1.30

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{C}),\quad D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}).$$

Tem-se

$$A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}),\quad B^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R}),$$

$$C^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{C}),\quad D^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

$$E^\top = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ e } F^\top = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}).$$

Exercício 1.26 Sejam $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Mostre que

$$[A(B+C)]^\top = B^\top A^\top + C^\top A^\top.$$

Exercício 1.27 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se ***ortogonal*** se

$$A^\top A = I_n = AA^\top$$

e ***hemi–ortogonal*** se

$$A^\top A = -I_n = AA^\top.$$

Mostre que:

(a) Se A e B são ortogonais então o mesmo sucede a AB e a BA.
(b) Se A é ortogonal (respectivamente, hemi–ortogonal) e $\alpha \in \mathbb{K}$ então αA é ortogonal (respectivamente, hemi–ortogonal) se, e só se, $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.
(c) Se A e B são hemi–ortogonais então AB e BA são ortogonais.

Exercício 1.28

(a) Mostre que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -9 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ a & -1 & -1 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Utilizando (a), indique a inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.31 Uma matriz A diz-se ***simétrica*** se $A = A^{\mathsf{T}}$ e ***hemi--simétrica*** se $A = -A^{\mathsf{T}}$.

Da definição anterior resulta que só podem ser simétricas ou hemi--simétricas matrizes que sejam quadradas. A Definição 1.31 é equivalente à seguinte:

Definição 1.32 $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se ***simétrica*** se

$$A_{ij} = A_{ji}, \ i, j = 1, \ldots, n,$$

e diz-se ***hemi–simétrica*** se

$$A_{ij} = -A_{ji}, \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Notemos que, de acordo com a definição anterior, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ simétrica pode ter uma diagonal principal com elementos arbitrários de $\mathbb{K}$ mas, como tem de verificar $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, em linguagem informal dizemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é simétrica se, e só se, há uma "simetria" dos elementos da matriz relativamente a um "eixo" que passa sobre os elementos da diagonal principal.

Numa matriz hemi–simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, como tem de se verificar, em particular,

$$A_{ii} = -A_{ii}, \ i = 1, \ldots, n,$$

então a diagonal principal tem de ser necessariamente toda nula.

Exemplo 1.33

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ é simétrica. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi–simétrica. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi–simétrica.

Exercício 1.29 Indique quais das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \ \text{e} \ E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) são simétricas;
(b) são hemi–simétricas.

Exercício 1.30 Mostre que, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$, se tem:

(a) Se A e B são simétricas então $A + B$ é simétrica.
(b) Se A e B são simétricas então AB é simétrica se, e só se, A e B comutam.
(c) Se A é simétrica então αA é simétrica.
(d) Se A é invertível e simétrica então A^{-1} é simétrica.

Exercício 1.31 Justifique as afirmações:

(a) A única matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que é simultaneamente simétrica e hemi–simétrica é a matriz nula.
(b) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é simétrica então o mesmo sucede a A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Até ao final desta secção consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 1.34 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se a ***conjugada*** de A, e representamos por $\overline{A}$, a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado. Tem-se, pois, $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e

$$\left(\overline{A}\right)_{ij} = \overline{A_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 1.35

A conjugada de $A = \begin{bmatrix} 1 & 9-2i \\ 7+3i & 8i \end{bmatrix}$ é a matriz $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 9+2i \\ 7-3i & -8i \end{bmatrix}$.

Proposição 1.36 *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Tem-se*

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
3. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.
4. $\overline{AC} = \overline{A}\,\overline{C}$.
5. $\overline{A^k} = \left(\overline{A}\right)^k$.
6. *Se $m = n$ e A é uma matriz invertível então $\overline{A}$ é invertível e*
$$\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}.$$
7. $\left(\overline{A}\right)^{\mathsf{T}} = \overline{A^{\mathsf{T}}}$.

Demonstração:
Exercício.

■

Definição 1.37 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se a ***transconjugada*** de A, e representamos por A^*, a matriz
$$\left(\overline{A}\right)^{\mathsf{T}} = \overline{A^{\mathsf{T}}}.$$

Exemplo 1.38

1. Consideremos as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & -4 \\ -i & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad B = iI_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$
Tem-se
$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 3-i & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad B^* = -iI_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}).$$

2. Seja $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Verifiquemos que:
   (i) $X^*X = [\ b\ ]$, com $b \in \mathbb{R}_0^+$.
   (ii) $X^*X = [\ 0\ ]$ se, e só se, $X = 0$.

   Como $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tem-se trivialmente $X^*X \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C})$. Seja
$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$
   Tem-se
$$X^*X = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \cdots & \overline{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [\ b\ ],$$
   com
$$b = \overline{a_1}a_1 + \cdots + \overline{a_n}a_n = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$
   Como $|a_i|^2 \in \mathbb{R}_0^+$, concluímos que se tem (i).
   Tem-se ainda $b = 0$ se, e só se,
$$|a_1| = \cdots = |a_n| = 0,$$
   ou equivalentemente,
$$a_1 = \cdots = a_n = 0,$$
   o que demonstra (ii).

Exercício 1.32 Estabeleça as propriedades correspondentes às da Proposição 1.36 para a transconjugada de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Definição 1.39 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ diz-se ***hermítica*** se
$$A = A^*, \text{ ou equivalentemente, se } A_{ij} = \overline{A}_{ji},\ i,j = 1,\ldots,n,$$
e diz-se ***hemi-hermítica*** se
$$A = -A^*, \text{ ou equivalentemente, se } A_{ij} = -\overline{A}_{ji},\ i,j = 1,\ldots,n.$$

Exercício 1.33 O que pode afirmar sobre os elementos da diagonal principal de uma matriz

(a) hermítica?
(b) hemi-hermítica?

Exercício 1.34 Indique quais das matrizes

$$A = I_n,\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2-3i \\ -2-3i & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 1+2i \\ 2 & 1-2i & 1 \end{bmatrix}$$

(a) são hermíticas.
(b) são hemi-hermíticas.

Exercício 1.35 Justifique que, para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, as matrizes A^*A e AA^* são hermíticas.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição 1.40 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***transformação elementar sobre as linhas de*** A a uma transformação de um dos seguintes tipos:

I Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$.

II Multiplicação de uma linha de A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

III Substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $j \neq i$.

Substituindo na definição anterior "linha" por "coluna" obtemos as correspondentes definições de ***transformações elementares sobre as colunas de*** A dos tipos I, II e III.

Recordemos que se $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se definiu linha i de A como sendo um elemento de $\mathbb{K}^n$, isto é, o n-uplo de elementos de $\mathbb{K}$,

$$(A_{i1}, \ldots, A_{in}).$$

No Apêndice referimos a forma de adicionar n-uplos e de multiplicar um escalar por um n-uplo. Chamamos ***múltiplo de uma linha*** de A a um n-uplo que resulte da multiplicação de um escalar por essa linha.

Notação 1.41 Adoptaremos as seguintes notações para as transformações elementares sobre linhas:

- $l_i \leftrightarrow l_j$, para representar que se efectuou a troca das linhas i e j, com $i \neq j$.
- αl_i, para representar que a linha i foi multiplicada por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- $l_i + \beta l_j$, para representar que se adicionou à linha i a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

  Para as correspondentes transformações elementares sobre colunas substituímos l_i e l_j por c_i e c_j, respectivamente.
- Para representar que a matriz B se obteve de A efectuando uma única transformação elementar T (de tipo não especificado) escrevemos $A \xrightarrow[T]{} B$.

Exemplo 1.42

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-3)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+3l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1+(-2)l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Concluímos facilmente que, partindo de uma mesma matriz A, através das mesmas transformações elementares sobre linhas, podemos obter no final matrizes distintas, consoante a ordem pela qual tais transformações elementares são efectuadas, conforme se ilustra seguidamente.

Exemplo 1.43

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = C,$$

com

$$B \neq C.$$

OBSERVAÇÃO: Certos autores definem as transformações elementares sobre as linhas de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ como sendo as transformações I e II, referidas na Definição 1.40, conjuntamente com a transformação

III' $l_i + l_j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$,

que substitui a transformação anterior

III $l_i + \beta l_j$, com $j \neq i$, $\beta \in \mathbb{K}$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$.

Tal definição é mais coerente com a designação de "elementar" uma vez que, no nosso caso, se demonstra que qualquer transformação do tipo I se pode efectuar utilizando apenas transformações dos tipos II e III. De facto, consideremos $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, arbitrária, e a sequência de transformações elementares dos tipos II e III seguintes:

$$A \xrightarrow[l_i+l_j]{} A_1 \xrightarrow[l_j+(-1)l_i]{} A_2 \xrightarrow[l_i+l_j]{} A_3 \xrightarrow[(-1)l_j]{} A'.$$

Concluímos que A' é a matriz que se obtém de A trocando as linhas i e j, com $i \neq j$.

Por na prática ser mais expedito, consideramos a definição de transformações elementares dada na Definição 1.40.

Notemos que se numa transformação do tipo III permitíssemos $i = j$ então, escolhendo $\beta = -1$, correspondia a multiplicar a linha i por 0. No entanto, com III', escolhendo $i = j$ corresponde a multiplicar a linha i por 2.

Consideremos o seguinte conceito:

Definição 1.44 Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é ***equivalente, por linhas***, a $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se B se pode obter a partir de A efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares sobre linhas. Tal será denotado por

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B.$$

Exemplo 1.45

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, referida no Exemplo 1.42, é equivalente por linhas a I_3 e a cada uma das matrizes que surgem nesse exemplo.

Também a matriz A do Exemplo 1.43 é equivalente por linhas a cada uma das matrizes aí indicadas.

Proposição 1.46 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que*

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

(Dizemos então que qualquer transformação elementar sobre linhas é "reversível".)

Demonstração:

Basta atender a que

$$A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} A, \quad \text{com } i \neq j,$$

$$A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1} l_i]{} A, \quad \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

e

$$A \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} B \xrightarrow[l_i+(-\beta) l_j]{} A, \quad \text{com } i \neq j \text{ e } \beta \in \mathbb{K}.$$

■

Verificamos ainda facilmente que:

1. $A \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
2. Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ então $B \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
3. Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ e $B \xrightarrow[(linhas)]{} C$ então $A \xrightarrow[(linhas)]{} C.$

Definição 1.47 Chamamos ***matriz elementar*** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma única transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Substituindo na definição anterior "linhas" por "colunas", obtemos a correspondente definição de matriz elementar de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre colunas.

Toda a matriz elementar, sobre linhas, é também uma matriz elementar, sobre colunas, conforme estabelece o resultado seguinte.

Proposição 1.48 *Tem-se*

1. Se $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E_1$ *então* $I_n \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{} E_1.$

2. Se $I_n \xrightarrow[\alpha l_i]{} E_2$ *então* $I_n \xrightarrow[\alpha c_i]{} E_2.$

3. Se $I_n \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} E_3$ *então* $I_n \xrightarrow[c_j+\beta c_i]{} E_3.$

Demonstração:

Exercício.

■

Atendendo ao resultado anterior passaremos a referir-nos às matrizes elementares sem especificar se são sobre linhas ou sobre colunas.

Exemplo 1.49

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ as matrizes:

1. $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $I_3 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} E_1$ ou $I_3 \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_2]{} E_1.$

2. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $I_3 \xrightarrow[5 l_2]{} E_2$ ou $I_3 \xrightarrow[5 c_2]{} E_2.$

3. $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $I_3 \xrightarrow[l_1+7l_2]{} E_3$ ou $I_3 \xrightarrow[c_2+7c_1]{} E_3.$

Exercício 1.36 Determine se cada uma das seguintes matrizes é uma matriz elementar.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(d) I_n.

O resultado seguinte evidencia que podemos efectuar qualquer transformação elementar sobre as linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ premultiplicando A (isto é, multiplicando A, à esquerda) por uma matriz elementar adequada: a que resulta de I_m efectuando nas suas linhas a mesma transformação elementar que pretendemos efectuar nas linhas de A.

Resultado análogo é válido substituindo "linhas" por "colunas", "I_m" por "I_n" e a multiplicação "à esquerda" (premultiplicação) pela multiplicação "à direita" (posmultiplicação).

Teorema 1.50 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

1. *Se*
$$I_m \xrightarrow[T]{} E,$$
sendo T uma transformação elementar sobre linhas, então
$$A \xrightarrow[T]{} EA.$$

2. *Se*
$$I_n \xrightarrow[T']{} E',$$
sendo T' uma transformação elementar sobre colunas, então
$$A \xrightarrow[T']{} AE'.$$

Demonstração:
Exercício. (Considere separadamente os casos em que E é uma matriz elementar de tipo I, II ou III, sobre linhas ou sobre colunas.)

■

Exemplo 1.51

Utilizemos transformações elementares do tipo III, sobre linhas ou sobre colunas, para ilustrar o Teorema 1.50.

1. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} = B$$
então, como
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$
podemos afirmar que
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A = B,$$
sem efectuar a multiplicação de matrizes.

2. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3+3c_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 10 \end{bmatrix} = C$$

então, como
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3+3c_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
podemos afirmar que
$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

3. Como
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1+5l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1,$$
podemos afirmar, sem efectuar multiplicação de matrizes, que
$$E_1 \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+5d & b+5e & c+5f \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

4. Como
$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_2+3c_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2,$$
podemos afirmar, sem efectuar multiplicação de matrizes, que
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} a & b+3a & c \\ d & e+3d & f \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.37 Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{K})$. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas à esquerda por A, produzem em A cada uma das seguintes transformações:

(a) Troca da primeira com a terceira linhas;
(b) Multiplicação da primeira linha por 6;
(c) Adição de $\frac{1}{5}$ da segunda linha à terceira linha.

Exercício 1.38 Sem efectuar multiplicações de matrizes, indique o resultado de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.39 Indique, se existir, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, sob a forma de um produto de matrizes elementares, tal que, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifique:

(a) $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ c \end{bmatrix}$.

(b) $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ c \\ -b \end{bmatrix}$.

Como consequência do Teorema 1.50, resulta:

Proposição 1.52 *Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:*

1. Se $i \neq j$ *e* $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E^{-1}$.

2. Se $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ *e* $I_n \xrightarrow[\alpha l_i]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha} l_i]{} E^{-1}$.

3. Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ *e* $I_n \xrightarrow[l_i + \beta l_j]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[l_i + (-\beta) l_j]{} E^{-1}$.

Demonstração:

Seja $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Suponhamos que $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, e $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E$, isto é, E é a matriz elementar que se obtém de I_n trocando as linhas i e j. Pelo Teorema 1.50, tem-se

$$EE = I_n.$$

Logo E é invertível e $E^{-1} = E$.

2. Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, $I_n \xrightarrow[\alpha l_i]{} E$ e $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha} l_i]{} E'$, ou seja, E é a matriz elementar que se obtém de I_n multiplicando a linha i por α e E' é a matriz elementar que se obtém de I_n multiplicando a linha i por $\frac{1}{\alpha}$. Ainda pelo Teorema 1.50, tem-se

$$E'E = I_n \quad \text{e} \quad EE' = I_n.$$

Logo E é invertível e $E' = E^{-1}$.

3. Exercício.

■

Exemplo 1.53

Consideremos as matrizes elementares

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Tem-se:

(a) E_1 é uma matriz elementar do tipo I e ${E_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar do tipo I.

(b) E_2 é uma matriz elementar do tipo II e ${E_2}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar do tipo II.

(c) E_3 é uma matriz elementar do tipo III e ${E_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar do tipo III.

Exercício 1.40 Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes elementares:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 1.41 Sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

justifique que A é invertível e exprima a sua inversa como produto de matrizes elementares.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição 1.54 Chamamos ***pivô*** de uma linha não nula, de uma matriz, ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha e consideramos que uma linha nula não tem pivô.
Chamamos pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Definição 1.55 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A está em ***forma de escada*** (abreviadamente, denotado por ***f.e.***) se satisfaz as duas condições seguintes:

1. Se a linha r de A é nula então as linhas $r+1,\ldots,m$, de A, se existirem, são também nulas (isto é, se A tem uma linha nula então as linhas seguintes, se existirem, também são nulas).
2. Se $s \in \{1,\ldots,m-1\}$, a linha s de A é não nula e A_{st} é o pivô da linha s então $A_{s+1,j}=0$, para qualquer $j \in \{1,\ldots,t\}$ (isto é, à medida que o índice de linha aumenta, também aumenta o índice de coluna dos pivôs).

Exemplo 1.56

1. Qualquer matriz nula está em forma de escada.
2. Representando por $\bullet$ os pivôs da matriz e por $*$ as entradas da matriz que podem tomar qualquer valor, estão em forma de escada, por exemplo, matrizes da forma
$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \end{bmatrix}.$$
3. As matrizes
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
não estão em forma de escada.

A designação de "forma de escada", para uma matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, deve-se ao facto de, em linguagem informal, podermos constituir com os pivôs, quando existem, uma "escada" com "degraus" que têm de ter "altura" 1 e "largura" que pode não ser 1 e variar de "degrau" para "degrau", tomando valores no conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

Exercício 1.42 Indique se estão em forma de escada cada uma das seguintes matrizes:

(a) I_n.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.57 *Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*
$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

Demonstração:

Se $A = 0_{m\times n}$ então A está em forma de escada. Suponhamos então que $A \neq 0_{m\times n}$.

Demonstraremos o resultado por indução em m.

Para $m=1$ o resultado é válido uma vez que qualquer matriz linha está em forma de escada.

Seja $m \geq 2$.

Hipótese de Indução: Qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{(m-1)\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz B' em forma de escada.

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, não nula. Com transformações elementares do tipo I, se necessário, obtenha-se uma matriz A_1 cuja linha 1 tenha, entre todas as linhas não nulas de A, um pivô com índice de coluna mínimo. Seja t o índice de coluna de tal pivô.

Com transformações elementares do tipo III, se necessário, anulem-se os restantes elementos não nulos da coluna t de A_1. Seja $A_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ a matriz nessas condições.

Seja $B \in \mathcal{M}_{(m-1)\times n}(\mathbb{K})$ a matriz que se obtém suprimindo a linha 1 de A_2. De acordo com a hipótese de indução, existe $B' \in \mathcal{M}_{(m-1)\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$B \xrightarrow[(linhas)]{} B' \quad \text{(f.e.)}.$$

Se acrescentarmos uma "primeira" linha a B, igual à primeira linha de A_2, e efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares que permitiu obter B' a partir de B, mas com a alteração de os índices de linha envolvidos nessas transformações virem incrementados de uma unidade, obtemos uma matriz A' ainda com a primeira linha igual à de A_2 e em que as restantes constituem a matriz B'. A' está em forma de escada pois o pivô da linha 1 tem um índice de coluna t inferior ao dos pivôs de B', caso estes existam, e B' está em forma de escada. Esquematicamente,

$$A \xrightarrow[\substack{(linhas)\\ \text{tipo I}}]{} A_1 \xrightarrow[\substack{(linhas)\\ \text{tipo III}}]{} A_2 = \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \hline B \end{array}\right] \xrightarrow[(linhas)]{} \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \hline B' \end{array}\right] = A' \quad \text{(f.e.)},$$

correspondendo L_1 à primeira linha de A_2.

■

Vamos apresentar um processo que, baseado na demonstração anterior, permite obter, na prática, uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a uma matriz A. Este processo é também designado por ***condensação*** da matriz A.

Note que se A já está em forma de escada então o número de transformações elementares para transformar A numa matriz em forma de escada pode ser tomado igual a zero.

- **Processo para redução de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ à forma de escada.**

Passo 1: Se $A = 0_{m\times n}$ ou A é uma matriz linha então A está em forma de escada e o processo termina.

Passo 2: Por troca de linhas (isto é, efectuando apenas uma transformação elementar do tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz A, um pivô com índice de coluna mínimo. Seja tal elemento B_{1t}. Tem-se

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & B_{2t} & B_{2,t+1} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{mt} & B_{m,t+1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$ (note-se que existem $t-1$ colunas nulas à esquerda da coluna t).

Passo 3: Para cada linha i de B, $i = 2, \ldots, m$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{B_{it}}{B_{1t}}$ pela linha 1 (transformações elementares do tipo III). Obtém-se uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{2,t+1} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{m,t+1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$.

Passo 4: "Despreze-se" a linha 1 de C e aplique-se o processo à matriz resultante.

Exemplo 1.58

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$. Utilizando o procedimento anterior, determinemos uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_2 + (-4)l_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2)l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Exemplo 1.59

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$.

Podemos, por exemplo, obter a partir de A as matrizes B e C seguintes, equivalentes por linhas a A e em forma de escada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \quad \text{(f.e.)}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_2+(-\frac{1}{2})l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+2l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C \quad \text{(f.e.)}.$$

Por outro lado, se multiplicarmos qualquer linha não nula de B ou de C por um escalar não nulo, obtemos ainda matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada.

Exercício 1.43 Obtenha uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a A, sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.44 Indique duas matrizes em forma de escada, distintas, equivalentes por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A única matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ para a qual existe uma, e uma só, matriz A' equivalente por linhas a A e em forma de escada é a matriz $0_{m\times n}$.

Para qualquer matriz, não nula, existem várias matrizes em forma de escada que lhe são equivalentes por linhas. No entanto, todas essas matrizes têm algo em comum, conforme estabelece o resultado a seguir apresentado.

Proposição 1.60 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.*

Demonstração:

Se A é a matriz nula então, conforme já referimos, a única matriz equivalente por linhas a A é A, pelo que o resultado é trivial. Suponhamos pois que $A \neq 0$.

Sejam A'_1 e A'_2 tais que

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'_1 \text{ (f.e.)} \quad \text{e} \quad A \xrightarrow[(linhas)]{} A'_2 \text{ (f.e.)}.$$

Notemos que, nas condições anteriores, qualquer linha de A'_2 (respectivamente, A'_1) pode ser obtida efectuando transformações elementares nas linhas de A'_1 (respectivamente, A'_2) pois, como toda a transformação elementar sobre linhas é "reversível" (no sentido indicado na Proposição 1.46), tem-se

$$A'_1 \xrightarrow[(linhas)]{} A \xrightarrow[(linhas)]{} A'_2.$$

Seja s_1 o número de linhas não nulas de A'_1 e s_2 o número de linhas não nulas de A'_2. Demonstremos que se $s_1 \neq s_2$ então obteríamos uma contradição.

Sem perda de generalidade, consideremos que

$$s_1 < s_2.$$

Seja

$$C_1 = \{i_1, \ldots, i_{s_1}\}$$

o conjunto dos índices de coluna dos pivôs de A'_1 e

$$C_2 = \{j_1, \ldots, j_{s_2}\}$$

o conjunto dos índices de coluna dos pivôs de A'_2.

Como $s_1 < s_2$, existe k tal que

$$k \in C_2 \quad \text{e} \quad k \notin C_1.$$

Então existe na coluna k de A'_2 um pivô, numa linha l, e na coluna k de A'_1 não há pivôs.

A coluna k de A'_1 não pode ser nula pois, nesse caso, efectuando quaisquer transformações elementares nas linhas de A'_1 não se poderia obter a linha l de A'_2. (Verifique.)

Na coluna k de A'_1, seja t o índice de linha máximo onde se encontra um elemento não nulo. Como a coluna k de A'_1 não tem pivôs, os índices de coluna dos pivôs de A'_1, correspondentes às linhas $1, \ldots, t$, são todos inferiores a k.

Concluímos então que a linha l de A'_2 não poderia ser obtida efectuando transformações elementares nas linhas de A'_1. (Porquê?)

Logo $s_1 = s_2$.

■

Definição 1.61 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A, chamamos ***característica*** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$ (do inglês "*rank*").

Da proposição e da definição anteriores resulta pois:

Proposição 1.62 *As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica, isto é, se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B),$$

ou seja, matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

Demonstração:

Note que B é equivalente por linhas a uma matriz C em forma de escada tendo-se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B \xrightarrow[(linhas)]{} C \quad \text{(f.e.)}.$$

Se l é o número de linhas não nulas de C então

$$\mathrm{r}(A) = l \quad \text{e} \quad \mathrm{r}(B) = l.$$

Logo

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B).$$

■

Exercício 1.45 Calculando as características, justifique que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

não são equivalentes por linhas.

Exercício 1.46 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Relacione:

(a) $\mathrm{r}(A)$ com $\mathrm{r}(-A)$.
(b) $\mathrm{r}(A)$ com $\mathrm{r}(\alpha A)$, com $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercício 1.47 Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a característica de A_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Exercício 1.48 Discuta, segundo os valores de α e de β, a característica das matrizes de elementos reais

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.63 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\mathrm{r}(A) \le m \quad e \quad \mathrm{r}(A) \le n,$$

isto é,

$$\mathrm{r}(A) \le \min\{m, n\}.$$

Demonstração:

Da definição de característica resulta trivialmente que se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então $\mathrm{r}(A) \leq m$. Demonstremos que $\mathrm{r}(A) \leq n$. De facto, tal é trivial se $\mathrm{r}(A) = 0$ (isto é, se $A = 0_{m\times n}$). Se $\mathrm{r}(A) > 0$ (isto é, se $A \neq 0_{m\times n}$), como na forma de escada os pivôs têm índices de coluna dois a dois distintos, concluímos que $\mathrm{r}(A) \leq n$.

■

Exemplo 1.64

1. Tem-se $\mathrm{r}(0_{m\times n}) = 0$ e $\mathrm{r}(I_n) = n$.
2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ então $\mathrm{r}(A) = 2$.
3. Se $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ então $\mathrm{r}(B) = 1$ pois

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-3)l_1]{l_2+(-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Definição 1.65 Dizemos que uma matriz está em ***forma de escada reduzida*** (abreviadamente, denotado por ***f.e.r.***) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Exemplo 1.66

1. A matriz $0_{m\times n}$ e a matriz I_n estão em forma de escada reduzida.
2. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.
3. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está em forma de escada reduzida.
4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.

Exercício 1.49 Indique se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes em forma de escada.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.50 Para cada um dos seguintes tipos de matrizes, indique as possíveis formas de escada reduzida.

(a) 2×2.

(b) 3×2.

Proposição 1.67 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se, A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \textit{(f.e.r.), com } A'' \textit{ única.}$$

Demonstração:

Seguindo uma demonstração análoga à da Proposição 1.57, concluímos sem dificuldade que toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz A'' em forma de escada reduzida.

A demonstração da unicidade da forma de escada reduzida de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, que não apresentamos, pode encontrar-se em [7].

■

A forma de escada reduzida da matriz A é também designada por ***forma de Hermite*** de A.

Como sabemos, qualquer matriz nula está em forma de escada reduzida. Seguidamente, vamos apresentar um processo que, partindo de uma matriz não nula A em forma de escada, permite obter, na prática, uma matriz em forma de escada reduzida e equivalente por linhas a A.

- **Processo para redução de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, não nula e em forma de escada, à forma de escada reduzida.**

Passo 1: Seja A_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para garantir que o pivô da linha s passa a "1", multiplique-se a linha s por $\frac{1}{A_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II).

Seja B a matriz obtida. Se $s = 1$ a matriz B está em forma de escada reduzida e o processo termina.

Passo 2: Para cada linha i de B, com $i = 1, \ldots, s-1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{ik}$ pela linha s (transformações elementares do tipo III). (Note que tal corresponde a anular os elementos da coluna do pivô B_{sk}, com índice de linha inferior ao do pivô.)

Obtém-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à excepção do pivô C_{sk} que é igual a 1.

Passo 3: "Desprezem-se" as linhas de C de índice superior ou igual a s e aplique-se o processo à matriz resultante.

Exemplo 1.68

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$ do Exemplo 1.58.

Nesse exemplo, vimos que

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A' \quad \text{(f.e.)}.$$

Utilizando o procedimento anterior, determinemos a forma de escada reduzida de A'.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}l_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1 + 1l_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 + (-2)l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Exercício 1.51 Indique a matriz em forma de escada reduzida, equivalente por linhas a A, sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Observação – Atenda a que no Exercício 1.43 se pede para determinar uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a A.

Exercício 1.52 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Existe uma matriz invertível $R \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ tal que RA está em forma de escada.

(b) Existe uma matriz invertível $S \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ tal que SA está em forma de escada reduzida.

Proposição 1.69 *$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas se, e só se, têm a mesma forma de escada reduzida.*

Demonstração:

Se $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ então podemos afirmar que

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Dada a unicidade da forma de escada reduzida de A e de B, concluímos que A e B têm a mesma forma de escada reduzida, A''.

Reciprocamente, suponhamos que A e B têm a mesma forma de escada reduzida e demonstremos que A e B são equivalentes por linhas. Por hipótese, tem-se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}$$

e

$$B \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}.$$

A Proposição 1.46 permite-nos afirmar que

$$A'' \xrightarrow[(linhas)]{} B.$$

Logo

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

concluindo-se que A e B são equivalentes por linhas.

■

Exercício 1.53 Determine se são equivalentes por linhas as matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.54 Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

são equivalentes por linhas e indique transformações elementares sobre linhas tais que

(a) $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$.

(b) $B \xrightarrow[(linhas)]{} A$.

Exercício 1.55 Indique, se possível, duas matrizes do tipo 2×3, que:

(a) Tenham a mesma característica mas não sejam equivalentes por linhas.

(b) Tenham a mesma característica e com os pivôs nas mesmas colunas mas não sejam equivalentes por linhas.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Na Secção 1.3 foi apresentada a definição de matriz invertível. Utilizando apenas a definição não é, em geral, imediato reconhecer, na prática, se uma dada matriz é ou não invertível.

O resultado seguinte permite, em particular, decidir se uma dada matriz quadrada é ou não invertível através da sua característica.

Teorema 1.70 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A é invertível.*
2. *$\mathrm{r}(A) = n$.*
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A é igual a um produto de matrizes elementares.*

Demonstração:

Vamos demonstrar que

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1.$$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Suponhamos que A é invertível. Seja B uma matriz em forma de escada obtida a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares sobre linhas. Seja t o número de transformações elementares efectuadas. De acordo com o Teorema 1.50, cada operação elementar sobre as linhas de uma matriz corresponde a multiplicar a matriz, à esquerda, por uma matriz elementar. Assim, podemos escrever

$$B = E_t \cdots E_1 A,$$

sendo $E_1, \ldots, E_t$ matrizes elementares.

Como toda a matriz elementar é invertível, como A é invertível e pela Proposição 1.27 o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos que B é invertível.

Como observámos na Secção 1.3, se uma matriz tem alguma linha nula então não é invertível. Assim a matriz B não tem linhas nulas. Como B está em forma de escada e tem n linhas não nulas concluímos que

$$\mathrm{r}(A) = n.$$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$

Suponhamos que $\mathrm{r}(A) = n$ e seja C a matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida. Notemos que, pela Proposição 1.62, se tem

$$\mathrm{r}(C) = n$$

e, portanto, todas as linhas de C são não nulas. Como C está na forma de escada reduzida, todos os n pivôs de C são 1 e os restantes elementos dessas n colunas são zeros. Como C tem, no total, n colunas, concluímos pois que

$$C = I_n.$$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$

Se I_n é a forma de escada reduzida de A então é possível obter I_n a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares sobre linhas. Logo

$$I_n = (E_s \cdots E_1)A,$$

sendo $E_1, \ldots, E_s$ matrizes elementares.

Como $E_1, \ldots, E_s$ são invertíveis concluímos que $E_s \cdots E_1$ é invertível e, atendendo à Proposição 1.26, que

$$(E_s \cdots E_1)^{-1} = A.$$

Tem-se então

$$A = {E_1}^{-1} \cdots {E_s}^{-1}.$$

Como, pela Proposição 1.52, a inversa de uma matriz elementar é, ainda, uma matriz elementar, concluímos que a matriz A é igual a um produto de matrizes elementares.

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$

Se A se pode escrever como produto de matrizes elementares, como tais matrizes são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos que A é invertível. ∎

Exemplo 1.71

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Logo $\mathrm{r}(A) = 2 \neq 3 =$ ordem de A, pelo que A não é invertível.

Como

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)},$$

concluímos que $\mathrm{r}(B) = 3 =$ ordem de B e, portanto, B é invertível.

Exercício 1.56

(a) Determine o conjunto dos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

(b) Determine o conjunto dos valores de α e o conjunto dos valores de β, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

Exercício 1.57 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que

$$\mathrm{r}(PA) = \mathrm{r}(A), \text{ qualquer que seja } P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K}), \text{ invertível.}$$

Exercício 1.58 Justifique que se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então A e B são equivalentes por linhas.

Tendo como base a caracterização 3 das matrizes invertíveis dada no Teorema 1.70, apresentamos seguidamente um processo para determinar a inversa de uma matriz invertível que utiliza apenas transformações elementares sobre linhas.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Logo a forma de escada reduzida de A é I_n e, portanto, existem $A_0, A_1, \ldots, A_s \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$A = A_0 \xrightarrow[T_1]{} A_1 \xrightarrow[T_2]{} \cdots A_{s-1} \xrightarrow[T_s]{} A_s = I_n,$$

sendo $T_1, \ldots, T_s$ transformações elementares sobre linhas.

Logo

$$I_n = (E_s \cdots E_1)A$$

onde E_i, $i = 1, \ldots, s$, é a matriz elementar que se obtém de I_n efectuando a mesma transformação elementar T_i que permitiu obter A_i de A_{i-1}.

Assim

$$A^{-1} = E_s \cdots E_1 = (E_s \cdots E_1)\, I_n.$$

Concluímos então que se efectuarmos em I_n a mesma sequência de transformações elementares que permitiram obter I_n a partir de A, obtemos a matriz A^{-1}.

Em resumo, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, podemos calcular A^{-1} pelo processo seguinte:

Efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n a partir de A (o que corresponde a transformar A na sua forma de escada reduzida). Se, a partir de I_n, efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas (isto é, exactamente as mesmas transformações e pela mesma ordem) a matriz que, no final, obtemos é A^{-1}.

Notemos que as etapas deste dois processos podem ser executadas simultaneamente. Abreviadamente,

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Exemplo 1.72

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3+l_1}]{l_2+(-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f.e.).

Como $\mathrm{r}(A) = 3 =$ ordem de A, concluímos que A é invertível.

Determinemos A^{-1}.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3+l_1}]{l_2+(-2)l_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.59 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que A é invertível e determine A^{-1}.

(b) Exprima A e A^{-1} como produto de matrizes elementares.

Exercício 1.60 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Indique quais destas matrizes são invertíveis e, para cada um desses casos, determine a respectiva inversa.

Exercício 1.61 Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal.

(a) Utilize o Teorema 1.70 para indicar uma condição necessária e suficiente para D ser invertível.

(b) Se D é invertível, calcule D^{-1} utilizando o processo anteriormente descrito.

De acordo com 3 da Proposição 1.27, se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são ambas invertíveis então o mesmo sucede a AB. O resultado seguinte permite afirmar que a implicação recíproca também é verdadeira.

Teorema 1.73 *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se AB é invertível se, e só se, A e B são ambas invertíveis.*

Demonstração:

Atendendo a 3 da Proposição 1.27, demonstremos apenas que se AB é invertível então A e B são ambas invertíveis.

Suponhamos que AB é invertível e que A não é invertível, isto é, que

$$\mathrm{r}(AB) = n \quad \text{e} \quad \mathrm{r}(A) < n.$$

Seja A' uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada, ou seja,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}.$$

Sejam $E_1, \ldots, E_p \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes elementares tais que

$$A' = E_p \cdots E_1 A.$$

Tem-se

$$A'B = E_p \cdots E_1 AB.$$

Como

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(AB) &= \mathrm{r}\left(E_p \cdots E_1(AB)\right) \\ &= \mathrm{r}\left((E_p \cdots E_1 A)B\right) \\ &= \mathrm{r}\,(A'B) \end{aligned}$$

e, por hipótese, $\mathrm{r}(AB) = n$ concluímos que

$$\mathrm{r}\,(A'B) = n.$$

Dado que supusemos que A não é invertível, podemos afirmar que A' tem, pelo menos, uma linha nula. Consequentemente, o mesmo sucede com $A'B$ e, portanto,

$$\mathrm{r}\,(A'B) < n.$$

Obtemos então a seguinte contradição

$$n = \mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}\,(A'B) < n.$$

Logo A é invertível.

Demonstremos agora que se AB é invertível então B é invertível.

Como $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$ e AB é invertível, por 6 da Proposição 1.29, concluímos que $B^{\top}A^{\top}$ é também invertível. Consequentemente $B^{\top}$ é invertível e, de novo por 6 da Proposição 1.29, resulta que B é invertível.

■

O resultado seguinte é uma consequência do teorema anterior e do Teorema 1.26.

Corolário 1.74 *Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $AB = I_n$ então A e B são ambas invertíveis, tendo-se $A^{-1} = B$ e $BA = I_n$.*

Demonstração:

Exercício.

■

OBSERVAÇÃO: O corolário anterior permite que possam ser simplificadas as definições, de tipos particulares de matrizes, que envolvam as igualdades

$$AB = I_n = BA,$$

com $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, referindo apenas uma das igualdades

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

Por exemplo, a definição de matriz ortogonal, que é habitualmente dada como sendo uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$AA^\top = I_n = A^\top A,$$

pode ser simplificada para

$$AA^\top = I_n \qquad (\text{ou para } A^\top A = I_n).$$

Exercícios suplementares

Secção 1.1 Generalidades

Exercício 1.62 Indique o conjunto dos valores de α para os quais se tem:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\alpha \\ -1 & \alpha+1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\alpha \\ \alpha+1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.63 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Indique quais das matrizes anteriores são:

(a) Matrizes linha.
(b) Matrizes coluna.
(c) Matrizes diagonais.
(d) Matrizes triangulares superiores.
(e) Matrizes triangulares inferiores.
(f) Matrizes escalares.

Secção 1.2 Operações com matrizes

Exercício 1.64 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule:

(a) $A + C$.
(b) $4B$.
(c) $2A - 3C$.

Exercício 1.65 Seja $F = \left\{ \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$. Mostre que F, com a adição de matrizes, é um grupo. (Veja-se a definição de grupo no Apêndice.)

Exercício 1.66 Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times5}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{5\times3}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{5\times1}(\mathbb{K})$ e $D \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{K})$. Indique quais dos seguintes produtos estão definidos e para esses casos indique o tipo das matrizes produto.

(a) AB.
(b) BA.
(c) AC.
(d) $ABABD$.

Exercício 1.67 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que se B é uma matriz tal que os produtos AB e BA estão ambos definidos então $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Exercício 1.68 Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine A_iB_i, $i = 1, 2, 3$.

Exercício 1.69 Sejam $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Indique a entrada (i, j) da matriz $A - BA + 2I_n$.

Exercício 1.70 Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das matrizes da forma

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostre que se A_α e A_β são elementos de $\mathcal{A}$ então

(a) $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$ se, e só se, $\alpha = \beta$.
(b) $A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha$ é uma matriz escalar.

Exercício 1.71 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Justifique que, para calcular o produto AB, é necessário efectuar mpn multiplicações e $mp(n-1)$ adições, envolvendo elementos de $\mathbb{K}$.

Exercício 1.72 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. Calcule o número de multiplicações necessárias para obter o produto ABC se

(a) calcularmos $A(BC)$.
(b) calcularmos $(AB)C$.

Sugestão: Atenda ao Exercício 1.71.

Observação – Num computador as multiplicações são mais dispendiosas do que as adições, pelo que tem interesse reduzir o número de multiplicações para calcular um produto de matrizes.

Exercício 1.73 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Considere o comutador de A por B, representado por $[A, B]$ e definido no Exercício 1.10.

Designa-se por ***produto de Jordan*** de A por B, e representa-se por $A * B$, a matriz definida da seguinte forma:

$$A * B = \frac{AB + BA}{2}.$$

Justifique que, quaisquer que sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$, se tem:

(a) $[A, (B * B)] = 2([A, B] * B)$.
(b) $[A, [B, C]] = 4[(A * B) * C - (A * C) * B]$.
(c) $AB = (A * B) + \frac{[A,B]}{2}$.

Exercício 1.74 Sendo $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ designa-se por ***traço*** de A, e representa-se por $\operatorname{tr} A$, o elemento de $\mathbb{K}$ definido por

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Justifique que:

(a) Quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

(b) Quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A.$$

(c) Quaisquer que sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

(d) Não existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$AB - BA = I_n.$$

Exercício 1.75 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se $AX = BX$, para qualquer matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, então $A = B$.
Sugestão: Considere $X = E_i$, $i = 1, \ldots, n$, sendo $E_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ a matriz coluna com todos os elementos nulos excepto o da linha i que é igual a 1.

(b) Se $AX = 0$, para toda a matriz coluna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, então $A = 0_{m\times n}$.

Exercício 1.76

(a) Mostre que I_m é a única matriz tal que

$$I_m A = A, \quad \text{para qualquer matriz } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

isto é, mostre que se $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ é tal que

$$BA = A, \quad \text{para qualquer matriz } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

então

$$B = I_m.$$

Sugestão: Considere as matrizes $E_{ii} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, m$, tal que E_{ii} tem todas as entradas nulas excepto a entrada (i, i) que é igual a 1.

(b) Mostre que I_n é a única matriz tal que

$$AI_n = A, \quad \text{para qualquer matriz } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

Exercício 1.77 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz diagonal, com os elementos da diagonal principal dois a dois distintos, então A comuta com D se, e só se, A é uma matriz diagonal.

Exercício 1.78 Seja $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Mostre que $A^2 = 0$.

Exercício 1.79 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Obtenha uma expressão para $(A + B)^3$.

(b) O que resulta da expressão anterior se A e B comutam?

Exercício 1.80 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Calcule A^2 e A^3.

(b) Mostre que $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.81 Dizemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma ***raiz quadrada*** de $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se

$$A^2 = B.$$

Justifique que:

(a) A matriz I_2 tem um número infinito de raízes quadradas.
Sugestão: Calcule $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1-\alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix}^2$, com $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não tem raízes quadradas.

Exercício 1.82 Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A_{ik}A_{kj} = A_{ij},$$

para $i, j, k = 1, \ldots, n$.

(a) Indique duas matrizes distintas de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ nas condições indicadas.

(b) Justifique que $A^2 = nA$.

Exercício 1.83 Considere o produto de Jordan de A por B, representado por $A * B$ e definido no Exercício 1.73.
Mostre que, quaisquer que sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se tem:

(a) $A * A = A^2$.

(b) $A * B = B * A$.

(c) $(\alpha A) * B = A * (\alpha B) = \alpha(A * B)$.

(d) $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$.

(e) $A * (B * A^2) = (A * B) * A^2$.

Exercício 1.84 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se $AB = BA$ então $AB^k = B^kA$, para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Se $AB = BA$ então $(AB)^k = A^kB^k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$.

Exercício 1.85 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se ***involutiva*** se $A^2 = I_n$ e ***idempotente*** se $A^2 = A$.
Mostre que:

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ é involutiva, quaisquer que sejam $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

(b) Se $N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é involutiva então

$$\frac{1}{2}(I_n + N) \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}(I_n - N)$$

são idempotentes e

$$(I_n + N)(I_n - N) = 0.$$

(c) Toda a matriz involutiva se pode escrever como diferença de duas matrizes idempotentes, cujo produto é a matriz nula.
Sugestão: Atenda à alínea (b).

Exercício 1.86 Considere a definição de matriz idempotente, dada no Exercício 1.85.
Indique uma matriz idempotente de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diferente da matriz nula e da matriz identidade.

Sugestão: Procure nas matrizes diagonais.

Exercício 1.87 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que

$$A^2(I_n - A) = A(I_n - A)^2 = 0$$

então A é idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$).

Exercício 1.88 Justifique que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$) então o mesmo sucede a

$$B = I_n - A$$

e A e B comutam.

Exercício 1.89 Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$) então

$$(A + I_n)^k = I_n + (2^k - 1)A, \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Exercício 1.90 Seja $J \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a matriz com todos os elementos iguais a 1. Mostre que

$$\left(\frac{1}{n}J\right)^k = \frac{1}{n}J, \quad \text{para qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Exercício 1.91 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^2 = 0.$$

Justifique que $A(I_n + A)^k = A$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.92 Considere a definição de traço, dada no Exercício 1.74.

(a) Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ tem traço igual a zero então A^2 é uma matriz escalar.

(b) Utilizando (a), conclua que quaisquer que sejam $B, C, F \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ se tem

$$(BC - CB)^2F = F(BC - CB)^2.$$

Secção 1.3 Inversa de uma matriz quadrada

Exercício 1.93 Verifique que

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$ não é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.94 Seja $A_p = \begin{bmatrix} 1-p & -p \\ p & 1+p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $A_pA_q = A_{p+q} = A_qA_p$.

(b) Utilizando (a), conclua que, para qualquer $p \in \mathbb{R}$, A_p é invertível e indique A_p^{-1}.

Exercício 1.95 Mostre que se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

Exercício 1.96 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ é uma ***inversa esquerda*** de A se

$$BA = I_n$$

e diz-se que $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ é uma ***inversa direita*** de A se

$$AC = I_m.$$

Mostre que:

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{K})$ admite como inversa esquerda qualquer matriz da forma $\begin{bmatrix} 1 & * \end{bmatrix}$, em que $*$ representa um elemento arbitrário de $\mathbb{K}$.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{K})$ admite como inversa direita qualquer matriz da forma $\begin{bmatrix} 1 \\ * \end{bmatrix}$, em que $*$ representa um elemento arbitrário de $\mathbb{K}$.

(c) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem simultaneamente uma inversa esquerda B e uma inversa direita C então

$$B = C \quad \text{e} \quad n = m.$$

Sugestão: Considere a matriz BAC.

Exercício 1.97 Considere a definição de inversa direita, dada no Exercício 1.96. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz que tem uma, e uma só, inversa direita C. Seja $B = CA + C - I_n$. Mostre que:

(a) $B = C$.
Sugestão: Calcule AB.

(b) $CA = I_n$ e, portanto, A é invertível.

Exercício 1.98 Justifique que o conjunto das matrizes invertíveis de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com a multiplicação usual de matrizes, é um grupo. (Tal grupo é usualmente designado por ***grupo linear de ordem*** n ***sobre*** $\mathbb{K}$ e é representado por $GL_n(\mathbb{K})$.)
(Veja-se a definição de grupo no Apêndice.)

Exercício 1.99 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se A e B são invertíveis então A e B comutam se, e só se, A^{-1} e B^{-1} comutam.

(b) Se B é invertível então A e B comutam se, e só se, A e B^{-1} comutam.

Exercício 1.100 Justifique que a única matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que é simultaneamente invertível e idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$) é I_n.

Exercício 1.101 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é ***semelhante*** a B se existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Justifique que:

(a) Toda a matriz é semelhante a si própria.

(b) Se A é semelhante a B então B é semelhante a A. (Dizemos então que A e B são semelhantes.)

(c) Se A é semelhante a B e B é semelhante a $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então A é semelhante a C.

(d) A única matriz semelhante a uma matriz escalar é ela própria.

(e) Se A e B são semelhantes então A é invertível se, e só se, B é invertível.

(f) Se A e B são semelhantes então $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.
Sugestão: Atenda ao Exercício 1.74(c).

Exercício 1.102 Considere a definição de comutador, dada no Exercício 1.10. Mostre que se $A, B, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com P invertível, então

$$[PAP^{-1}, B] = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad [A, P^{-1}BP] = 0.$$

Exercício 1.103 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $p \in \mathbb{N}_0$. Mostre que se $I_n - A$ é invertível então

$$(I_n - A^{p+1})(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^p.$$

Sugestão: Multiplique ambos os membros, à direita, por $I_n - A$.

Exercício 1.104 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que A, B e $A - B$ são invertíveis. Justifique que $B^{-1} - A^{-1}$ é também invertível.

Secção 1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Exercício 1.105 Seja $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Justifique que:

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então $Y^\top Y = 0$ se, e só se, $Y = 0$.

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n \geq 2$ pode ter-se $Y^\top Y = 0$, com $Y \neq 0$.

Exercício 1.106 Justifique que se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ comutam então o mesmo sucede a $A^\top$ e $B^\top$.

Exercício 1.107 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}),\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & i \\ -2 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}),\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

e

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & 4 \\ -2+i & 0 & -3i \\ -4 & 3i & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Indique quais das matrizes anteriores são

(a) simétricas.
(b) hemi–simétricas.
(c) simultaneamente simétricas e hemi–simétricas.

Exercício 1.108 Indique quais as matrizes de $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K})$ que são

(a) simétricas.
(b) hemi–simétricas.

Exercício 1.109 Justifique as afirmações:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é simétrica (respectivamente, hemi–simétrica) então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, a matriz

$$B^\top AB$$

é simétrica (respectivamente, hemi–simétrica).

(b) Se $C, D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são hemi–simétricas então CD é simétrica se, e só se, C e D comutam.

Exercício 1.110 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Mostre que as matrizes $AA^\top$ e $A^\top A$ são simétricas.
(b) Dê um exemplo que mostre que, mesmo com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, os dois produtos, referidos em (a), podem ser diferentes.

Exercício 1.111 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é simétrica e invertível então o mesmo sucede a A^{-1}.

O que pode afirmar sobre A^{-1} se A é hemi–simétrica e invertível?

Exercício 1.112 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Justifique que

$$A^{-1} = \left(A^\top A\right)^{-1} A^\top,$$

com $A^\top A$ simétrica.

Observação – A determinação da inversa de uma matriz invertível A, não necessariamente simétrica, pode fazer-se determinando a inversa da matriz simétrica $A^\top A$ e posteriormente multiplicando a matriz obtida, à direita, por $A^\top$.

Exercício 1.113

(a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que:
  (i) $A + A^\top$ é simétrica;
  (ii) $A - A^\top$ é hemi–simétrica.
(b) Mostre que qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é igual à soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi–simétrica.
(c) Se $A = B + C = B' + C'$, com B e B' simétricas e C e C' hemi--simétricas, então $B = B'$ e $C = C'$ (o que implica que a decomposição referida em (b) é única.)

  Sugestão: Atenda a que, de acordo com a alínea (a) do Exercício 1.31, a única matriz simultaneamente simétrica e hemi–simétrica é a matriz nula.
(d) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ determine a matriz B simétrica e a matriz C hemi–simétrica tais que $A = B + C$.

Exercício 1.114 Atendendo à definição de comutador, dada no Exercício 1.10, mostre que se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então

$$[A,\, B]^* = [B^*,\, A^*]\,.$$

Exercício 1.115 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Atendendo à definição de traço, dada no Exercício 1.74, mostre que:

(a) $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$.
(b) $\operatorname{tr}(A^*A) = 0$ se, e só se, $A = 0$.

Exercício 1.116 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}),\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2+3i \\ 2-3i & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ D = \begin{bmatrix} 0 & 2+3i & 1 \\ -2+3i & i & -i \\ -1 & -i & 2i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}),$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2+3i & 1 \\ -2+3i & i & -i \\ -1 & -i & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}),\ F = 0_{2\times 3} \text{ e } G = 0_{2\times 2}.$$

Indique quais das matrizes são

(a) hermíticas.
(b) hemi–hermíticas.
(c) simultaneamente hermíticas e hemi–hermíticas.

Exercício 1.117 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz hermítica e seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Indique uma condição necessária e suficiente para que αA seja hermítica.

Exercício 1.118 Justifique que, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, hermíticas, se tem:

(a) $A + B$ é hermítica.
(b) AB é hermítica se, e só se, $AB = BA$.
(c) A^k é hermítica, para todo $k \in \mathbb{N}$.
(d) Se A é invertível então A^{-1} é hermítica.
(e) Se α e β são números reais então $\alpha A + \beta B$ é hermítica.
(f) $A - A^*$, iA e $-iA$ são hemi–hermíticas.
(g) $AB + BA$ é hermítica e $AB - BA$ é hemi–hermítica.

Exercício 1.119 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz hermítica. Mostre que A se pode escrever na forma

$$A = R + iS,$$

tendo R e S todas as entradas reais e sendo R simétrica e S hemi–simétrica.

Exercício 1.120 Justifique as afirmações:

(a) A única matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ simultaneamente hermítica e hemi--hermítica é a matriz nula.
(b) Qualquer que seja a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A + A^*$ é hermítica e $A - A^*$ é hemi–hermítica.
(c) Se $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é hermítica então iC e $-iC$ são hemi–hermíticas.

(d) Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se pode escrever na forma $A = B + iC$ com B e C hermíticas, ou equivalentemente, na forma

$$A = B + C',$$

com B hermítica e C' hemi–hermítica.
(e) Cada uma das decomposições referidas em (d) é única.
Sugestão: Atenda a (a).

Exercício 1.121 Seja $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz ***unitária***, isto é, tal que

$$UU^* = I_n.$$

Justifique que:

(a) Toda a matriz unitária é invertível e a sua inversa é, ainda, unitária.
(b) Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ são unitárias então o mesmo sucede a AB e a BA.

Exercício 1.122 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ diz-se ***normal*** se

$$AA^* = A^*A.$$

Considere a definição de matriz unitária, dada no Exercício 1.121.
Justifique que:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é hermítica ou unitária então A é normal.
(b) Indique uma matriz normal que não seja hermítica nem unitária.
Sugestão: Procure nas matrizes diagonais.
(c) Mostre que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é normal se, e só se, na decomposição, única, referida em (d) do Exercício 1.120, as matrizes B e C' comutam.

Secção 1.5 Transformações e matrizes elementares

Exercício 1.123 Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Considere que

$$A \xrightarrow[\alpha\neq 0]{\alpha l_1} A_1 \xrightarrow[l_3+\beta l_2]{} A_2 \xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_4]{} A_3 \xrightarrow[\gamma\neq 0]{\gamma c_3} A_4 \xrightarrow[c_2+\delta c_4]{} B.$$

Utilizando multiplicações por matrizes elementares, relacione

(a) A_2 com A.
(b) A_3 com A_1.
(c) B com A.

Exercício 1.124 Seja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Sem efectuar multiplicação de matrizes, indique o resultado das seguintes multiplicações:

(a) PA.
(b) RA.
(c) AQ.
(d) AS.

Exercício 1.125

(a) Considere as matrizes elementares

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Indique as respectivas matrizes inversas.

(b) Considere a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \text{ com } \alpha \neq 0.$$

Representando S através de um produto de matrizes elementares conclua que S é invertível e determine S^{-1}.

Exercício 1.126 Uma ***matriz de permutação*** de ordem n é qualquer matriz que resulta de I_n efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares do tipo I.

Justifique que se $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz de permutação então

$$PP^\top = I_n.$$

Sugestão: Atenda a que se E é uma matriz elementar do tipo I então $E^\top = E$.

Secção 1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Exercício 1.127 Para cada uma das seguintes matrizes obtenha uma matriz equivalente por linhas em forma de escada (não reduzida) e a matriz equivalente por linhas em forma de escada reduzida:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) I_n.

Exercício 1.128 Determine a característica de cada uma das matrizes do Exercício 1.127.

Exercício 1.129 Sejam $L = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ e $J_n = L^\top L$.

Determine a característica de:

(a) J_n.
(b) $(n-2)I_n + J_n$.

Sugestão: Estude separadamente os casos $n = 1$, $n = 2$ e $n > 2$.

Exercício 1.130 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ \alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K}).$$

Discuta, segundo os valores de α, a característica de A para:

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercício 1.131 Seja

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & \beta & 2 \\ 1 & -1 & 3\alpha-1 & 3-\beta & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}).$$

Discuta, segundo os valores dos parâmetros reais α e β, a característica de C.

Exercício 1.132 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}, \quad B_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Discuta, em função de α e de β, a característica das matrizes anteriores.

Exercício 1.133 Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$B_t = \begin{bmatrix} t+2 & t+1 \\ t^2+3t+2 & t^2+2t+1 \end{bmatrix}.$$

Discuta, em função de t, a característica da matriz B_t.

Exercício 1.134 Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Justifique que, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{K}$, se tem

$$\mathrm{r}(A) \in \{0, n\}.$$

Sugestão: Considere o caso $a \neq 0$ e o caso $a = 0$.

Exercício 1.135 Sejam $A_1 \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{K})$ e $A_2 \in \mathcal{M}_{t\times u}(\mathbb{K})$ e

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r\times u} \\ 0_{t\times s} & A_2 \end{bmatrix}.$$

Justifique que

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_1) + \mathrm{r}(A_2).$$

Secção 1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Exercício 1.136 Determine se cada uma das matrizes seguintes é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$

Exercício 1.137 Mostre que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

é invertível e determine M^{-1}.

Exercício 1.138 Justifique que são invertíveis e calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Exercício 1.139 Seja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ b_n & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

com $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$. Justifique que B é invertível e indique B^{-1}.

Soluções dos exercícios

1.1 (a) A : 3×4, B : 3×3, C : 3×1, D : 1×4, E : 1×1, F : 4×4, G : 3×2, H : 3×3, I : 2×2

(b) B, E, F, H, I

(c) B, E, F, H, I

(d) B, E, F, I

(e) E, F, I

1.2 (a) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1 \end{bmatrix}$

1.3 (a) $\begin{bmatrix} 4&1&5\\-2&1&-1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 8&2&10\\-4&2&-2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2&1&-4\\2&-1&0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3&2&-15\\11&2&-2 \end{bmatrix}$

1.4 $X = \begin{bmatrix} 3&2&2\\2&3&2\\2&2&3 \end{bmatrix}$

1.5 $AB = [-1]$, $BA = \begin{bmatrix} 0&0&0\\1&2&-1\\3&6&-3 \end{bmatrix}$

1.6 (a) $[2\ 5]$

(c) $\begin{bmatrix} -2&2&1\\1&-1&0\\-2&2&2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1&2\\1&-2 \end{bmatrix}$

1.14 Se $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ então $D^k = \operatorname{diag}(d_1^k, \ldots, d_n^k)$

1.15 (a) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1&0\\0&-1 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0&-1\\1&0 \end{bmatrix}$

(c) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0&1\\0&0 \end{bmatrix}$

(d) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1&2\\-1&-2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2&2\\-1&-1 \end{bmatrix}$

1.18 (a) Elementos da diagonal principal não nulos

(b) Se $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ então $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}\right)$

1.19 (a) Por exemplo, para $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1&0\\0&-1 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, para $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 1&0\\0&0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0&0\\0&1 \end{bmatrix}$

1.20 $A^{-1} = A$

1.21 $A^{-1} = -\frac{1}{\beta}(A + \alpha I_n)$

1.23 (a) $\begin{bmatrix} 9&5\\12&4\\8&11 \end{bmatrix}$

(b) $C = A + I_3$

1.28 (a) $a = -1 \wedge b = -3 \wedge c = 0$

(b) $\begin{bmatrix} 4&1&-3\\3&-1&0\\3&-1&-1 \end{bmatrix}$

1.29 (a) A, C

(b) A, E

1.33 (a) São números reais

(b) São imaginários puros

1.34 (a) A, E

(b) B

1.36 (a) Sim

(b) Sim

(c) Não

(d) Sim

1.37 (a) $\begin{bmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 6&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{5}&1 \end{bmatrix}$

1.38 (a) $\begin{bmatrix} e&f&g&h\\a&b&c&d\\i&j&k&l \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 5e&5f&5g&5h\\a&b&c&d\\i&j&k&l \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a&b&c&d+3c\\e&f&g&h+3g\\i&j&k&l+3k \end{bmatrix}$

1.39 (a) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{bmatrix}$

1.40 (a) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&\frac{1}{5}&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\3&0&1 \end{bmatrix}$

1.41 Por exemplo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0\\-4&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}&0\\0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&-2\\0&1 \end{bmatrix}$

1.42 (a) Sim

(b) Não

(c) Sim

(d) Não

1.43 (a) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&2&1\\0&1&1\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 2&4&-2&6&0\\0&0&0&-5&5\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

(c) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&1&2\\0&0&5\\0&0&0 \end{bmatrix}$

1.44 Por exemplo, $\begin{bmatrix} 2&2&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1&1&\frac{1}{2}\\0&0&0 \end{bmatrix}$

1.45 $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 1&2\\4&8 \end{bmatrix}\right) = 1$ e $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 0&1\\1&2 \end{bmatrix}\right) = 2$

1.46 (a) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(-A)$

(b) $\mathrm{r}(\alpha A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0, & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$

1.47 $\mathrm{r}(A_1) = 3$, $\mathrm{r}(A_2) = 3$, $\mathrm{r}(A_3) = 2$, $\mathrm{r}(A_4) = 3$

1.48 $\mathrm{r}(A_\alpha) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$

$\mathrm{r}(B_\alpha) = \begin{cases} 3, & \text{se } \alpha = 2 \\ 4, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$

$\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0 \end{cases}$

$\mathrm{r}(D_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3, & \text{se } \beta = 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ 4, & \text{se } \beta \neq 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

1.49 (a) Sim

(b) Sim

(c) Não

(d) Sim

(e) Sim

1.50 (a) $\begin{bmatrix} 0&0\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&*\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0&0\\0&0\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1\\0&0\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&*\\0&0\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1&0\\0&1\\0&0 \end{bmatrix}$

onde $*$ representa um elemento arbitrário de $\mathbb{K}$

1.51 (a) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1&2&-1&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$

1.53 (a) Não

(b) Sim

1.54 (a) $\frac{1}{2}l_1$; $l_2 + (-1)l_1$; $l_1 + 2l_2$; $4l_2$; $l_2 + (-1)l_1$

(b) $l_2 + l_1$; $\frac{1}{4}l_2$; $l_1 + (-2)l_2$ $l_2 + l_1$; $2l_1$

1.55 (a) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1&2&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1&3&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

1.56 (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

(b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1.59 (a) $\begin{bmatrix} 0&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

1.60 $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -i&-1+i\\1&-i \end{bmatrix}$

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0&1&-2&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0 \end{bmatrix}$

1.62 (a) $\{0\}$

(b) $\emptyset$

1.63 (a) E, F
(b) F
(c) A, D, F
(d) A, B, D, F
(e) A, D, F
(f) A, F

1.64 (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 16 & 3 \end{bmatrix}$

1.66 (a) 3×3
(b) 5×5
(c) 3×1
(d) 3×1

1.68 $A_1B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
$A_2B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
$A_3B_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

1.69 $[A - BA + 2I_n]_{ij} =$
$\begin{cases} a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}, & \text{se } i \neq j \\ a_{ii} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} + 2, & \text{se } i = j \end{cases}$

1.72 (a) $npq + mnq$ multiplicações
(b) $mnp + mpq$ multiplicações

1.79 (a) $A^3 + ABA + BA^2 + B^2A + A^2B + AB^2 + BAB + B^3$
(b) $A^3 + 3A^2B + 3B^2A + B^3$

1.80 (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.82 (a) Por exemplo,
$J_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ e $0_{n\times n}$

1.86 Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

1.94 (b) $A_p{}^{-1} = A_{-p}$
1.108

1.105 (b) Por exemplo, $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

1.107 (a) B, D
(b) D, E
(c) D

1.108 (a) Todas
(b) Apenas a matriz nula

1.110 (b) Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.111 A^{-1} é hemi–simétrica e invertível

1.113 (d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.116 (a) A, C, G
(b) D, G
(c) G

1.117 $\alpha \in \mathbb{R}$

1.123 (a) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$
(b) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $B = E_2E_1AC_1C_2C_3$, com
$E_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$,
$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e
$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.124 (a) $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} A_{21}+\alpha A_{11} & A_{22}+\alpha A_{12} & A_{23}+\alpha A_{13} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} A_{11} & \alpha A_{12} & \beta A_{13} \\ A_{21} & \alpha A_{22} & \beta A_{23} \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} \beta A_{12} & \alpha A_{11} & \gamma A_{13} \\ \beta A_{22} & \alpha A_{21} & \gamma A_{23} \end{bmatrix}$

1.125 (a) $A^{-1} = A$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$,
$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $S = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.127 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.r.)
Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.)
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f.e.r.)
Por exemplo,
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f.e.)
(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (f.e.r.)
Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (f.e.)
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.r.)
Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f.e.)
(e) I_n (f.e.r.)
Por exemplo,
$5I_n$ (f.e.)

1.128 $\mathrm{r}(A) = 2$, $\mathrm{r}(B) = 3$, $\mathrm{r}(C) = 1$, $\mathrm{r}(D) = 2$, $\mathrm{r}(I_n) = n$

1.129 (a) $\mathrm{r}(J_n) = 1$
(b) $\mathrm{r}((n-2)I_n + J_n) =$
$\begin{cases} 0, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n = 2 \\ n, & \text{se } n > 2 \end{cases}$

1.130 (a) $\mathrm{r}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \in \{-1, 1\} \\ 4, & \text{caso contrário} \end{cases}$
(b) $\mathrm{r}(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha \in \{-1, 1, -i, i\} \\ 4, & \text{caso contrário} \end{cases}$

1.131 $\mathrm{r}(C) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } \beta = 2 \\ 3, & \text{caso contrário} \end{cases}$

1.132 $\mathrm{r}(A_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3, & \text{se } \alpha\beta \neq 1 \text{ e } \alpha \neq 0 \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$\mathrm{r}(B_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3, & \text{se } \beta \neq 1 \\ 2, & \text{se } \beta = 1 \text{ e } \alpha \neq 1 \\ 1, & \text{se } \beta = 1 \text{ e } \alpha = 1 \end{cases}$

$\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 4, & \text{se } (\alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0) \text{ e } \beta \neq -\alpha \\ 3, & \text{se } (\alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0) \text{ e } \beta = -\alpha \\ 0, & \text{se } \alpha = \beta = 0 \end{cases}$

$\mathrm{r}(D_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 4, & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2 \\ 3, & \text{se } (\alpha = 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2) \text{ ou } (\alpha \neq 1 \text{ e } \beta = 3\alpha - 2) \\ 2, & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } \beta = 3\alpha - 2 \end{cases}$

1.133 $\mathrm{r}(B_t) = 1, \forall_{t\in\mathbb{R}}$

1.136 (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

1.137 $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2+2i & -2-i & -1-2i \\ -2-i & 2 & 2+i \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.138 (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.139 $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_n^{-1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ b_1^{-1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 2

Sistemas de Equações Lineares

A determinação do conjunto das soluções de um sistema de equações lineares constitui um tema de estudo relevante dentro da Matemática Aplicada e particularmente em muitos tópicos de Engenharia.

A complexidade de muitos sistemas, com elevado número de equações e de incógnitas, apenas permite resolvê-los com o auxílio de um computador.

Existem diversos algoritmos que permitem encontrar, caso existam, soluções dum sistema, recorrendo eventualmente a métodos numéricos de aproximação.

Neste capítulo apresentamos, utilizando a linguagem das matrizes, um processo de resolução de sistemas, baseado num algoritmo conhecido por método de eliminação de Gauss.

Definição 2.1 Uma ***equação linear*** nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

com $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

É usual chamar a $a_1, \dots, a_n$ os ***coeficientes*** da equação e a b o ***segundo membro*** ou ***termo independente*** da equação.

Dizemos que $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma ***solução*** da equação (2.1) ou que ***satisfaz*** a equação (2.1) se substituindo x_i por β_i, $i = 1, \dots, n$, se obtém uma proposição verdadeira, isto é, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ é solução da equação (2.1) se

$$a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Definição 2.2 Um sistema de equações lineares é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e consideremos o sistema

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

com $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Dizemos que (S) é um ***sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$***.
Se $b_1 = \cdots = b_m = 0$ dizemos que (S) é um ***sistema homogéneo***.
Dizemos que $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma ***solução*** do sistema (S) se substituindo em (S) x_i por β_i, $i = 1, \ldots, n$, se obtêm m proposições verdadeiras, isto é, se

$$a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{1n}\beta_n = b_1 \ \wedge \cdots \wedge \ a_{m1}\beta_1 + \cdots + a_{mn}\beta_n = b_m,$$

ou, de outra forma,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\beta_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\beta_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

O sistema (S) diz-se ***impossível*** se não existe nenhuma solução de (S), ou equivalentemente, se o conjunto das soluções do sistema (S) é o conjunto vazio.
Caso contrário, isto é, se (S) admite pelo menos uma solução, diz-se que (S) é um sistema ***possível***.
Um sistema possível diz-se ***determinado*** se tem uma, e uma só, solução e ***indeterminado*** se tem mais do que uma solução.

OBSERVAÇÃO:

(i) Se representarmos por $\mathcal{C}$ o conjunto das soluções do sistema (S) anterior e por $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, m$, o conjunto das soluções da i-ésima equação de (S) então

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{C}_m.$$

(ii) Se (S) é um sistema homogéneo então $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é uma solução do sistema, a que chamaremos a ***solução nula***.
Logo um sistema homogéneo é sempre possível, podendo ser determinado se tiver apenas a solução nula ou indeterminado se além dessa solução tiver outra.

Exemplo 2.3

1. Além de $(0,0)$, também $(-2,1)$ é solução do sistema homogéneo, nas incógnitas x_1, x_2, sobre $\mathbb{R}$,
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$
pois
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -2 & + & 2\times 1 & = & 0 \\ -2\times(-2) & - & 4\times 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$
O conjunto das soluções do sistema é
$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha_1 = -2\alpha_2\} \\ &= \{(-2\alpha_2, \alpha_2) : \ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$
Trata-se, pois, de um sistema homogéneo indeterminado.
2. $(0,0,0)$ é solução de duas das equações do sistema nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$,
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$
mas, como não é solução da outra equação, não é solução do sistema.

Exercício 2.1 Mostre que se num sistema de m equações lineares, com n incógnitas, sobre $\mathbb{K}$, se efectuar qualquer uma das seguintes transformações:

(i) Troca de posições, no sistema, de duas das equações;
(ii) Multiplicação de ambos os membros de uma equação por $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$;

(iii) Substituição de uma equação pela sua soma com outra equação do sistema multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$;

então $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução do sistema inicial se, e só se, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema obtido após cada uma das transformações do tipo (i), (ii) ou (iii).

O nosso objectivo neste capítulo é dar uma resposta completa aos problemas seguintes:

(P_1) Dado um sistema de equações lineares, indicar se o sistema é impossível ou possível e, no caso de ser possível, se é determinado ou indeterminado, sem determinar o conjunto das soluções.

Chamaremos a este problema a ***discussão*** do sistema.

(P_2) Dado um sistema de equações lineares, determinar o conjunto das suas soluções (que será o conjunto vazio se o sistema for impossível).

Chamaremos a este problema a ***resolução*** do sistema.

Neste estudo ser-nos-ão muito úteis as matrizes, conforme explicamos seguidamente.

Definição 2.4 Dado um sistema de m equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, isto é, um sistema da forma

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

chamaremos ***forma matricial*** do sistema (S) à igualdade de matrizes

$$AX = B,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Frequentemente referimo-nos apenas ao sistema

$$(S) \qquad AX = B.$$

Dizemos que, relativamente ao sistema (S),

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é a ***matriz simples***,

$X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é a ***matriz das incógnitas*** e

$B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ é a ***matriz dos termos independentes***.

Chamaremos ***matriz ampliada*** do sistema (S) à matriz de $\mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ cuja coluna i, $i = 1, \ldots, n$, é igual à coluna i de A e cuja coluna $n+1$ é igual à coluna (única) de B. Tal matriz será denotada por

$$[A \mid B].$$

Exemplo 2.5

O sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e a sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Exercício 2.2 Para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

considere o sistema (S) de equações lineares $AX = B$, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$.
Indique as equações lineares que constituem o sistema (S).

Proposição 2.6 *Dado um sistema de equações lineares*

$$(S) \qquad AX = B, \quad \textit{com } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

$(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ *é uma solução de* (S) *se, e só se,*

$$A\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B.$$

Demonstração:

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$.

Como, por definição, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é solução de (S) se, e só se,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{1n}\beta_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}\beta_1 & + & \cdots & + & a_{mn}\beta_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

tal equivale a afirmar que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

isto é, que

$$A\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = B.$$

■

Exercício 2.3 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

e (S) o sistema de equações lineares $AX = B$. Sem resolver o sistema, mostre que:

(a) $(-1, 1, 1, 3)$ é solução de (S);
(b) $(1, 0, 1, 0)$ não é solução de (S).

Exercício 2.4 Justifique que existe um sistema (S) de equações lineares, $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

e tal que $(1, 2, 3)$ é solução de (S). Indique as equações de um sistema nessas condições.

Definição 2.7 Sejam (S) e (S') sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que (S) e (S') são ***equivalentes*** se têm o mesmo conjunto de soluções.

Proposição 2.8 *Sejam* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Se* $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *é uma matriz invertível então os sistemas*

$$(S) \qquad AX = B$$

e

$$(S') \qquad (PA)X = PB$$

são equivalentes.

Demonstração:

Suponhamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S). Tem-se

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B$$

e, portanto,

$$P\left(A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = PB.$$

Como a multiplicação de matrizes é associativa, obtemos

$$(PA)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = PB,$$

o que significa que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de (S').

Reciprocamente, suponhamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de (S'), isto é, que

$$(PA)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = PB.$$

Como P é invertível, multiplicando na igualdade anterior, ambos os membros, à esquerda, por P^{-1} obtemos

$$P^{-1}\left((PA)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) = P^{-1}(PB).$$

Podemos então concluir que

$$(P^{-1}PA)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = (P^{-1}P)\,B,$$

ou equivalentemente, que

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B.$$

Logo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema (S).

Demonstrámos então que (S) e (S') têm o mesmo conjunto de soluções.

■

O resultado anterior pode também ser enunciado da seguinte forma:

Proposição 2.9 *Seja*

$$AX = B$$

um sistema de equações lineares.

Se $[A \mid B]$ e $[A' \mid B']$ são equivalentes por linhas, isto é, se

$$[A \mid B] \xrightarrow[(linhas)]{} [A' \mid B']$$

então os sistemas

$$AX = B \qquad e \qquad A'X = B'$$

são equivalentes.

Demonstração:

Se

$$[A \mid B] \xrightarrow[(linhas)]{} [A' \mid B']$$

então existe uma matriz invertível P tal que

$$P[A \mid B] = [A' \mid B'].$$

Atendendo a que

$$P[A \mid B] = [PA \mid PB],$$

concluímos o que pretendíamos.

■

Exercício 2.5 Sem os resolver, verifique que são equivalentes os dois seguintes sistemas de equações lineares:

(a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x - 3y = -3 \\ 5x = 0 \end{cases},$$

nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 7z = 5 \end{cases},$$

nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$.

Sugestão: Atenda às Proposições 2.9 e 1.69.

A Proposição 2.9 é útil para responder aos problemas anteriormente referidos:

(P_1) Discussão de um sistema.

(P_2) Resolução de um sistema.

Proposição 2.10 *Sejam* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\mathrm{r}([A \mid B]) = \mathrm{r}(A) \qquad ou \qquad \mathrm{r}([A \mid B]) = \mathrm{r}(A)+1$$

pelo que

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}([A \mid B]).$$

Demonstração:

Seja $[A' \mid B']$ uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a $[A \mid B]$, isto é,

$$[A \mid B] \xrightarrow[(linhas)]{} [A' \mid B'] \quad \text{(f.e.)}.$$

Como $[A' \mid B']$ está em forma de escada, A' também está em forma de escada.

Seja s o número de linhas não nulas de A'. Então

$$s = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A').$$

Como A' tem exactamente s linhas não nulas, a matriz $[A' \mid B']$, que está em forma de escada, ou tem s ou tem $s+1$ linhas não nulas (note que B' só tem uma coluna logo, pode haver, no máximo, um pivô na coluna $n+1$ de $[A' \mid B']$).

Dado que o número de linhas não nulas de $[A' \mid B']$ é

$$\mathrm{r}([A' \mid B']) = \mathrm{r}([A \mid B]),$$

concluímos o que pretendíamos.

■

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Como

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}([A \mid B]) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{r}(A) \leq n,$$

a comparação dos inteiros $\mathrm{r}(A)$, $\mathrm{r}([A \mid B])$ e n conduz-nos a um, e um só, dos seguintes três casos:

$$\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$$

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) \begin{cases} \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n \\ \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n\,. \end{cases}$$

O resultado seguinte permite-nos afirmar que o problema (P_1) da **discussão** de um sistema fica resolvido se determinarmos qual dos casos anteriores é que ocorre.

Notemos primeiramente que se num sistema de equações lineares $AX = B$ se tem $A = 0$ então o sistema é possível se, e só se, $B = 0$ sendo, neste caso, indeterminado.

Teorema 2.11 *Seja* $AX = B$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A \neq 0$, *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Tem-se:*

1. *Se* $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$ *então o sistema é impossível.*
2. *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$ *então o sistema é possível.*

   Tem-se, ainda,

   2.1. Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$ *então o sistema é possível determinado.*

   2.2. Se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$ *então o sistema é possível indeterminado.*

Demonstração:

Seja $[A' \mid B']$ uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a $[A \mid B]$, isto é,

$$[A \mid B] \xrightarrow[(linhas)]{} [A' \mid B'] \quad \text{(f.e.)}.$$

Recordemos que

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A')\,, \qquad \mathrm{r}([A \mid B]) = \mathrm{r}([A' \mid B'])$$

e que A' também está em forma de escada.

Seja

$$s = \mathrm{r}(A).$$

Caso 1: $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$.
Neste caso tem-se $n \geq 2$ e a linha $s+1$ de $[A' \mid B']$ é da forma

$$(0, \ldots, 0, b'_{s+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}\ , \text{ com } \ b'_{s+1} \neq 0.$$

O sistema $A'X = B'$ é impossível porque a $(s+1)$-ésima equação desse sistema é

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = b'_{s+1}\ , \text{ com } \ b'_{s+1} \neq 0,$$

equação que não tem nenhuma solução.

Como os sistemas $AX = B$ e $A'X = B'$ são equivalentes, concluímos que o sistema $AX = B$ é, também, impossível.

Caso 2: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$.

Subcaso 2.1: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$.

Neste caso tem-se $s = \mathrm{r}(A) = n =$ número de incógnitas. Então $[A' \mid B']$ tem a forma

$$[A' \mid B'] = \left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & * & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

com $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn}$ não nulos e estando assinalados por $*$ os elementos que podem tomar quaisquer valores em $\mathbb{K}$.
Partindo de $[A' \mid B']$ obtenha-se a matriz $[A'' \mid B'']$ equivalente por linhas a $[A \mid B]$ e em forma de escada reduzida. Tem-se

$$[A' \mid B'] \xrightarrow[(linhas)]{} [A'' \mid B''] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b''_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Como a matriz $[A'' \mid B'']$ é a matriz ampliada do sistema com m

equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & b''_1 \\ x_2 & = & b''_2 \\ & \cdots & \\ x_n & = & b''_n\ , \\ 0 & = & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

verificamos que o sistema $A''X = B''$ é possível determinado e, portanto, o mesmo sucede ao sistema inicial $AX = B$.

Além disso a solução, única, de tal sistema é

$$(b''_1, b''_2, \ldots, b''_n).$$

Subcaso 2.2: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$.

Neste caso $s = \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n =$ número de incógnitas. Então $[A' \mid B']$ tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a'_{1k_1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{2k_2} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & b'_2 \\ & & & & & & & & \cdots & & & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{sk_s} & * & \cdots & * & b'_s \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right],$$

com $a'_{1k_1}, a'_{2k_2}, \ldots, a'_{sk_s}$ não nulos e estando assinalados por $*$ os elementos que podem tomar quaisquer valores em $\mathbb{K}$.

Obtenha-se a matriz $[A'' \mid B'']$ em forma de escada reduzida e equivalente por linhas a $[A \mid B]$. Tem-se

$$[A' \mid B'] \xrightarrow[(linhas)]{} [A'' \mid B''] \quad \text{(f.e.r.)},$$

com

$$[A'' \mid B''] = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b''_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b''_2 \\ & & & & & & & & \cdots & & & & & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & b''_s \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sejam $k_1, \ldots, k_s$ os índices de coluna dos pivôs. Como $s < n$, além das s incógnitas

$$x_{k_1}, \ldots, x_{k_s},$$

existem ainda $n - s$ incógnitas, com $n - s > 0$. Estas incógnitas são as incógnitas x_i, com $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_s\}$.

Seja $L = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_s\}$.

A matriz $[A'' \mid B'']$, com $A'' = [a''_{ij}]$, é a matriz ampliada do sistema, com m equações,

$$\begin{cases} x_{k_1} &=& b''_1 &-& \sum_{j \in L} a''_{1j} x_j \\ & \cdots & & & \\ x_{k_s} &=& b''_s &-& \sum_{j \in L} a''_{sj} x_j \\ 0 &=& 0 & & \\ & \cdots & & & \\ 0 &=& 0 & & \end{cases}.$$

Tomando

$$x_i = 0, \text{ para todo } i \in L,$$

obtemos a solução $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do sistema, com

$$\alpha_i = 0 \text{ se } i \in L \qquad \text{e} \qquad \alpha_{k_i} = b''_i \text{ se } i \in \{1, \ldots, s\}.$$

Se considerarmos, por exemplo,

$$x_i = 1, \text{ para todo } i \in L,$$

obtemos a solução $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ do sistema, com

$$\beta_i = 1 \text{ se } i \in L \qquad \text{e} \qquad \beta_{k_i} = b''_i - \sum_{j \in L} a''_{ij} \text{ se } i \in \{1, \ldots, s\}.$$

Como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, o sistema é possível indeterminado.

■

Exercício 2.6 Conclua que no Teorema 2.11 podemos substituir "então" por "se, e só se".

Definição 2.12 Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares possível indeterminado, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. A $n - \mathrm{r}(A)$ chamamos o ***grau de indeterminação*** do sistema.

Note que nas condições da Definição 2.12 e atendendo à demonstração do Subcaso 2.2, do Teorema 2.11, das n incógnitas do sistema $AX = B$, $\mathrm{r}(A)$ incógnitas correspondem às colunas dos pivôs na forma de escada reduzida de $[A \mid B]$ a que chamamos ***incógnitas básicas*** e, as restantes $n - \mathrm{r}(A)$ incógnitas (em número igual ao grau de indeterminação do sistema) designamos por ***incógnitas livres***.

Resumo da discussão do sistema $AX = B$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$AX = B$

- $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$ **Sistema Impossível**
- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$ **Sistema Possível**
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$ **Sistema Possível Determinado**
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$. **Sistema Possível Indeterminado,** com grau de indeterminação $n - \mathrm{r}(A)$

É conhecido por *Método de Eliminação de Gauss* o processo para resolver sistemas de equações lineares $AX = B$ que, em termos de matrizes, corresponde a obter uma matriz $[A' \mid B']$ em forma de escada e equivalente por linhas a $[A \mid B]$ e, através da matriz $[A' \mid B']$, a determinar o conjunto das soluções do sistema por substituição regressiva (isto é, determinando as soluções da equação correspondente à última linha não nula de $[A' \mid B']$, seguidamente à penúltima e procedendo analogamente até se chegar à primeira).

Existe, no entanto, uma extensão do Método de Eliminação de Gauss, conhecida por *Método de Eliminação de Gauss–Jordan* e que, em relação ao processo anterior, corresponde a obter a matriz $[A'' \mid B'']$, em forma de escada reduzida e equivalente por linhas a $[A \mid B]$, e a determinar o conjunto das soluções do sistema através da matriz $[A'' \mid B'']$, sem ser necessário efectuar substituições regressivas. É este o processo que utilizaremos para resolver sistemas de equações lineares.

Em resumo, para efectuar a discussão de um sistema $AX = B$ é necessário apenas conhecer $\mathrm{r}(A)$ e $\mathrm{r}([A \mid B])$ e, portanto, de obter, a partir de $[A \mid B]$, uma matriz equivalente por linhas e em forma de escada. Se esse sistema for possível, para o resolver devemos determinar a forma de escada reduzida de $[A \mid B]$, por ser assim mais simples indicar o conjunto das soluções do sistema.

Exemplo 2.13

1. Consideremos o sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array} \right. .$$

<u>Discussão do sistema</u> (S):

Tem-se a forma matricial $AX = B$ com

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[l_3+(1)l_1]{l_2+(-2)l_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3+(1)l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] = [A' \mid B'] \quad \text{(f.e.)}.$$

Como

$$\mathrm{r}(A) = 3 = \mathrm{r}([A \mid B]) < 4 = \text{número de incógnitas},$$

concluímos que (S) é um sistema possível indeterminado, com grau de indeterminação 1 $(= 4 - 3)$.

<u>Resolução do sistema</u> (S):

$$[A' \mid B'] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}l_3]{\frac{1}{2}l_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2+(-1)l_3 \\ l_1+3l_3}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$= [A'' \mid B''] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Neste caso a incógnita livre é x_2 e o sistema (S) é equivalente ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrr} x_1 & = & -11 & -2x_2 \\ x_3 & = & 3 & \\ x_4 & = & -1 & \end{array} \right. .$$

Assim, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ é solução do sistema (S) se, e só se,

$$\left\{ \begin{array}{rcrr} \alpha_1 & = & -11 & -2\alpha_2 \\ \alpha_3 & = & 3 & \\ \alpha_4 & = & -1 & \end{array} \right. .$$

Logo o conjunto das soluções do sistema (S) é

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 : \ \alpha_1 = -11 - 2\alpha_2 \ \wedge \ \alpha_3 = 3 \ \wedge \ \alpha_4 = -1\} \\ &= \{(-11 - 2\alpha_2, \alpha_2, 3, -1) : \ \alpha_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

2. Se o sistema indicado em 1 for considerado nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, sobre $\mathbb{R}$, então tal sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2 e o conjunto das soluções é

$$\mathcal{C}' = \{(-11 - 2\alpha_2, \alpha_2, 3, -1, \alpha_5) : \ \alpha_2, \alpha_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 2.7 Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, e resolva-os nos casos em que são possíveis.

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{array} \right.$$

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{array} \right.$$

Exercício 2.8 Com a informação dada no quadro seguidamente apresentado determine, caso seja possível, se cada um dos sistemas de equações lineares $AX = B$ é possível (determinado ou indeterminado) ou impossível e, para os sistemas indeterminados, indique o respectivo grau de indeterminação.

	Tipo da matriz A	$\mathrm{r}(A)$	$\mathrm{r}([A \mid B])$
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×7	3	3
(e)	5×7	2	3
(f)	6×2	2	2
(g)	4×4	0	0

Exercício 2.9 Indique um sistema de equações lineares com 3 incógnitas que seja possível indeterminado, com grau de indeterminação

(a) 1.
(b) 2.

O grau de indeterminação pode ser 3?

Exercício 2.10 Indique o conjunto $\mathcal{C}$ dos valores de k para os quais o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = k \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$,

(a) é impossível.
(b) é possível determinado.
(c) é possível indeterminado.

Exercício 2.11 Determine o conjunto dos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais cada um dos sistemas de equações lineares, nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S)\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}, \quad (S')\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^2 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S'')\begin{cases} \alpha x + y = \alpha^3 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(a) não tem soluções.
(b) tem uma única solução.
(c) tem mais do que uma solução.

Exercício 2.12 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Mostre que A é invertível se, e só se, o sistema $AX = B$ é possível determinado.

Exercício 2.13 Para cada uma das alíneas seguintes, determine se existe um sistema (S) de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, nas condições indicadas e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

(a) O número de equações é superior ao número de incógnitas e (S) é possível.
(b) O número de equações é inferior ao número de incógnitas e (S) é possível determinado.
(c) O número de equações é igual ao número de incógnitas e (S) não é possível determinado.
(d) (S) é possível determinado e o número de equações não é igual ao número de incógnitas.

Definição 2.14 Um sistema de equações lineares $AX = B$ diz-se um ***sistema de Cramer*** se A é quadrada e invertível.

De acordo com o Teorema 2.11 qualquer sistema de Cramer $AX = B$ é possível determinado. Tem-se, ainda, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é a solução do sistema se, e só se,

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B,$$

o que é equivalente a cada uma das igualdades seguintes

$$\begin{aligned} A^{-1}\left(A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\right) &= A^{-1}B, \\ (A^{-1}A)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B, \\ I_n\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B, \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Logo num sistema de Cramer $AX = B$, através da matriz A^{-1} podemos determinar, por este processo, a solução do sistema.

Exemplo 2.15

O sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S)\quad\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

tem como matriz simples

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificamos facilmente que A é invertível e, portanto, (S) é um sistema de Cramer. Pelo processo descrito anteriormente, a solução do sistema pode ser calculada atendendo a que

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

sendo B a matriz dos termos independentes. Logo a solução de (S) é $(-2, 3, -1)$.

Exercício 2.14 Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível e utilize A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = \alpha \\ 2x - 2z = \beta \\ -x + y + z = \gamma \end{cases}, \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAÇÃO: No Capítulo 1 apresentámos um método para a determinação da inversa de uma matriz invertível $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que representámos esquematicamente por

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Dispomos agora de uma forma de interpretar esse método em termos de resolução de sistemas de equações lineares.

Notemos que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, o sistema $AX = B$ é possível determinado, pois

$$\mathrm{r}(A) = n = \mathrm{r}([A \mid B]) = \text{ número de incógnitas.}$$

Em particular, se A é invertível são possíveis determinados os n sistemas de equações lineares

$$(S_i) \qquad AX = B_i,$$

em que B_i corresponde à coluna i de I_n, $i = 1, \ldots, n$.

Notemos que a solução (única) do sistema (S_i) é a coluna i de A^{-1}, pois

$$A[\ C_1 \mid \cdots \mid C_n\ ] = I_n,$$

em que C_i corresponde à solução de (S_i), $i = 1, \ldots, n$.

De acordo com o Corolário 1.74

$$A^{-1} = [\ C_1 \mid \cdots \mid C_n\ ].$$

Podemos então concluir que a determinação de A^{-1} pode ser feita resolvendo os n sistemas de equações lineares

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

todos com a mesma matriz simples A, e em que as matrizes dos termos independentes são, respectivamente, as colunas $1, \ldots, n$ de I_n. Tais sistemas, por terem a mesma matriz simples, podem ser resolvidos simultaneamente, o que corresponde ao método descrito no Capítulo 1.

Exercício 2.15 Considere a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

em que todas as matrizes pertencem a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Justifique que a resolução desta equação matricial corresponde à resolução de n sistemas de n equações lineares com n incógnitas e indique tais sistemas.

(b) Resolva a equação matricial utilizando um método de resolução simultânea dos n sistemas.

Exercícios suplementares

Exercício 2.16 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$$

e (S) o sistema de equações lineares $AX = B$. Sem resolver o sistema, justifique que:

(a) $(1,2,0)$ e $(0,2,1)$ são soluções de (S).
(b) $(2,1,0)$ não é solução de (S).

Exercício 2.17 Justifique que se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ então o sistema

$$AX = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

com $j = 1, \ldots, n$, é possível.

Exercício 2.18 Sejam

$$(S) \qquad AX = B, \quad \text{com } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

um sistema de equações lineares e considere-se o sistema

$$(S_0) \qquad AX = 0$$

designado por sistema homogéneo associado a (S).
Mostre que:

(a) Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S) e $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S_0) então $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ é solução de (S).
(b) Sendo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_0$ os conjuntos das soluções de (S) e (S_0), respectivamente, tem-se
$$\mathcal{C} = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + u_0 : u_0 \in \mathcal{C}_0\},$$
sendo $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ uma solução particular de (S).
Sugestão: Atenda a que toda a solução $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de (S) se pode escrever na forma
$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \Big((\gamma_1, \ldots, \gamma_n) - (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Big).$$

Exercício 2.19 Determine, caso existam, números complexos z e w tais que

$$\begin{cases} iz + (1+i)w = 2 \\ (i-1)z + (-1-i)w = 1-i \end{cases}.$$

Exercício 2.20 Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, e resolva-os nos casos em que são possíveis.

$$(S_1)\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \\ -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Exercício 2.21 Indique os valores de α, β e γ que são solução do sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha - \cos\beta - \operatorname{tg}\gamma = 1 \\ 2\operatorname{sen}\alpha - 2\cos\beta = 2 \\ -\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\beta + \operatorname{tg}\gamma = -1 \end{cases}.$$

Exercício 2.22 Mostre que:

(a) Existe um, e um só, polinómio $p(x)$ de grau 3 tal que
$$p(-1) = 0, \quad p(1) = 4, \quad p(2) = 3 \quad \text{e} \quad p(3) = 16.$$
(b) O polinómio referido em (a) é $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

Exercício 2.23 Determine se existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, e tais que o seu gráfico passe pelos pontos

(a) $(1,2)$.

(b) $(1,2)$ e $(-1,6)$.

(c) $(1,2)$, $(-1,6)$ e $(2,3)$.

Em caso afirmativo, determine todas as funções nessas condições.

Exercício 2.24 Determine se u pertence ao conjunto $\mathcal{L}$, com

(a) $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{L} = \left\{ a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $u = (1,0,1)$ e $\mathcal{L} = \{\alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(-3,-1,1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 2.25 Justifique que:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e o sistema $AX = B$, com $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, é possível determinado então, qualquer que seja $B' \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, o sistema $AX = B'$ é também possível determinado.

(b) A afirmação correspondente a (b) pode ser falsa, se A não é quadrada.

Exercício 2.26 Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ e (S) o sistema de equações lineares $AX = B$. Justifique que se $m < n$ então ou (S) é impossível ou (S) é possível indeterminado.

Exercício 2.27 Justifique a seguinte afirmação:

Um sistema (S) de equações lineares $AX = B$, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, verifica uma, e uma só, das seguintes condições:

(i) Para qualquer $B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, (S) tem uma, e uma só, solução.

(ii) O sistema homogéneo associado a (S), $AX = 0$, tem uma solução não nula.

Sugestão: Considere os casos $\mathrm{r}(A) = n$ e $\mathrm{r}(A) < n$.

Exercício 2.28 Para cada $a \in \mathbb{R}$, considere:

(a) O sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = a^2 \\ x + 3y = a^3 \end{cases}.$$

(b) O sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax - z + (a+1)w = 1 \\ -x + y + z + w = a \\ (a-1)x + y + (a-2)z + 2aw = a - 2 \end{cases}.$$

Discuta, em função de a, o sistema de cada uma das alíneas.

Exercício 2.29 Discuta em função de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (8-\alpha)x + 2y + 3z + \alpha w = 0 \\ x + (9-\alpha)y + 4z + \alpha w = 0 \\ x + 2y + (10-\alpha)z + \alpha w = 0 \\ x + 2y + 3z + \alpha w = 0 \end{cases}$$

e indique para que valores de α a matriz simples do sistema é invertível.

Exercício 2.30 Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \overline{\alpha} x + y + \alpha z = 0 \\ \overline{\alpha^2} x + \overline{\alpha} y + z = 0 \end{cases}, \quad \text{onde } \overline{\alpha} \text{ representa o conjugado de } \alpha.$$

Discuta, em função de α, o sistema indicado e resolva-o.

Exercício 2.31 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - \alpha y + z = -1 \\ -x - y + (\alpha+1)z = \beta - 2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β.

(b) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Exercício 2.32 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + \alpha z = 3 \\ x + (\beta - 3)y + 2\alpha z = \alpha + 3 \\ x + 2\alpha z = 4 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β.

(b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ indique o conjunto das soluções do sistema.

Exercício 2.33 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S_{\alpha,\beta}) \qquad \begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ \alpha(\beta - 1)y = \alpha \\ x + \alpha y + z = \beta^2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β.

(b) (i) Justifique que $S_{2,2}$ tem uma e uma só solução.

(ii) Justifique que a matriz simples de $S_{2,2}$ é invertível.

(iii) Determine a solução de $S_{2,2}$, utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

Exercício 2.34 Para cada $a \in \mathbb{R}$ e cada $b \in \mathbb{R}$, considere os sistemas de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\text{(a)} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ ax + z = 2 \\ 3x + y + 3z = b \end{cases}.$$

$$\text{(b)} \begin{cases} -2x + (a+3)y - bz = -3 \\ x + bz = 1 \\ 2x + 4y + 2bz = -b \end{cases}.$$

$$\text{(c)} \begin{cases} bx + a(y+z) = a \\ a(x+z) + by = a \\ a(x+y) + bz = a \\ a(x+y+z) = b \end{cases}.$$

Discuta, em função de a e b, o sistema indicado em cada uma das alíneas.

Exercício 2.35 Para cada $a \in \mathbb{R}$ e cada $b \in \mathbb{R}$, considere os sistemas de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$,

$$\text{(a)} \begin{cases} ax + y - z + aw = 0 \\ (a+1)y + z + w = 1 \\ -x + y + (a+1)w = b \end{cases}.$$

$$\text{(b)} \begin{cases} 2x + y + w = 2 \\ 3x + 3y + az + 5w = 3 \\ 3x - 3z - 2w = b \end{cases}.$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x + ay + bz - w = a \\ x - bz - 2w = a \\ 2x + ay + bz - 4w = 3a \\ x + 2ay + 2w = 0 \end{cases}.$$

Discuta, em função de a e b, o sistema indicado em cada uma das alíneas.

Exercício 2.36 Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $abc \neq 0$. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 4bcx + acy - 2abz = 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz = -abc \\ 3bcx + 2acy - abz = 4abc \end{cases}.$$

Justifique que tal sistema é possível determinado e indique a sua solução.

Exercício 2.37 Considere o seguinte sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (n-1)x_1 &=& x_2 + \cdots + x_n \\ (n-1)x_2 &=& x_1 + x_3 + \cdots + x_n \\ & \vdots & \\ (n-1)x_n &=& x_1 + \cdots + x_{n-1} \end{cases}.$$

Justifique que o sistema é possível indeterminado e que, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, o n-uplo $(\alpha, \cdots, \alpha)$ é solução do sistema.

Exercício 2.38 Considere o sistema de $n+1$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$,

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &=& b_n \\ a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n &=& b_{n+1} \end{cases},$$

em que $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível. Mostre que o sistema (S) é impossível se, e só se, a sua matriz ampliada é invertível.

Exercício 2.39 Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = I_n$). Justifique que o sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

é possível determinado, sendo a sua solução

$$(a_{11}b_1 + \cdots + a_{n1}b_n, a_{12}b_1 + \cdots + a_{n2}b_n, \cdots, a_{1n}b_1 + \cdots + a_{nn}b_n)\,.$$

<u>Sugestão:</u> Relacione o n-uplo anterior com a coluna da matriz $A^\top B$, sendo B a matriz dos termos independentes do sistema.

Soluções dos exercícios

Abreviaturas utilizadas:

S.P.D.
Sistema Possível Determinado
S.I.
Sistema Impossível
S.P.I.
Sistema Possível Indeterminado
g.i.
grau de indeterminação

2.2 $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

2.4 Basta tomar a matriz
$B = A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\19\\5\\17\end{bmatrix}$
resultando o sistema, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,
$\begin{cases} x - z = -2 \\ 2x + 4y + 3z = 19 \\ -x + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \end{cases}$

2.7 (S_1) é S.P.D.

Conjunto das soluções de (S_1):
$\{(1, -1, 0)\}$

(S_2) é S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_2):
$\{(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\alpha, \frac{5}{7} - \frac{2}{7}\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_3) é S.I.

2.8
(a) S.P.D.
(b) S.I.
(c) S.P.I. com g.i. 2
(d) S.P.I. com g.i. 4
(e) S.I.
(f) S.P.D.
(g) S.P.I. com g.i. 4

2.9
(a) Por exemplo, $\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = z - 4 \end{cases}$

(b) Por exemplo, $\begin{cases} x = y - 2z \\ 2x + 4z = 2y \end{cases}$

Sim, basta tomar o sistema
$0x + 0y + 0z = 0$

2.10
(a) $C = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
(b) $C = \emptyset$
(c) $C = \{3\}$

2.11
(a) (S): $\{-1\}$
(S'): $\{-1\}$
(S''): $\emptyset$

(b) (S): $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
(S'): $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
(S''): $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

(c) (S): $\{1\}$
(S'): $\{1\}$
(S''): $\{-1, 1\}$

2.14 Conjunto das soluções:
$\{(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\beta - \gamma, \alpha + \beta - \gamma, -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

2.15
(a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, tem-se
$AX = \begin{bmatrix}1\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix}$, $AX = \begin{bmatrix}2\\1\\\cdots\\0\end{bmatrix}, \cdots,$
$AX = \begin{bmatrix}n\\n-1\\\cdots\\1\end{bmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

2.19 $z = -1 - i$ e $w = 1$

2.20 (S_1) é S.P.D.

Conjunto das soluções de (S_1):
$\{(\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5})\}$

(S_2) é S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_2):
$\{(-1 + 2\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_3) é S.I.

(S_4) é S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_4):
$\{(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\alpha, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_5) é S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_5):
$\{(1,0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_6) é S.I.

(S_7) é S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_7):
$\{(1-\alpha, -1+2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

2.21 $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\gamma = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2.23 (a) $(2-b-c)x^2 + bx + c$, com $b, c \in \mathbb{R}$

(b) $(4-c)x^2 - 2x + c$, com $c \in \mathbb{R}$

(c) $x^2 - 2x + 3$

2.24 (a) $u \in \mathcal{L}$

(b) $u \notin \mathcal{L}$

2.28 (a) Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, S.I.
Se $a = 0$ ou $a = 1$, S.P.D.

(b) Se $a \neq 2$, S.P.I. com g.i. 1
Se $a = 2$, S.I.

2.29 Se $\alpha = 7$, S.P.I. com g.i. 2
Se $\alpha = 0$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha \neq 7$ e $\alpha \neq 0$, S.P.D.

2.30 Se $|\alpha| \neq 1$, S.P.D.
Conjunto das soluções: $\{(0,0,0)\}$
Se $|\alpha| = 1$, S.P.I. com g.i. 2
Conjunto das soluções:
$\{(-\alpha b - \alpha^2 c, b, c) :\ b, c \in \mathbb{C}\}$

2.31 (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.D.
Se $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.I.
Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 1

(b) Conjunto das soluções:
$\{(1+\gamma, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$

2.32 (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 3$, S.P.D.
Se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.I.
Se $\alpha = 1$ e $\beta = 3$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta = 3$, S.I.

(b) Conjunto das soluções:
$\{(2, \gamma, 1) :\ \gamma \in \mathbb{R}\}$

2.33 (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.D.
Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 2
Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1$, S.I.

(b) (iii) $(5, 1, -3)$

2.34 (a) Se $b \neq 6$ e $a \in \mathbb{R}$, S.I.
Se $b = 6$ e $a = 1$, S.P.I. com g.i. 1
Se $b = 6$ e $a \neq 1$, S.P.D.

(b) Se $b \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$, S.P.D.
Se $b = 0$ e $a = -1$, S.P.I. com g.i. 1
Se $b = 0$ e $a \neq 1$, S.I.

(c) Se $a = -b$, S.P.D.
Se $a \neq -b$, S.I.

2.35 (a) Se $a \neq -1$ e $b \in \mathbb{R}$, S.P.I. com g.i. 1
Se $a = -1$ e $b = 1$, S.P.I. com g.i. 2
Se $a = -1$ e $b \neq 1$, S.I.

(b) Se $a \neq 3$ e $b \in \mathbb{R}$, S.P.I. com g.i. 1
Se $a = 3$ e $b \neq 3$, S.I.
Se $a = 3$ e $b = 3$, S.P.I. com g.i. 2

(c) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, S.P.D.
Se $a = 0$ e $b \neq 0$, S.P.I. com g.i. 1
Se $a \neq 0$ e $b = 0$, S.I.
Se $a = 0$ e $b = 0$, S.P.I. com g.i. 2

2.36 $(a, 2b, 3c)$

CAPÍTULO 3

Determinantes

Neste capítulo consideraremos apenas matrizes quadradas.

3.1 Uma definição por recorrência

Conforme vimos no Capítulo 1, uma matriz quadrada pode ser ou não invertível. Na prática, uma forma de determinar se uma matriz quadrada é invertível é conhecendo a sua característica. Recorde-se o resultado

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = n.$$

Neste capítulo veremos que podemos associar a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ um elemento de $\mathbb{K}$, dependente apenas dos elementos da matriz, e que tal como a característica também nos vai permitir decidir sobre a invertibilidade de A.

Vejamos primeiramente como tal pode ser feito para $n = 1$ e para $n = 2$.

- Para $n = 1$ tem-se
$$A = [A_{11}] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K}) \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = 1,$$
ou equivalentemente,
$$A_{11} \neq 0.$$

- Para $n = 2$ tem-se
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = 2.$$
Vejamos que tal é equivalente a afirmar que
$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0.$$

Suponhamos primeiramente que $A_{11} \neq 0$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + \left(-\frac{A_{21}}{A_{11}}\right) l_1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - \frac{A_{21}A_{12}}{A_{11}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & \frac{A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}}{A_{11}} \end{bmatrix}.$$

Logo $\mathrm{r}(A) = 2$ se, e só se,

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0.$$

Suponhamos agora que $A_{11} = 0$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Se $A_{21} \neq 0$ então

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ 0 & A_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

e, portanto, $\mathrm{r}(A) = 2$ se, e só se, $A_{12} \neq 0$. Observemos que, neste caso, como $A_{11} = 0$ e $A_{21} \neq 0$ se tem

$$A_{12} \neq 0 \text{ se, e só se, } A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0.$$

Finalmente, consideremos o caso $A_{11} = 0 = A_{21}$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

não é invertível, quaisquer que sejam A_{12} e A_{22}, pois A tem uma coluna nula.

Neste caso, as afirmações

$$\text{“}A \text{ não é invertível” e “}A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0\text{”}$$

são ambas verdadeiras sendo, portanto, equivalentes. Logo concluímos o que pretendíamos.

Veremos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos associar a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ um elemento de $\mathbb{K}$, a que chamaremos “determinante” de A, com a propriedade de A ser invertível se, e só se, esse escalar for não nulo.

Notação 3.1 • Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, representamos por

$$A(i|j)$$

a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j. Assim

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K}).$$

Exemplo 3.2

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

então

$$A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \ A(2|1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } A(1|1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.3 Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***determinante*** de A, e representamos por $\det A$ ou $|A|$, o elemento de $\mathbb{K}$ definido, por recorrência, da seguinte forma:

Se $n = 1$ então $\det A = A_{11}$.

Se $n > 1$ então

$$\begin{aligned} \det A &= A_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \cdots + A_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{1k}(-1)^{1+k}\det A(1|k). \end{aligned}$$

Notemos que, pela definição anterior, para

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$$

resulta que

$$\begin{aligned} \det A &= A_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + A_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) \\ &= A_{11}\det[A_{22}] - A_{12}\det[A_{21}] \\ &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}. \end{aligned}$$

Dizemos então frequentemente que o determinante de uma matriz de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

OBSERVAÇÃO: Embora o determinante de uma matriz $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ seja um elemento de $\mathbb{K}$, alguma da terminologia utilizada para matrizes é também aplicada, com abuso de linguagem, a determinantes. Assim, dizemos "*o determinante de ordem n*" ou "*a linha/coluna i do determinante*"

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

para referir, respectivamente, "*o determinante da matriz $A = [A_{ij}]$ de ordem n*" e "*a linha/coluna i da matriz $A = [A_{ij}]$ de ordem n*".

Exercício 3.1 Calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Utilizando a definição de determinante, vejamos o que se obtém para uma matriz A de ordem $n = 3$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
\det A &= A_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + A_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) \\
&\quad + A_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3) \\
&= A_{11}\det\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12}\det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{13}\det\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \\
&= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) \\
&\quad + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} \\
&\quad + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} \\
&= (A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32}) \\
&\quad - (A_{11}A_{23}A_{32} + A_{12}A_{21}A_{33} + A_{13}A_{22}A_{31}).
\end{aligned}$$

Assim, para $n = 3$, a expressão de $\det A$ tem 6 parcelas que podem ser escritas como uma diferença em que o aditivo tem 3 parcelas e o subtractivo outras 3 parcelas.

Para as escrever podemos recorrer a mnemónicas como a Regra de Sarrus. De acordo com esta mnemónica as 3 parcelas do aditivo são dadas pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelo produto dos elementos abrangidos por cada um dos dois triângulos com base paralela à diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

As 3 parcelas do subtractivo são obtidas procedendo de forma análoga em relação à diagonal secundária.

Embora seja citada em muitos livros, a Regra de Sarrus tem a limitação de só poder ser aplicada a matrizes de ordem 3.

Exercício 3.2 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $a \neq 0$.
Calcule o determinante de A pela Regra de Sarrus.

A definição de determinante apresentada anteriormente permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, com $n \geq 2$, através do cálculo do determinante de n matrizes de ordem $n-1$.

Para $n = 4$ teríamos 4 determinantes de matrizes de ordem 3, cada um destes com 6 parcelas o que daria origem a 24 parcelas.

No caso geral de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a expressão de $\det A$ tem $n!$ parcelas, conforme se demonstra por indução em n.

Assim, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 4$, e A não tem zeros, não é expedito calcular o determinante de A através da Definição 3.3.

No final da Secção 3.3 veremos como se pode calcular o determinante de qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ de uma outra forma.

Definição 3.4 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Designa-se por ***complemento algébrico*** da posição (i,j) de A, o elemento de $\mathbb{K}$, que representaremos por $\widehat{A}_{ij}$, dado por

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

Notemos que $\widehat{A}_{ij}$ não depende do elemento da posição (i,j) de A pois esse elemento não figura na matriz $A(i|j)$.

Exemplo 3.5

Na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \alpha & 8 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

tem-se

$$\widehat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6-12) = 6,$$

independentemente do valor de α.

Exercício 3.3 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine:

(a) $\widehat{A}_{11}$.
(b) $\widehat{A}_{32}$.
(c) $\widehat{A}_{23}$.

De acordo com a definição que apresentámos de determinante de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, para $n \geq 2$, o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da linha 1 pelos complementos algébricos das respectivas posições.

O resultado seguinte, que não demonstraremos, afirma que se procedermos de forma análoga para uma qualquer linha ou uma qualquer coluna de A obtemos ainda o determinante de A.

Teorema 3.6 (Teorema de Laplace) *Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. O determinante de A é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos de uma qualquer linha pelos complementos algébricos das respectivas posições, isto é,*

$$\det A = A_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{in}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

O mesmo resultado é válido se substituirmos "linha" por "coluna", isto é,

$$\det A = A_{1j}\widehat{A}_{1j} + \cdots + A_{nj}\widehat{A}_{nj}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

À expressão (3.1) chamamos o desenvolvimento do determinante de A através da linha i ou dizemos que é a expressão resultante da ***aplicação do Teorema de Laplace à linha i de A***. Analogamente, dizemos que (3.2) é a expressão resultante da ***aplicação do Teorema de Laplace à coluna j de A***.

Na prática, quando queremos explicitar como foi aplicado o Teorema de Laplace, utilizamos a notação

$$\det A \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_i}{=}} \qquad \text{ou} \qquad \det A \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_j}{=}}$$

para indicar que o desenvolvimento que se segue, para o determinante de A, decorre da aplicação do Teorema de Laplace à linha i ou à coluna j de A, respectivamente.

Assim, pelo resultado anterior, dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, podemos calcular $\det A$ por $2n$ processos, aplicando o Teorema de Laplace a cada uma das n linhas de A ou a cada uma das n colunas de A. Embora todos esses $2n$ processos nos conduzam ao mesmo elemento de $\mathbb{K}$ (o determinante de A) uns podem ser mais expeditos do que outros.

Por razões óbvias, se a matriz tiver elementos nulos, temos vantagem em aplicar o Teorema de Laplace a uma linha ou a uma coluna com um número máximo de zeros.

Exemplo 3.7

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A forma mais expedita de calcular o determinante de A será por aplicação do Teorema de Laplace à linha 3 mas indicaremos seguidamente as 6 formas possíveis de o calcular, com o referido resultado.

Aplicando o Teorema de Laplace à linha 1 de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &\underset{l_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 9(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 10 - 9\times 8 + 3\times 0 = 10 - 72 = -62.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha 2 de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &\underset{l_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4\times 18 + 5\times 2 = -72 + 10 = -62.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha 3 de A obtemos

$$\det A \underset{l_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-31) = -62.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à coluna 1 de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &\underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\times 10 - 4\times 18 = 10 - 72 = -62.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à coluna 2 de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &\underset{c_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 9(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -9\times 8 + 5\times 2 = -72 + 10 = -62.\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Laplace à coluna 3 de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &\underset{c_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 0 + 2\times(5-36) = 2\times(-31) = -62.\end{aligned}$$

Exercício 3.4 Calcule, de duas formas diferentes, o determinante de cada uma das seguintes matrizes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Exercício 3.5 Seja

$$H = \begin{bmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

Calcule $\det H$.

Exercício 3.6 Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, considere

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de λ para os quais $\det A_\lambda = 0$.

Exercício 3.7 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem todas as entradas em $\mathbb{Z}$ então o seu determinante também pertence a $\mathbb{Z}$.

Sugestão: Por indução em n.

3.2 Algumas propriedades do determinante

Como consequência imediata do Teorema de Laplace tem-se

Proposição 3.8 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem uma linha nula então*

$$\det A = 0.$$

Vejamos um outro caso em que, independentemente da ordem de A, também se verifica $\det A = 0$.

Proposição 3.9 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se A tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$, então*

$$\det A = 0.$$

Demonstração:

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, uma matriz que tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$.

A demonstração é feita por indução em n.

Para $n = 2$ o resultado é válido, pois

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$$

e

$$\det A = A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} = 0.$$

Seja $n \geq 3$.

Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ com duas linhas iguais é zero.

Como $n \geq 3$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $k \neq i$ e $k \neq j$. Aplicando o Teorema de Laplace à linha k de A obtemos

$$\det A = A_{k1}\widehat{A}_{k1} + \cdots + A_{kn}\widehat{A}_{kn}.$$

Para $l = 1, \ldots, n$ tem-se, por definição,

$$\widehat{A}_{kl} = (-1)^{k+l} \det A(k|l).$$

Uma vez que $A(k|l) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ e continua a ter duas linhas iguais, pela hipótese de indução,

$$\det A(k|l) = 0.$$

Assim

$$\widehat{A}_{k1} = \cdots = \widehat{A}_{kn} = 0$$

e, portanto,

$$\det A = 0.$$

■

Os três resultados seguintes são propriedades importantes do determinante que, tal como o anterior, também se demonstram por indução na ordem da matriz.

Teorema 3.10 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\det A = \det A^{\top},$$

isto é, uma matriz e a sua transposta têm o mesmo determinante.

Demonstração:

A demonstração é feita por indução em n.

Para $n = 1$ tem-se

$$A = [A_{11}] = A^{\top}$$

e, portanto,

$$\det A = \det A^{\top}.$$

Seja $n \geq 2$.

Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ é igual ao determinante da sua transposta.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B = A^{\top}$. Desenvolvendo o $\det A$ segundo a linha 1 tem-se

$$\det A = A_{11}\widehat{A}_{11} + \cdots + A_{1n}\widehat{A}_{1n}.$$

Por definição

$$\widehat{A}_{1k} = (-1)^{1+k} \det A(1|k), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Como $A(1|k) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, utilizando a hipótese de indução podemos afirmar que

$$\widehat{A}_{1k} = (-1)^{1+k} \det (A(1|k))^{\top}.$$

Dado que

$$(A(1|k))^{\top} = B(k|1),$$

obtemos

$$\widehat{A}_{1k} = (-1)^{k+1} \det B(k|1) = \widehat{B}_{k1}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\det A &= A_{11}\widehat{B}_{11} + \cdots + A_{1n}\widehat{B}_{n1}\\ &= B_{11}\widehat{B}_{11} + \cdots + B_{n1}\widehat{B}_{n1}\\ &= \det B,\end{aligned}$$

sendo a última igualdade o desenvolvimento de $\det B$ segundo a coluna 1. Logo

$$\det A = \det A^{\mathsf{T}}.$$

■

Teorema 3.11 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Tem-se*

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}.$$

Demonstração:

A demonstração é feita por indução em n.

Para $n = 1$ tem-se

$$A = [A_{11}], \quad \overline{A} = \left[\,\overline{A_{11}}\,\right]$$

e, portanto,

$$\det \overline{A} = \overline{A_{11}} = \overline{\det A}.$$

Seja $n \geq 2$.

Hipótese de Indução: O determinante da conjugada de qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$ é igual ao conjugado do determinante de B.

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Tem-se

$$\det \overline{A} = \overline{A_{11}}(-1)^{1+1}\det \overline{A}(1|1) + \cdots + \overline{A_{1n}}(-1)^{1+n}\det \overline{A}(1|n).$$

Pela hipótese de indução podemos afirmar que

$$\det \overline{A}(1|k) = \overline{\det A(1|k)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Assim

$$\begin{aligned}\det \overline{A} &= \overline{A_{11}}(-1)^{1+1}\overline{\det A(1|1)} + \cdots + \overline{A_{1n}}(-1)^{1+n}\overline{\det A(1|n)}\\ &= \overline{A_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1)} + \cdots + \overline{A_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n)}\\ &= \overline{A_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \cdots + A_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n)}\\ &= \overline{\det A},\end{aligned}$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Exercício 3.8 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, com $\det A = \alpha$. Calcule $\det A^*$.

Teorema 3.12 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) então o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de A.*

Demonstração:

Suponhamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular superior.

A demonstração é feita por indução em n.

Para $n = 1$ o resultado verifica-se trivialmente pois $A = [A_{11}]$ e $\det A = A_{11}$.

Seja $n \geq 2$.

Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz triangular superior de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}, \text{ com } n \geq 2.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha n de A, concluímos que

$$\begin{aligned}\det A &= A_{nn}(-1)^{n+n}\det A(n|n)\\ &= A_{nn}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n-1}\\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2,n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-1,n-1}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Dado que $A(n|n) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ e é triangular superior concluímos, pela hipótese de indução, que

$$\det A(n|n) = A_{11}A_{22}\cdots A_{n-1,n-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\det A &= A_{nn}(A_{11}A_{22}\cdots A_{n-1,n-1})\\ &= A_{11}A_{22}\cdots A_{n-1,n-1}A_{nn},\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

(Note que poderíamos ter chegado à mesma conclusão aplicando o Teorema de Laplace à coluna 1 de A, também com pelo menos $n-1$ zeros, tal como a linha n.)

Se A é triangular inferior, como $A^\top$ é triangular superior e A e $A^\top$ têm o mesmo determinante, concluímos que o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de $A^\top$, que são iguais aos elementos da diagonal principal de A.

■

Exercício 3.9

(a) Calcule o determinante de cada uma das matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) Calcule $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Pode ter-se

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B,$$

conforme ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 3.13

Sejam

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det A = 0\ , \quad \det B = 0 \quad \text{e} \quad \det(A+B) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5.$$

Exercício 3.10 Dê o exemplo de matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, diagonais, tais que

(a) $\det A = \det B \neq 0$ e $A \neq B$.
(b) $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

O resultado seguinte estabelece uma propriedade interessante dos determinantes.

Proposição 3.14 *Para $i = 1, \ldots, n$, tem-se:*

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Da esquerda para a direita representem-se, respectivamente, por A, B e C as matrizes referidas no enunciado. Aplicando o Teorema de Laplace à linha i de A obtemos

$$\begin{aligned}\det A &= (b_{i1}+c_{i1})\widehat{A}_{i1} + \cdots + (b_{in}+c_{in})\widehat{A}_{in} \\ &= \left(b_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + b_{in}\widehat{A}_{in}\right) + \left(c_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + c_{in}\widehat{A}_{in}\right).\end{aligned}$$

Notemos que, uma vez que as matrizes A, B e C só diferem na linha i, para $l = 1, \ldots, n$, se tem

$$A(i|l) = B(i|l) = C(i|l).$$

Assim

$$\widehat{A}_{il} = \widehat{B}_{il} = \widehat{C}_{il}.$$

Logo

$$b_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + b_{in}\widehat{A}_{in} = b_{i1}\widehat{B}_{i1} + \cdots + b_{in}\widehat{B}_{in} = \det B,$$

$$c_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + c_{in}\widehat{A}_{in} = c_{i1}\widehat{C}_{i1} + \cdots + c_{in}\widehat{C}_{in} = \det C,$$

concluindo, como pretendíamos, que $\det A = \det B + \det C$.

■

Exemplo 3.15

Aplicando a proposição anterior tem-se:

1.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}\right).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Exercício 3.11 Utilizando a Proposição 3.14, mostre que

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$

(b) $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix} = (mq-np)(ad-bc).$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Vejamos agora o efeito que cada uma das transformações elementares sobre linhas tem sobre o determinante de uma matriz.

Teorema 3.16 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ e $\beta \in \mathbb{K}$. Tem-se*

1. *Se* $i \neq j$ *e* $A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B$ *então* $\det B = -\det A$.
2. *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$ *então* $\det B = \alpha \det A$.
3. *Se* $i \neq j$ *e* $A \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} B$ *então* $\det B = \det A$.

Demonstração:

Demonstremos 1. Representemos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ na forma

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix},$$

em que L_i corresponde à linha i de A, $i = 1, \ldots, n$.

De acordo com a Proposição 3.9, se uma matriz tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$, então o seu determinante é zero. Assim

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = 0.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.14, concluímos que

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Utilizando de novo a Proposição 3.9, obtemos

$$0 = 0 + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + 0,$$

isto é,

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Demonstrámos, como pretendíamos, que o determinante de A passa ao simétrico quando trocamos as linhas i e j, com $i \neq j$.

Demonstremos **2**. Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \cdots & \\ \alpha A_{i1} & \cdots & \alpha A_{in} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha i de B, obtemos

$$\begin{aligned} \det B &= (\alpha A_{i1})\widehat{B}_{i1} + \cdots + (\alpha A_{in})\widehat{B}_{in} \\ &= \alpha\left(A_{i1}\widehat{B}_{i1} + \cdots + A_{in}\widehat{B}_{in}\right). \end{aligned}$$

Para $l = 1, \ldots, n$, tem-se $B(i|l) = A(i|l)$ e, portanto,

$$\widehat{B}_{il} = \widehat{A}_{il}.$$

Logo

$$\det B = \alpha\left(A_{i1}\widehat{A}_{i1} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{in}\right) = \alpha \det A.$$

Finalmente, demonstremos **3**. Tal como na demonstração de 1, representemos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ na forma

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix},$$

em que L_i corresponde à linha i de A, $i = 1, \ldots, n$.

Sem perda de generalidade, consideremos que $i < j$. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}, \text{ com } \beta \in \mathbb{K}.$$

Tem-se

$$\det B = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det A + \beta \cdot 0 = \det A.$$

■

Notemos que a afirmação 2 do Teorema 3.16 é ainda válida para $\alpha = 0$. (Porquê?)

OBSERVAÇÃO: Atendendo a que, pelo Teorema 3.10, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $A^\top$ têm o mesmo determinante, concluímos facilmente que o Teorema 3.16 é ainda válido se considerarmos transformações elementares sobre colunas. De facto, efectuar uma transformação elementar nas colunas de uma matriz corresponde a efectuar uma transformação elementar, do mesmo tipo, nas linhas correspondentes da sua transposta.

Vimos no Capítulo 1 que multiplicar por $\alpha \in \mathbb{K}$ uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ corresponde a multiplicar todos os elementos da matriz A por α. Notemos que, de acordo com a afirmação 2 do Teorema 3.16, multiplicar $\alpha \in \mathbb{K}$ pelo determinante de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é igual ao determinante de uma qualquer matriz que se obtenha de A multiplicando por α uma, e uma só, das suas linhas (respectivamente, colunas). Em linguagem informal dizemos então que "num determinante um escalar pode ser posto em evidência só por estar a multiplicar uma linha (respectivamente, coluna)".

Exemplo 3.17

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

O resultado seguinte é uma consequência da afirmação 2 do Teorema 3.16.

Proposição 3.18 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Demonstração:

Exercício.

■

Exercício 3.12 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, tal que $\det A = \gamma$.

Indique, em função de γ, o valor de cada um dos seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$.

(c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$.

(e) $\begin{vmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

Exercício 3.13 Sem calcular o determinante, verifique que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sugestão: Adicione a linha 2 à linha 1.

Exercício 3.14 Justifique, sem calcular os determinantes, que

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x)^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sugestão: Atenda à Proposição 3.14.

Proposição 3.19 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

então

$$\det A = 0 \text{ se, e só se, } \det B = 0.$$

Demonstração:

De acordo com o Teorema 3.16

$$\det B = (-1)^r \alpha_1 \cdots \alpha_s \det A, \quad \text{com } r, s \in \mathbb{N}_0,$$

sendo r o número de transformações elementares do tipo I, s o número de transformações elementares do tipo II e $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ os escalares não nulos envolvidos nas s transformações elementares do tipo II efectuadas (convencionando que para $s = 0$ se tem $\alpha_1 \cdots \alpha_s = 1$). Logo

$$\det A = 0 \text{ se, e só se, } \det B = 0.$$

■

OBSERVAÇÃO: Conforme vimos no Capítulo 1, toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada.

Observemos que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}$$

então A' é triangular superior (eventualmente com elementos nulos na diagonal principal).

Na prática dispomos então do seguinte processo para calcular o determinante de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

- Efectuem-se transformações elementares sobre linhas de forma a transformar A numa matriz A' em forma de escada.
- Considerando as correspondentes alterações no determinante resultantes de cada uma dessas transformações elementares, obtenha-se a relação entre $\det A$ e $\det A'$.

- Como $\det A'$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal e é conhecida a relação entre $\det A$ e $\det A'$, obtenha-se $\det A$.

Exemplo 3.20

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \underset{l_3 + (-2)l_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{l_3 + (-2)l_2}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-5) \times (1 \times 1 \times (-2)) = 10.$$

Exercício 3.15 Efectuando transformações elementares sobre linhas, calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Exercício 3.16 Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de k para o qual $\det B_k = 2$.

Exercício 3.17 Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Sugestão: Adicione à coluna 1 as colunas 2 e 3.

Exercício 3.18 Sejam $a, b \in \mathbb{K}$. Considere $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} a+b, & \text{se } i = j \\ a, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que

$$\det A = b^{n-1}(na + b).$$

O resultado seguinte é importante, dando-nos uma das caracterizações mais conhecidas das matrizes invertíveis.

Teorema 3.21 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$A \text{ é invertível se, e só se, } \det A \neq 0.$$

Demonstração:

Seja A' uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a A, isto é,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}.$$

Pelo Teorema 1.70 e pela Proposição 1.62,

$$A \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = n (= \mathrm{r}(A')).$$

Tal equivale a afirmar que todos os elementos da diagonal principal de A' são não nulos, ou equivalentemente, como A' é triangular superior, que

$$\det A' = A'_{11} \cdots A'_{nn} \neq 0.$$

Como, pela Proposição 3.19,

$$\det A' \neq 0 \text{ se, e só se, } \det A \neq 0,$$

concluímos o que pretendíamos.

■

Exercício 3.19 Determine o conjunto dos valores reais de x para os quais é invertível a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 2-x & 0 \\ 5 & 3+x \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & x+1 \\ x-1 & x^2-1 \end{bmatrix}$.

Exercício 3.20 Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & t+3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de t para os quais A_t é invertível.

3.4 Determinante do produto de matrizes

Conforme já tivemos oportunidade de referir, existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$

No entanto, o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes das matrizes factores, conforme estabelece o resultado que seguidamente apresentamos.

Teorema 3.22 *1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

2. Mais geralmente, se $t \geq 2$ e $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Demonstração:

Demonstremos **1.**

Caso 1: A é uma matriz invertível, ou equivalentemente, pelo Teorema 1.70,

$$A = E_1 \cdots E_s,$$

sendo $E_1, \ldots, E_s$ matrizes elementares.

Demonstremos, por indução em s, que

$$\det((E_1 \cdots E_s) B) = \det(E_1 \cdots E_s) \det B.$$

Verifiquemos que o resultado é válido para $s=1$, isto é, demonstremos que se E_1 é uma matriz elementar então

$$\det(E_1 B) = \det E_1 \det B.$$

Teremos que considerar os 3 subcasos seguintes:

1.1) $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E_1$, com $i \neq j$;

1.2) $I_n \xrightarrow[\alpha l_i]{} E_1$, com $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$;

1.3) $I_n \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} E_1$, com $\beta \in \mathbb{K}$ e $i \neq j$.

Atendendo aos Teoremas 3.16 e 3.12 concluímos que no subcaso 1.1 se tem

$$\det E_1 = -\det I_n = -1.$$

Logo

$$\det(E_1 B) = -\det B = \det E_1 \det B.$$

No subcaso 1.2 obtemos

$$\det E_1 = \alpha \det I_n = \alpha$$

e, portanto,

$$\det(E_1 B) = \alpha \det B = \det E_1 \det B.$$

Finalmente, no subcaso 1.3 verificamos que

$$\det E_1 = \det I_n = 1$$

pelo que

$$\det(E_1 B) = \det B = \det E_1 \det B.$$

Seja $s \geq 2$.
Hipótese de Indução: Suponhamos que o resultado é válido para o produto de quaisquer $s-1$ matrizes elementares de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ por qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Como

$$\det(E_1 \cdots E_s B) = \det\Big((E_1 \cdots E_{s-1})(E_s B)\Big),$$

pela hipótese de indução podemos concluir que

$$\det(E_1 \cdots E_s B) = \det(E_1 \cdots E_{s-1}) \det(E_s B).$$

Uma vez que o resultado foi demonstrado para $s=1$, tem-se

$$\det(E_s B) = \det E_s \det B.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\det(E_1 \cdots E_s B) &= \det(E_1 \cdots E_{s-1}) \det E_s \det B\\ &= \det(E_1 \cdots E_{s-1} E_s) \det B,\end{aligned}$$

3.4 Determinante do produto de matrizes

Conforme já tivemos oportunidade de referir, existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$

No entanto, o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes das matrizes factores, conforme estabelece o resultado que seguidamente apresentamos.

Teorema 3.22 *1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

2. Mais geralmente, se $t \geq 2$ e $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Demonstração:

Demonstremos **1.**

<u>Caso 1</u>: A é uma matriz invertível, ou equivalentemente, pelo Teorema 1.70,

$$A = E_1 \cdots E_s,$$

sendo $E_1, \ldots, E_s$ matrizes elementares.

Demonstremos, por indução em s, que

$$\det((E_1 \cdots E_s)B) = \det(E_1 \cdots E_s)\det B.$$

Verifiquemos que o resultado é válido para $s=1$, isto é, demonstremos que se E_1 é uma matriz elementar então

$$\det(E_1 B) = \det E_1 \det B.$$

Teremos que considerar os 3 subcasos seguintes:

1.1) $I_n \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E_1$, com $i \neq j$;

1.2) $I_n \xrightarrow[\alpha l_i]{} E_1$, com $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$;

1.3) $I_n \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} E_1$, com $\beta \in \mathbb{K}$ e $i \neq j$.

Atendendo aos Teoremas 3.16 e 3.12 concluímos que no subcaso 1.1 se tem

$$\det E_1 = -\det I_n = -1.$$

Logo

$$\det(E_1 B) = -\det B = \det E_1 \det B.$$

No subcaso 1.2 obtemos

$$\det E_1 = \alpha \det I_n = \alpha$$

e, portanto,

$$\det(E_1 B) = \alpha \det B = \det E_1 \det B.$$

Finalmente, no subcaso 1.3 verificamos que

$$\det E_1 = \det I_n = 1$$

pelo que

$$\det(E_1 B) = \det B = \det E_1 \det B.$$

Seja $s \geq 2$.

Hipótese de Indução: Suponhamos que o resultado é válido para o produto de quaisquer $s-1$ matrizes elementares de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ por qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Como

$$\det(E_1 \cdots E_s B) = \det\Big((E_1 \cdots E_{s-1})(E_s B)\Big),$$

pela hipótese de indução podemos concluir que

$$\det(E_1 \cdots E_s B) = \det(E_1 \cdots E_{s-1})\det(E_s B).$$

Uma vez que o resultado foi demonstrado para $s=1$, tem-se

$$\det(E_s B) = \det E_s \det B.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\det(E_1 \cdots E_s B) &= \det(E_1 \cdots E_{s-1})\det E_s \det B\\ &= \det(E_1 \cdots E_{s-1}E_s)\det B,\end{aligned}$$

resultando a última igualdade da utilização, de novo, da hipótese de indução.

Como no caso em estudo se tem $A = E_1 \cdots E_s$, com $E_1, \ldots, E_s$ matrizes elementares, concluímos que

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det((E_1 \cdots E_s)B) \\ &= \det(E_1 \cdots E_s) \det B \\ &= \det A \det B,\end{aligned}$$

conforme pretendíamos.

Caso 2: A não é uma matriz invertível, o que é equivalente a afirmar que $\mathrm{r}(A) < n$ ou ainda que $\det A = 0$.

Dado que $\mathrm{r}(A) < n$, existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_s$ e existe uma matriz A' em forma de escada tal que

$$E_s \ldots E_1 A = A'$$

e A' tem, pelo menos, uma linha nula.

Como cada matriz elementar é invertível tem-se

$$A = E_1^{-1} \ldots E_s^{-1} A'.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\left(\left(E_1^{-1} \ldots E_s^{-1} A'\right) B\right) \\ &= \det\left(\left(E_1^{-1} \ldots E_s^{-1}\right) (A'B)\right) \\ &= \det\left(E_1^{-1} \ldots E_s^{-1}\right) \det(A'B),\end{aligned}$$

resultando a última igualdade de $E_1^{-1} \ldots E_s^{-1}$ ser uma matriz invertível e do Caso 1.

Como A' tem, pelo menos, uma linha nula, $A'B$ tem pelo menos uma linha nula e, portanto, $\det(A'B) = 0$. Logo

$$\det(AB) = 0.$$

Dado que $\det A = 0$ tem-se

$$\det(AB) = 0 = \det A \det B.$$

Demonstremos o resultado **2**, por indução em t.

Para $t = 2$ o resultado foi demonstrado em 1.

Suponhamos $t \geq 3$.

Hipótese de Indução: O determinante de um produto de quaisquer $t-1$ matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é igual ao produto dos determinantes das matrizes factores.

Tem-se

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det((A_1 \cdots A_{t-1})A_t).$$

Como o resultado é válido para $t = 2$ podemos afirmar que

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det(A_1 \cdots A_{t-1}) \det A_t,$$

ou ainda, pela hipótese de indução, que

$$\begin{aligned}\det(A_1 \cdots A_t) &= (\det A_1 \cdots \det A_{t-1}) \det A_t \\ &= \det A_1 \cdots \det A_t.\end{aligned}$$

■

Exercício 3.21 Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2$, $\det B = -5$ e $\det C = 4$. Calcule $\det(ABC)$, $\det(3B)$ e $\det(B^2C)$.

Exercício 3.22 Mostre que, quaisquer que sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se tem:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$.
(b) Se AB é invertível então o mesmo sucede a A e a B.

Exercício 3.23 Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\det(AB) \neq \det(BA)$.
(b) Comente a alínea anterior, atendendo à alínea (a) do Exercício 3.22.

Exercício 3.24 Recorde que $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se dizem semelhantes se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

(a) Justifique que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.
(b) Indique matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que tenham o mesmo determinante e não sejam semelhantes.
Sugestão: Atenda a (d) do Exercício 1.101.

Exercício 3.25 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$). Mostre que
$$\det A \in \{0,1\}.$$

Utilizando determinantes temos agora um processo alternativo para demonstrar o Corolário 1.74.

Proposição 3.23 *Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são tais que*
$$AB = I_n \qquad ou \qquad BA = I_n$$
então A é invertível e $B = A^{-1}$ (ou equivalentemente, B é invertível e $A = B^{-1}$).

Demonstração:

Se B é tal que
$$AB = I_n$$
então
$$|AB| = |I_n|$$
pelo que, de acordo com o Teorema 3.22,
$$|A||B| = 1.$$
Logo
$$|A| \neq 0$$
e, portanto, A é invertível. Tal como na demonstração do Teorema 1.26, de
$$AB = I_n$$
e multiplicando ambos os membros, à esquerda, por A^{-1}, resulta que
$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n$$
e, portanto,
$$B = A^{-1}.$$
A demonstração para o caso em que $BA = I_n$ é análoga à anterior.

■

Exercício 3.26 Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$
Mostre que:

(a) $AB = I_2$ mas $BA \neq I_3$.
(Há alguma contradição com a Proposição 3.23?)

(b) $\det(AB) = 1$ e $\det(BA) = 0$.
(Há alguma "contradição" com o Exercício 3.22?)

Exercício 3.27 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que
$$AB^\top = 2I_n.$$
Mostre que A, B e B^2 são invertíveis e indique as respectivas matrizes inversas.

O resultado seguinte relaciona o determinante de uma matriz invertível com o determinante da sua inversa.

Proposição 3.24 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, ou equivalentemente, uma matriz tal que $\det A \neq 0$. Tem-se*
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Demonstração:

De $AA^{-1} = I_n$ resulta
$$\det(AA^{-1}) = \det I_n$$
ou, ainda,
$$\det A \det A^{-1} = 1.$$
Logo
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

■

Exercício 3.28 Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2$, $\det B = -5$ e $\det C = 4$. Justifique que A, B e C são invertíveis e calcule $\det\left(C^{-1}A^\top B^{-1}\right)$.

Exercício 3.29 Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule $\det A$ e $\det C$.

(b) Determine se A e C são invertíveis e, em caso afirmativo, indique o determinante da respectiva inversa.

(c) Indique, justificando, se

(i) O sistema $AX=0$ é determinado;

(ii) O sistema $CX=0$ é determinado.

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Na Secção 1.7 aprendemos a decidir sobre a invertibilidade de uma matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ através da sua característica e apresentámos um processo para a determinação da inversa de uma matriz invertível. Esquematicamente, para $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, concluímos que

$$[A|I_n]\xrightarrow[(linhas)]{}[I_n|A^{-1}].$$

Neste capítulo apresentámos um processo alternativo para decidir sobre a invertibilidade de uma matriz, utilizando o seu determinante. Baseado na definição seguinte apresentaremos também um processo alternativo para calcular a inversa de uma matriz invertível, utilizando determinantes.

Definição 3.25 Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n\geq 2$. Chamamos ***matriz dos complementos algébricos*** de A, e representamos por $\widehat{A}$, a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo complemento algébrico da respectiva posição.
Chamamos ***adjunta*** de A, e representamos por $\operatorname{adj} A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é,

$$\operatorname{adj} A=\widehat{A}^{\mathsf{T}}.$$

Exemplo 3.26

1. Se

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

então

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21}\\ -A_{12} & A_{11}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12}\\ -A_{21} & A_{11}\end{bmatrix}.$$

2. Se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

então

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} 10 & 0 & -8\\ 0 & -7 & 0\\ -6 & 0 & 2\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix} 10 & 0 & -6\\ 0 & -7 & 0\\ -8 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Exercício 3.30 Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

Verifique que

$$\operatorname{adj} A=A.$$

O resultado seguinte estabelece uma relação entre cada matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e a sua adjunta e permite determinar, quando A é invertível, A^{-1} a partir da matriz $\operatorname{adj} A$.

Teorema 3.27 *Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n\geq 2$. Tem-se*

1.

$$A\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \det A & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \det A\end{bmatrix}=(\det A)I_n.$$

2. Se A é invertível então

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A.$$

Demonstração:

1. Seja $A = [A_{ij}]$ e representemos por $\widehat{A}_{ij}$ o complemento algébrico da posição (i,j) de A. Tem-se

$$A\,\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \cdots & \widehat{A}_{1n} \\ & \cdots & \\ \widehat{A}_{n1} & \cdots & \widehat{A}_{nn} \end{bmatrix}^\top$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ & \cdots & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \cdots & \widehat{A}_{n1} \\ & \cdots & \\ \widehat{A}_{1n} & \cdots & \widehat{A}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela definição de produto de matrizes, o elemento (i,i) da matriz $A\,\mathrm{adj}\,A$ é

$$A_{i1}\widehat{A}_{i1} + A_{i2}\widehat{A}_{i2} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{in}$$

o que, pelo Teorema de Laplace aplicado à linha i, é igual a

$$\det A.$$

Para $i \neq j$, o elemento (i,j) da matriz $A\,\mathrm{adj}\,A$ é

$$A_{i1}\widehat{A}_{j1} + A_{i2}\widehat{A}_{j2} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{jn}.$$

Pelo Teorema de Laplace, tal expressão é igual ao determinante da matriz que se obtém de A substituindo a linha j por uma linha igual à linha i. Como tal matriz tem duas linhas iguais (as linhas i e a j), pela Proposição 3.9, o seu determinante é zero. Assim

$$A_{i1}\widehat{A}_{j1} + A_{i2}\widehat{A}_{j2} + \cdots + A_{in}\widehat{A}_{jn} = 0,$$

para $i \neq j$.

Logo

$$A\,\mathrm{adj}\,A = (\det A)I_n.$$

2. Se A é invertível, como

$$A\,\mathrm{adj}\,A = (\det A)I_n,$$

multiplicando ambos os membros, à esquerda, por A^{-1}, resulta a igualdade

$$\mathrm{adj}\,A = (\det A)A^{-1},$$

ou equivalentemente, como $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,A.$$

■

Exercício 3.31 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Mostre que:

(a) Se $n = 2$ então $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A) = A$.

(b) Se $n = 3$ então existe A tal que $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}\,A) \neq A$.

(c) Se A não é invertível então $A\,\mathrm{adj}\,A = 0$.

Exercício 3.32 Mostre que cada uma das matrizes seguintes é invertível e determine a sua inversa a partir da sua adjunta.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.
(Observação: Compare com o Exercício 1.16.)

(c) $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, com $z \neq 0$ ou $w \neq 0$.

Exercício 3.33 Seja $M = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Calcule $\mathrm{adj}\,M$.

(b) Determine para que valores de m a matriz M é invertível.

(c) Nos casos em que M é invertível, determine M^{-1} a partir de $\mathrm{adj}\,M$.

Exercício 3.34 Seja $D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Calcule $\mathrm{adj}\,D$.

Sugestão: Atenda a que a linha (respectivamente, coluna) i, $i = 1, \ldots, n$, tem, no máximo, um elemento não nulo, d_i.

Exercício 3.35 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, uma matriz invertível. Mostre que:

(a) $\mathrm{adj}\,A$ é invertível.

(b) $(\mathrm{adj}\,A)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \mathrm{adj}\,(A^{-1})$.

(c) $|\,\mathrm{adj}\,A| = |A|^{n-1}$.

(d) $\mathrm{adj}\,(\mathrm{adj}\,A) = |A|^{n-2}A$.

3.6 Regra de Cramer

O resultado seguinte diz-nos como podemos, utilizando determinantes, calcular a solução única de qualquer sistema de Cramer que, conforme referimos no Capítulo 2, é um sistema de equações lineares em que a matriz simples do sistema é quadrada e invertível.

Teorema 3.28 (Regra de Cramer) *Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Para cada $j \in \{1,\dots,n\}$, seja A_j a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j pela coluna de B. A solução (única) do sistema anterior é o n-uplo*

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

com

$$\alpha_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Demonstração:

Seja $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

A solução do sistema $AX = B$ é $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior, à esquerda, por A^{-1}, verificamos facilmente que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}B.$$

Tem-se

$$A^{-1}B = \left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right)B = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{adj} A)\,B\right).$$

O elemento da linha j da matriz coluna $(\operatorname{adj} A)B$ é

$$\widehat{A}_{1j}b_1 + \cdots + \widehat{A}_{nj}b_n = b_1\widehat{A}_{1j} + \cdots + b_n\widehat{A}_{nj} = \det A_j,$$

conforme se verifica aplicando o Teorema de Laplace à coluna j da matriz A_j.

Logo

$$\alpha_j = \frac{1}{\det A}(\det A_j) = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

■

Exemplo 3.29

O sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases},$$

tem matriz simples $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, invertível, pois

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{l_3 + (-1)l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

De acordo com o teorema anterior, a solução de tal sistema é $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ com

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2}.$$

Tem-se

$$\alpha_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{0}{2} = 0.$$

Logo $(1,-1,0)$ é a solução do sistema.

A Regra de Cramer utiliza-se para resolver sistemas de Cramer. Mesmo nestes casos, salvo para valores pequenos de n, não tem interesse computacional, sendo preferível utilizar o método referido no Capítulo 2. No entanto, pode ter um interesse teórico, conforme ilustra o Exercício 3.38.

Exercício 3.36 Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

e considere-se o sistema de equações lineares

$$(S) \qquad A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B,$$

nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$.

(a) Calcule $\det A$ e justifique que o sistema (S) é um sistema de Cramer.

(b) Utilizando a Regra de Cramer, determine a solução do sistema (S).

Exercício 3.37 Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & -k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Sejam $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

(a) Usando determinantes, indique para que valores de k a matriz A_k é invertível.

(b) Para $k = -1$ justifique que $AX = B$ é um sistema de Cramer e determine a sua solução.

Exercício 3.38 Seja (S) um sistema de n equações lineares com n incógnitas em que todos os coeficientes e termos independentes são inteiros e a matriz simples do sistema tem determinante igual a 1.

Justifique que (S) é um sistema possível determinado e que a sua solução tem todos os elementos inteiros.

Sugestão: Atenda ao Exercício 3.7.

3.7 Outras formas de definir determinante

A definição que apresentámos de determinante (Definição 3.3) não é a mais frequentemente utilizada nos textos de Álgebra Linear. No entanto, tem a vantagem de ser facilmente perceptível e de permitir deduzir, de forma simples, as propriedades mais importantes do determinante.

Para um estudo mais aprofundado sobre o tema referido nesta secção, incluindo as demonstrações dos Teoremas 3.30 e 3.34, veja-se [6].

Teorema 3.30 *Existe uma, e uma só, aplicação*

$$\mathrm{D} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

que verifica simultaneamente as quatro propriedades seguintes:

1. *Se a linha i de A, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, é da forma*

$$B_i + C_i, \quad \text{com } B_i, C_i \in \mathbb{K}^n,$$

então

$$\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(B) + \mathrm{D}(C),$$

sendo B (respectivamente, C) a matriz que se obtém de A substituindo a linha i por B_i (respectivamente, C_i).

2. *Se A' se obtém de A multiplicando a linha i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, por $\beta \in \mathbb{K}$ então*

$$\mathrm{D}(A') = \beta\,\mathrm{D}(A).$$

3. *Se A'' se obtém de A trocando as linhas i e j, com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j$, então*

$$\mathrm{D}(A'') = -\mathrm{D}(A).$$

4. $\mathrm{D}(I_n) = 1$.

Uma aplicação D que verifica 1 e 2 é referida como uma aplicação linear para cada linha i, $i = 1, \ldots, n$. Frequentemente diz-se que D é ***multilinear***. A propriedade 3 resume-se na afirmação de que a aplicação D é ***alternada*** (pois "alterna" de sinal por cada troca de linhas).

A aplicação D é habitualmente designada por ***aplicação determinantal*** ou ***aplicação determinante***, tendo-se, de acordo com o Teorema 3.30,

> "Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, a aplicação determinante é a única aplicação multilinear alternada que toma o valor 1 para a matriz I_n."

Para cada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ chamamos ***determinante*** de A a $\mathrm{D}(A)$ e denotamos, como anteriormente, por $\det A$ ou $|A|$.

Um outro importante resultado completa o anterior explicitando, para cada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, qual a forma de $\mathrm{D}(A)$. No entanto, para o compreendermos necessitamos de algumas definições.

Definição 3.31 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $S_n = \{1, \dots, n\}$. Chamamos ***permutação*** de S_n a qualquer aplicação bijectiva σ de S_n em S_n.

Uma permutação σ de S_n é frequentemente dada na forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

São exemplos de permutações de S_4

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Frequentemente, cada permutação de S_n é dada indicando apenas a sequência correspondente às imagens dos elementos $1, 2, \dots, n$, respectivamente. Assim, as permutações de S_4, σ_1 e σ_2 anteriores, podem representar-se por

$$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4) \quad \text{e} \quad \sigma_2 = (3, 1, 4, 2).$$

Dizemos então, com abuso de linguagem, que uma permutação de $S_n = \{1, \dots, n\}$ é qualquer sequência com n elementos constituída por todos os naturais $1, \dots, n$, ou ainda, que é qualquer sequência que corresponda a uma "reordenação" da sequência $(1, \dots, n)$.

Definição 3.32 Numa permutação σ, uma ***inversão*** é um par (i, j) tal que

$$i < j \quad \text{e} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Por exemplo, em relação às permutações, σ_1 e σ_2 de S_4, referidas anteriormente, podemos afirmar que

$$\sigma_1 \text{ tem 0 inversões} \quad \text{e} \quad \sigma_2 \text{ tem 3 inversões.}$$

Notemos que, utilizando a representação de uma permutação σ de S_n,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

e unindo por um segmento de recta o número i da linha 1 com o número i da linha 2, $i = 1, \dots, n$, podemos afirmar que cada inversão corresponde a uma intersecção desses segmentos de recta.

Por exemplo, para a permutação σ_2 de S_4, anteriormente referida, ter-se-ia

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, σ_2 tem 3 inversões.

Definição 3.33 Dada uma permutação σ representa-se por $\eta(\sigma)$ o número de inversões de σ e diz-se que σ é uma ***permutação par*** (respectivamente, ***permutação ímpar***) se $\eta(\sigma)$ é um número par (respectivamente, ímpar).

Exercício 3.39 Considere as permutações

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine o número de inversões de σ_i, $i = 1, 2, 3$.

Exercício 3.40 Determine o conjunto dos pares (k, l) para os quais a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ k & 5 & 2 & l & 3 \end{pmatrix}$$

é par.

Exercício 3.41 Qual a paridade da permutação de S_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Notemos que o número de permutações de $S_n = \{1, \dots, n\}$ é $n!$, conforme se demonstra facilmente por indução em n.

Sendo D a aplicação referida no Teorema 3.30, estamos agora em condições de apresentar a forma de $\mathrm{D}(A)$, para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Teorema 3.34 *A única aplicação determinante*

$$\mathrm{D} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

é dada por

$$\mathrm{D}(A) = \sum_{\sigma\in P_n} (-1)^{\eta(\sigma)} A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

para cada matriz $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, onde P_n representa o conjunto das $n!$ permutações de $S_n = \{1, \ldots, n\}$ e $\eta(\sigma)$ representa o número de inversões da permutação σ, isto é, o número de pares (i, j) tais que $1 \leq i < j \leq n$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemplo 3.35

1. Determinemos, utilizando a fórmula dada no Teorema 3.34, a expressão do determinante de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ para $n = 2$ e $n = 3$.
   - Para $n = 2$ temos $2! = 2$ permutações de $\{1,2\}$ dadas por

     $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

     Como $\eta(\sigma_1) = 0$ e $\eta(\sigma_2) = 1$, pelo teorema anterior, tem-se

     $$\begin{aligned}\det A &= (-1)^0 A_{11}A_{22} + (-1)^1 A_{12}A_{21} \\ &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.\end{aligned}$$

   - Para $n = 3$ temos $3! = 6$ permutações de $\{1,2,3\}$, nomeadamente

     $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

     $$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

     Como $\eta(\sigma_1) = 0$, $\eta(\sigma_2) = 1$, $\eta(\sigma_3) = 1$, $\eta(\sigma_4) = 2$, $\eta(\sigma_5) = 2$ e $\eta(\sigma_6) = 3$, obtemos, conforme conhecemos,

     $$\begin{aligned}\det A &= (-1)^0 A_{11}A_{22}A_{33} + (-1)^1 A_{11}A_{23}A_{32} + (-1)^1 A_{12}A_{21}A_{33} \\ &\quad + (-1)^2 A_{12}A_{23}A_{31} + (-1)^2 A_{13}A_{21}A_{32} + (-1)^3 A_{13}A_{22}A_{31} \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} \\ &\quad + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} \\ &= (A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32}) \\ &\quad - (A_{11}A_{23}A_{32} + A_{12}A_{21}A_{33} + A_{13}A_{22}A_{31}).\end{aligned}$$

2. Sejam $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

   $$B_{ij} = \alpha^{i-j} A_{ij}, \quad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

   Verifiquemos, utilizando o Teorema 3.34, que

   $$\det B = \det A.$$

   Tem-se

   $$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in P_n} (-1)^{\eta(\sigma)} B_{1\sigma(1)} \cdots B_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in P_n} (-1)^{\eta(\sigma)} \left(\alpha^{1-\sigma(1)} A_{1\sigma(1)} \cdots \alpha^{n-\sigma(n)} A_{n\sigma(n)}\right) \\ &= \alpha^{1-\sigma(1)} \cdots \alpha^{n-\sigma(n)} \sum_{\sigma\in P_n} (-1)^{\eta(\sigma)} \left(A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}\right) \\ &= \alpha^{(1+\cdots+n)-(\sigma(1)+\cdots+\sigma(n))} \det A \\ &= \alpha^0 \det A \\ &= \det A.\end{aligned}$$

Exercícios suplementares

Secção 3.1 Uma definição por recorrência

Exercício 3.42 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ -1 & a-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b-2 & 0 \\ 2 & 4 & 7b & a \end{bmatrix} \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Justifique que

(a) $\widehat{A}_{43} = 0$.

(b) $\widehat{A}_{44}$ não depende de b.

(c) $\det A$ não depende de b.

Exercício 3.43 Considere a sequência de números em que o primeiro termo é 1, o segundo termo é 2 e cada termo seguinte é a soma dos dois imediatamente anteriores, isto é, a sequência

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Justifique que o n-ésimo termo da sequência anterior é igual ao determinante da matriz

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Sugestão: Aplique o Teorema de Laplace à coluna 1.

Exercício 3.44 Seja

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a & \cdots & b & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & b & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}), \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que:

(a) $|A_{2n}| = (a^2 - b^2)\,|A_{2n-2}|$, convencionando que $|A_0| = 1$.
Sugestão: Aplique o Teorema de Laplace à 1ª linha e seguidamente à linha com número máximo de zeros.

(b) $|A_{2n}| = (a^2 - b^2)^n$.

Secção 3.2 Algumas propriedades do determinante

Exercício 3.45

(a) Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é hemi-simétrica e n é ímpar então $\det A = 0$.

(b) Utilizando (a), justifique que:

(i) A equação $p(x) = \begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ admite a raiz zero.

(ii) $\begin{vmatrix} 0 & (a-b)^3 & (a-c)^3 \\ (b-a)^3 & 0 & (b-c)^3 \\ (c-a)^3 & (c-b)^3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

(c) Indique uma matriz hemi-simétrica B tal que $\det B \neq 0$.

Exercício 3.46 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que:

(a) Se A é hermítica então $\det A$ é um número real.

(b) Se A é hemi-hermítica então $\det A$ é um número imaginário puro se n é ímpar e um número real se n é par.

Secção 3.3 Transformações elementares e determinantes

Exercício 3.47 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $|A| = k$.

Indique, em função de k, o valor de:

(a) $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \beta d & \beta e & \beta f \\ \gamma g & \gamma h & \gamma i \end{vmatrix}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ -d & e & -f \\ g & -h & i \end{vmatrix}$.

(c) $\begin{vmatrix} \alpha g - d & a + \beta g & -g \\ \alpha h - e & b + \beta h & -h \\ \alpha i - f & c + \beta i & -i \end{vmatrix}$.

Exercício 3.48 Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha & \cos(2\alpha) & \cos^2 \alpha \\ \operatorname{sen}^2 \beta & \cos(2\beta) & \cos^2 \beta \\ \operatorname{sen}^2 \gamma & \cos(2\gamma) & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Sugestão: Note que $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ e aplique a Proposição 3.14.

Exercício 3.49 Mostre que se $abcd \neq 0$ então

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}.$$

Sugestão: Multiplique a linha 1 por a, a linha 2 por b, a linha 3 por c e a linha 4 por d.

Exercício 3.50 Os números 20604, 53227, 25755, 20927 e 78421 são divisíveis por 17. Justifique que o mesmo sucede ao determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

sem calcular o seu valor.

Sugestão: Efectue as transformações elementares, do tipo III, sobre colunas,

$$c_5 + 10^4 c_1 + 10^3 c_2 + 10^2 c_3 + 10 c_4.$$

Exercício 3.51 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{2,n-1} & 0 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & A_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ A_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Mostre que

$$|A| = (-1)^k A_{1n} A_{2,n-1} \cdots A_{n1},$$

com $k = 0$ se o resto da divisão de n por 4 é 0 ou 1 e com $k = 1$ se o resto da divisão de n por 4 é 2 ou 3.

Exercício 3.52 Justifique que:

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n!\,.$$

(b) $$\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n & n \\ n & n-1 & \cdots & n & n \\ & & \ddots & & \\ n & n & \cdots & 2 & n \\ n & n & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!\,.$$

Exercício 3.53 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Justifique que A e B têm o mesmo determinante.

Sugestão: Multiplique as linhas e as colunas de índice ímpar por -1.

Exercício 3.54 Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ & & \cdots & \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$.

Sugestão: Subtraia a linha 1 a cada uma das restantes linhas.

Exercício 3.55 Calcule $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ x^n & 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & x^n & 1 & \cdots & x^{n-2} \\ & & & \cdots & \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Exercício 3.56 Justifique que $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ & & & \cdots & \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!$

Sugestão: Subtraia a linha n a cada uma das restantes linhas.

Exercício 3.57 Justifique que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ & & & \cdots & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \Pi_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$.

Sugestão: Comece por efectuar as transformações elementares $l_{i+1} + (-a_i) l_1$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Exercício 3.58 Mostre que

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3.$$

Sugestão: Comece por adicionar à linha 1 as linhas 2 e 3 (ou à coluna 1 as colunas 2 e 3).

Exercício 3.59 Seja $a \in \mathbb{R}$. Resolva a equação, na incógnita x, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

Sugestão: Comece por efectuar transformações elementares do tipo III de forma a que l_1 venha substituída por $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$, em que l_i representa a linha i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Exercício 3.60 Calcule o determinante das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) $$\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix}.$$

(b) $$\begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.61 Justifique que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) x^n.$$

Sugestão: Adicione todas as colunas à primeira coluna.

Exercício 3.62 Para que valores a e b a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & -a & b \\ -a & b & -b \\ b & -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

é invertível?

Secção 3.4 Determinante do produto de matrizes

Exercício 3.63 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$AB = \alpha I_n.$$

Mostre que:

(a) Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então $AB = BA$.

(b) Se $\alpha = 0$ existem matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AB = \alpha I_n$ mas $AB \neq BA$, indicando matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ nas condições referidas.

Exercício 3.64 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que se existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $A^k B^l$ é invertível então, quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{N}$, a matriz $A^r B^s$ é invertível.

Exercício 3.65 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que:

(a) $\det(AA^*) = \det(A^*A) \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) A é invertível se, e só se, o mesmo sucede a AA^* e a A^*A.

Exercício 3.66 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$AB = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & y \\ -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine x e y.

Sugestão: Atenda a que, pelo Exercício 1.74, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercício 3.67 Demonstre, para quaisquer $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, se tem a igualdade

$$(x^2 + y^2)(z^2 + w^2) = (xz + yw)^2 + (xw - yz)^2,$$

utilizando os determinantes

$$\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} z & w \\ -w & z \end{vmatrix}.$$

Exercício 3.68 Sem calcular os determinantes, justifique que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 & c_1 & d_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 & c_2 & d_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 & c_3 & d_3 \\ a_4\alpha_1 + b_4\alpha_2 & a_4\beta_1 + b_4\beta_2 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Sugestão: Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.69 Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ com todas as entradas em $\mathbb{Z}$ e com determinante 1.

Mostre que $\mathcal{A}$, com a multiplicação usual de matrizes, é um grupo. (Veja-se a definição de grupo no Apêndice.)

Exercício 3.70 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ***nilpotente***, isto é, tal que

$$A^p = 0, \quad \text{para algum } p \in \mathbb{N}.$$

Mostre que

$$\det A = 0.$$

Exercício 3.71 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = I_n$). Mostre que

$$\det A \in \{-1, 1\}.$$

Exercício 3.72 Justifique que não existe $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ hemi–ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = -I_n$), com n ímpar e cujo determinante seja um número real.

Exercício 3.73 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^2 = -I_n.$$

(a) Mostre que se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então n é par e $\det A \in \{-1, 1\}$.
(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o que pode afirmar sobre $\det A$?

Exercício 3.74 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^2 = -A.$$

O que pode afirmar sobre $\det A$?

Exercício 3.75 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz unitária (isto é, tal que $AA^* = I_n$). Mostre que $\det A$ tem módulo 1.

Exercício 3.76 Seja $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, com

$$\det A = r.$$

Justifique que as matrizes seguintes são invertíveis e indique, em função de r e de α, o respectivo determinante.

(a) $(\alpha A)^{-1}$.
(b) αA^{-1}.
(c) $\left(\frac{1}{\alpha}A\right)^{-1}$.
(d) $\frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

Exercício 3.77 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível tal que

$$A + A^\top = I_n.$$

Mostre que

$$\det\left(I_n - A^{-1}\right) = (-1)^n.$$

Sugestão: Multiplique ambos os membros de $A + A^\top = I_n$ por A^{-1}.

Secção 3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Exercício 3.78 Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica mas a sua adjunta é simétrica.

Exercício 3.79 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Mostre que:

(a) $(\operatorname{adj} A)^\top = \operatorname{adj}\left(A^\top\right)$.
(b) Se A é simétrica então $\operatorname{adj} A$ é simétrica.
(c) Pode ter-se $\operatorname{adj} A$ simétrica e A não ser simétrica.
Sugestão: Considere $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ com apenas uma entrada não nula numa posição (i, j), com $i \neq j$.

Exercício 3.80 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. O que pode afirmar sobre $\operatorname{adj} A$ se A é hemi–simétrica?

Exercício 3.81 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, com $n \geq 2$.

(a) Mostre que $(\operatorname{adj} A)^* = \operatorname{adj}(A^*)$.
(b) O que pode afirmar sobre $\operatorname{adj} A$ se A é hermítica?

Exercício 3.82 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, e $\widehat{A}$ a matriz dos complementos algébricos de A. Para $\alpha \in \mathbb{K}$, relacione as matrizes $\widehat{A}$ e $\widehat{\alpha A}$.

Exercício 3.83 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Mostre que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, se tem

$$\operatorname{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1} \operatorname{adj} A.$$

Exercício 3.84 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se A é triangular superior (respectivamente, triangular inferior), o que pode afirmar sobre a sua adjunta?

Exercício 3.85 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Mostre que

$$(\operatorname{adj} A)A = |A| I_n.$$

Sugestão: Atenda à demonstração de 1 do Teorema 3.27 e utilize as colunas da matriz A.

Exercício 3.86 Considere a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que A_α é invertível, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Determine A_α^{-1}, a partir da matriz $\operatorname{adj} A_\alpha$, e verifique que

$$A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}.$$

Exercício 3.87 Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K}).$$

Mostre que se $\alpha\varepsilon \neq 0$ então A é invertível e determine A^{-1} a partir da matriz $\operatorname{adj} A$.

Exercício 3.88 Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que C é invertível.

(b) Sem calcular $\operatorname{adj} C$ nem C^{-1} determine o elemento da posição $(4, 4)$ e o elemento da posição $(2, 3)$ de cada uma dessas matrizes.

Exercício 3.89 Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & d & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C}).$$

(a) Calcule $\operatorname{adj} A$.

(b) Para que valores de a, b, c, d a matriz A é invertível?

(c) Nos casos em que A é invertível, determine A^{-1}.

Exercício 3.90 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = I_n$). Justifique que, se $n \geq 2$, então

$$\operatorname{adj} A = A^\top \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{adj} A = -A^\top.$$

Exercício 3.91 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que

(a) $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.

(b) $\operatorname{adj}(A^k) = (\operatorname{adj} A)^k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 3.92 Determine se existe alguma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad |A| = 2.$$

Em caso afirmativo, determine uma matriz nessas condições e indique se tal matriz é única.

Exercício 3.93 Mostre que se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, n é ímpar e B tem determinante negativo então não existe nenhuma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = \operatorname{adj} A.$$

Sugestão: Atenda ao Exercício 3.35(c).

Secção 3.6 Regra de Cramer

Exercício 3.94 Utilizando a Regra de Cramer, determine a solução do sistema de Cramer, nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax + by = b_1 \\ cx + dy = b_2 \end{cases}.$$

Exercício 3.95 Considere o sistema, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S) \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \\ -y - z = -1 \end{cases}.$$

Justifique que (S) é um sistema de Cramer e resolva-o, utilizando a Regra de Cramer.

Exercício 3.96 Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{N}$, com a, b, c dois a dois distintos. Justifique que o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = m \\ a^2x + b^2y + c^2z = m^2 \end{cases}$$

é um sistema de Cramer e resolva-o, utilizando a Regra de Cramer.

Secção 3.7 Outras formas de definir determinante

Exercício 3.97 Verifique que

(a) As permutações de $S_3 = \{1, 2, 3\}$ são 6 sendo 2 com 1 inversão.

(b) As permutações de $S_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ são 24 sendo 6 com 3 inversões.

Exercício 3.98 Determine o número de inversões das seguintes permutações:

(a) $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$.

(b) $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & 1 & 3 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.99 Utilizando a fórmula dada no Teorema 3.34, indique a expressão do determinante de $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sendo A triangular superior.

Exercício 3.100 Seja $B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$B_{ij} \in \{0, 2\}, \quad \text{para qualquer } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Mostre que $\det B$ é um inteiro divisível por 2^n.

Soluções dos exercícios

3.1 (a) 1

(b) -3

(c) 0

3.2 2

3.3 (a) 0

(b) -7

(c) -1

3.4 (a) -1

(b) -4

(c) 3

3.5 $uvxyz$

3.6 $\lambda \in \{0, 1, 3\}$

3.8 $\overline{\alpha}$

3.9 (a) $|A| = |B| = |C| = -6$

(b) 6

3.10 (a) Por exemplo, $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

(b) Por exemplo, $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

3.12 (a) γ

(b) -12γ

(c) γ

(d) -3γ

(e) $-\gamma$

3.15 312

3.16 $k \in \{-2, 1\}$

3.19 (a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$

(b) $\emptyset$

3.20 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

3.21 $|ABC| = -40$
$|3B| = 3^n(-5)$
$|B^2C| = (-5)^2 \cdot 4$

3.24 (b) Por exemplo,
$A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$

3.27 $A^{-1} = \frac{1}{2}B^\top$
$B^{-1} = \frac{1}{2}A^\top$
$\left(B^2\right)^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2\right)^\top$

3.28 $\det\left(C^{-1}A^\top B^{-1}\right) = \frac{1}{10}$

3.29 (a) $|A| = -32$
$|C| = 0$

(b) $|A^{-1}| = -\frac{1}{32}$

(c) (i) Sim
(ii) Não

3.32 (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(b) $V_\alpha^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right] = V_{-\alpha}$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{|z|^2+|w|^2}\begin{vmatrix} \overline{z} & -w \\ -\overline{w} & z \end{vmatrix}$

3.33 (a) $\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 1-m & m^2-1 \end{bmatrix}$

(b) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

(c) $M^{-1} =$
$\frac{1}{(m+2)(m-1)}\begin{bmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{bmatrix}$

3.34 $(\operatorname{adj} D)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \Pi_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{kk} & \text{se } i = j \end{cases}$

3.36 (a) $|A| = -3$

(b) $(1, 2, 3)$

3.37 (a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$

(b) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3.39 Número de inversões de σ_1: 3
Número de inversões de σ_2: 4
Número de inversões de σ_3: 4

3.40 $\{(1,4)\}$

3.41 $\begin{cases} \text{par}, & \text{se } n = 4k \text{ ou } n = 4k+1 \\ \text{ímpar}, & \text{caso contrário} \end{cases}$

3.45 (c) Por exemplo, $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

3.47 (a) $\alpha\beta\gamma k$

(b) k

(c) $-k$

3.55 $\left(1 - x^{n+1}\right)^n$

3.59 $x \in \{-3a, a\}$

3.60 (a) 0

(b) $x^n + (-1)^{n+1} y^n$

3.62 $a \neq b$ e $a \neq -b$

3.66 $x = -1$, $y = 3$

3.73 (b) $\det A \in \{-1, 1\}$, se n é par
$\det A \in \{-i, i\}$, se n é ímpar

3.74 $\det A \in \{0, 1\}$, se n é par
$\det A \in \{0, -1\}$, se n é ímpar

3.76 (a) $\frac{1}{\alpha r}$

(b) $\frac{\alpha}{r}$

(c) $\frac{\alpha}{r}$

(d) $\frac{1}{\alpha r}$

3.80 adj A é simétrica se n é ímpar
adj A é hemi–simétrica se n é par

3.81 (b) adj A é hermítica

3.82 $\widehat{\alpha A} = \alpha^{n-1} \widehat{A}$

3.84 É também triangular superior

3.86 (b) $A_\alpha^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{smallmatrix}\right] = A_{-\alpha}$

3.87 $A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 \varepsilon} \left[\begin{smallmatrix} \alpha\varepsilon & \gamma\delta - \beta\varepsilon & \alpha\gamma \\ 0 & \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & -\alpha\delta & \alpha^2 \end{smallmatrix}\right]$

3.88 (b) $(\operatorname{adj} C)_{44} = -2$, $\left(A^{-1}\right)_{44} = \frac{1}{2}$
$(\operatorname{adj} C)_{23} = -4$, $\left(A^{-1}\right)_{23} = 1$

3.89 (a) $\operatorname{adj} A = (ad - bc) \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & -c \\ d & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -c & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$

(b) $ad \neq bc$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & -c \\ d & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -c & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$

3.92 (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

3.94 Solução do sistema: $\left(\frac{b_1 d - b_2 b}{ad-bc}, \frac{b_2 a - b_1 c}{ad-bc}\right)$

3.95 Solução de (S): $(0,0,1)$

3.96 Solução do sistema:
$\left(\frac{(b-m)(c-m)}{(b-a)(c-a)}, \frac{(m-a)(c-m)}{(b-a)(c-b)}, \frac{(m-a)(m-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$

3.98 (a) $(n-1)!$ inversões

(b) $n!$ inversões

3.99 $\det A = A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{n\sigma(n)}$,
onde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

CAPÍTULO 4

Espaços Vectoriais

4.1 Definição, exemplos e propriedades

No Capítulo 1 definimos, no conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, uma operação que designámos por adição e representámos por $+$ e que é comutativa, associativa, tem elemento neutro e tal que todo o elemento de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem oposto para tal operação.

Definimos também uma operação de multiplicação de um escalar por uma matriz que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ associa uma matriz $\alpha A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Vimos que esta operação goza das propriedades referidas na Proposição 1.15, isto é, que

1. $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$
2. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$
3. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$
4. $\forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \qquad 1A = A.$

Consideremos então a seguinte definição:

Definição 4.1 Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Suponhamos definidas duas operações:

- uma que designamos por ***adição*** em E, que é uma operação binária, isto é, associa a cada par (a, b) de elementos de E um, e um só, elemento de E que representamos por $a + b$.

- outra operação, que denominamos ***multiplicação externa***, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $u \in E$ associa um, e um só, elemento de E que denotaremos por $\alpha \cdot u$ ou simplesmente αu.

Dizemos que E, com estas duas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ ou que $(E, +, \cdot)$ é um ***espaço vectorial*** sobre $\mathbb{K}$ se

1. Em E, a adição é uma operação binária que goza das seguintes propriedades:

(A_1) $\forall_{u,v \in E} \quad u + v = v + u.$

(A_2) $\forall_{u,v,w \in E} \quad (u + v) + w = u + (v + w).$

(A_3) $\exists_{0_E \in E} \quad \forall_{u \in E} \quad u + 0_E = u = 0_E + u.$

(A_4) $\forall_{u \in E} \quad \exists_{u' \in E} \quad u + u' = 0_E = u' + u.$

2. A multiplicação externa goza das seguintes propriedades:

(M_1) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u,v \in E} \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$

(M_2) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in E} \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$

(M_3) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in E} \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$

(M_4) $\forall_{u \in E} \quad 1u = u.$

Notemos que, na definição anterior, estamos a representar pelo símbolo "+" quer a adição em $\mathbb{K}$ quer a adição em E, tal como estamos a representar por "·" quer a multiplicação em $\mathbb{K}$ (que é uma operação binária) quer a multiplicação externa (que, em geral, não é uma operação binária).

Se fizéssemos a distinção, supondo que + e · eram, respectivamente, as notações para a adição e a multiplicação em $\mathbb{K}$ e que, $\boxplus$ e $\boxdot$ eram, respectivamente, as notações para a adição em E e para a multiplicação externa então, por exemplo, as propriedades (M_2) e (M_3) tomariam a seguinte forma:

(M_2) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in E} \quad (\alpha + \beta) \boxdot u = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u).$

(M_3) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in E} \quad (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u).$

No entanto, a distinção não é necessária uma vez que o contexto desfaz

qualquer ambiguidade: se a adição é entre elementos de $\mathbb{K}$ (respectivamente, de E) é a adição em $\mathbb{K}$ (respectivamente, em E), se a multiplicação é entre elementos de $\mathbb{K}$ é a multiplicação em $\mathbb{K}$, se é a multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por um elemento de E então é a multiplicação externa.

Exercício 4.1 Reescreva a Definição 4.1 utilizando os símbolos + e · para a adição e a multiplicação em $\mathbb{K}$, respectivamente, e os símbolos $\boxplus$ e $\boxdot$ para a adição em E e a multiplicação externa, respectivamente.

Definição 4.2 Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Aos elementos de E chamamos ***vectores***. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que E é um ***espaço vectorial complexo*** e se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que E é um ***espaço vectorial real***.

Vejamos alguns exemplos de espaços vectoriais.

Exemplo 4.3

1. $\mathbb{K}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de elementos de $\mathbb{K}$.

   Assim

   $$\mathbb{R} \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{R}$$

   e

   $$\mathbb{C} \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{C}.$$

   Note que

   $$\mathbb{C} \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{R}, \text{ que representaremos por } \mathbb{C}_{\mathbb{R}},$$

   mas

   $$\mathbb{R} \text{ não é um espaço vectorial sobre } \mathbb{C}. \text{ (Porquê?)}$$

2. $\mathbb{K}^n$, com a operação usual de adição de n-uplos, dada por

   $$\forall_{(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}^n} \qquad (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

   e com a operação de multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por um n-uplo, dada por

   $$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n} \qquad \alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n),$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Assim, generalizando 1 deste exemplo, poderemos afirmar que

$$\mathbb{R}^n \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{R}$$

e

$$\mathbb{C}^n \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{C}.$$

Tem-se, ainda, que

$$\mathbb{C}^n \text{ é um espaço vectorial sobre } \mathbb{R}$$

mas

$$\mathbb{R}^n \text{ não é um espaço vectorial sobre } \mathbb{C}. \text{ (Porquê?)}$$

3. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por uma matriz, definidas no Capítulo 1, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

   $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ mas $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

4. Represente-se por $\mathbb{K}_n[x]$ o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$, de grau inferior ou igual a n, com $n \in \mathbb{N}_0$, isto é,

   $$\mathbb{K}_n[x] = \{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 : \ a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}\}.$$

   $\mathbb{K}_n[x]$ com a operação usual de adição de polinómios, dada por

   $\forall_{(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0),(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)\in\mathbb{K}_n[x]}$

   $$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) + (b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0) = (a_n + b_n)x^n + \cdots$$
   $$\cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

   e com a multiplicação usual de um elemento de $\mathbb{K}$ por um polinómio, dada por

   $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\in\mathbb{K}_n[x]}$

   $$\alpha(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = (\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0),$$

   é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

   $\mathbb{C}_n[x]$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ mas $\mathbb{R}_n[x]$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

5. Se representarmos por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$ (sem restrição ao grau), podemos afirmar que $\mathbb{K}[x]$, com as operações usuais de adição de polinómios e de multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por um polinómio, constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

6. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto não vazio e seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Consideremos o conjunto $\mathcal{A}$ de todas as aplicações de $\mathcal{C}$ em E.

   Defina-se em $\mathcal{A}$ uma adição que a cada par (f, g) de elementos de $\mathcal{A}$ associa o elemento de $\mathcal{A}$, representado por $f + g$ e definido por

   $$f + g : \quad \mathcal{C} \longrightarrow E$$
   $$\forall_{u\in\mathcal{C}} \qquad (f + g)(u) = f(u) + g(u).$$

   Defina-se ainda uma multiplicação externa que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $f \in \mathcal{A}$ associa o elemento de $\mathcal{A}$, representado por αf e definido por

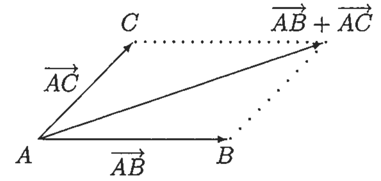
   $$\alpha f : \quad \mathcal{C} \longrightarrow E$$
   $$\forall_{u\in\mathcal{C}} \qquad (\alpha f)(u) = \alpha f(u).$$

   $\mathcal{A}$, com as operações anteriores, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

7. O último exemplo que apresentamos é motivado pela geometria elementar que historicamente está na base da teoria dos Espaços Vectoriais.

   Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos do plano (ou do espaço). Dados dois pontos A e B de $\mathcal{E}$, define-se vector $\overrightarrow{AB}$ como sendo o segmento orientado com extremidade inicial no ponto A e extremidade final no ponto B.

   No conjunto V_A dos vectores aplicados com origem no ponto A defina-se uma adição que aos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ associa o vector $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ obtido pela conhecida regra do paralelogramo



   e defina-se uma multiplicação externa que a cada número real α e a cada vector $\overrightarrow{AB}$ associa o vector $\alpha\overrightarrow{AB}$ cuja direcção é a do vector $\overrightarrow{AB}$, o sentido é o de $\overrightarrow{AB}$ se $\alpha > 0$ e é o sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$ se $\alpha < 0$ (se $\alpha = 0$ então $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$) e cujo comprimento é $\|\alpha\overrightarrow{AB}\| = |\alpha| \, \|\overrightarrow{AB}\|$.

   Embora não sendo simples, argumentos de natureza geométrica permitiriam concluir que V_A, com estas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ (isto é, um espaço vectorial real).

Exercício 4.2 Defina-se uma adição em $\mathbb{R}^2$ e uma multiplicação externa de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ por, respectivamente,

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ \alpha(a_1, a_2) &= (\alpha a_1, 0)\end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ não é espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 4.3 Seja $V = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Defina-se uma adição em V e uma multiplicação externa de $\mathbb{R} \times V$ em V por, respectivamente,

$$(x, x^2) + (y, y^2) = (x + y, (x + y)^2)$$

e

$$\alpha (x, x^2) = (\alpha x, (\alpha x)^2)$$

para quaisquer $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $(V, +, \cdot)$ é espaço vectorial real.

Exercício 4.4 Considere o conjunto $\mathbb{R}^+$ com uma adição definida por

$$u \boxplus v = uv \qquad \text{(produto usual)}$$

e uma multiplicação externa definida por

$$\alpha \boxdot u = u^\alpha \qquad \text{(potência usual)},$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^+$.
Mostre que, com estas operações, $\mathbb{R}^+$ é um espaço vectorial real.

Salvo menção em contrário, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}_n[x]$ e $\mathbb{C}[x]$, que são espaços vectoriais sobre $\mathbb{C}$ mas também sobre $\mathbb{R}$, são considerados espaços vectoriais sobre $\mathbb{C}$.

Frequentemente, e se não houver ambiguidade, referimo-nos ao "espaço vectorial E" com o significado de "espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$".

No que se segue, quando referirmos casos particulares de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$ ou $\mathbb{K}_n[x]$ tais conjuntos deverão ser considerados como espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$, com as operações que, salvo menção em contrário, são as da adição e da multiplicação externa referidas no Exemplo 4.3.

Proposição 4.4 *Seja E um conjunto não vazio e $+$ uma operação binária em E com as propriedades (A_1) a (A_4) referidas na Definição 4.1. Tem-se*

1. *O elemento neutro da adição em E é único.*
(Habitualmente é representado por 0_E.)

2. *Para cada $u \in E$, o oposto de u, para a adição, é único.*
(O oposto, para a adição, de $u \in E$ é representado por $-u$.)

3. $\forall_{u,v,w \in E} \quad u + v = u + w \quad \Rightarrow \quad v = w.$
(Lei do Corte, à esquerda.)

4. $\forall_{u,v,w \in E} \quad v + u = w + u \quad \Rightarrow \quad v = w.$
(Lei do Corte, à direita.)

Demonstração:

1. Suponhamos que, para todo $u \in E$, existiam $a, a' \in E$ verificando

$$a + u = u + a = u$$

e

$$a' + u = u + a' = u.$$

Então, como a é elemento neutro,

$$a + a' = a'.$$

Por outro lado, como a' também é elemento neutro,

$$a + a' = a.$$

Logo

$$a = a'.$$

2. Suponhamos que, para $u \in E$, existiam dois simétricos u' e u''. Como

$$u + u' = 0_E = u' + u$$

e

$$u + u'' = 0_E = u'' + u$$

então

$$u' = u' + 0_E = u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0_E + u'' = u''.$$

3. Suponhamos que $u, v, w \in E$ e que

$$u + v = u + w.$$

Então

$$(-u) + (u + v) = (-u) + (u + w).$$

Como a operação $+$ é associativa, tem-se

$$((-u) + u) + v = ((-u) + u) + w.$$

Assim

$$0_E + v = 0_E + w$$

e, portanto,

$$v = w.$$

4. Demonstração análoga à de 3.

■

Por vezes para evidenciar que se aplicou a Lei do Corte, à esquerda, dada em 3 da Proposição 4.4, escrevemos $\cancel{u} + v = \cancel{u} + w$.

Exercício 4.5 Indique 0_E nos seguintes casos:

(a) $E = \mathbb{R}^4$.
(b) $E = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
(c) $E = \mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 4.6 Indique o oposto, para a adição, de cada um dos elementos do espaço vectorial indicado.

(a) $(1, -2, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$.
(b) $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.
(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(d) $x^3 - 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_3[x]$.

Na Definição 4.1 a afirmação de que E é um conjunto não vazio é redundante pois E tem, pelo menos, um elemento, o 0_E. Pode é ser o único elemento de E. De facto, se considerarmos um conjunto singular $E = \{u\}$ e definirmos a adição em E e a multiplicação externa de acordo com a Definição 4.1, isto é,

$$u + u = u$$

e

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \qquad \alpha u = u,$$

concluímos que E, com estas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se, obviamente, $0_E = u$.

Representemos por $0_{\mathbb{K}}$ ou simplesmente por 0 o elemento neutro da adição em $\mathbb{K}$.

Proposição 4.5 *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e qualquer $u \in E$ tem-se*

1. $\alpha 0_E = 0_E$.
2. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$.
3. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$ *e, em particular,* $(-1)u = -u$.
4. *Se* $\alpha u = 0_E$ *então* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$.

Demonstração:

1. Dado que $0_E = 0_E + 0_E$, tem-se

$$\alpha 0_E = \alpha(0_E + 0_E)$$

e, portanto,

$$\alpha 0_E + 0_E = \alpha 0_E + \alpha 0_E.$$

Logo, pela Lei do Corte, à esquerda,

$$0_E = \alpha 0_E.$$

2. Tem-se

$$0_{\mathbb{K}} u = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})u$$

e, portanto,

$$0_E + 0_{\mathbb{K}} u = 0_{\mathbb{K}} u + 0_{\mathbb{K}} u.$$

Assim, pela Lei do Corte, à direita,

$$0_E = 0_{\mathbb{K}}u.$$

3. Demonstremos que $(-\alpha)u = -(\alpha u)$, isto é, que o oposto de αu é igual a $(-\alpha)u$. Tal equivale a demonstrar que

$$\alpha u + (-\alpha)u = 0_E.$$

Tem-se

$$\alpha u + (-\alpha)u = (\alpha + (-\alpha))u = 0_{\mathbb{K}}u = 0_E.$$

Demonstremos agora que $\alpha(-u) = -(\alpha u)$, isto é, que o oposto de αu é também igual a $\alpha(-u)$. Tal equivale a afirmar que

$$\alpha u + \alpha(-u) = 0_E.$$

Tem-se

$$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha(u + (-u)) = \alpha 0_E = 0_E.$$

Concluímos assim que

$$(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u).$$

Considerando $\alpha = 1$ na igualdade $(-\alpha)u = -(\alpha u)$, obtemos

$$(-1)u = -(1u) = -u.$$

4. Suponhamos que

$$\alpha u = 0_E.$$

Tem-se um, e um só, dos seguintes casos: $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$.
Se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ então a implicação 4 está demonstrada.
Se $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ então α^{-1} existe. Da igualdade

$$\alpha u = 0_E$$

resulta

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(\alpha u) &= \alpha^{-1}0_E \\ (\alpha^{-1}\alpha)u &= 0_E \\ 1u &= 0_E \\ u &= 0_E, \end{aligned}$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Como última observação desta secção, notemos que na definição de espaço vectorial há informação redundante, além da de E ser um conjunto não vazio. A comutatividade da adição em E pode também ser deduzida das restantes propriedades. De facto

$$\begin{aligned} \forall_{u,v\in E} \qquad (1+1)(u+v) &= (1+1)u + (1+1)v \\ &= (1u + 1u) + (1v + 1v) \\ &= (u+u) + (v+v) \\ &= u + u + v + v, \end{aligned}$$

por aplicação da propriedade (M_1) da Definição 4.1 seguida da aplicação de (M_2).

Por outro lado, se aplicarmos a propriedade (M_2) e posteriormente a (M_1) temos

$$\begin{aligned} \forall_{u,v\in E} \qquad (1+1)(u+v) &= 1(u+v) + 1(u+v) \\ &= (1u + 1v) + (1u + 1v) \\ &= (u+v) + (u+v) \\ &= u + v + u + v. \end{aligned}$$

Assim, utilizando as Leis do Corte de forma conveniente, resulta

$$\begin{aligned} \forall_{u,v\in E} \qquad \cancel{u} + u + v + v &= \cancel{u} + v + u + v \\ u + v + \cancel{v} &= v + u + \cancel{v} \\ u + v &= v + u. \end{aligned}$$

Exercício 4.7 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E$. Justifique que:

(a) Se $\alpha u = \alpha v$ e $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ então $u = v$.
(b) Se $\alpha u = \beta u$ e $u \neq 0_E$ então $\alpha = \beta$.

Exercício 4.8 Indique uma demonstração alternativa para

(a) 2 da Proposição 4.5, partindo de
$$(1 + 0_{\mathbb{K}})u = u.$$
(b) 1 da Proposição 4.5, utilizando 2 da mesma proposição e a igualdade
$$\alpha 0_E = \alpha(0\, 0_E).$$

Exercício 4.9 Seja $(E, +)$ um grupo comutativo. Defina-se uma multiplicação externa por

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in E} \qquad \alpha \cdot u = 0_E.$$

Justifique que $(E, +, \cdot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ se, e só se, $E = \{0_E\}$. (Veja-se a definição de grupo comutativo no Apêndice.)

4.2 Subespaços vectoriais

Definição 4.6 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto F de E diz-se um ***subespaço vectorial*** de E, ou simplesmente um ***subespaço*** de E, se F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações nele naturalmente definidas por ser subconjunto de E (a que chamamos as ***operações induzidas*** pelas operações de E no conjunto F).

O resultado seguinte permite-nos determinar se um subconjunto F de um espaço vectorial E é um subespaço de E e, portanto, um espaço vectorial, sem necessitarmos de verificar todas as propriedades da definição de espaço vectorial. Constitui, em muitos livros, a própria definição de subespaço.

Teorema 4.7 *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se, F é um subespaço de E se, e só se, satisfizer cada uma das condições seguintes:*

1. $F \subseteq E$

2. $0_E \in F$

3. $\forall_{u,v \in F} \qquad u + v \in F$

4. $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u \in F} \qquad \alpha u \in F$

ou, equivalentemente, se satisfizer as condições que resultam das anteriores substituindo 2 por

2'. $F \neq \emptyset$.

Demonstração:

Suponhamos que F é um subespaço de E. Logo, por definição de subespaço, verificam-se trivialmente 1, 3 e 4.

Para demonstrar **2** vejamos que se tem $0_E = 0_F$ e, portanto, $0_E \in F$.

Basta atender a que

$$\forall_{u \in F} \qquad u + 0_F = u,$$

e, como $F \subseteq E$, verifica-se ainda que

$$\forall_{u \in F} \qquad u + 0_E = u.$$

Assim, aplicando a Lei do Corte, no espaço vectorial E, tem-se

$$\cancel{u} + 0_E = \cancel{u} + 0_F$$

e, portanto,

$$0_E = 0_F.$$

Notemos que, como $0_E \in F$, se tem **2'**.

Reciprocamente, suponhamos que 1, 2, 3 e 4 são satisfeitas.

Notemos que se uma propriedade é válida para quaisquer elementos de E também é válida para quaisquer elementos de F pois $F \subseteq E$.

Assim, e como E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, para concluir que F é também um espaço vectorial sobre K, temos apenas de demonstrar que existe elemento neutro para a adição em F (o que está garantido por 2) e que todo o elemento $v \in F$ tem simétrico em F. Como, por 4,

$$\forall_{v \in F} \qquad (-1)v \in F$$

concluímos, por 3 da Proposição 4.5 (válida para todo o elemento $v \in E$), que

$$-v \in F,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Se forem satisfeitas 1, 2', 3 e 4 concluímos analogamente que F é um espaço vectorial. Temos apenas de garantir que, em F, existe elemento neutro para a adição. De

2'. $F \neq \emptyset$

resulta que existe $u \in F$. Por 4, tem-se

$$0_{\mathbb{K}} u \in F.$$

Como $u \in E$ e se verifica

$$\forall_{u \in E} \qquad 0_{\mathbb{K}} u = 0_E,$$

concluímos que

$$0_E \in F.$$

■

Exercício 4.10 Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $u, v \in E$ e F um subespaço vectorial de E. Mostre que:

(a) Se $u \in F$ então $-u \in F$.
(b) Se $u, v \in F$ então $u - v \in F$.
(c) Se $u + v \in F$ e $u \in F$ então $v \in F$.
(d) Se existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha u \in F$ então $u \in F$.

Exercício 4.11 Demonstre que no Teorema 4.7 a conjunção das condições 3 e 4 é equivalente a cada uma das seguintes condições:

(a) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u,v \in F} \qquad \alpha u + \beta v \in F.$
(b) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u,v \in F} \qquad \alpha u + v \in F.$
(c) $\forall_{\beta \in \mathbb{K}} \quad \forall_{u,v \in F} \qquad u + \beta v \in F.$

Exemplo 4.8

Atendendo a 2 do Teorema 4.7, podemos afirmar que:

1. $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
2. $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
3. $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\}$ não é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Vejamos alguns exemplos de subespaços vectoriais.

Exemplo 4.9

1. Verifiquemos que

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \\ &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

· $F \subseteq \mathbb{R}^2$, pela definição de F.

· $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$.

· $\forall_{(x,y),(x',y') \in F} \qquad (x, y) + (x', y') \in F.$
De facto, como $(x, y) \in F$ tem-se $y = 0$ e, analogamente, como $(x', y') \in F$ verifica-se que $y' = 0$. Assim

$$\forall_{(x,y),(x',y') \in F} \qquad (x, y) + (x', y') = (x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \in F.$$

· $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \forall_{(x,y) \in F} \qquad \alpha(x, y) \in F.$
Basta atender a que, como $(x, y) \in F$, se tem $y = 0$ e, portanto,

$$\alpha(x, y) = \alpha(x, 0) = (\alpha x, \alpha 0) = (\alpha x, 0) \in F.$$

Assim

$$F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, habitualmente referido como o eixo OX.

Analogamente se verificaria que são ainda subespaços de $\mathbb{R}^2$:

$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ (eixo OY).
$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ (bissectriz dos quadrantes ímpares).
$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$ (bissectriz dos quadrantes pares).
Para cada $m \in \mathbb{R}$,
$R_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\}$
(recta, com declive m, que passa na origem).

Não são subespaços de $\mathbb{R}^2$,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

e para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$R_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

(recta, com declive m, que não passa na origem).

2. Seja
$$F=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a=-c \wedge b=d\right\},$$
isto é,
$$F=\left\{\begin{bmatrix} -c & d \\ c & d \end{bmatrix} : c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Demonstremos que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- $F\subseteq\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pela própria definição de F.
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in F$, pois basta considerar $c=d=0$ na definição de F.
- Verifiquemos que
$$\forall_{A,B\in F}\qquad A+B\in F.$$
De facto, quaisquer que sejam os números reais c,c',d,d', tem-se
$$\begin{bmatrix} -c & d \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -c' & d' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c-c' & d+d' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(c+c') & d+d' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}\in F.$$
- Finalmente verifiquemos que
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \forall_{A\in F}\qquad \alpha A\in F.$$
Tem-se, quaisquer que sejam os números reais α,c,d,
$$\alpha\begin{bmatrix} -c & d \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha(-c) & \alpha d \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\alpha c & \alpha d \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\in F.$$

Logo F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. $\mathbb{K}_n[x]$, qualquer que seja $n\in\mathbb{N}$, é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$ (vejam-se as notações no Exemplo 4.3) mas o conjunto dos polinómios de $\mathbb{K}[x]$ de grau igual a n não é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$, tal como não é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinómios de grau superior ou igual a n.

Exercício 4.12 Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $F_1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\geq 0\}$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) $F_2=\{(0,0,0),(0,1,0),(0,-1,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$.
(c) $F_3=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 2a=b \wedge c=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.
(d) $F_4=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : 2a=b\}$ em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.13 Considere o conjunto W de todos os polinómios na variável x, com coeficientes inteiros, de grau inferior ou igual a n, com $n\in\mathbb{N}$. Determine se W é um subespaço de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercício 4.14 Mostre que é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Triangulares superiores.
(b) Diagonais.
(c) Escalares.
(d) Simétricas.
(e) Hemi-simétricas.

Exercício 4.15 Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Invertíveis.
(b) Não invertíveis.
(c) Com a diagonal principal não nula.

Exercício 4.16 Seja $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que o conjunto $\mathcal{C}$ das soluções do sistema homogéneo $AX=0$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

De acordo com o resultado seguinte, todo o espaço vectorial admite pelo menos um subespaço.

Proposição 4.10 *Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ então E e $\{0_E\}$ são subespaços de E.*

Demonstração:

Exercício.

■

Tais subespaços, que existem sempre, dizem-se os ***subespaços triviais*** de E, sendo iguais se, e só se, $E=\{0_E\}$.

Exercício 4.17 Justifique que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$ são os subespaços triviais.

Vejamos como, a partir de subespaços de um espaço vectorial E, podemos construir outros subespaços de E.

Teorema 4.11 *Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E então $F \cap G$ é, ainda, um subespaço de E.*

Demonstração:

Demonstremos que se F e G são subespaços de E então o mesmo sucede a

$$F \cap G = \{u \in E : \ u \in F \ \wedge \ u \in G\}.$$

Tem-se, trivialmente, $F \cap G \subseteq E$.

Como $0_E \in F$ e $0_E \in G$ então $0_E \in (F \cap G)$.

Demonstremos que

$$\forall_{u,v \in (F \cap G)} \qquad u + v \in (F \cap G).$$

Como $u \in (F \cap G)$ tem-se $u \in F$ e $u \in G$. Analogamente, se $v \in (F \cap G)$ então $v \in F$ e $v \in G$. Como $u, v \in F$ e F é um subespaço concluímos que $u + v \in F$. De forma idêntica, dado que $u, v \in G$ e G é um subespaço tem-se $u + v \in G$. Logo concluímos, como pretendíamos, que $u + v \in (F \cap G)$.

Finalmente, vejamos que

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{K}} \quad \forall_{u \in (F \cap G)} \qquad \alpha u \in (F \cap G).$$

Dado que $u \in (F \cap G)$, podemos afirmar que $u \in F$ e $u \in G$. Como F (respectivamente, G) é um subespaço, concluímos que $\alpha u \in F$ (respectivamente, $\alpha u \in G$). Logo $\alpha u \in (F \cap G)$.

∎

Exemplo 4.12

Em $\mathbb{R}^4$, consideremos os subespaços

$$F = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \ a - b = 0 \ \wedge \ a - b - d = 0\right\}$$

e

$$G = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \ b - c = 0 \ \wedge \ d = 0\right\}.$$

Tem-se

$$F \cap G = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a - b - d = 0 \wedge b - c = 0 \wedge d = 0\right\}.$$

O sistema de equações lineares, nas incógnitas a, b, c, d, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a - b - d = 0 \\ b - c = 0 \\ d = 0 \end{cases},$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} a = c \\ b = c \\ d = 0 \end{cases}$$

pois

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + (-1)l_1]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_4 + l_3]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1 + l_2 \\ (-1)l_3}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : \ a = c \ \wedge \ b = c \ \wedge \ d = 0\right\} \\ &= \left\{(c, c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Exercício 4.18 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x = y \ \wedge \ z = w\right\},$$

$$G = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x = z = 0\right\}$$

e

$$H = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ y = z\right\}.$$

Determine:

(a) $F \cap G$.
(b) $F \cap H$.
(c) $G \cap H$.

A união de subespaços pode não ser um subespaço, conforme ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.13

Considere-se

$$E = \mathbb{R}^2, \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{e} \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$

Tem-se

$$F \cup G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \lor y = 0\}.$$

Logo

$$(2,0) \in F \cup G \quad \text{e} \quad (0,3) \in F \cup G$$

mas

$$(2,0) + (0,3) = (2,3) \notin F \cup G.$$

Há casos em que, trivialmente, a união de dois subespaços F e G de um espaço vectorial E é ainda um subespaço de E. Por exemplo, se $F \subseteq G$ então $F \cup G = G$ pelo que $F \cup G$ é um subespaço de E. Analogamente, se $G \subseteq F$ então $F \cup G = F$ e, portanto, $F \cup G$ é um subespaço de E.

De facto são os únicos casos em que a união de subespaços é um subespaço, conforme refere o resultado seguinte.

Proposição 4.14 *Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Tem-se, $F \cup G$ é um subespaço de E se, e só se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.*

Demonstração:

Conforme já observámos, se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$ então $F \cup G$ é um subespaço de E.

Demonstremos que se $F \cup G$ é um subespaço de E então $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Suponhamos que $F \cup G$ é um subespaço de E, que $F \not\subseteq G$ e vejamos que $G \subseteq F$, isto é, que para todo $v \in G$ se tem $v \in F$.

Como $F \not\subseteq G$ existe $u \in F$ tal que $u \notin G$. Notemos que

$$u \in F \cup G$$

e, para qualquer $v \in G$,

$$v \in F \cup G.$$

Atendendo a que, por hipótese, $F \cup G$ é um subespaço de E, podemos afirmar que

$$u + v \in F \cup G.$$

Assim

$$u + v \in F \quad \text{ou} \quad u + v \in G.$$

Não pode ter-se $u + v \in G$ porque, nesse caso, como $v \in G$ e, portanto, $-v \in G$ ter-se-ia, por G ser subespaço,

$$(u + v) + (-v) = u \in G.$$

Tal é uma contradição pois, por hipótese, $u \notin G$. Logo

$$u + v \in F.$$

Como $u \in F$ e, portanto, $-u \in F$, concluímos que

$$(-u) + (u + v) = v \in F,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

De forma idêntica se demonstraria que se $F \cup G$ é um subespaço de E e $G \not\subseteq F$ então $F \subseteq G$.

■

Sendo F e G subespaços de um espaço vectorial E, a definição que a seguir apresentamos corresponde, conforme veremos posteriormente, ao "menor" subespaço de E que contém $F \cup G$.

Constitui uma outra forma de construir subespaços de um espaço vectorial E a partir de subespaços de E, que não tem correspondência nos conjuntos, e em que intervém a operação binária de adição em E.

Definição 4.15 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Chamamos ***soma*** dos subespaços F e G, e representamos por $F + G$, a

$$F + G = \{u + v : u \in F \land v \in G\}.$$

Teorema 4.16 *A soma de dois subespaços de um espaço vectorial E é ainda um subespaço de E.*

Demonstração:

Exercício.

■

Exemplo 4.17

Sejam

$$E=\mathbb{R}^2,\quad F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=0\},$$

$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0\}\quad \text{e}\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=y\}.$$

Verifiquemos que

$$F+G=\mathbb{R}^2=F+H.$$

De facto, é trivial que $F+G\subseteq\mathbb{R}^2$. Para demonstrar que

$$\mathbb{R}^2\subseteq F+G$$

basta atender a que

$$\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\qquad (x,y)=(x,0)+(0,y),$$

com $(x,0)\in F$ e $(0,y)\in G$. Assim

$$\mathbb{R}^2=F+G.$$

Analogamente, é ainda trivial a inclusão

$$F+H\subseteq\mathbb{R}^2.$$

Como

$$\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\qquad (x,y)=(x-y,0)+(y,y),$$

com $(x-y,0)\in F$ e $(y,y)\in H$, concluímos que

$$\mathbb{R}^2\subseteq F+H.$$

Logo

$$\mathbb{R}^2=F+H.$$

Exercício 4.19 Seja F um subespaço de um espaço vectorial E. Justifique que:

(a) Existe um subespaço W de E tal que $F+W=F$.

(b) $F+F=F$.

Exercício 4.20 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Mostre que:

(a) F (respectivamente, G) é subespaço de $F+G$.

(b) $F\subseteq G$ se, e só se, $F+G=G$.

Definição 4.18 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E tais que

$$\forall_{w\in E}\quad \exists_{u\in F}\quad \exists_{v\in G}\qquad w=u+v.$$

Dizemos então que E é a ***soma*** dos subespaços F e G e escrevemos

$$E=F+G.$$

Tal soma diz-se ***soma directa***, e escrevemos

$$E=F\oplus G,$$

se

$$\forall_{w\in E}\quad \exists^1_{u\in F}\quad \exists^1_{v\in G}\qquad w=u+v.$$

Nestas condições dizemos que G (respectivamente, F) é um ***subespaço suplementar*** de F (respectivamente, G) em E. Diz-se ainda que o vector u é a ***projecção*** de w sobre F, segundo G, e que o vector v é a projecção de w sobre G, segundo F.

O resultado seguinte vai permitir, em particular, determinar se uma soma é directa, por um processo alternativo.

Proposição 4.19 *Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. São equivalentes as afirmações:*

1. $F\cap G=\{0_E\}$.
2. *Quaisquer que sejam $u,u'\in F$ e $v,v'\in G$, se $u+v=u'+v'$ então $u=u'$ e $v=v'$.*

Demonstração:

Demonstremos que 1 implica 2. Suponhamos que 1 se verifica e sejam $u, u' \in F$ e $v, v' \in G$ tais que

$$u + v = u' + v'.$$

Tem-se

$$u + (-u') = (-v) + v' \in F \cap G$$

pois $u + (-u') \in F$ e $(-v) + v' \in G$. Logo, como $F \cap G = \{0_E\}$, obtemos

$$u + (-u') = 0_E = (-v) + v'.$$

Assim

$$u = u' \quad \text{e} \quad v = v',$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Demonstremos que 2 implica 1. Tem-se trivialmente $\{0_E\} \subseteq F \cap G$. Vejamos que $F \cap G \subseteq \{0_E\}$.

Seja $w \in F \cap G$. Tem-se

$$w \in F \ \wedge \ w \in G \ \wedge \ w = 0_E + w = w + 0_E.$$

Por 2 concluímos que $w = 0_E$ e, portanto,

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

■

Proposição 4.20 *Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E. São equivalentes as afirmações:*

1. $E = F \oplus G$.

2. $E = F + G$ *e* $F \cap G = \{0_E\}$.

Demonstração:

Exercício.

■

OBSERVAÇÃO: As noções de soma e de soma directa de subespaços podem ser generalizadas a mais do que dois subespaços da forma seguinte. Diz-se que E é a soma dos seus subespaços $F_1, \ldots, F_r$, e escreve-se

$$E = F_1 + \cdots + F_r,$$

se

$$\forall_{w \in E} \quad \exists_{u_1 \in F_1, \ldots, u_r \in F_r} \qquad w = u_1 + \cdots + u_r.$$

Se tal decomposição é única, isto é, se existe um, e um só, $u_i \in F_i$, $i = 1, \ldots, r$, tal que $w = u_1 + \cdots + u_r$, dizemos que a soma é directa e escrevemos

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r.$$

Exercício 4.21 Em $\mathbb{R}^2$, considere os subespaços

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\},$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}$$

e

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\},$$

referidos no Exemplo 4.17. Justifique que

$$F \oplus G = \mathbb{R}^2 = F \oplus H.$$

Exercício 4.22 Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere os subespaços

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} : \ c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(b) Considerando $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ determine a projecção de A sobre F, segundo G, e a projecção de A sobre G, segundo F.

Exercício 4.23 Em $\mathbb{K}^n$, com $n \geq 2$, considere os subespaços

$$F = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : \ a_1 = \cdots = a_l = 0\}$$

e

$$G = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : \ a_{l+1} = \cdots = a_n = 0\},$$

em que $l \in \{1, \ldots, n\}$ e $G = \{0_E\}$ para $l = n$.

Justifique que

$$\mathbb{K}^n = F \oplus G.$$

Definição 4.21 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \ldots, u_r$ elementos de E. Dizemos que $v \in E$ é ***combinação linear*** dos vectores $u_1, \ldots, u_r$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ (não necessariamente únicos) tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r.$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dizem-se os ***coeficientes*** da combinação linear ou, mais correctamente, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ é a ***sequência dos coeficientes*** da combinação linear.

Exemplo 4.22

1. 0_E é combinação linear de quaisquer vectores $u_1, \ldots, u_r$, de qualquer espaço vectorial E pois tem-se
$$0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_r,$$
podendo haver outras formas de escrever 0_E como combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.

2. Se $u_1, \ldots, u_r$ são elementos de um espaço vectorial E então, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$ pois, para escrever u_i como combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$, basta considerar igual a 1 o coeficiente de u_i e nulos os restantes coeficientes, caso existam.

3. Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \in E$. Se w é combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$, isto é, se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que
$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$$
então w é combinação linear de $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$. Basta atender a que
$$w = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + 0v_1 + \cdots + 0v_s.$$

4. Em $\mathbb{R}^2$ o vector $(3,3)$ é combinação linear dos vectores $(1,1)$, $(2,2)$. Os coeficientes da combinação linear não são únicos pois de
$$(3,3) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,2)$$
resulta
$$(3,3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Logo quaisquer escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$$
estão nas condições pretendidas. Por exemplo, para
$$\alpha_1 = 3 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0$$
ou
$$\alpha_1 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 1$$
ou
$$\alpha_1 = 7 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -2$$
obtém-se, respectivamente,
$$\begin{aligned} (3,3) &= \mathbf{3}(1,1) + \mathbf{0}(2,2),\\ (3,3) &= \mathbf{1}(1,1) + \mathbf{1}(2,2),\\ (3,3) &= \mathbf{7}(1,1) + (\mathbf{-2})(2,2). \end{aligned}$$
Analogamente
$$\begin{aligned} (0,0) &= \mathbf{0}(1,1) + \mathbf{0}(2,2)\\ &= \mathbf{-2}(1,1) + \mathbf{1}(2,2)\\ &= \mathbf{6}(1,1) + (\mathbf{-3})(2,2) \end{aligned}$$
ou, mais geralmente,
$$(0,0) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,2)$$
quaisquer que sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0.$$

5. Qualquer vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores
$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \in \mathbb{R}^3.$$
De facto, se pretendermos determinar se existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que
$$(a,b,c) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1),$$
isto é, tais que
$$(a,b,c) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$
concluímos que existem, e neste caso são únicos, obtendo-se
$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = b \quad \text{e} \quad \alpha_3 = c.$$

Logo
$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \quad (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

Mais geralmente, qualquer vector de $\mathbb{K}^n$ é combinação linear dos vectores $e_1,\ldots,e_n$ sendo e_i, $i = 1,\ldots,n$, o elemento de $\mathbb{K}^n$ com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1.

6. Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então a coluna j de AB é combinação linear das colunas de A, sendo os coeficientes da combinação linear os elementos da coluna j de B. (Verifique.)

OBSERVAÇÃO: Determinar se um vector v de um espaço vectorial E é combinação linear de vectores $u_1,\ldots,u_r$ de E é um problema que se pode reduzir à discussão de um sistema de equações lineares.

De facto, v é combinação linear dos vectores $u_1,\ldots,u_r$ se, e só se, tal sistema é possível. Nestas condições, se o sistema é determinado, tal equivale a afirmar que v é combinação linear de $u_1,\ldots,u_r$, sendo únicos os coeficientes da combinação linear ou, mais explicitamente, é única a sequência dos coeficientes da combinação linear.

Exercício 4.24 Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência
$$S = \Big((-1,2,4),\ (0,4,5),\ (1,2,1),\ (0,8,10)\Big).$$

Justifique que:

(a) Existe mais do que uma forma de escrever o vector $(0,4,5)$ e o vector $(0,0,0)$ como combinação linear dos elementos de S.

(b) Existem elementos de $\mathbb{R}^3$ que não são combinação linear dos elementos de S e indique dois elementos nessas condições.

Proposição 4.23 *Seja E um espaço vectorial e $u_1,\ldots,u_r$ elementos de E. O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1,\ldots,u_r$, isto é,*
$$\{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \ \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \mathbb{K}\},$$
é um subespaço de E.

Demonstração:

Exercício.

■

Exemplo 4.24

Consideremos
$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a + 2c = 0 \ \wedge \ b = -c\}.$$
Tem-se
$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = -2c \ \wedge \ b = -c\} \\ &= \{(-2c,-c,c) : \ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(-2,-1,1) : \ c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$
e, portanto, pela Proposição 4.23, F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.25 Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a - 2b = 0 \ \wedge \ b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(b) $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a - 2b = 0 \wedge b + c = 0\right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $H = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a - 2b = 0 \wedge b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

Sugestão: Utilize a Proposição 4.23.

Definição 4.25 Sejam $u_1,\ldots,u_r$ elementos de um espaço vectorial E. Chamamos ***subespaço*** (de E) ***gerado*** pela sequência $(u_1,\ldots,u_r)$ ou pelos vectores $u_1,\ldots,u_r$ ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1,\ldots,u_r$. Tal subespaço é frequentemente denotado por $\langle u_1,\ldots,u_r\rangle$, isto é,
$$\langle u_1,\ldots,u_r\rangle = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \ \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Se $F = \langle u_1,\ldots,u_r\rangle$ dizemos, ainda, que $u_1,\ldots,u_r$ ***geram*** F, que $u_1,\ldots,u_r$ são ***geradores*** de F ou que a sequência $(u_1,\ldots,u_r)$ é ***geradora*** de F.

Exercício 4.26 Mostre que $\langle u_1, \ldots, u_r\rangle$ é o "menor" subespaço de E que contém os vectores $u_1, \ldots, u_r$, isto é, mostre que se H é um subespaço de E que contém os vectores $u_1, \ldots, u_r$ então $\langle u_1, \ldots, u_r\rangle \subseteq H$.

Exemplo 4.26

1. Atendendo a 1 do Exemplo 4.22, podemos afirmar que, quaisquer que sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de um espaço vectorial E, se tem
$$0_E \in \langle u_1, \ldots, u_r\rangle.$$

2. Nas condições de 2 do Exemplo 4.22 tem-se, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$,
$$u_i \in \langle u_1, \ldots, u_r\rangle.$$

3. $$\mathbb{R}^2 = \Big\langle (1,0),\ (0,1)\Big\rangle.$$
De facto, é trivial que
$$\Big\langle (1,0),\ (0,1)\Big\rangle \subseteq \mathbb{R}^2.$$
Demonstrar que
$$\mathbb{R}^2 \subseteq \Big\langle (1,0),\ (0,1)\Big\rangle$$
é equivalente a demonstrar que todo o vector de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vectores $(1,0)$ e $(0,1)$, o que é verdadeiro pois
$$\forall_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \qquad (a,b) = a(1,0) + b(0,1).$$

4. Em $\mathbb{R}^2$, considerem-se os vectores $(1,0), (0,1), (-2,0), (-3,4)$. Tem-se, por exemplo,
$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \Big\langle (1,0),(0,1)\Big\rangle\\ &= \Big\langle (1,0),(0,1),(-2,0)\Big\rangle\\ &= \Big\langle (1,0),(0,1),(-2,0),(-3,4)\Big\rangle.\end{aligned}$$
Notemos que
$$F = \Big\langle (1,0)\Big\rangle = \{\alpha(1,0) :\ \alpha\in\mathbb{R}\} = \{(\alpha,0) :\ \alpha\in\mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned}G = \Big\langle (1,0),(-2,0)\Big\rangle &= \{\alpha_1(1,0)+\alpha_2(-2,0) :\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha_1-2\alpha_2,0) :\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(\alpha,0) :\ \alpha\in\mathbb{R}\} = F\end{aligned}$$
e
$$H = \Big\langle (1,0),(-3,4)\Big\rangle = \mathbb{R}^2. \quad \text{(Porquê?)}$$

5. $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ mas $\mathbb{C}$ também é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Comecemos por indicar geradores para $\mathbb{C}$ considerado espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. Como
$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \qquad z = z\cdot 1$$
concluímos que
$$\mathbb{C} \subseteq \langle 1\rangle.$$
Logo
$$\mathbb{C} = \langle 1\rangle,$$
pois a outra inclusão é trivial.

No caso de $\mathbb{C}_\mathbb{R}$, isto é, de $\mathbb{C}$ considerado espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, não existe $w\in\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\mathbb{R} = \langle w\rangle$. (Porquê?)

Atendendo a que
$$\forall_{z\in\mathbb{C}}\ \ \exists_{a,b\in\mathbb{R}} \qquad z = a+bi = a\cdot 1 + b\cdot i,$$
concluímos que $\mathbb{C}_\mathbb{R} \subseteq \langle 1,\ i\rangle$ e como, trivialmente, $\langle 1,\ i\rangle \subseteq \mathbb{C}_\mathbb{R}$ tem-se
$$\mathbb{C}_\mathbb{R} = \langle 1,\ i\rangle.$$

6. Seja
$$F = \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ a = 2b+c\right\}.$$
Tem-se
$$F = \{(2b+c,b,c) :\ b,c\in\mathbb{R}\} = \{b(2,1,0)+c(1,0,1) :\ b,c\in\mathbb{R}\}$$
e, portanto,
$$F = \Big\langle (2,1,0),(1,0,1)\Big\rangle.$$
Notemos que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e, consequentemente, F é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

7. Seja $F=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\ a+b=0\ \wedge\ 2a-b+3d=0\}$.

Se pretendermos obter geradores para F apenas temos de resolver o sistema, nas incógnitas a,b,c,d, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-b+3d=0 \end{cases}.$$

Utilizando matrizes, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.)}$$

$$\xrightarrow[l_1+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} F &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\ a=-d\ \wedge\ b=d\} \\ &\{(-d,\ d,\ c,\ d):\ c,d\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como, quaisquer que sejam $c,d\in\mathbb{R}$, se tem

$$(-d,\ d,\ c,\ d)=c\,(0,\ 0,\ 1,\ 0)+d\,(-1,\ 1,\ 0,\ 1)$$

concluímos que

$$F=\langle(0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ 1,\ 0,\ 1)\rangle.$$

8. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço

$$F=\Big\langle(1,0,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\Big\rangle.$$

Suponhamos que, inversamente ao que sucedeu no exemplo anterior, pretendemos agora obter um sistema de equações lineares (S) com a propriedade de $(a,b,c)\in F$ se, e só se, (a,b,c) é solução do sistema (S).

Note que as afirmações seguintes são equivalentes:

- $(a,b,c)\in F$.
- $\exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}}\quad (a,b,c)=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(1,1,1)$.
- $\exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}}\quad (a,b,c)=(\alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_2+\alpha_3)$.
- $\exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}}\quad \alpha_1+\alpha_3=a\ \ \wedge\ \ \alpha_2+\alpha_3=b\ \ \wedge\ \ \alpha_2+\alpha_3=c$.

- O sistema de equações lineares, nas incógnitas $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_3=a \\ \alpha_2+\alpha_3=b \\ \alpha_2+\alpha_3=c \end{cases}$$

é possível.

- $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=\mathrm{r}\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right]\right)$.

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{array}\right]$$

concluímos que

$$(a,b,c)\in F \quad \text{se, e só se,} \quad c-b=0.$$

Assim

$$F=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ c-b=0\},$$

ou equivalentemente,

$$F=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ b=c\}.$$

9. Seja

$$G=\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ 2b & -a \end{bmatrix}:\ a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Como

$$G=\left\{a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}:\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

tem-se

$$G=\left\langle\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle.$$

10. $\mathbb{K}^n=\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ sendo e_i, $i=1,\ldots,n$, o elemento de $\mathbb{K}^n$ com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1.

11. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=\langle E_{11},\ldots,E_{1n},E_{21},\ldots,E_{2n},\ldots,E_{m1},\ldots,E_{mn}\rangle$ sendo E_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas excepto a entrada (i,j) que é igual a 1.

12. $\mathbb{K}_n[x]=\langle x^n,x^{n-1},\ldots,x,1\rangle$. Atenda-se a que

$$\forall_{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{K}_n[x]}\qquad a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n\cdot x^n+\cdots+a_1\cdot x+a_0\cdot 1.$$

Exercício 4.27 Seja $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Mostre que G é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ indicando uma sequência geradora de G.

Exercício 4.28 Apresentando uma sequência geradora, justifique que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : a - 2c + d = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 4.29 Sejam $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, v$ elementos de um espaço vectorial E. Mostre que se

$$v \in \langle u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} \rangle$$

mas

$$v \notin \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$$

então

$$u_{k+1} \in \langle u_1, \ldots, u_k, v \rangle .$$

Sugestão: Sendo v combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$, comece por justificar que o coeficiente de u_{k+1} é não nulo.

Em 4 do Exemplo 4.26, evidenciámos que pode suceder que sequências distintas de vectores (mesmo distintas em número de vectores) gerem o mesmo espaço vectorial.

O resultado seguinte dá-nos, em particular, um processo para determinar se duas sequências de vectores de um espaço vectorial geram o mesmo subespaço.

Proposição 4.27 *Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ e $v_1, \ldots, v_s$ vectores de E. Tem-se*

1.
$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$
se, e só se, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$.

2.
$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$
se, e só se, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$ e para todo $j \in \{1, \ldots, s\}$, v_j é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.

Demonstração:

1. Suponhamos que
$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle.$$
Como, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tem
$$u_i \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$
concluímos que
$$u_i \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$
o que é equivalente a afirmar que u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$, ou equivalentemente, que
$$u_i \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle, \text{ para } i = 1, \ldots, r.$$
Como $\langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ é um subespaço podemos afirmar que
$$\forall_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}} \quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle.$$
Concluímos então que
$$\forall_{u \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle} \quad u \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$
e, portanto,
$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

2. Imediato, atendendo a 1.

■

Exercício 4.30 Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores
$$u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (0,0,1),\ u_3 = (-1,-1,-1);$$
$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (1,0,0).$$
Mostre que
$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subsetneqq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Exercício 4.31 Seja $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$.

(a) Indique vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $u \in F$ e $v \notin F$.

(b) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ indicando uma sequência geradora de F.

(c) Indique se $F = \langle (6,3,0), (-2,-1,5), (0,0,3) \rangle$.

Atendendo a 2 da Proposição 4.27 concluímos facilmente o resultado seguinte, que utilizaremos com frequência.

Proposição 4.28 *Se $u_1, \ldots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores então*

$$\langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r \rangle.$$

Demonstração:

Exercício.

■

Assim, se numa sequência de vectores existe um vector que é combinação linear dos restantes, a proposição anterior permite afirmar que esse vector pode ser "eliminado" dando origem a uma sequência que, apesar de ter um número de vectores inferior, gera o mesmo subespaço da sequência inicial.

Em particular, se uma sequência de vectores de E inclui o vector 0_E, tal vector pode ser "eliminado" da sequência que o subespaço gerado por esses vectores não se altera.

Ainda como consequência da Proposição 4.27, vamos demonstrar que existem "transformações" que podemos efectuar nos vectores de uma sequência garantindo que não alteramos o subespaço gerado por esses vectores. Nomeadamente, tem-se:

Proposição 4.29 *Seja $S = (u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$ e seja $S' = (u'_1, \ldots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos seguintes tipos:*

(I) *Troca das posições, na sequência, dos vectores u_i e u_j, com $i \neq j$.*

(II) *Multiplicação do vector u_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

(III) *Substituição do vector u_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, por $u_i + \beta u_j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, com $j \neq i$ e $\beta \in \mathbb{K}$.*

Tem-se

$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \langle u'_1, \ldots, u'_r \rangle.$$

Demonstração:

Exercício. Atenda a que o resultado fica demonstrado se provarmos a sua validade em cada um dos seguintes casos:

Caso 1: S' obtém-se de S efectuando apenas uma transformação do tipo (I).

Caso 2: S' obtém-se de S efectuando apenas uma transformação do tipo (II).

Caso 3: S' obtém-se de S efectuando apenas uma transformação do tipo (III).

Cada um dos três casos anteriores demonstra-se, sem dificuldade, utilizando 2 da Proposição 4.27.

■

Exercício 4.32 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, u_2, u_3 \in E$. Justifique que

(a) $\langle u_1,\, u_2,\, u_3 \rangle = \langle u_1,\, u_1 + u_2,\, u_1 + u_2 + u_3 \rangle$.

(b) $\langle u_1,\, u_2,\, u_3 \rangle = \langle -u_3,\, -u_1 + u_2,\, 2u_1 + u_3 \rangle$.

OBSERVAÇÃO: Consideremos m vectores de $\mathbb{K}^n$, não todos nulos, e seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz cujas linhas sejam tais vectores. Se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então, de acordo com a Proposição 4.29, o subespaço gerado pelas linhas de A é igual ao subespaço gerado pelas linhas de B. Em particular, se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}$$

então o subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual ao subespaço gerado pelas linhas, não nulas, de A'.

Definição 4.30 Um espaço vectorial E diz-se ***finitamente gerado*** se existem $r \in \mathbb{N}$ e $u_1, \ldots, u_r \in E$ tais que

$$E = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle.$$

Note que o espaço vectorial $\mathbb{K}[x]$, referido em 5 do Exemplo 4.3, constituído pelos polinómios na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$ e sem restrição ao grau, não é finitamente gerado.

De facto, se $\mathbb{K}[x]$ fosse finitamente gerado então existiriam $r \in \mathbb{N}$ e polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tais que qualquer polinómio de $\mathbb{K}[x]$ se poderia escrever como combinação linear de $p_1(x), \ldots, p_r(x)$. Como mostramos de seguida, tal não é possível.

Seja k o máximo grau dos polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$. Como da multiplicação de $\alpha \in \mathbb{K}$ por um polinómio $p(x)$ resulta um polinómio de grau inferior ou igual ao de $p(x)$ e a soma de polinómios tem um grau inferior ou igual ao máximo grau dos polinómios que constituem as parcelas, constatamos facilmente que qualquer polinómio $q(x)$ com grau superior a k não se pode escrever como combinação linear dos polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$. Tal significa que

$$q(x) \notin \langle p_1(x), \ldots, p_r(x) \rangle$$

e, portanto,

$$\langle p_1(x), \ldots, p_r(x) \rangle \subsetneq \mathbb{K}[x].$$

4.3 Dependência e independência linear

Definição 4.31 Seja E um espaço vectorial. Sejam $u_1, \ldots, u_r \in E$, com $r \geq 2$. Dizemos que $(u_1, \ldots, u_r)$ é uma sequência ***linearmente dependente***, ou que os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente dependentes, se pelo menos um dos vectores é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores.

Caso contrário, isto é, se nenhum dos vectores é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores, dizemos que a sequência $(u_1, \ldots, u_r)$ é ***linearmente independente***, ou ainda, que os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes.

Para $r = 1$ considera-se que a sequência (u_1) ou o vector u_1 é linearmente independente se, e só se, $u_1 \neq 0_E$.

A definição anterior, no caso particular $r = 2$, permite afirmar que uma

sequência com dois vectores é linearmente dependente se, e só se, um dos vectores é um ***múltiplo escalar*** do outro vector, isto é, é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.

Exemplo 4.32

1. Em $\mathbb{R}^2$, as sequências $((1,0),(0,1))$, $((1,5),(-1,5))$ e $((3,4),(0,2))$ são linearmente independentes pois basta atender a que nenhum dos vectores de cada sequência é um múltiplo escalar do outro.
2. No espaço vectorial $F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c\} = \langle (2,1,0),(1,0,1) \rangle$ a sequência $((2,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente, com uma justificação análoga à de 1.
3. Em $\mathbb{R}^2$, verificamos facilmente que

   $((1,0))$ é uma sequência linearmente independente.

   $((1,0),(0,1))$ é uma sequência linearmente independente.

   $((1,0),(0,1),(-1,3))$ é uma sequência linearmente dependente.

   $((1,0),(0,1),(-1,3),(-3,4))$ é uma sequência linearmente dependente.
4. Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é linearmente independente e, mais geralmente, em $\mathbb{K}^n$, a sequência $(e_1, \ldots, e_n)$, sendo e_i o elemento de $\mathbb{K}^n$ com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1, $i = 1, \ldots, n$, é linearmente independente. Caso contrário, existiria $r \in \{1, \ldots, n\}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

   $$e_r = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{r-1}e_{r-1} + \alpha_{r+1}e_{r+1} + \cdots + \alpha_n e_n.$$

   Cada membro da igualdade anterior é um elemento de $\mathbb{K}^n$ e igualando os elementos da posição r de cada um desses n-uplos obteríamos

   $$1 = \alpha_1 0 + \cdots + \alpha_{r-1}0 + \alpha_{r+1}0 + \cdots + \alpha_n 0,$$

   isto é,

   $$1 = 0,$$

   o que é uma contradição.
5. Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a sequência

   $$(E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}),$$

   é linearmente independente, sendo E_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas excepto a entrada (i,j) que é igual a 1. Basta fazer um raciocínio análogo ao referido em 4.

6. Em $\mathbb{K}_n[x]$, a sequência $(x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$ é linearmente independente. Basta atender à definição de igualdade de polinómios e fazer um raciocínio também análogo ao referido em 4.

Exercício 4.33 Seja E um espaço vectorial e $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ vectores de E. Justifique que:

(a) Qualquer sequência que inclua o vector 0_E é linearmente dependente.

(b) Se $u_i = u_j$, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, r\}$ então os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes.

(c) Se os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes então os vectores $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ são linearmente dependentes.

(d) Se os vectores $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ são linearmente independentes então os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes.

Exercício 4.34 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E tais que $F \cap G = \{0_E\}$. Sejam $u \in F \setminus \{0_E\}$ e $v \in G \setminus \{0_E\}$. Justifique que (u, v) é uma sequência linearmente independente.

O resultado seguinte é importante por fornecer um processo alternativo, e frequentemente utilizado na prática, para decidir sobre a independência linear de vectores.

Teorema 4.33 (Critério de Independência Linear) *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se, a única forma de escrever 0_E como combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$ é tomando todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero.*

Tal equivale a afirmar que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes se, e só se, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ não todos nulos (isto é, pelo menos um não nulo) tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Demonstração:

Suponhamos que $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes e demonstremos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Se $r = 1$ então, por definição, $u_1 = 0_E$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tem-se $\alpha u_1 = 0_E$, ficando demonstrado o que se pretendia.

Suponhamos $r \geq 2$. Por hipótese existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores. Sejam

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$$

tais que

$$u_i = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r.$$

Como

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + (-1) u_i + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E,$$

concluímos o que pretendíamos.

Reciprocamente, suponhamos que existem $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r = 0_E.$$

Se $r = 1$ tem-se $\beta_1 u_1 = 0_E$, com $\beta_1 \neq 0$. Logo, pela Proposição 4.5, $u_1 = 0_E$ e, portanto, pela Definição 4.31, u_1 é linearmente dependente.

Suponhamos $r \geq 2$. Seja $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $\beta_j \neq 0$. De

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{j-1} u_{j-1} + \beta_j u_j + \beta_{j+1} u_{j+1} + \cdots + \beta_r u_r = 0_E$$

obtemos

$$\beta_j u_j = (-\beta_1) u_1 + \cdots + (-\beta_{j-1}) u_{j-1} + (-\beta_{j+1}) u_{j+1} + \cdots + (-\beta_r) u_r,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} u_j = {} & (-\beta_j^{-1}\beta_1) u_1 + \cdots + (-\beta_j^{-1}\beta_{j-1}) u_{j-1} \\ & + (-\beta_j^{-1}\beta_{j+1}) u_{j+1} + \cdots + (-\beta_j^{-1}\beta_r) u_r. \end{aligned}$$

Logo u_j é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_r$ e, portanto, os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes.

■

Exemplo 4.34

Em $\mathbb{R}^4$, utilizemos o Critério de Independência Linear para determinar se a sequência

$$S = \Big((1,1,1,-1),\ (0,-1,0,2),\ (1,0,1,1)\Big)$$

é linearmente independente. A igualdade

$$\alpha_1(1,1,1,-1) + \alpha_2(0,-1,0,2) + \alpha_3(1,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

implica

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

A sequência S é linearmente independente se, e só se, o sistema homogéneo anterior, $AX = 0$, tem apenas a solução $(0,0,0)$, ou equivalentemente, se tal sistema é possível determinado.

Utilizando os conhecimentos do Capítulo 2 tal sucede se, e só se, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

se verificar

$$\mathrm{r}(A) = 3 = \text{ número de incógnitas.}$$

Cálculos simples permitem concluir que $\mathrm{r}(A) = 2$ e, portanto, a sequência S é linearmente dependente.

Exercício 4.35 Mostre que:

(a) Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $\big((1,2,3),(0,-1,1),(0,0,2)\big)$ é linearmente independente.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $\big((1,2,3),(2,4,4),(0,0,2)\big)$ é linearmente dependente.

(c) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente.

(d) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente dependente.

De acordo com o Critério de Independência Linear, os vectores $u_1, \ldots, u_r \in E$ são linearmente independentes se, e só se, o vector 0_E se escreve de forma única como combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$. A proposição seguinte afirma que tal resultado continua válido se substituirmos 0_E por qualquer vector que se possa escrever como combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.

Proposição 4.35 *Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se, para todo o vector que seja combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$, os coeficientes da combinação linear são únicos.*

Demonstração:

Suponhamos que os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes. Seja v tal que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$. Tem-se

$$(\alpha_1 + (-\beta_1))u_1 + \cdots + (\alpha_r + (-\beta_r))u_r = 0_E$$

e, como $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes, pelo Critério de Independência Linear, concluímos que

$$\alpha_1 + (-\beta_1) = \cdots = \alpha_r + (-\beta_r) = 0.$$

Logo

$$\alpha_1 = \beta_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_r = \beta_r,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo o vector que seja combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$, os coeficientes da combinação linear são únicos. Demonstremos que $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes, utilizando o Critério de Independência Linear. Se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$$

então verifica-se que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_r.$$

Como, por hipótese, para todo o vector v que seja combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$, os coeficientes da combinação linear são únicos, o mesmo sucede para $v = 0_E$. Logo

$$\alpha_1 = 0 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \alpha_r = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Na Proposição 4.29 referem-se 3 tipos de "transformações" que podemos efectuar nos vectores de uma sequência garantindo que não se altera o subespaço gerado pelos vectores da sequência.

O resultado seguinte garante que essas mesmas "transformações" não alteram também a resposta referente à dependência/independência linear dos vectores da sequência.

Proposição 4.36 *Seja $S = (u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \ldots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos tipos (I), (II), (III) descritos na Proposição 4.29.*

Tem-se, S é linearmente dependente (respectivamente, independente) se, e só se, S' é linearmente dependente (respectivamente, independente).

Demonstração:

Suponhamos que $S = (u_1, \ldots, u_r)$ é linearmente dependente, ou equivalentemente, que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

O resultado fica demonstrado se provarmos que S' é linearmente dependente em cada um dos casos 1, 2 e 3 seguidamente referidos.

Caso 1: S' é uma sequência que se obtém de S efectuando apenas uma transformação do tipo (I).

Neste caso a demonstração é trivial, atendendo à comutatividade da adição em E.

Caso 2: S' é uma sequência que se obtém de S efectuando apenas uma transformação do tipo (II).

Seja $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ e suponhamos que S' se obtém de S multiplicando o vector u_i por α. A igualdade

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_i u_i + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$$

é equivalente à seguinte

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_i \alpha^{-1}(\alpha u_i) + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Como $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tem-se $\alpha_i = 0$ se, e só se, $\alpha_i \alpha^{-1} = 0$. Concluímos assim que os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não são todos nulos se, e só se, o mesmo suceder aos escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i \alpha^{-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r.$$

Tal equivale a afirmar que a sequência S é linearmente dependente se, e só se, a sequência

$$S' = (u_1, \ldots, u_{i-1}, \alpha u_i, u_{i+1}, \ldots, u_r)$$

é linearmente dependente.

Caso 3: S' é uma sequência que se obtém de S efectuando apenas uma transformação do tipo (III).

Seja $\beta \in \mathbb{K}$ e suponhamos que S' se obtém de S substituindo o vector u_i pelo vector $u_i + \beta u_j$, com $j \neq i$. Sem perda de generalidade, consideremos que $i < j$. Somando e simultaneamente subtraindo o vector $\alpha_i \beta u_j$ ao primeiro membro da igualdade

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E,$$

concluímos que tal igualdade é equivalente à seguinte

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_i (u_i + \beta u_j) + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots \\ + (\alpha_j - \alpha_i \beta) u_j + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E,$$

que é uma combinação linear nula dos vectores da sequência

$$S' = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \beta u_j, u_{i+1}, \ldots, u_j, \ldots, u_r).$$

Demonstremos que os coeficientes de tal combinação linear não são todos nulos, isto é, que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j - \alpha_i\beta, \ldots, \alpha_r$$

não são todos nulos, sabendo que, por hipótese,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_r$$

não são todos nulos. De facto, se existe $k \in \{1, \ldots, r\}$, com $k \neq j$, tal que $\alpha_k \neq 0$ então o resultado é trivial.

Caso contrário, isto é, se $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{j\}$ então $\alpha_j \neq 0$. Como $i \neq j$, tem-se $\alpha_i = 0$. Logo

$$\alpha_j \neq 0 \text{ se, só se, } \alpha_j - \alpha_i\beta \neq 0,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Assim S é linearmente dependente se, e só se, S' é linearmente dependente.

$\blacksquare$

Exercício 4.36 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, u_2, u_3 \in E$. Justifique as afirmações:

(a) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S' = (u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$$

é linearmente independente.

(b) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S'' = (-u_3, -u_1 + u_2, 2u_1 + u_3)$$

é linearmente independente.

4.4 Bases e dimensão

Nesta secção, dado um espaço vectorial E finitamente gerado, estamos particularmente interessados nas sequências geradoras de E que sejam simultaneamente linearmente independentes.

Definição 4.37 Seja E um espaço vectorial e $(u_1, \ldots, u_n)$ uma sequência de vectores de E. Dizemos que $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma ***base*** de E se é uma sequência geradora de E e é linearmente independente. Convenciona-se que se $E = \{0_E\}$ então a sequência vazia é base de E.

OBSERVAÇÃO: Tem-se

1. $((1,0),(0,1))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ e é linearmente independente.
2. $((1,0),(0,1),(-1,3))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ mas não é linearmente independente.
3. $((1,1),(2,2))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ e não é linearmente independente.
4. $((1,1))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ mas é linearmente independente.

Atendendo à observação anterior, relativamente ao problema de determinar se uma dada sequência de vectores, de um espaço vectorial E, tem ou não a propriedade de ser geradora de E e se tem ou não a propriedade de ser linearmente independente, pode ocorrer qualquer um dos 4 casos.

Contudo, um importante resultado estabelece que:

Teorema 4.38 *Num espaço vectorial E finitamente gerado qualquer sequência geradora de E tem um número de vectores superior ou igual ao número de vectores de qualquer sequência linearmente independente.*

Demonstração:

Seja $(u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência linearmente independente de vectores de E e $(v_1, \ldots, v_s)$ uma sequência geradora de E. Pretendemos demonstrar que

$$s \geq r.$$

Suponhamos que $s < r$ e cheguemos a uma contradição.

Como

$$u_1, \ldots, u_r \in E \quad \text{e} \quad E = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$

concluímos que

$$u_i \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle, \ i = 1 \ldots, r.$$

Sejam $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$, tais que

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{s1}v_s \\ &\vdots \\ u_r &= a_{1r}v_1 + \cdots + a_{sr}v_s \ . \end{aligned}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{s \times r}(\mathbb{K}).$$

Como $s < r$, podemos afirmar que o sistema homogéneo

$$AX = 0$$

é indeterminado pois um sistema homogéneo é sempre possível e, neste caso, tem-se $\mathrm{r}(A) \leq s < r =$ número de incógnitas.

Seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ uma solução não nula de tal sistema, isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{1r}\alpha_r & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{s1}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{sr}\alpha_r & = & 0 \end{array} \right. ,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não todos nulos.

Tem-se
$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r =$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{s1}v_s) + \cdots + \alpha_r(a_{1r}v_1 + \cdots + a_{sr}v_s) \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_r a_{1r})v_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{s1} + \cdots + \alpha_r a_{sr})v_s \\ &= (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1r}\alpha_r)v_1 + \cdots + (a_{s1}\alpha_1 + \cdots + a_{sr}\alpha_r)v_s \\ &= 0v_1 + \cdots + 0v_s = 0_E, \end{aligned}$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não todos nulos. Pelo Critério de Independência Linear, chegamos a uma contradição com a hipótese de $(u_1, \ldots, u_r)$ ser uma sequência linearmente independente.

■

Como consequência do Teorema 4.38, tem-se:

Teorema 4.39 *Se um espaço vectorial E admite uma base com n elementos então todas as bases de E têm n elementos.*

Demonstração:

Suponhamos que

$$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_p)$$

são bases arbitrárias de E.

Como $\mathcal{B}$ é uma sequência geradora de E e $\mathcal{B}'$ é uma sequência linearmente independente concluímos, pelo Teorema 4.38, que

$$n \geq p.$$

Por outro lado, como $\mathcal{B}'$ é uma sequência geradora de E e $\mathcal{B}$ é uma sequência linearmente independente, concluímos que

$$p \geq n.$$

Logo

$$p = n.$$

■

Definição 4.40 Seja E um espaço vectorial que admite uma base com n elementos. Dizemos então que E tem ***dimensão*** n e escrevemos $\dim E = n$.

Note que, como convencionámos que o conjunto vazio é base de $E = \{0_E\}$ então, neste caso, tem-se $\dim E = 0$ e portanto continua a verificar-se que a dimensão de E é igual ao número de vectores de qualquer uma das suas bases.

Exemplo 4.41

Determinemos uma base e a dimensão de alguns espaços vectoriais.

1. $\mathcal{B} = ((1,0),\ (0,1))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ e também linearmente independente, sendo portanto uma base de $\mathbb{R}^2$. Assim
$$\dim \mathbb{R}^2 = 2.$$
2. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de $\mathbb{K}^n$, sendo e_i, $i = 1, \ldots, n$, o elemento de $\mathbb{K}^n$ com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1. Logo
$$\dim \mathbb{K}^n = n.$$
3. $\mathcal{B} = (E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn})$ é uma base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, em que E_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, é a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas, excepto a entrada (i,j) que é igual a 1, pelo que
$$\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn.$$
4. $\mathcal{B} = (x^n,\ x^{n-1},\ \ldots, x,\ 1)$ é uma base de $\mathbb{R}_n[x]$ e, portanto,
$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1.$$
5. $\dim \mathbb{C} = 1$ e $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$, dado que $\mathcal{B} = (1)$ é uma base de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{B}' = (1, i)$ é uma base de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.
6. Seja F o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & -b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$
Tem-se
$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \quad \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & -b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
pelo que
$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$
Como nenhuma das matrizes geradoras de F é um múltiplo escalar da outra, a sequência
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$
é linearmente independente e, portanto, é uma base de F. Logo
$$\dim F = 2.$$

Do Teorema 4.38 resulta ainda que:

Proposição 4.42 *Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Tem-se:*

1. *Qualquer sequência de vectores de E com um número de vectores inferior a n não é geradora de E.*
2. *Qualquer sequência de vectores de E com um número de vectores superior a n não é linearmente independente.*

Demonstração:

Exercício.

■

De acordo com a Definição 4.40, a dimensão de um espaço vectorial E finitamente gerado é igual ao número de vectores de qualquer uma das suas bases. No entanto, a dimensão de E poderia ser definida de outra forma.

Proposição 4.43 *Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as afirmações:*

1. $\dim E = n$.
2. *Em E existem n vectores linearmente independentes e n é o maior número de vectores com essa propriedade.*

Demonstração:

Se 1 se verifica então os n vectores de uma base arbitrária de E são, em particular, n vectores de E linearmente independentes. Por 2 da Proposição 4.42, n é o número máximo de vectores com essa propriedade e, portanto, concluímos que 2 se verifica.

Reciprocamente, suponhamos que 2 se verifica.

Seja $\dim E = p$ e $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ uma base de E. Demonstremos que $p = n$.

Como, por hipótese, em E existem n vectores linearmente independentes e $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma sequência geradora de E, o Teorema 4.38 permite garantir que $p \geq n$. Caso se tivesse $p > n$, chegaríamos a uma contradição com a hipótese de não existirem, em E, mais do que n vectores com a propriedade de serem linearmente independentes. Logo $p = n$.

■

Exercício 4.37 Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $F = \langle(2,3,3)\rangle$. Indique, para F, duas bases distintas.

Exercício 4.38 Seja $F = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 : b - c = 0 \wedge a = b + d\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^5$. Determine uma base de F.

Exercício 4.39 Seja $G = \left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}$ o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ referido no Exercício 4.27. Determine uma base de G.

Exercício 4.40 Seja (e_1, e_2, e_3) uma base de um espaço vectorial E. Justifique que são ainda bases de E as sequências:

(a) $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$.
(b) $(-e_3, -e_1 + e_2, 2e_1 + e_3)$.

Exercício 4.41 Indique a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Subespaço das matrizes escalares de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
(b) Subespaço das matrizes diagonais de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
(c) Subespaço das matrizes triangulares superiores de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Exercício 4.42 Conforme referimos $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$, tendo-se $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$ e sendo $(i, 1)$ uma base de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Justifique que $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$ e indique uma base de $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

As bases de um espaço vectorial E têm propriedades especiais. No resultado seguinte refere-se uma dessas propriedades.

Proposição 4.44 *Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_n$ vectores de E. Tem-se, $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E se, e só se, todo o vector de E é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_n$ e são únicos os coeficientes da combinação linear.*

Demonstração:
É uma consequência imediata da definição de base e da Proposição 4.35.

■

Definição 4.45 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $(u_1, \ldots, u_n)$ uma base de E. Para cada $v \in E$, os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

dizem-se as ***coordenadas*** de v na base $(u_1, \ldots, u_n)$ ou, mais correctamente, dizemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a ***sequência das coordenadas*** de v na base $(u_1, \ldots, u_n)$.

A determinação da sequência das coordenadas de um dado vector relativamente a uma base corresponde pois a resolver um sistema de equações lineares possível determinado.

Exemplo 4.46

1. $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ então, como

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1),$$

a sequência das coordenadas de (a,b) na base $\mathcal{B}$ é (a,b).

2. $\mathcal{B}' = ((0,1),(1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, diferente da base $\mathcal{B}$ de 1. Em relação à base $\mathcal{B}'$, determinemos a sequência das coordenadas de (a,b). Como

$$(a,b) = b(0,1) + a(1,0),$$

a sequência das coordenadas de (a,b) na base $\mathcal{B}'$ é (b,a).

3. $\mathcal{B}'' = ((-1,1),(0,1))$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$. Determinemos a sequência das coordenadas de (a,b) em relação à base $\mathcal{B}''$. Tem-se

$$(a,b) = \alpha_1(-1,1) + \alpha_2(0,1) = (-\alpha_1, \alpha_1) + (0, \alpha_2) = (-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2).$$

Logo

$$\begin{cases} -\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \end{cases}.$$

O sistema de equações lineares anterior, nas incógnitas α_1, α_2, tem a solução única

$$(-a, a+b).$$

Assim a sequência das coordenadas do vector (a,b) na base $\mathcal{B}''$ é $(-a, a+b)$.

4. O vector que em relação à base $\mathcal{B} = \big((-1,2,3),(0,3,4),(0,0,5)\big)$, de $\mathbb{R}^3$, tem a sequência de coordenadas $(7,-1,4)$ é o vector

$$\begin{aligned}7(-1,2,3)+(-1)(0,3,4)+4(0,0,5) &= (-7,14,21)+(0,-3,-4)+(0,0,20)\\ &= (-7,11,37).\end{aligned}$$

Definição 4.47 Designamos por ***base canónica*** de $\mathbb{K}^n$, e representamos por $\text{b.c.}_{\mathbb{K}^n}$, a base $(e_1,\ldots,e_n)$ sendo e_i, $i=1,\ldots,n$, o n-uplo com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1.

Notemos que, em relação à base canónica, a sequência das coordenadas de $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ é a sequência $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Exercício 4.43 Em $\mathbb{R}^4$, considere a base

$$\mathcal{B} = \big((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\big)$$

e a base canónica

$$\text{b.c.}_{\mathbb{R}^4} = \big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $(4,3,2,1)$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de um vector arbitrário $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}$.

Exercício 4.44 Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere as bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right)$$

e

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de um vector arbitrário $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Exercício 4.45 Em $\mathbb{R}_3[x]$, considere as bases

$$\mathcal{B} = \big(x^3,\ x^3+x^2,\ x^3+x^2+x,\ x^3+x^2+x+1\big)$$

e

$$\mathcal{B}' = \big(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\big).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $4x^3+3x^2+2x+1$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de um vector arbitrário $ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}_3[x]$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

De acordo com o Teorema 4.38, se tivermos uma sequência geradora de um espaço vectorial E e pretendermos construir, a partir dela, uma base de E, não poderá ser "acrescentando" vectores à sequência. Eventualmente será "eliminando" vectores da sequência (não "eliminando" nenhum vector, se a sequência já for linearmente independente). Contudo, os vectores a "eliminar" não poderiam ser ao acaso pois teríamos de garantir que os vectores que permaneciam na sequência continuavam a gerar E.

A Proposição 4.28 responde a este problema pois afirma que, se numa sequência geradora de E se eliminarmos apenas vectores que sejam combinação linear dos restantes, vamos obtendo sequências que são ainda geradoras de E.

Notemos que, procedendo dessa forma, quando já não houver na sequência nenhum vector que seja combinação linear dos restantes, obtemos uma sequência que, além de geradora de E, é também linearmente independente e, portanto, é uma base de E.

Teorema 4.48 *Se $S=(v_1,\ldots,v_s)$ é uma sequência geradora de um espaço vectorial E então existe uma subsequência de S que é uma base de E.*

Demonstração:

Se $E=\{0_E\}$ então a sequência vazia, que é subsequência de qualquer sequência, é base de E, conforme consta na definição de base.

Suponhamos que $E\neq\{0_E\}$ e demonstremos o resultado por indução em s.

Se $s=1$, isto é, se $S=(v_1)$ então, como $E\neq\{0_E\}$, tem-se $v_1\neq 0_E$. Logo S, que é uma subsequência de S, é uma base de E.

Seja $s \geq 2$.
Hipótese de Indução: Suponhamos que toda a sequência geradora de E com $s-1$ vectores admite uma subsequência que é base de E.

Seja S uma subsequência geradora de E com s vectores. Se S é linearmente independente então S é uma subsequência de S que é base de E. Caso contrário, existe em S um vector u que é combinação linear dos restantes e a subsequência S_1 que se obtém de S "eliminando" o vector u continua, pela Proposição 4.28, a gerar E.

Pela hipótese de indução, existe uma subsequência S' de S_1 que é uma base de E. Como S' é uma subsequência de S, concluímos o que pretendíamos.

■

O esquema a seguir apresentado resume o resultado anterior e a forma como é utilizado na prática para a partir de uma sequência geradora obtermos uma base.

$$\boxed{\begin{array}{c} S \text{ é sequência} \\ \text{geradora de } E \end{array}} \xrightarrow[r \in \mathbb{N}_0]{r \text{ etapas}^{(*)},} \boxed{S' \text{ é base de E}}$$

(*) Em cada uma das r etapas "elimina-se" um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes e, quando já não existirem vectores nessas condições, teremos uma base S' de E.

Nas condições do Teorema 4.48, se existe uma sequência geradora de E com s elementos então

$$\dim E \leq s.$$

Tal motiva a designação alternativa de espaços de ***dimensão finita*** para os espaços finitamente gerados.

Exercício 4.46 Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F = \Big\langle (1,2,1), (2,-1,-3), (0,1,1) \Big\rangle.$$

(a) Verifique que $\big((1,2,1), (2,-1,-3), (0,1,1)\big)$ não é uma base de F.
(b) Determine uma subsequência da sequência da alínea anterior que seja uma base de F.

Anteriormente considerámos o problema de dada uma sequência geradora de um espaço vectorial obtermos, a partir dela, uma base desse espaço.

Consideremos agora o problema de termos uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial finitamente gerado e pretendermos, a partir dela, obter uma base desse espaço.

Recordando o Teorema 4.38, não poderá ser "eliminando" vectores da sequência. Eventualmente será "acrescentando" vectores à sequência (não acrescentando nenhum vector se a sequência já for geradora).

No entanto, tal como anteriormente, os vectores a "acrescentar" não poderiam ser quaisquer, pois teríamos de garantir que a nova sequência continuaria linearmente independente. Sabemos que se tivermos vectores $u_1, \ldots, u_r$ linearmente independentes e "acrescentarmos" um vector v que seja combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$ então os vectores $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente dependentes. Mas tal não significa que se "acrescentarmos" um vector v que não seja combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$ então $u_1, \ldots, u_r, v$ continuem linearmente independentes.

O resultado seguinte afirma, em particular, que tal é verdadeiro.

Proposição 4.49 *Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Se $v \in E$ é tal que v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$ então*

$$u_1, \ldots, u_r, v \text{ são linearmente independentes}$$

e

$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subsetneqq \langle u_1, \ldots, u_r, v \rangle.$$

Demonstração:

Atendendo a 1 da Proposição 4.27 e a que v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$, demonstra-se facilmente a última afirmação do enunciado.

Demonstremos então que se v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$, linearmente independentes, então $u_1, \ldots, u_r, v$ continuam linearmente independentes.

Suponhamos que se verificam simultaneamente as condições:

$u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes,

v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$,

$u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente dependentes,

e cheguemos a uma contradição.

Se $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente dependentes então, pelo Critério de Independência Linear, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v = 0_E.$$

Tem-se

$$\alpha_{r+1} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{r+1} \neq 0.$$

Se $\alpha_{r+1} = 0$ então

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$$

e, como $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes, concluímos que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Logo

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \alpha_{r+1} = 0,$$

o que é uma contradição com o facto de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ não serem todos nulos.

Se $\alpha_{r+1} \neq 0$ então, de

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v = 0_E,$$

resulta

$$\alpha_{r+1} v = (-\alpha_1) u_1 + \cdots + (-\alpha_r) u_r,$$

ou ainda,

$$v = (-\alpha_{r+1}^{-1} \alpha_1) u_1 + \cdots + (-\alpha_{r+1}^{-1} \alpha_r) u_r,$$

que é de novo uma contradição com a hipótese de v não ser combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.

■

Baseado no resultado anterior pode demonstrar-se o conhecido por Teorema do Completamento ou Teorema da Base Incompleta.

Teorema 4.50 (Teorema do Completamento) *Se* $S = (u_1, \ldots, u_r)$ *é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial* E *de dimensão* n *então existe uma base de* E *que tem* S *como subsequência. Tal corresponde a afirmar que existem vectores* $w_1, \ldots, w_{n-r}$ *de* E*, com* $n - r \geq 0$*, tais que*

$$(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_{n-r})$$

é uma base de E*.*

Demonstração:

Pelo Teorema 4.38 tem-se $r \leq n$.

Demonstremos o resultado por indução em $n - r$.

Se $n - r = 0$, ou equivalentemente, se $n = r$ então concluímos que S é uma base de E que tem S como subsequência.

Hipótese de Indução: Para toda a sequência S linearmente independente com r vectores, tal que $n - r = k$, com $k \geq 0$, existe uma base de E que tem S como subsequência.

Seja $S = (u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência linearmente independente com $n - r = k + 1$, com $k \geq 0$. Nestas condições existe $v \in E$ tal que v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$ e, pela Proposição 4.49, se "acrescentarmos" v à sequência S obtemos uma sequência S_1 com $r + 1$ vectores, que continua linearmente independente.

Como $n - (r + 1) = k$, com $k \geq 0$, pela hipótese de indução existe uma base S'', de E, que tem S_1 como subsequência.

Como S'' tem S como subsequência, concluímos o que pretendíamos.

■

O esquema a seguir apresentado resume o resultado anterior e a forma como é utilizado na prática para a partir de uma sequência linearmente independente obtermos uma base.

$$\boxed{\begin{array}{c} S \text{ é sequência} \\ \text{linearmente independente} \\ \text{de vectores de } E \end{array}} \xrightarrow[s \in \mathbb{N}_0]{s \text{ etapas}^{(*)},} \boxed{S'' \text{ é base de } E}$$

(*) Em cada uma das s etapas "acrescenta-se" um vector à sequência que não seja combinação linear dos restantes e, quando já não existirem vectores nessas condições, teremos uma base S'' de E.

Exercício 4.47 Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência de vectores

$$S = \Big((1,1,0),(2,1,0)\Big).$$

Verifique que S é linearmente independente e indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que admita S como subsequência.

Proposição 4.51 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Se F é um subespaço de E então existe um subespaço G de E tal que*

$$E = F \oplus G,$$

isto é, todo o subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita tem um suplementar.

Demonstração:

Seja $n = \dim E$. Se $\dim F = 0$, isto é, se $F = \{0_E\}$ então considere-se $G = E$. Se $\dim F = n$, isto é, se $F = E$ então considere-se $G = \{0_E\}$.

Suponhamos então que $\dim F = p$, com $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Seja $(u_1, \ldots, u_p)$ uma base de F. Pelo Teorema do Completamento (Teorema 4.50) existem $v_1, \ldots, v_{n-p} \in E$ tais que

$$(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{n-p})$$

é uma base de E. Verifica-se facilmente que considerando

$$G = \langle v_1, \ldots, v_{n-p}\rangle$$

se tem

$$E = F \oplus G.$$

■

Conforme sabemos, se E é um espaço vectorial de dimensão n então qualquer sequência de vectores de E, com um número de vectores diferente de n, não é uma base de E.

O resultado seguinte estabelece que se já conhecermos a dimensão de E e tivermos uma sequência de vectores de E em número igual à sua dimensão então tal sequência é uma base de E se, e só se, é uma sequência geradora ou é uma sequência linearmente independente.

Teorema 4.52 *Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Tem-se:*

1. *Qualquer sequência geradora de E com n vectores é uma base de E.*
2. *Qualquer sequência linearmente independente de n vectores de E é uma base de E.*

Demonstração:

1. Sejam $u_1, \ldots, u_n \in E$ tais que

$$E = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle.$$

De acordo com o Teorema 4.48 existe uma subsequência S' de $S = (u_1, \ldots, u_n)$ que é uma base de E. Como todas as bases de E têm n elementos concluímos que $S' = S$. Logo $S = (u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E.

2. Se $S = (u_1, \ldots, u_n)$ é uma sequência linearmente independente de n vectores de E então, de acordo com o Teorema do Completamento (Teorema 4.50), S é uma subsequência de uma base S'' de E. Como todas as bases de E têm n elementos concluímos que $S'' = S$ e, portanto, S é uma base de E.

■

Exercício 4.48 Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 2. Determine, se possível, quais das seguintes sequências de vectores de F são uma base de F:

(a) $\big((2,0,1,0)\big)$.

(b) $\big((2,0,1,0),(0,-2,0,2)\big)$.

(c) $\big((2,0,1,0),(0,-2,0,2),(2,-2,1,2)\big)$.

(d) $\big((2,0,1,0),(1,0,\frac{1}{2},0)\big)$.

Exercício 4.49 Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (\alpha,-1,-\alpha), \quad u_3 = (1,\alpha,1).$$

Determine o conjunto dos valores de α para os quais (u_1,u_2,u_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Se E e E' são espaços vectoriais tais que $E = E'$ então $\dim E = \dim E'$. Contudo, existem espaços vectoriais que têm a mesma dimensão e não são iguais. Por exemplo,

$$\dim \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_{6\times1}(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^6 = \dim \mathbb{R}_5[x].$$

O resultado seguinte afirma, em particular, que se dois espaços vectoriais E e E' têm a mesma dimensão e um deles é um subespaço do outro então são iguais.

Proposição 4.53 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Tem-se:*

1. *Se F é um subespaço de E então $\dim F \leq \dim E$.*
2. *Se F é um subespaço de E e $\dim F = \dim E$ então $F = E$.*

Demonstração:

1. Suponhamos que F é um subespaço de E com

$$r = \dim F > \dim E = n$$

e cheguemos a uma contradição.

Se $(u_1,\ldots,u_r)$ fosse uma base de F então, como $u_i \in F \subseteq E$, $i = 1,\ldots,r$, concluiríamos que $(u_1,\ldots,u_r)$ seria uma sequência linearmente independente de vectores de E. Assim existiria, em E, uma sequência linearmente independente com um número de vectores (r) superior ao número de vectores (n) de uma sequência geradora de E o que, pelo Teorema 4.38, é uma contradição.

2. Suponhamos que F é um subespaço de E e que

$$\dim F = \dim E = n.$$

Seja $(v_1,\ldots,v_n)$ uma base de F. Então $(v_1,\ldots,v_n)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de F e, como

$F \subseteq E$, $(v_1,\ldots,v_n)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de E.

Como $\dim E = n$, pelo Teorema 4.52, podemos afirmar que $(v_1,\ldots,v_n)$ é uma base de E. Logo

$$E = \langle v_1,\ldots,v_n\rangle.$$

Dado que

$$F = \langle v_1,\ldots,v_n\rangle$$

concluímos que

$$F = E.$$

■

Exemplo 4.54

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos

$$F = \Big\langle (1,0,2),(0,-1,0),(1,-1,4)\Big\rangle.$$

Verificamos facilmente que os vectores indicados, geradores de F, são linearmente independentes e, portanto, $\dim F = 3$.

Como $F \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\dim F = \dim \mathbb{R}^3$ concluímos, pela Proposição 4.53, que

$$F = \mathbb{R}^3.$$

4.5 O Teorema das Dimensões

Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E. De acordo com o Teorema 4.16, $F+G$ é ainda um subespaço de E. O resultado seguinte indica como obter geradores para o subespaço $F+G$ conhecendo geradores para F e geradores para G.

Proposição 4.55 *Seja E um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e sejam F e G subespaços de E com dimensão finita.*

1. *Se $u_1,\ldots,u_r \in F$ e $v_1,\ldots,v_s \in G$ são tais que*

$$F = \langle u_1,\ldots,u_r\rangle \quad \text{e} \quad G = \langle v_1,\ldots,v_s\rangle$$

então

$$F+G = \langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle.$$

2. *Se F e G têm dimensão finita então o mesmo sucede a $F+G$.*

Demonstração:

1. Por hipótese, tem-se

$$\forall_{u\in F}\quad \exists_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{K}}\qquad u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ru_r$$

e

$$\forall_{v\in G}\quad \exists_{\beta_1,\ldots,\beta_s\in\mathbb{K}}\qquad v=\beta_1v_1+\cdots+\beta_sv_s.$$

Seja $z\in F+G$. Então existem $u\in F$ e $v\in G$ tais que

$$z=u+v.$$

Logo

$$\begin{aligned} z&=(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ru_r)+(\beta_1v_1+\cdots+\beta_sv_s)\\ &=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_ru_r+\beta_1v_1+\cdots+\beta_sv_s\end{aligned}$$

e, portanto,

$$z\in\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle.$$

Demonstrámos pois que

$$F+G\subseteq\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle.$$

Reciprocamente, seja $z\in\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle$. Então, existem escalares $\gamma_1,\ldots,\gamma_r,\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+s}\in\mathbb{K}$ tais que

$$\begin{aligned} z&=\gamma_1u_1+\cdots+\gamma_ru_r+\gamma_{r+1}v_1+\cdots+\gamma_{r+s}v_s\\ &=(\gamma_1u_1+\cdots+\gamma_ru_r)+(\gamma_{r+1}v_1+\cdots+\gamma_{r+s}v_s).\end{aligned}$$

Como

$$(\gamma_1u_1+\cdots+\gamma_ru_r)\in F\qquad\text{e}\qquad(\gamma_{r+1}v_1+\cdots+\gamma_{r+s}v_s)\in G,$$

concluímos que $z\in F+G$.

Fica então demonstrado que

$$\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle\subseteq F+G,$$

concluindo a demonstração do que pretendíamos.

2. Como F e G têm, por hipótese, dimensão finita podemos afirmar que existem $r,s\in\mathbb{N}$ e $u_1,\ldots,u_r\in F$ e $v_1,\ldots,v_s\in G$ tais que

$$F=\langle u_1,\ldots,u_r\rangle\qquad\text{e}\qquad G=\langle v_1,\ldots,v_s\rangle.$$

De acordo com 1 tem-se

$$F+G=\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle.$$

Como $r+s\in\mathbb{N}$ concluímos que $F+G$ também tem dimensão finita.

■

Exemplo 4.56

Dados

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=y+2z\}\quad\text{e}\quad G=\Big\langle(1,0,-1),(2,0,4),(0,3,1)\Big\rangle.$$

determinemos uma sequência geradora de $F+G$.

Tem-se

$$\begin{aligned} F&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=y+2z\}\\ &=\{(y+2z,y,z):\ y,z\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Como, para quaisquer $y,z\in\mathbb{R}$, se tem

$$(y+2z,y,z)=y(1,1,0)+z(2,0,1)$$

concluímos que

$$F=\Big\langle(1,1,0),(2,0,1)\Big\rangle.$$

Dado que $G=\langle(1,0,-1),(2,0,4),(0,3,1)\rangle$, por 1 da Proposição 4.55, podemos afirmar que

$$F+G=\Big\langle(1,1,0),(2,0,1),(1,0,-1),(2,0,4),(0,3,1)\Big\rangle.$$

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E então $F+G$ e $F\cap G$ são ainda subespaços de E. O resultado seguinte, conhecido por Teorema das Dimensões, relaciona as dimensões de todos esses subespaços, quando F e G têm dimensão finita.

Teorema 4.57 (Teorema das Dimensões) *Se E é um espaço vectorial (não necessariamente de dimensão finita) e F e G são subespaços de E de dimensão finita então $F+G$ e $F\cap G$ também têm dimensão finita e*

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Demonstração:

A afirmação de que se F e G têm dimensão finita então o mesmo sucede a $F+G$ (respectivamente, $F \cap G$) foi justificada em 2 da Proposição 4.55 (respectivamente, em 1 da Proposição 4.53 pois $F \cap G$ é um subespaço de F).

Demonstremos que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

considerando três casos.

<u>Caso 1</u>: $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Se $F \subseteq G$ então $F \cap G = F$ e, de acordo com o Exercício 4.20, $F+G=G$. Logo

$$\begin{aligned}\dim(F+G) = \dim G &= \dim F + \dim G - \dim F \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).\end{aligned}$$

Se $G \subseteq F$ a demonstração é análoga.

<u>Caso 2</u>: $F \not\subseteq G$ e $G \not\subseteq F$ e $F \cap G = \{0_E\}$.

Neste caso tem-se $F \neq \{0_E\}$. Caso contrário, ter-se-ia $F = \{0_E\} \subseteq G$.

De igual forma se conclui que $G \neq \{0_E\}$.

Assim

$$\{0_E\} = F \cap G \subsetneqq F \neq \{0_E\}$$

e

$$\{0_E\} = F \cap G \subsetneqq G \neq \{0_E\}.$$

Suponhamos que $\dim F = r$ e $\dim G = s$. Tem-se $r > 0$ e $s > 0$. Sejam

$$(u_1, \dots, u_r) \text{ uma base de } F$$

e

$$(v_1, \dots, v_s) \text{ uma base de } G.$$

Dado que, pela Proposição 4.55,

$$F+G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle,$$

demonstremos que $F \cap G = \{0_E\}$ implica que a sequência

$$(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$$

é linearmente independente.

Por hipótese $(u_1, \dots, u_r)$ e $(v_1, \dots, v_s)$ são linearmente independentes.

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = 0_E.$$

Logo

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = (-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_s) v_s.$$

Como

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \in F \quad \text{e} \quad (-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_s) v_s \in G$$

concluímos que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = (-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_s) v_s \in F \cap G.$$

Dado que

$$F \cap G = \{0_E\}$$

tem-se

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = (-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_s) v_s = 0_E.$$

A igualdade anterior e o Critério de Independência Linear permitem concluir que

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$$

e que

$$-\beta_1 = \dots = -\beta_s = 0.$$

Demonstrámos pois que

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$$

e, portanto,

$$(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$$

é uma sequência linearmente independente.

Como
$$F+G=\langle u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\rangle,$$
concluímos então que
$$(u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s)$$
é uma base de $F+G$. Assim
$$\dim(F+G)=r+s$$
e, portanto,
$$\begin{aligned}\dim(F+G)&=r+s=r+s-0\\&=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).\end{aligned}$$

Caso 3: $F\not\subseteq G$ e $G\not\subseteq F$ e $F\cap G\neq\{0_E\}$.

Concluímos facilmente que, como $F\not\subseteq G$ e $G\not\subseteq F$, se tem
$$F\neq\{0_E\}\,,\quad G\neq\{0_E\}\,,\quad F\cap G\subsetneqq F\quad\text{e}\quad F\cap G\subsetneqq G.$$

Sejam $r=\dim F$, $s=\dim G$ e $t=\dim(F\cap G)$. Tem-se $r>0$, $s>0$ e $t>0$. Seja
$$(w_1,\ldots,w_t)\text{ uma base de }F\cap G.$$

Como $(w_1,\ldots,w_t)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de $F\cap G$ e, portanto, de vectores de F, pelo Teorema do Completamento (Teorema 4.50) existem $y_1,\ldots,y_{r-t}\in F$ tais que
$$(w_1,\ldots,w_t,y_1,\ldots,y_{r-t})\text{ é uma base de }F.$$

Argumentos análogos permitem afirmar que existem $z_1,\ldots,z_{s-t}\in G$ tais que
$$(w_1,\ldots,w_t,z_1,\ldots,z_{s-t})\text{ é uma base de }G.$$

Dado que
$$F=\langle w_1,\ldots,w_t,y_1,\ldots,y_{r-t}\rangle$$
e
$$G=\langle w_1,\ldots,w_t,z_1,\ldots,z_{s-t}\rangle$$

então, pelas Proposições 4.55 e 4.28, tem-se
$$\begin{aligned}F+G&=\langle w_1,\ldots,w_t,y_1,\ldots,y_{r-t},w_1,\ldots,w_t,z_1,\ldots,z_{s-t}\rangle\\&=\langle w_1,\ldots,w_t,y_1,\ldots,y_{r-t},z_1,\ldots,z_{s-t}\rangle.\end{aligned}$$

Com alguns cálculos, que não apresentaremos, podemos concluir que
$$(w_1,\ldots,w_t,y_1,\ldots,y_{r-t},z_1,\ldots,z_{s-t})$$
é também uma sequência linearmente independente e, portanto, é uma base de $F+G$. Assim
$$\begin{aligned}\dim(F+G)&=t+(r-t)+(s-t)\\&=r+s-t\\&=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G),\end{aligned}$$
como pretendíamos demonstrar.

■

Exercício 4.50 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços
$$F=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\ a-b=0\ \wedge\ a=b+d\}\,,$$
$$G=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4:\ b-c=0\ \wedge\ d=0\}$$
e
$$H=\Big\langle(1,0,0,3),\ (2,0,0,1)\Big\rangle.$$

Determine uma base de

(a) F.
(b) G.
(c) $F+G$.
(d) $F+H$.

Exercício 4.51 Resolva as alíneas do Exercício 4.50 considerando, em $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, os subespaços
$$F=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}):\ a-b=0\ \wedge\ a=b+d\right\},$$
$$G=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}):\ b-c=0\ \wedge\ d=0\right\}$$
e
$$H=\left\langle\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Exercício 4.52 Resolva as alíneas do Exercício 4.50 considerando, em $\mathbb{R}_3[x]$, os subespaços

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ a - b = 0 \ \wedge \ a = b + d\},$$

$$G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ b - c = 0 \ \wedge \ d = 0\}$$

e

$$H = \langle x^3 + 3, \ 2x^3 + 1\rangle.$$

Exercício 4.53 Sejam F, G e H os subespaços de $\mathbb{R}^4$ indicados no Exercício 4.50.

Sem construir uma base de $F \cap G$ e de $F \cap H$, indique a dimensão de cada um destes subespaços.

Exercício 4.54 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E, com $\dim E = n$. Mostre que se $\dim F > \frac{n}{2}$ e $\dim G > \frac{n}{2}$ então $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Dados subespaços F e G, de dimensão finita, de um espaço vectorial E, conhecendo as dimensões de F e de G, com o Teorema das Dimensões determinamos facilmente a dimensão de $F \cap G$ se conhecermos a de $F + G$ e reciprocamente.

A Proposição 4.55 permite-nos obter geradores para $F+G$ e posteriormente obter uma base de $F + G$.

Se estivermos interessados em determinar não apenas a dimensão de $F \cap G$ mas uma base de $F \cap G$ um dos procedimentos que podemos adoptar, no caso em que F e G são subespaços de $\mathbb{K}^n$, é o que foi seguido no Exemplo 4.12 e que pode ser descrito da seguinte forma:

1. Obter um sistema (S_1) (respectivamente, (S_2)) de equações lineares cujo conjunto das soluções é F (respectivamente, G).

2. Considerar um sistema (S) constituído por todas as equações de (S_1) e todas as equações de (S_2).

3. O conjunto das soluções do sistema (S) é $F \cap G$.

Exemplo 4.58

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços

$$F = \Big\langle (1,0,0), \ (0,1,1), \ (1,1,1) \Big\rangle$$

e

$$G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a - b + 3c = 0\}.$$

Determinemos uma base de $F \cap G$.

Em 8 do Exemplo 4.26 vimos que

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ b = c\}.$$

Assim

$$F \cap G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a - b + 3c = 0 \ \wedge \ b = c\},$$

isto é, $F \cap G$ é o conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogéneo $AX = 0$, nas incógnitas a, b, c, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}.$$

Como

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

concluímos que o referido sistema é equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} a = -2c \\ b = c \end{cases}.$$

Então

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = -2c \ \wedge \ b = c\} \\ &= \{(-2c, c, c) : \ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(-2,1,1) : \ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \Big\langle (-2,1,1) \Big\rangle. \end{aligned}$$

Como $((-2,1,1))$ é uma sequência geradora de $F \cap G$ e é linearmente independente (basta notar que $(-2,1,1) \neq (0,0,0)$) constitui uma base de $F \cap G$.

Exercício 4.55 Sejam

$$F = \Big\langle (1,0,1,-1),\ (1,1,1,0) \Big\rangle \quad \text{e} \quad G = \Big\langle (1,1,0,1),\ (2,0,3,0) \Big\rangle .$$

Determine uma base de $F \cap G$.

OBSERVAÇÃO: Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E são equivalentes as afirmações

1. $F \cap G = \{0_E\}$,
2. $\dim(F \cap G) = 0$,
3. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$,

conforme se verifica facilmente utilizando o Teorema das Dimensões. Assim uma das formas de demonstrar que a soma dos subespaços F e G é uma soma directa é demonstrar que se verifica uma das condições 1, 2 ou 3 anteriores.

Exercício 4.56 Seja $(u_1, \ldots, u_n)$, com $n \geq 2$, uma base de um espaço vectorial E e $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Justifique que

$$E = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle \oplus \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle .$$

Exercício 4.57 Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \Big\langle (1,0,1),\ (1,-1,2) \Big\rangle \quad \text{e} \quad G = \Big\langle (1,\alpha,3) \Big\rangle .$$

(a) Determine o conjunto dos valores de α para os quais se tem

$$\dim(F+G) = 3.$$

(b) Conclua que

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$

se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4.6 Matrizes e espaços vectoriais

Nesta secção veremos como as matrizes se revelam muito úteis para resolver os principais problemas práticos que surgem neste capítulo. Nomeadamente os problemas de, dado um espaço vectorial:

1. Determinar se uma sequência de vectores é linearmente independente.
2. Determinar se um vector pertence ou não ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.
3. Construir uma base a partir de uma sequência geradora.
4. Construir uma base a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Recordemos que se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então, de acordo com a Proposição 4.29, as linhas de A geram o mesmo espaço vectorial (subespaço de $\mathbb{K}^n$) que as linhas de B e que, de acordo com a Proposição 4.36, as linhas de A são linearmente independentes se, e só se, o mesmo suceder às linhas de B.

Nesta perspectiva, o resultado seguinte vai revelar-se interessante.

Proposição 4.59 *As linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes.*

Demonstração:

Seja $A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz não nula em forma de escada e A'' a matriz equivalente por linhas a A' e em forma de escada reduzida.

Atendendo à Proposição 4.36 podemos concluir que as linhas não nulas de A' são linearmente independentes se, e só se, as linhas não nulas de A'' são linearmente independentes.

Seja

$$A'' = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a''_{1k_1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a''_{2k_2} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & \cdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a''_{sk_s} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

com $a''_{1k_1} = a''_{2k_2} = \cdots = a''_{sk_s} = 1$.

Sejam $u_1, \ldots, u_s$ as linhas $1, \ldots, s$, respectivamente, de A''. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ são tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s = 0_{\mathbb{K}^n}$$

então igualando a k_i-ésima componente, $i = 1, \ldots, s$, em ambos os n-uplos concluímos que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0.$$

Logo, pelo Critério de Independência Linear, $u_1, \ldots, u_s$ são linearmente independentes.

■

Seja F um subespaço de $\mathbb{K}^n$ e $S = (u_1, \ldots, u_m)$ uma sequência de vectores de F tais que

$$F = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle .$$

Vejamos como, utilizando matrizes, respondemos facilmente aos problemas enunciados no início desta secção.

Consideremos a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja linha i é u_i, $i = 1, \ldots, m$, e seja A' uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada, isto é,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}.$$

1. A sequência S é linearmente independente se, e só se, A' não tem linhas nulas. (Porquê?)

2. Determinar se um vector v pertencente ao subespaço F de $\mathbb{K}^n$ é equivalente a averiguar se v é combinação linear dos vectores da sequência S, geradora de F.

Consideremos a matriz $C \in \mathcal{M}_{(m+1)\times n}(\mathbb{K})$ cuja linha i é u_i, $i = 1, \ldots, m$, e cuja linha $m+1$ é v. O vector v pertence a F, ou seja, v é combinação linear dos vectores da sequência S se, e só se,

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(C). \text{ (Porquê?)}$$

3. Podemos afirmar que as linhas não nulas de A' são uma base de F. (Porquê?)

   Se tivermos em consideração as eventuais trocas de linhas, efectuadas para obter A' a partir de A, determinamos facilmente uma subsequência de S que é uma base de F.

4. Seja $S' = (v_1, \ldots, v_r)$ uma sequência linearmente independente de vectores de F e seja s a dimensão de F.

   Se $r = s$ então S' é uma base de F. (Porquê?)

   Caso contrário, isto é, se $r < s$, obtemos uma base de F "acrescentando" $s - r$ a S', com a restrição de tais vectores pertencerem a F e a nova sequência ser linearmente independente.

Exemplo 4.60

1. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço

$$G = \Big\langle (1,-1,0), (0,1,4), (2,-1,4) \Big\rangle .$$

Determinemos uma base e a dimensão de G. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.)}.$$

Logo

$$\begin{aligned} G &= \Big\langle (1,-1,0), (0,1,4), (2,-1,4) \Big\rangle \\ &= \Big\langle (1,-1,0), (0,1,4), (0,1,4) \Big\rangle \\ &= \Big\langle (1,-1,0), (0,1,4), (0,0,0) \Big\rangle \\ &= \Big\langle (1,-1,0), (0,1,4) \Big\rangle . \end{aligned}$$

Como a sequência $\big((1,-1,0),(0,1,4)\big)$ é geradora de G e é linearmente independente (note que os elementos da sequência são as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada) então tal sequência é uma base de G, tendo-se $\dim G = 2$.

2. Vejamos um exemplo de como podemos obter uma base de $\mathbb{R}^4$ a partir de uma sequência linearmente independente de vectores de $\mathbb{R}^4$.

Seja
$$S = \Big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\Big).$$
Tal sequência é linearmente independente se, e só se,
$$\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3.$$
Como
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ \text{(f.e.)}$$
concluímos que S é linearmente independente.

Constatamos facilmente que se acrescentarmos à sequência S, por exemplo, o vector $(0,1,0,0)$ obtemos ainda uma sequência linearmente independente. Basta atender a que se tem
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ \text{(f.e.)}$$
e
$$\mathrm{r}(C) = 4.$$
Como a sequência
$$\Big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3),(0,1,0,0)\Big)$$
é linearmente independente e tem $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vectores, pelo Teorema 4.52, é uma base de $\mathbb{R}^4$.

3. Seja S a sequência referida em 2 e seja
$$F = \Big\langle (1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3) \Big\rangle.$$
Determinemos se $(1,4,-2,-3) \in F$. Tal sucede se, e só se,
$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(C),$$

com
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$
Vimos em 2 que
$$\mathrm{r}(A) = 3.$$
Como
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3+(-2)l_1 \\ l_4+(-1)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \to$$
$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4+(-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{(f.e.)}$$
concluímos que
$$\mathrm{r}(C) = 3.$$
Logo
$$(1,4,-2,-3) \in F.$$

4. Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y + 2z\} \quad \text{e} \quad G = \Big\langle (1,0,-1),(2,0,4),(0,3,1) \Big\rangle$$
do Exemplo 4.56. Vimos, nesse exemplo, que
$$F + G = \Big\langle (1,1,0),(2,0,1),(1,0,-1),(2,0,4),(0,3,1) \Big\rangle.$$
Se pretendermos uma base de $F+G$ procedemos da seguinte forma:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-1)l_1 \\ l_4+(-2)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$$
$$\xrightarrow[\substack{l_3+(-2)l_2 \\ l_4+(-2)l_2 \\ l_5+3l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_4+(-2)l_3 \\ l_5+(\frac{2}{3})l_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{(f.e.)}.$$

Podemos afirmar que

$$\big((1,1,0),(0,-1,-1),(0,0,3)\big)$$

é uma base de $F+G$.

Exercício 4.58 Em $\mathbb{R}^3$, determine se a sequência

$$S=\big((1,7,7),(2,7,7),(3,7,7)\big)$$

é linearmente independente.

Exercício 4.59 Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência de vectores

$$S_k=\big((1,0,2),(-1,2,-3),(-1,4,k)\big).$$

Determine o conjunto dos valores de k para os quais S_k é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.60 Utilizando matrizes, justifique que, em $\mathbb{R}^4$, o vector

$$(7,14,-1,2)$$

é combinação linear dos vectores

$$u_1=(1,2,-1,-2), u_2=(2,3,0,-1), u_3=(1,2,1,3), u_4=(1,3,-1,0).$$

Exercício 4.61 Em $\mathbb{R}^3$, determine uma base do subespaço

$$F=\big\langle(1,0,1),(2,2,4),(0,1,1),(1,2,3)\big\rangle.$$

Exercício 4.62 Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$F=\big\langle(1,2,3,4),\ (0,1,2,1),\ (1,0,0,1)\big\rangle$$

e a sequência linearmente independente

$$S=\big((0,2,3,3),\ (1,1,2,2)\big).$$

(a) Verifique que S é uma sequência de vectores de F.
(b) Indique uma base de F que admita S como subsequência.

Exercício 4.63 Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$F=\big\langle(1,0,1,0),\ (-1,1,0,1),\ (1,1,2,1)\big\rangle.$$

(a) Indique uma base de F.
(b) Verifique que $(1,2,3,2)\in F$.
(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ à qual pertençam os vectores da base de F indicada em (a).

Exercício 4.64 Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1=(-1,1,1),\ u_2=(0,2,0),\ u_3=(1,1,-1)$$

e o subespaço

$$F=\langle u_1,u_2,u_3\rangle.$$

(a) Dê exemplo de vectores $v_1,v_2\in F$ distintos de u_1, u_2 e u_3.
(b) Mostre que (u_1,u_2) é uma sequência geradora de F.
(c) Indique uma sequência geradora de F que contenha quatro vectores distintos.
(d) Dê exemplo de um vector $v\in\mathbb{R}^3$ que não pertença a F.

Conforme vimos, os problemas enunciados no início desta secção podem ser resolvidos, utilizando matrizes, no caso do espaço vectorial $E=\mathbb{K}^n$. O que sucede se

$$\boxed{E\neq\mathbb{K}^n}?$$

Por exemplo, como resolver os problemas anteriores se

$$E=\mathbb{K}_r[x] \qquad \text{ou} \qquad E=\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})?$$

Notemos que, para qualquer espaço vectorial E de dimensão n, se fixarmos em E uma base $\mathcal{B}$ então a correspondência de E em $\mathbb{K}^n$ que a cada vector $u\in E$ associa a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ é, de facto, uma aplicação e é bijectiva. Tal sucede porque a Proposição 4.44 garante que f é uma aplicação e é bijectiva pois, qualquer que seja $(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n$, existe um, e um só, $u\in E$ tal que

$$f(u)=(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

De facto, se $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ tem-se $u=\beta_1e_1+\cdots+\beta_ne_n$.

Uma reflexão mais exaustiva sobre este tema, que faremos no Capítulo 5, permitir-nos-á justificar de uma forma mais rigorosa que a resolução dos quatro problemas referidos anteriormente, no caso de $E = \mathbb{K}_r[x]$ ou de $E = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, pode ser feita em $\mathbb{K}^{r+1}$ ou em $\mathbb{K}^{mn}$, respectivamente. Apenas temos de substituir cada um dos vectores de E envolvidos nesses problemas, pela sequência das suas coordenadas em relação a uma base fixa de E.

O mesmo raciocínio pode ser seguido para qualquer outro espaço vectorial E de dimensão finita.

Exemplo 4.61

1. Em $\mathbb{R}_3[x]$, consideremos a sequência
$$S = \left(x^3 + 4x^2 + 3x + 6,\ 2,\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3\right).$$
Verifiquemos que S é linearmente independente e determinemos uma base de $\mathbb{R}_3[x]$ que tenha S como subsequência.
Em $\mathbb{R}_3[x]$, consideremos a base
$$\mathcal{B} = \left(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right).$$
Em relação à base $\mathcal{B}$, a sequência das coordenadas de:
$$\begin{array}{rcl} x^3 + 4x^2 + 3x + 6 & \text{é} & (1,4,3,6), \\ 2 & \text{é} & (0,0,0,2), \\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3 & \text{é} & (2,8,1,3). \end{array}$$
Como vimos no Exemplo 4.60, a sequência
$$S' = \Big((1,4,3,6), (0,0,0,2), (2,8,1,3)\Big)$$
é linearmente independente e o mesmo sucede à sequência
$$\Big((1,4,3,6), (0,0,0,2), (2,8,1,3), (0,1,0,0)\Big).$$
O elemento de $\mathbb{R}_3[x]$ que na base $\mathcal{B} = \left(x^3, x^2, x, 1\right)$ tem a sequência de coordenadas
$$(0,1,0,0) \quad \text{é} \quad 0x^3 + 1x^2 + 0x + 0 = x^2.$$
Assim
$$S = \left(x^3 + 4x^2 + 3x + 6,\ 2,\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3\right)$$
é linearmente independente e
$$\left(x^3 + 4x^2 + 3x + 6,\ 2,\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3,\ x^2\right)$$
é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Seja E um espaço vectorial tal que
$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$
é uma base de E. Verifiquemos que a sequência
$$S = (e_1 + e_2 + e_4,\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4)$$
é linearmente independente e determinemos uma base de E que tenha S como subsequência.
Em relação à base $\mathcal{B}$ a sequência das coordenadas de:
$$\begin{array}{rcl} e_1 + e_2 + e_4 & \text{é} & (1,1,0,1), \\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 & \text{é} & (2,2,1,1). \end{array}$$
Tem-se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$
com
$$\mathrm{r}(A) = 2$$
e, portanto, a sequência S é linearmente independente.
Dado que
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$
e
$$\mathrm{r}(C) = 4$$
podemos afirmar que
$$\Big((1,1,0,1), (2,2,1,1), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\Big)$$
é uma base de $\mathbb{R}^4$.
O vector de E que, na base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, tem a sequência de coordenadas
$$(0,1,0,0) \quad \text{é} \quad 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 = e_2$$
e o que tem a sequência de coordenadas
$$(0,0,0,1) \quad \text{é} \quad 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4 = e_4.$$
Logo $(e_1 + e_2 + e_4,\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4,\ e_2,\ e_4)$ é uma base de E que tem S como subsequência.

3. Seja
$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : c = d\}.$$
Verificamos facilmente que $\dim F = 3$.
Consideremos a sequência linearmente independente, de vectores de F,
$$S = \big((1,0,1,1),\ (1,-1,2,2)\big).$$
Se pretendermos obter uma base de F que admita S como subsequência teremos de acrescentar $1\ (= 3-2)$ vector de F de forma a que a nova sequência continue linearmente independente. Como
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)},$$
verificamos facilmente que o vector
$$(0,0,1,1) \in F$$
está nas condições pretendidas.

Exercício 4.65 Em $\mathbb{R}^3$, considere as sequências
$$S_1 = \big((1,-1,1),(1,1,0)\big) \quad \text{e} \quad S_2 = \big((1,-1,1),(1,1,0),(2,0,1)\big).$$
Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

Exercício 4.66 Em $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, considere as sequências
$$S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad \text{e} \quad S_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$
Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

Exercício 4.67 Em $\mathbb{R}_2[x]$, considere as sequências
$$S_1 = (x^2 - x + 1,\ x^2 + x) \quad \text{e} \quad S_2 = (x^2 - x + 1,\ x^2 + x,\ 2x^2 + 1).$$
Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

Exercício 4.68 Seja E um espaço vectorial e (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Considere as sequências
$$S_1 = (e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2) \quad \text{e} \quad (e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3).$$
Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

Exercício 4.69 Indique a dimensão e uma base do subespaço

(a) $F = \langle 2x^3 + 2x^2 - 2x,\ x^3 + 2x^2 - x - 1,\ x^3 + x + 5,\ x^3 + 3,\ 2x^3 + 2x^2 - x + 2\rangle$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4.7 Mais sobre a característica de uma matriz

Definição 4.62 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Designamos por ***espaço das linhas*** de A, e representamos por $\mathcal{L}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas m linhas de A.
O subespaço vectorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas n colunas de A é designado por ***espaço das colunas*** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$.
Às dimensões dos subespaços anteriormente definidos chamamos, respectivamente, ***característica de linha*** de A e ***característica de coluna*** de A.

Exemplo 4.63

1. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ então
$$\mathcal{L}(A) = \big\langle (1,0,-1),\ (2,1,0) \big\rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{C}(A) = \big\langle (1,2),\ (0,1),\ (-1,0) \big\rangle.$$
2. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$
então
$$\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B) \quad \text{mas} \quad \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B).$$

OBSERVAÇÃO: Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1. Trivialmente
$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^{\mathsf{T}}).$$

2. De acordo com a Proposição 4.29, se
$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$
então
$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$$
mas pode ter-se
$$\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(B),$$
conforme ilustra o exemplo seguinte. Se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$
concluímos facilmente que
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A) \quad \text{mas} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \mathcal{C}(B).$$

Teorema 4.64 *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

1. *As transformações elementares sobre linhas (respectivamente, colunas) não alteram a característica de coluna (respectivamente, de linha) de A.*

2. *A característica de linha e a característica de coluna de A são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,*
$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{r}(A).$$

Demonstração:

O resultado é trivial se $A = 0$. Suponhamos que $A \neq 0$.

1. Suponhamos que
$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$
e demonstremos que
$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(B).$$

De acordo com a Proposição 4.43, basta demonstrar que o número máximo de vectores linearmente independentes de $\mathcal{C}(A)$ e o correspondente número de vectores de $\mathcal{C}(B)$ são iguais.

Suponhamos que as colunas de índices $j_1, \dots, j_r$ de A, que representamos por $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$, respectivamente, são linearmente dependentes. Tal equivale a afirmar que existem $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r} \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que
$$\alpha_{j_1} A_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_r} A_{j_r} = 0$$
ou equivalentemente,
$$[A_{j_1} \mid \cdots \mid A_{j_r}] \begin{bmatrix} \alpha_{j_1} \\ \vdots \\ \alpha_{j_r} \end{bmatrix} = 0.$$

Como B se obtém de A através de transformações elementares sobre linhas, as mesmas transformações elementares permitem concluir que
$$[A_{j_1} \mid \cdots \mid A_{j_r}] \xrightarrow[(linhas)]{} [B_{j_1} \mid \cdots \mid B_{j_r}],$$
onde B_{j_l} representa a coluna de índice j_l de B, $l = 1, \dots, r$.

De acordo com a Proposição 2.9 como
$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$
os sistemas de equações lineares
$$AX = 0_{m\times 1} \qquad \text{e} \qquad BX = 0_{m\times 1}$$
são equivalentes.

Assim os sistemas
$$[A_{j_1} \mid \cdots \mid A_{j_r}]X = 0_{m\times 1} \quad \text{e} \quad [B_{j_1} \mid \cdots \mid B_{j_r}]X = 0_{m\times 1}$$
são equivalentes e, portanto,
$$[B_{j_1} \mid \cdots \mid B_{j_r}] \begin{bmatrix} \alpha_{j_1} \\ \vdots \\ \alpha_{j_r} \end{bmatrix} = 0,$$
com $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ não todos nulos.

Como a igualdade anterior é equivalente a

$$\alpha_{j_1}B_{j_1}+\cdots+\alpha_{j_r}B_{j_r}=0,$$

concluímos que as colunas de índices $j_1,\ldots,j_r$ de B são também linearmente dependentes.

De acordo com a Proposição 1.46, se

$$A\xrightarrow[(linhas)]{}B$$

então

$$B\xrightarrow[(linhas)]{}A.$$

Podemos pois afirmar que uma sequência de colunas de A é linearmente dependente (respectivamente, independente) se, e só se, o mesmo sucede à sequência das colunas de B com os mesmos índices de coluna. Logo

$$\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{C}(B).$$

Demonstrámos então que as transformações elementares sobre linhas não alteram a característica de coluna.

Falta demonstrar que se

$$A\xrightarrow[(colunas)]{}B$$

então

$$\dim\mathcal{L}(A)=\dim\mathcal{L}(B).$$

Notemos que se

$$A\xrightarrow[(colunas)]{}B$$

então

$$A^\top\xrightarrow[(linhas)]{}B^\top.$$

Vimos que

$$\dim\mathcal{C}\left(A^\top\right)=\dim\mathcal{C}\left(B^\top\right)$$

e, como $\mathcal{C}\left(A^\top\right)=\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}\left(B^\top\right)=\mathcal{L}(B)$, concluímos o que pretendíamos.

2. Consideremos que

$$A\xrightarrow[(linhas)]{}A''\quad\text{(f.e.r.)},$$

com A'' da forma indicada na demonstração da Proposição 4.59.

Vejamos que

$$\dim\mathcal{L}(A'')=s=\dim\mathcal{C}(A''),$$

sendo s o número de linhas não nulas de A'' e, portanto,

$$s=\mathrm{r}(A).$$

Tem-se, trivialmente, $\dim\mathcal{L}(A'')=s$. Como as colunas de índices $k_1,\ldots,k_s$ são linearmente independentes (constituem os s primeiros elementos da base canónica de $\mathbb{K}^m$) e como qualquer uma das restantes colunas de A'' é combinação linear dessas s colunas (porquê?) concluímos que $\dim\mathcal{C}(A'')=s$. Como pela Proposição 4.29 se tem $\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A'')$ e de 1 desta proposição resulta que $\dim\mathcal{L}(A)=\dim\mathcal{L}(A'')$, concluímos que

$$\dim\mathcal{L}(A)=\dim\mathcal{L}(A'')=s=\dim\mathcal{C}(A'')=\dim\mathcal{C}(A),$$

com $s=\mathrm{r}(A)$.

■

Exemplo 4.65

Determinemos uma base do espaço das linhas e uma base do espaço das colunas de

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&1&-3\\-1&-1&1\\2&-1&-5\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R}).$$

Relativamente ao espaço das linhas de A tem-se

$$\mathcal{L}(A)=\Big\langle(1,0,-2),\,(2,1,-3),\,(-1,-1,1),\,(2,-1,-5)\Big\rangle.$$

Como

$$\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&1&-3\\-1&-1&1\\2&-1&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1\\l_3+l_1\\l_4+(-2)l_1}]{}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{l_3+l_2\\l_4+l_2}]{}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\text{(f.e.)}$$

concluímos que uma base de $\mathcal{L}(A)$ é

$$\Big((1,0,-2),\,(0,1,1)\Big).$$

Quanto ao espaço das colunas de A verifica-se que

$$\mathcal{C}(A) = \Big\langle (1,2,-1,2),\ (0,1,-1,-1),\ (-2,-3,1,-5) \Big\rangle .$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

podemos afirmar que uma base de $\mathcal{C}(A)$ é

$$\Big((1,2,-1,2),\ (0,1,-1,-1) \Big) .$$

Exercício 4.70 Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível o que pode afirmar sobre

(a) $\mathcal{L}(A)$?
(b) $\mathcal{C}(A)$?

OBSERVAÇÃO: São equivalentes as seguintes definições de ***característica*** de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

1. A característica de A é o número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.
2. A característica de A é a dimensão do espaço das linhas de A.
3. A característica de A é a dimensão do espaço das colunas de A.
4. A característica de A é o número (máximo) de linhas linearmente independentes de A.
5. A característica de A é o número (máximo) de colunas linearmente independentes de A.

Teorema 4.66 *Uma matriz e a sua transposta têm a mesma característica.*

Demonstração:

Atendendo ao Teorema 4.64 e a que as colunas de uma matriz são as linhas da sua transposta, tem-se

$$\mathrm{r}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A^\top) = \mathrm{r}(A^\top).$$

■

Exercício 4.71 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. De acordo com o Exercício 1.57

$$\mathrm{r}(PA) = \mathrm{r}(A), \text{ qualquer que seja } P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K}), \text{ invertível.}$$

Justifique que

(a) $\mathrm{r}(AQ) = \mathrm{r}(A)$, qualquer que seja $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível.
(b) $\mathrm{r}(PAQ) = \mathrm{r}(A)$, quaisquer que sejam as matrizes invertíveis $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Proposição 4.67 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A) \qquad e \qquad \mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B).$$

Demonstração:

Conforme refere 6 do Exemplo 4.22, a coluna j de AB é combinação linear das colunas de A pelo que, por 1 da Proposição 4.27, se tem

$$\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A).$$

Logo

$$\mathrm{r}(AB) = \dim \mathcal{C}(AB) \leq \dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{r}(A).$$

Para demonstrar que $\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B)$ basta atender a que

$$\mathrm{r}(AB) = \mathrm{r}\left((AB)^\top\right) = \mathrm{r}\left(B^\top A^\top\right) \leq \mathrm{r}\left(B^\top\right) = \mathrm{r}(B).$$

■

Exercício 4.72 Mostre que, quaisquer que sejam as matrizes $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$, se $AB = I_2$ então $BA \neq I_3$.

Sugestão: Estude a característica de BA.

Finalmente refira-se, para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, um outro espaço vectorial importante.

Definição 4.68 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Designamos por ***espaço nulo*** de A, e representamos por $\mathcal{N}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ definido por

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = 0\} .$$

Proposição 4.69 *Se* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{r}(A).$$

Demonstração:

Notemos que

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}$$

e que, de acordo com a Proposição 2.9, os sistemas

$$AX = 0 \qquad \text{e} \qquad A''X = 0$$

têm o mesmo conjunto de soluções, ou equivalentemente,

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A'').$$

Como o sistema

$$A''X = 0$$

tem $n - \mathrm{r}(A'')$ variáveis livres, concluímos que, por substituição regressiva, podemos obter $n - \mathrm{r}(A'')$ vectores de $\mathcal{N}(A'')$ linearmente independentes, sendo o número máximo de vectores nessas condições. Logo, pela Proposição 4.43, tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A'') = n - \mathrm{r}(A'').$$

Como

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A'') \quad \text{e} \quad \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A'')$$

concluímos, como pretendíamos, que

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{r}(A).$$

■

Exercício 4.73 Seja $A \in \mathcal{M}_{50\times 30}(\mathbb{R})$ uma matriz com característica 10. Indique a dimensão do conjunto das soluções do sistema homogéneo

(a) $AX = 0$.
(b) $A^{\mathsf{T}}Y = 0$.

Exercícios suplementares

Secção 4.1 Definição, exemplos e propriedades

Exercício 4.74 Determine se $\mathbb{R}^2$, com as operações indicadas em cada alínea, é um espaço vectorial real. No caso negativo, indique os axiomas que não se verificam.

(a) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere que:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{e} \quad \alpha(x_1, x_2) = (0, \alpha x_1).$$

(b) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere que:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 - y_2) \quad \text{e} \quad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

(c) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere que:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$$

e

$$\alpha(x_1, x_2) = (|\alpha x_1|, |\alpha x_2|).$$

Exercício 4.75 Seja $(E, +, \cdot)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definam-se uma adição $\boxplus$ e uma multiplicação externa $\boxdot$ por, respectivamente,

$$\forall_{u,v\in E} \qquad u \boxplus v = u + (-v)$$

e

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \;\; \forall_{u\in E} \qquad \alpha \boxdot u = (-\alpha)u.$$

Indique quais das propriedades da definição de espaço vectorial são satisfeitas por E, com estas operações.

Exercício 4.76 Demonstre 2, 3, 4 e 6 do Exemplo 4.3.

Exercício 4.77 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. Justifique que E é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. (Por vezes utilizam-se as notações $E_{\mathbb{C}}$ ou $E_{\mathbb{R}}$ para distinguir se E está a ser considerado espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ ou sobre $\mathbb{R}$, respectivamente.)

Exercício 4.78 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $u, v \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Justifique que

$$\alpha u + \beta v = \beta u + \alpha v \qquad \text{se, e só se,} \qquad \alpha = \beta \text{ ou } u = v.$$

Secção 4.2 Subespaços vectoriais

Exercício 4.79

(a) Seja
$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}.$$
Justifique que $\mathcal{P}$, com as operações usuais de adição em $\mathbb{R}^3$ e multiplicação de um número real por um elemento de $\mathbb{R}^3$, é um espaço vectorial real.
(Note que geometricamente $\mathcal{P}$ é um plano que passa na origem.)

(b) Seja
$$\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = \alpha\},$$
com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathcal{Q}$ é um espaço vectorial real?
(Note que geometricamente $\mathcal{Q}$ é um plano que não passa na origem.)

Exercício 4.80 Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $F_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a + c = b\}$ em $\mathbb{R}^3$.
(b) $F_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 2b + c \ \wedge\ b = c + d\}$ em $\mathbb{R}^4$.
(c) $F_3 = \{(a, b, c) : a, c \in \mathbb{R} \ \wedge\ b \in \mathbb{C}\}$ em $\mathbb{R}^3$.
(d) $F_4 = \{(a, b, c) : a \in \mathbb{R} \ \wedge\ b, c \in \mathbb{C}\}$ em $\mathbb{C}^3$.
(e) $F_5 = \{(a, b, c) : a, c \in \mathbb{R} \ \wedge\ b \in \mathbb{C}\}$ em $\mathbb{C}^3$.
(f) $F_6 = \{(a, b, c) : a \in \mathbb{R} \ \wedge\ b, c \in \mathbb{C}\}$ em $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$.

Exercício 4.81 Para cada um dos seguintes casos, indique se $(E, +, \cdot)$ é um espaço vectorial real.

(a) $E = \mathbb{R}^3$, com a adição usual e a multiplicação externa tal que
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad \alpha(a, b, c) = (\alpha a, b, c).$$
(b) $E = \mathbb{R}^3$, com a adição usual e a multiplicação externa tal que
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad \alpha(a, b, c) = (0, 0, 0).$$
(c) $E = \mathbb{R}^3$, com a adição usual e a multiplicação externa tal que
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad \alpha(a, b, c) = (2\alpha a, 2\alpha b, 2\alpha c).$$

Exercício 4.82 Justifique que o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$ da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & \overline{a} \end{bmatrix}$ é um espaço vectorial real.

Exercício 4.83 Em $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$, considere o conjunto
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$
Justifique que:

(a) F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$, se $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$ é considerado como espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.
(b) F não é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$, se $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$ é considerado como espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Exercício 4.84 Indique se são subespaços de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

(a) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em forma de escada.
(b) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em que cada linha tem um, e um só, elemento não nulo.

Exercício 4.85 Mostre que é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com traço zero (recorde que $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$).
(b) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que comutam com uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Exercício 4.86 Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ortogonais (isto é, das matrizes $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AA^\top = I_n$).
(b) O conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ idempotentes (isto é, das matrizes $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $A^2 = A$).

Exercício 4.87 Seja
$$G = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : A + A^\top = \alpha I_n, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{K}\}.$$
Justifique que G é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Exercício 4.88 Sejam $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ elementos de $\mathbb{C}^n$. Dizemos que u é ***ortogonal*** a v, e escrevemos $u \perp v$, se
$$u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n} = 0.$$
Justifique que, para cada $u \in \mathbb{C}^n$, o conjunto
$$W_u = \{v \in \mathbb{C}^n : u \perp v\}$$
é um subespaço de $\mathbb{C}^n$.

Exercício 4.89 Determine se são subespaços de $\mathbb{R}^n$ os conjuntos:

(a) $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{Q}\}$.
(b) $G = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_n^2\}$, com $n \geq 2$.
(c) $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_n = 0\}$, com $n \geq 2$.

Exercício 4.90 Considere um sistema possível de m equações lineares com n incógnitas, sobre $\mathbb{K}$, na forma matricial $AX = B$. Justifique que o conjunto C das soluções do sistema é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ se, e só se, $B = 0$, ou equivalentemente, $AX = B$ é um sistema homogéneo.

Exercício 4.91 No espaço vectorial $\mathcal{F}$ de todas as aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (com a adição e a multiplicação externa definidas no Exemplo 4.3, alínea 6)), indique se são subespaços de $\mathcal{F}$:

(a) O conjunto das funções constantes, de $\mathcal{F}$.
Recorde que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma ***função constante*** se

$$\exists_{k \in \mathbb{R}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \qquad f(x) = k.$$

(b) O conjunto das funções limitadas, de $\mathcal{F}$.
Recorde que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma ***função limitada*** se

$$\exists_{L \in \mathbb{R}_0^+} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \qquad |f(x)| \leq L.$$

Exercício 4.92 Sejam F, G e H subespaços de um espaço vectorial E.

(a) Mostre que $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$.
(b) Considerando $E = \mathbb{R}^2$, mostre que pode suceder que

$$F \cap (G + H) \not\subseteq (F \cap G) + (F \cap H).$$

Sugestão: Considere em $\mathbb{R}^2$ três rectas distintas que passem pela origem.

Exercício 4.93 Mostre que, quaisquer que sejam os subespaços F, G e H de um espaço vectorial E, se tem:

(a) $F + G = G + F$.
(b) $(F + G) + H = F + (G + H)$.

Exercício 4.94 Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \ \wedge \ y = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \ \wedge \ z = 0\},$$
$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \ \wedge \ z = 0\},$$
$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$

e

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Determine para que pares (F_i, F_j), com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, se tem

(a) $\mathbb{R}^3 = F_i + F_j$.
(b) $\mathbb{R}^3 = F_i \oplus F_j$.

Exercício 4.95 Em $\mathbb{R}^2$, considere o subespaço

$$F = \{(a, 2a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determine um subespaço G, de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F \oplus G = \mathbb{R}^2.$$

(b) Caso seja possível, indique um subespaço H, de $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F \oplus H = \mathbb{R}^2, \quad \text{com} \quad H \neq G.$$

Exercício 4.96 Em $\mathbb{R}_2[x]$, considere os subespaços

$$F = \{ax^2 + b : a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad G = \{cx : c \in \mathbb{R}\}.$$

Justifique que

$$\mathbb{R}_2[x] = F \oplus G.$$

Exercício 4.97 Em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, considere o subespaço S das matrizes simétricas e o subespaço S' das matrizes hemi–simétricas.
Mostre que

$$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = S \oplus S'.$$

Sugestão: Atenda aos Exercícios 1.31 e 1.113.

Exercício 4.98 Considere o conjunto F das matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em que a primeira coluna é nula.

(a) Justifique que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(b) Mostre que existe um subespaço G de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = F \oplus G.$$

Exercício 4.99 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Mostre que $F+G$ é o "menor" subespaço de E que contém $F \cup G$, isto é, mostre que se H é um subespaço de E que contém $F \cup G$ então $F + G \subseteq H$.

Exercício 4.100 Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência

$$S = \big((1,0,1),\ (0,1,1),\ (2,-1,1)\big).$$

(a) Indique se $(1,-1,2)$ é combinação linear dos vectores de S.

(b) Indique se $(1,-1,0)$ é combinação linear dos vectores de S.

(c) Mostre que é possível escrever de duas formas diferentes o vector $(1,-1,0)$ como combinação linear dos vectores de S.

(d) Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais o vector $(3,-5,k)$ é combinação linear dos vectores de S.

Exercício 4.101 Em $\mathbb{R}_2[x]$, considere a sequência

$$S = \left(x^2+1,\ x+1,\ 2x^2-x+1\right).$$

(a) Indique se x^2-x+2 é combinação linear dos vectores de S.

(b) Indique se x^2-x é combinação linear dos vectores de S.

(c) Mostre que é possível escrever de duas maneiras diferentes o vector x^2-x como combinação linear dos vectores de S.

(d) Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais o polinómio $3x^2-5x+k$ é combinação linear dos vectores de S.

Observação: Compare com o exercício anterior.

Exercício 4.102 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine se a coluna de B é combinação linear das colunas de A.

Exercício 4.103

(a) Demonstre a afirmação 6 do Exemplo 4.22, segundo a qual se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então a coluna j de AB é combinação linear das colunas de A, sendo os coeficientes da combinação linear os elementos da coluna j de B.

(b) Considerando

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

indique, sem efectuar cálculos, como cada uma das colunas de AB se escreve como combinação linear das colunas de A.

Exercício 4.104 Apresentando uma sequência geradora, justifique que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+2b-c=0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(b) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b+f=0 \wedge a=c \wedge e=0\right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(c) $\{ax^3+bx^2+cx+d \in \mathbb{R}_3[x] : a+d=0 \ \wedge\ c=2d\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 4.105 Seja

$$F = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 : b-c=0 \ \wedge\ a=b+d\}.$$

(a) Indique, se possível, um vector $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5) \in \mathbb{R}^5$, que não pertença a F e tal que $\alpha_2=\alpha_3$.

(b) Mostre que F é subespaço de $\mathbb{R}^5$ e determine uma sequência geradora de F.

(c) Determine se

$$F = \big\langle (2,1,1,1,1), (0,1,1,-1,0) \big\rangle.$$

Exercício 4.106

(a) Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. Mostre que o sistema de equações lineares, nas incógnitas x,y,z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2y+3z=b \\ x+3y+2z=c \end{cases}$$

é possível.

(b) Deduza da alínea (a) que

$$\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Exercício 4.107 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u, v, w \in E$. Mostre que se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_E, \quad \text{com } \alpha \neq 0 \text{ e } \gamma \neq 0,$$

então

$$\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Exercício 4.108 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, u_2, u_3, u_4 \in E$. Justifique que

(a) $\langle u_1, u_3, u_4 \rangle = \langle u_4, -2u_1, u_3 + u_4 \rangle$.

(b) $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle u_3 + 2u_1, 2u_2, u_4 - u_2, -u_1 \rangle$.

Secção 4.3 Dependência e independência linear

Exercício 4.109 Determine se são linearmente independentes as seguintes sequências de vectores do espaço vectorial indicado.

(a) $\big((2,0,1), (0,0,-1), (-1,1,1)\big)$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $\big((0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\big)$ em $\mathbb{R}^4$.

(c) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right)$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 4.110 Em $\mathbb{C}^2$, considere os vectores $u = (1, i)$ e $v = (i, -1)$. Justifique que:

(a) (u, v) é uma sequência linearmente dependente, se $\mathbb{C}^2$ é considerado um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

(b) (u, v) é uma sequência linearmente independente, se $\mathbb{C}^2$ é considerado um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 4.111 Mostre que num espaço vectorial E são equivalentes as afirmações:

(i) (u_1, u_2, u_3) é uma sequência linearmente independente.

(ii) $(2u_1, u_3 + u_1, u_2 + u_1)$ é uma sequência linearmente independente.

Exercício 4.112 Sejam $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, não nulos, tais que

$$X_i{}^* X_j = 0,$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, r$. Mostre que $X_1, \ldots, X_r$ são linearmente independentes.

Sugestão: Para $i = 1, \ldots, r$, calcule

$$X_i{}^* \left(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r \right),$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$.

Secção 4.4 Bases e dimensão

Exercício 4.113 Determine uma base de cada um dos seguintes subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $F_1 = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a + 2b = 0\big\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $F_2 = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a + 2b = 0 \ \wedge \ c = 0\big\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) $F_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \ a = b = -c \ \wedge \ d = e + f \right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(d) $F_4 = \big\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : \ a + 2b = c\big\}$ em $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercício 4.114 Em $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, considere o subespaço

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \\ -b & c \end{bmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Caso seja possível, para cada $k \in \{1, \ldots, \dim F\}$, indique um subespaço F_k de F tal que $\dim F_k = k$.

Exercício 4.115

(a) Mostre que o espaço vectorial das matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem dimensão 2.

(b) Determine a dimensão do espaço vectorial das matrizes de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.116 Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \; 2a + 3b + c = 0\}$$

e

$$G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \; a - b = 0 \; \wedge \; 5b + c = 0\}.$$

Indique uma base de $F \cap G$.

Exercício 4.117

(a) Mostre que $((1,0,0),(0,i,-1),(1,0,1-i))$ é uma base do espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^3$.

(b) Determine a sequência das coordenadas do vector $(1,1,1)$ na base indicada em (a).

Exercício 4.118 Caracterize os números complexos z para os quais $(z, \bar{z})$ é uma base de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.

Exercício 4.119 Determine uma base do espaço vectorial $E = \mathbb{R}^+$, com as operações de adição e multiplicação externa indicadas no Exercício 4.4.

Exercício 4.120 Indique a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{K}^n$:

(a) $F = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : \; a_n = 0\}$.

(b) $G = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n : \; a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.

Exercício 4.121 Indique a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Subespaço das matrizes simétricas.

(b) Subespaço das matrizes hemi–simétricas.

Exercício 4.122 Seja $(u_1, \ldots, u_n)$ uma base de um espaço vectorial E. Seja $v \in E \setminus \{0_E\}$. Mostre que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

é, ainda, uma base de E.

Sugestão: Considere $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ e escolha k tal que $\alpha_k \neq 0$.

Exercício 4.123 Seja E um espaço vectorial e $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \in E$ tais que

(i) $E = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$.

(ii) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 são linearmente dependentes.

(iii) $e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3$ são linearmente independentes e não são geradores de E.

(iv) $e_1 + e_4, e_2, e_3 + e_4$ são linearmente dependentes.

Mostre que:

(a) e_1, e_2, e_3 são linearmente independentes.

(b) $\dim E = 4$.

(c) e_4 é combinação linear dos vectores e_1, e_2, e_3.
Sugestão: Atenda à condição (iv) e a (a).

(d) (e_1, e_2, e_3, e_5) é uma base de E.

Secção 4.5 O Teorema das Dimensões

Exercício 4.124 Considerando os subespaços F e G do espaço vectorial indicado, apresente uma sequência geradora de $F + G$ e determine a dimensão de $F \cap G$.

(a) $F = \langle(1,1,1)\rangle$ e $G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \; a = b = 2c\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $F = \langle(1,0,1),(0,2,3)\rangle$ e $G = \langle(0,2,3),(2,2,5)\rangle$ em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.125 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \{(0,0,c,d) : \; c,d \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad G = \{(0,b,c,d) : \; b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determine $F + G$ e $F \cap G$.

(b) Verifique, neste caso, a igualdade referida no Teorema das Dimensões.

Exercício 4.126 Sejam F e G subespaços de dimensão 3 de um espaço vectorial de dimensão 5. Justifique que existe um vector, não nulo, comum a F e a G.

Exercício 4.127 Sejam F e G subespaços de dimensão 3 de um espaço vectorial de dimensão 6. Determine todos os valores possíveis para a dimensão de $F \cap G$.

Exercício 4.128 Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E de dimensão 5, tais que

(i) $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$.

(ii) (u, v) é uma base de G.

(iii) (e_1, e_2, e_3, u, v) é linearmente independente.

Justifique que:

(a) $\dim F \in \{3,4\}$.
(b) $\dim(F \cap G) \in \{0,1\}$.

Exercício 4.129 Sejam F, G e H subespaços de um espaço vectorial E de dimensão finita tais que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F+G = F+H \quad \text{e} \quad G \subseteq H.$$

Justifique que $G = H$.

Exercício 4.130 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e sejam F e G subespaços de E. Designa-se por ***codimensão*** de F, e representa-se por $\operatorname{codim} F$, a dimensão de qualquer subespaço suplementar de F em E, isto é, a dimensão de um subespaço H tal que $E = F \oplus H$.

Verifique que

$$\operatorname{codim}(F+G) = \operatorname{codim} F + \operatorname{codim} G - \operatorname{codim}(F \cap G).$$

Secção 4.6 Matrizes e espaços vectoriais

(Nesta secção utilize matrizes na resolução dos exercícios.)

Exercício 4.131 Utilizando determinantes, indique o conjunto dos valores de α para os quais a sequência de vectores de $\mathbb{K}^2$

$$\big((\alpha,1),\ (-1,\alpha)\big)$$

é linearmente independente, quando

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercício 4.132 Utilizando determinantes, indique o conjunto dos valores de α para os quais a sequência de vectores de $\mathbb{K}^3$

$$\big((\alpha,1,0),\ (1,\alpha,1),\ (0,1,\alpha)\big)$$

é linearmente dependente, quando

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercício 4.133 Utilizando determinantes, indique os conjuntos dos valores de α, β e γ para os quais a sequência de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$S = \big((0,\gamma,-\beta),\ (-\gamma,0,\alpha),\ (\beta,-\alpha,0)\big)$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.134 Em $\mathbb{R}^3$, considere o vector $u = (-1,-2,-4)$ e, para cada $k \in \mathbb{R}$, considere os vectores $v_k = (k,-1,2k)$ e $w_k = (-k,0,0)$.

Utilizando determinantes, indique o conjunto dos valores de k para os quais a sequência (u, v_k, w_k) é linearmente independente.

Exercício 4.135

(a) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine o conjunto dos valores de k para os quais as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes.

(b) Para os valores de k determinados em (a), indique uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que inclua as matrizes A, B e C.

Exercício 4.136 Em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, determine uma base do subespaço

$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & -9 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Exercício 4.137 Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere as sequências

$$S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

e

$$S_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

Exercício 4.138 Seja E um espaço vectorial real e (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Determine o conjunto dos valores de α para os quais o vector $e_1 + e_2 + e_3$ é combinação linear dos vectores $\alpha e_1 + 2e_2$ e $e_2 + 3e_3$.

Exercício 4.139 Em $\mathbb{R}_3[x]$, considere os vectores

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1 - x,\ u_3 = 2 - 4x - x^2,\ u_4 = 6 - 18x + 9x^2 - x^3,$$

$$v_1 = 1,\ v_2 = x,\ v_3 = -1 + 2x^2,\ v_4 = -3x + 4x^3.$$

Mostre que

$$\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle .$$

Exercício 4.140

(a) Justifique que

$$\mathcal{B} = \left(x^2 + 2x + 1,\ x^2 - 1,\ x^2 - 2x + 1\right)$$

é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Considerando, em $\mathbb{R}_2[x]$, a base $\mathcal{B}' = \left(1,\ x,\ x^2\right)$ determine:

(i) A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}$.

(ii) A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}'$.

Exercício 4.141 Sejam E um espaço vectorial real, $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ uma base de E e

$$F = \langle 2e_1 - e_3,\ e_3 + e_5,\ 2e_1 + e_3 + 2e_5 \rangle .$$

Indique quais das seguintes sequências de vectores constituem uma base de F:

(a) $(2e_1 - e_3,\ e_3 + e_5,\ 2e_1 + e_3 + 2e_5)$;

(b) $(2e_1 - e_3,\ e_3 + e_5)$;

(c) $(2e_1 - e_3,\ e_1 + e_3)$;

(d) $(2e_3 + 2e_5, -e_3 - e_5)$.

Exercício 4.142 Indique, caso seja possível, um vector u tal que

(a) $S = \big((0,0,3),\ (-1,0,2),\ u\big)$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $S = \big(3,\ -x^2 + 2,\ u\big)$ seja uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercício 4.143 Em $\mathbb{R}_2[x]$, considere o subespaço

$$F = \left\langle x^2 + 1,\ x + 1,\ 2x^2 - x + 1 \right\rangle .$$

(a) Indique uma base de F.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ que tenha como subsequência a base indicada em (a).

Exercício 4.144 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \Big\langle (1,1,-1,1), (2,2,3,-1), (3,3,7,-3), (0,0,0,1) \Big\rangle$$

e

$$G = \Big\langle (1,1,-1,1), (1,0,1,-1), (1,-1,-4,4) \Big\rangle .$$

(a) Indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de F.

(b) Determine uma base de $F + G$.

(c) Mostre que $\mathbb{R}^4 = F + G$.

Exercício 4.145 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x = y\ \wedge\ z = w\big\}$$

e

$$G = \big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x = z = 0\big\} .$$

Mostre que

$$\mathbb{R}^4 = F \oplus G.$$

Exercício 4.146 Em $\mathbb{R}_4[x]$, considere o subespaço

$$F = \big\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}_4[x] :\ -2a_0 + 2a_1 + a_4 = 0\ \wedge\ -a_0 + a_1 + 5a_4 = 0\big\} .$$

(a) Determine uma base de F.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}_4[x]$ que inclua a base de F indicada em (a).

(c) Indique, caso exista, um subespaço G de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que

$$\dim(F + G) = 4 \quad \text{e} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

Exercício 4.147 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \Big\langle (0,1,0,1),\ (1,2,1,2),\ (1,1,1,1),\ (1,2,3,4) \Big\rangle$$

e

$$G_t = \Big\langle (1,1,0,1),\ (1,0,1,1),\ (t,2,-1,1) \Big\rangle .$$

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de t para o qual $\dim G_t = 2$.

(b) Para o valor de t determinado em (a), determine uma base de $F + G_t$ e a dimensão de $F \cap G_t$.

Exercício 4.148 Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$F_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = \alpha y \ \wedge \ \alpha y = \alpha z\}.$$

(a) Mostre que, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, F_α é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine, em função de α, uma base de F_α.

(c) Seja $G = \langle (1,1,0), (0,0,2) \rangle$.

(i) Discuta, em função de α, $\dim(G + F_\alpha)$.

(ii) Determine, em função de α, uma base de $G + F_\alpha$.

Secção 4.7 Mais sobre a característica de uma matriz

Exercício 4.149 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times5}(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para

(a) $\mathcal{L}(A)$.

(b) $\mathcal{C}(A)$.

(c) $\mathcal{N}(A)$.

Exercício 4.150 Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{C}(A)$.

(a) Justifique que n é par.

(b) Indique $A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{K})$ tal que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{C}(A)$.

Soluções dos exercícios

4.5 (a) $(0,0,0,0)$
(b) $\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$
(c) $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

4.6 (a) $(-1,2,-3,0)$
(b) $(0,0,0,0)$
(c) $\begin{bmatrix} -1&2\\-3&0 \end{bmatrix}$
(d) $-x^3 + 2x^2 - 3x$

4.12 (a) Não
(b) Não
(c) Sim
(d) Sim

4.13 Não

4.18 (a) $\{(0,0,0,0)\}$
(b) $\{(d,d,d,d) : \ d \in \mathbb{R}\}$
(c) $\{(0,0,0,d) : \ d \in \mathbb{R}\}$

4.22 (b) Projecção de A sobre F, segundo G: $\begin{bmatrix} 4&5\\0&0 \end{bmatrix}$
Projecção de A sobre G, segundo F: $\begin{bmatrix} 0&0\\0&6 \end{bmatrix}$

4.27 (a) Por exemplo, $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1&1\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1\\-1&0 \end{bmatrix} \right\rangle$

4.28 (a) Por exemplo, $\big((1,0,1),(0,1,0)\big)$
(b) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} -1&0\\0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0\\1&0 \end{bmatrix}\right)$
(c) Por exemplo, $(x^2, 2x^3 + x, -x^3 + 1)$

4.31 (a) Por exemplo, $u = (2,1,5)$ e $v = (1,1,0)$
(b) Por exemplo, $\big((2,1,0),(0,0,1)\big)$
(c) Sim

4.37 Por exemplo, $\big((2,3,3)\big)$ e $\big((-4,-6,-6)\big)$

4.38 Por exemplo, $\big((1,1,1,0,0),(1,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\big)$

4.39 Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1&1\\0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1\\-1&0 \end{bmatrix}\right)$

4.41 (a) 1
(b) n
(c) $\frac{n(n+1)}{2}$

4.42 Por exemplo, $\big((1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\big)$

4.43 (a) $(1,1,1,1)$, na base $\mathcal{B}$
$(4,3,2,1)$, na base b. c.$_{\mathbb{R}^4}$
(b) $(a-b, b-c, c-d, d)$, na base $\mathcal{B}$
(a,b,c,d), na base b. c.$_{\mathbb{R}^4}$

4.44 (a) $(1,1,1,1)$, na base $\mathcal{B}$
$(4,3,2,1)$, na base $\mathcal{B}'$
(b) $(a-b, b-c, c-d, d)$, na base $\mathcal{B}$
(a,b,c,d), na base $\mathcal{B}'$

4.45 (a) $(1,1,1,1)$, na base $\mathcal{B}$
$(4,3,2,1)$, na base $\mathcal{B}'$
(b) $(a-b, b-c, c-d, d)$, na base $\mathcal{B}$
(a,b,c,d), na base $\mathcal{B}'$

4.46 (b) Por exemplo, $\big((1,2,1),(0,1,1)\big)$

4.47 Por exemplo, $\big((1,1,0),(2,1,0),(0,0,1)\big)$

4.48 (a) Não
(b) Sim
(c) Não
(d) Não

4.49 $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

4.50 (a) Por exemplo, $\big((1,1,0,0),(0,0,1,0)\big)$
(b) Por exemplo, $\big((1,0,0,0),(0,1,1,0)\big)$
(c) Por exemplo, $\big((1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,0)\big)$
(d) Por exemplo, $\big((1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,3),(2,0,0,1)\big)$

4.51 (a) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$
(b) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$
(c) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
(d) Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

4.52 (a) Por exemplo, $(x^3 + x^2,\ x)$
(b) Por exemplo, $(x^3,\ x^2 + x)$
(c) Por exemplo, $(x^3 + x^2,\ x,\ x^3)$
(d) Por exemplo, $(x^3 + x^2,\ x,\ x^3 + 3,\ 2x^3 + 1)$

4.53 $\dim F \cap G = 1$, $\dim F \cap H = 0$

4.55 $\emptyset$

4.57 (a) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

4.58 Não

4.59 $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

4.61 Por exemplo, $\big((1,0,1), (2,2,4), (0,1,1)\big)$

4.62 (b) Por exemplo, $\big((1,2,3,4), (0,1,2,1), (1,0,0,1), (0,0,0,1)\big)$

4.63 (a) Por exemplo, $\big((1,0,1,0), (0,1,1,1)\big)$
(c) Por exemplo, $\big((1,0,1,0), (0,1,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\big)$

4.64 (a) Por exemplo,
$v_1 = u_1 + u_2 = (-1,3,1)$ e
$v_2 = 3u_2 = (0,6,0)$
(c) Por exemplo, $(u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2)$
(d) Por exemplo, $(1,1,1)$

4.65 (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.66 (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.67 (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.68 (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.69 (a) $\dim F = 3$
Por exemplo,
$(x^3 + x^2 - x,\ x^2 - 1,\ x + 2)$
(b) $\dim G = 3$
Por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

4.70 (a) $\mathcal{L}(A) = \mathbb{K}^n$
(b) $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}^n$

4.73 (a) 20
(b) 40

4.79 (b) Não

4.80 (a) Sim
(b) Sim
(c) Não
(d) Não
(e) Não
(f) Sim

4.81 (a) Não
(b) Não
(c) Não

4.84 (a) Não
(b) Não

4.89 (a) Não
(b) Não
(c) Não

4.91 (a) Sim
(b) Sim

4.94 (a) (F_1, F_5), (F_2, F_4), (F_2, F_5), (F_3, F_5), (F_4, F_5)
(b) (F_1, F_5), (F_2, F_4), (F_3, F_5)

4.95 (a) Por exemplo,
$G = \{(0,b) :\ b \in \mathbb{R}\}$
(b) Por exemplo,
$H = \{(2b,b) :\ b \in \mathbb{R}\}$

4.100 (a) Não
(b) Sim
(d) $\{-2\}$

4.101 (a) Sim
(d) $\{-2\}$

4.102 Sim

4.103 (b) Coluna 1 de AB:
$(2,3) = 0(-1,1) + 1(2,3) + 0(0,1)$
Coluna 2 de AB:
$(5,8) = -1(-1,1) + 2(2,3) + 3(0,1)$

4.104 (a) Por exemplo,
$\big((1,-2,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1)\big)$
(b) Por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
(c) Por exemplo, $(-x^3 + 2x + 1,\ x^2)$

4.105 (a) Por exemplo, $(1,2,2,1,0)$
(b) Por exemplo,
$F = \big\langle (1,1,1,0,0), (1,0,0,1,0), (0,0,0,0,1) \big\rangle$
(c) Não

4.109 (a) Sim
(b) Sim
(c) Não

4.113 (a) Por exemplo, $\big((-2,1,0), (0,0,1)\big)$
(b) Por exemplo, $\big((-2,1,0)\big)$
(c) Por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$
(d) Por exemplo, $(-2x^2 + x,\ x^2 + 1)$

4.114 $\dim F = 3$
Por exemplo,
$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$
$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$
$F_3 = F$

4.115 (b) 3

4.116 Por exemplo, $\big((1,1,-5)\big)$

4.117 (b) $(0,-i,1)$

4.118 $z = a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

4.119 Por exemplo, (2)

4.120 (a) $n - 1$
(b) $n - 1$

4.121 (a) $\frac{n(n+1)}{2}$
(b) $\frac{n(n-1)}{2}$

4.124 (a) 0
(b) 2

4.125 (a) $F + G = G$, $F \cap G = F$

4.127 0, se $\dim(F + G) = 6$
1, se $\dim(F + G) = 5$
2, se $\dim(F + G) = 4$
3, se $\dim(F + G) = 3$

4.131 (a) $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
(b) $\mathbb{R}$

4.132 (a) $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
(b) $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

4.133 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.134 $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

4.135 (a) $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 0\}$
(b) Por exemplo, $\left(A, B, C, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

4.136 Por exemplo, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$

4.137 (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente
Por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$

4.138 $\{3\}$

4.140 (b) (i) Sequência de coordenadas de x^2+2x+1: $(1,2,1)$
Sequência de coordenadas de x^2-1: $(-1,0,1)$
Sequência de coordenadas de x^2-2x+1: $(1,-2,1)$

(ii) Sequência de coordenadas de 1: $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
Sequência de coordenadas de x: $(\frac{1}{4},0,-\frac{1}{4})$
Sequência de coordenadas de x^2: $(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

4.141 (a) Não é
(b) É
(c) Não é
(d) Não é

4.142 (a) Por exemplo, $(0,1,0)$
(b) Por exemplo, x

4.143 (a) Por exemplo, $(x^2+1,\ x+1)$
(b) Por exemplo, $(x^2+1,\ x+1,\ 1)$

4.144 (a) Por exemplo,
$\big((1,1,-1,1),(2,2,3,-1),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\big)$
(b) Por exemplo,
$\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$

4.146 (a) Por exemplo, $(1+x,\ x^2,\ x^3)$
(b) Por exemplo,
$(1,\ 1+x,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$
(c) Por exemplo, $G=\langle x^3,\ x^4\rangle$

4.147 (a) $t=1$
(b) Por exemplo,
$\big((1,2,1,2),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,1,0,1)\big)$
$\dim(F\cap G_t)=1$

4.148 (b) Base de F_α:
Por exemplo,
$\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$, se $\alpha=0$
Por exemplo,
$\big((\alpha,1,1)\big)$, se $\alpha\neq 0$
(c) (i) $\dim(G+F_\alpha)$:
2, se $\alpha=1$
3, se $\alpha\neq 1$
(ii) Base de $G+F_\alpha$:
Por exemplo,
$\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$,
se $\alpha\neq 1$
Por exemplo,
$\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$,
se $\alpha=1$

4.149 (a) Por exemplo,
$\big((1,-1,-2,0,1),(0,3,1,3,2)\big)$
(b) Por exemplo, $\big((1,0,2),(-1,3,1)\big)$
(c) Por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix}-7\\-1\\3\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-2\\0\\0\\3\end{bmatrix}\right)$

4.150 (b) Por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

CAPÍTULO 5

Aplicações Lineares

Neste capítulo E, E' e E'' são espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Estará implícito que em cada definição ou resultado em que intervenha mais do que um espaço vectorial, tais espaços vectoriais são considerados todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$.

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição 5.1 Uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$ diz-se uma ***aplicação linear*** (sobre $\mathbb{K}$) se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\forall_{u,v\in E} \qquad f(u+v)=f(u)+f(v).$
2. $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{u\in E} \qquad f(\alpha u)=\alpha f(u).$

Notemos que, quer em E quer em E', a adição está a ser representada pelo mesmo símbolo $+$ e o mesmo se passa em relação à multiplicação externa. Se fizéssemos a distinção e considerássemos os espaços vectoriais $(E,+,\cdot)$ e $(E',\boxplus,\boxdot)$, as propriedades anteriores tomariam as seguintes formas:

1. $\forall_{u,v\in E} \qquad f(u+v)=f(u)\boxplus f(v).$
2. $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{u\in E} \qquad f(\alpha\cdot u)=\alpha\boxdot f(u).$

No entanto, conforme sabemos, o contexto elimina qualquer ambiguidade.

Exemplo 5.2

1. Seja $\beta \in \mathbb{K}$. Consideremos a aplicação
$$f : E \longrightarrow E$$
tal que
$$\forall_{w\in E} \qquad f(w) = \beta w.$$
Tem-se
(a) $\forall_{u,v\in E} \qquad f(u+v) = \beta(u+v) = \beta u + \beta v = f(u) + f(v)$.
(b) $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \ \forall_{u\in E} \ \ f(\alpha u) = \beta(\alpha u) = (\beta\alpha)u = (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) = \alpha f(u)$.
Logo f é uma aplicação linear.
Como casos particulares importantes, consideremos $\beta = 0$ e $\beta = 1$.
No primeiro caso ($\beta = 0$) obtemos
$$f : E \longrightarrow E$$
tal que
$$\forall_{u\in E} \qquad f(u) = 0_E,$$
designada por ***aplicação nula*** de E.
No segundo caso ($\beta = 1$) obtemos
$$f : E \longrightarrow E$$
tal que
$$\forall_{u\in E} \qquad f(u) = u,$$
designada por ***aplicação identidade*** de E e que representaremos por id_E. Tem-se pois
$$\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$$
tal que
$$\forall_{u\in E} \qquad \mathrm{id}_E(u) = u.$$
Os dois exemplos seguintes constituem generalizações destes dois casos particulares.

2. A aplicação
$$f : E \longrightarrow E'$$
tal que
$$\forall_{u\in E} \qquad f(u) = 0_{E'}$$
é uma aplicação linear designada por ***aplicação nula*** de E em E' e que pode ser representada por $0_{E,E'}$.

3. Se F é um subespaço de E então a aplicação
$$f : F \longrightarrow E$$
tal que
$$\forall_{u\in F} \qquad f(u) = u$$
é uma aplicação linear.

4. Sejam $m, b \in \mathbb{R}$. A aplicação
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que
$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad f(x) = mx + b$$
é linear se, e só se, $b = 0$. De facto, tem-se
$$f(x+y) = m(x+y) + b = mx + my + b$$
e
$$f(x) + f(y) = (mx+b) + (my+b) = mx + my + 2b.$$
Logo a condição 1 da Definição 5.1 é verificada se, e só se,
$$mx + my + b = mx + my + 2b,$$
ou equivalentemente, se
$$b = 2b,$$
isto é, se
$$b = 0.$$
Vejamos se para $b = 0$ a condição 2 da Definição 5.1 é satisfeita pois, se tal não se verificar, concluímos que, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$, f não é linear.
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad f(\alpha x) = m(\alpha x) = (m\alpha)x = (\alpha m)x = \alpha(mx) = \alpha f(x).$$
Logo f é linear se, e só se, $b = 0$.

5. A aplicação
$$D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$$
definida por
$\forall_{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]}$
$$D\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\right) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$
é uma aplicação linear (Porquê?) e é habitualmente designada por ***aplicação derivada*** em $\mathbb{R}_n[x]$.

6. A aplicação
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que
$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad f(x) = x^2$$
não é uma aplicação linear. (Porquê?)

7. A aplicação
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
tal que
$$\forall_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(x,y,z) = (2x, y+z)$$
é uma aplicação linear porque, quaisquer que sejam $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ e qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, se tem
$$\begin{aligned} f\Big((x,y,z) + (x',y',z')\Big) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \Big(2(x+x'), (y+y') + (z+z')\Big) \\ &= \Big(2x + 2x', (y+z) + (y'+z')\Big) \\ &= (2x, y+z) + (2x', y'+z') \\ &= f(x,y,z) + f(x',y',z') \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f\Big(\alpha(x,y,z)\Big) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (2(\alpha x), \alpha y + \alpha z) \\ &= \Big(\alpha(2x), \alpha(y+z)\Big) \\ &= \alpha(2x, y+z) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

8. A aplicação
$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$
tal que
$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^2 + 2cx - d,$$
para toda a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, é uma aplicação linear.

De facto, quaisquer que sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se
$$\begin{aligned} f(A + A') &= f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}\right) \\ &= ((a+a') + (b+b'))\, x^2 + 2\,(c+c')\, x - (d+d') \\ &= ((a+b) + (a'+b'))\, x^2 + (2c+2c')\, x - (d+d') \\ &= \left((a+b)x^2 + 2cx - d\right) + \left((a'+b')x^2 + 2c'x - d'\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right) \\ &= f(A) + f(A') \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f(\alpha A) &= f\left(\alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right) \\ &= (\alpha a + \alpha b)x^2 + 2(\alpha c)x - (\alpha d) \\ &= \alpha(a+b)x^2 + \alpha(2c)x - \alpha d \\ &= \alpha\left((a+b)x^2 + 2cx - d\right) \\ &= \alpha f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha f(A). \end{aligned}$$

Exercício 5.1 Demonstre que na definição de aplicação linear (Definição 5.1) a conjunção das condições 1 e 2 é equivalente a cada uma das seguintes condições:

(a) $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbf{K}} \quad \forall_{u,v\in E} \qquad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

(b) $\forall_{\alpha\in\mathbf{K}} \quad \forall_{u,v\in E} \qquad f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$.

(c) $\forall_{\beta\in\mathbf{K}} \quad \forall_{u,v\in E} \qquad f(u + \beta v) = f(u) + \beta f(v)$.

Exercício 5.2 Determine se é linear a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se tem

(a) $f(x,y,z) = (y, 0)$.

(b) $f(x,y,z) = (x-1, y)$.

(c) $f(x,y,z) = (xy, 0)$.

(d) $f(x,y,z) = (x, 0, |z|)$.

Exercício 5.3
(a) Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que
$$f(z) = \overline{z},$$
para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Justifique que f não é uma aplicação linear.
(b) Seja $g : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ tal que
$$g(z) = \overline{z},$$
para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Justifique que g é uma aplicação linear.

Exercício 5.4 Seja $g : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que
$$g(A) = A^{\top},$$
para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que g é uma aplicação linear.

Exercício 5.5 Justifique que a aplicação $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que
$$f(A) = \det A,$$
para qualquer $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, não é linear, para $n \geq 2$.
O que sucede para $n = 1$?

As aplicações lineares têm propriedades especiais conforme veremos seguidamente.

Proposição 5.3 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:*

1. $f(0_E) = 0_{E'}$.

2. $\forall_{u\in E} \qquad f(-u) = -f(u)$.

Demonstração:

1. Tem-se, para todo $u \in E$,
$$u = u + 0_E$$
e, portanto,
$$f(u) = f(u + 0_E) = f(u) + f(0_E).$$
Como $f(u) \in E'$, pela Lei do Corte, à esquerda, temos
$$\cancel{f(u)} + 0_{E'} = \cancel{f(u)} + f(0_E).$$

Assim
$$f(0_E) = 0_{E'}.$$

2. Demonstrar que, para todo $u \in E$, se tem
$$f(-u) = -f(u)$$
é equivalente a demonstrar que
$$f(u) + f(-u) = 0_{E'}.$$
De facto,
$$\begin{aligned} f(u) + f(-u) &= f(u + (-u)) \\ &= f(0_E) \\ &= 0_{E'}. \end{aligned}$$

■

Utilizando 1 da proposição anterior podemos justificar facilmente que, por exemplo, as aplicações
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
tal que
$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad f(x) = mx + b, \quad \text{com } b \neq 0,$$
e
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
tal que
$$\forall_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \qquad g(a,b) = (a - b, 2b, a + 1),$$
não são lineares. Basta referir que
$$f(0) = b \neq 0$$
e
$$g(0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0).$$

Exercício 5.6 Determine se é linear cada uma das aplicações seguintes.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + 1),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} c & b \\ a+b & 2 \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

5.2 Operações com aplicações

Consideremos algumas operações envolvendo aplicações de E em E'.

Comecemos pela operação de ***adição de aplicações*** de E em E' (não necessariamente lineares) que a cada par (f, g) de aplicações de E em E' faz corresponder uma, e uma só, aplicação de E em E' definida como se segue.

Definição 5.4 Sendo $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E \longrightarrow E'$ aplicações arbitrárias define-se ***aplicação soma*** das aplicações f e g, e denota-se por $f + g$, a aplicação

$$f + g : \ E \longrightarrow E'$$

tal que

$$\forall u \in E \qquad (f + g)(u) = f(u) + g(u).$$

Tal como para as matrizes, podemos definir uma operação de ***multiplicação de um escalar por uma aplicação*** (não necessariamente linear) que a cada par (α, f), em que α é um elemento de $\mathbb{K}$ e f é uma aplicação de E em E', faz corresponder uma, e uma só, aplicação de E em E' definida da forma seguidamente descrita.

Definição 5.5 Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação arbitrária. Define-se ***aplicação produto de α por f***, e representa-se por αf, a aplicação

$$\alpha f : \ E \longrightarrow E'$$

tal que

$$\forall_{u\in E} \qquad (\alpha f)(u) = \alpha f(u).$$

Utilizam-se frequentemente as notações $-f$ para representar $(-1)f$ e $f - g$ para representar $f + (-g)$.

O resultado seguinte estabelece que a soma de aplicações lineares é, ainda, uma aplicação linear e o mesmo sucede com o produto de um escalar por uma aplicação linear.

Proposição 5.6 *Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E \longrightarrow E'$ aplicações lineares e $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se:*

1. *$f + g$ é uma aplicação linear.*
2. *αf é uma aplicação linear.*

Demonstração:

Exercício.

■

Exercício 5.7 Seja $\mathcal{L}(E, E')$ o conjunto das aplicações lineares de E em E'. Mostre que $\mathcal{L}(E, E')$ com as operações usuais de adição de aplicações e de multiplicação de um escalar por uma aplicação (indicadas nas Definições 5.4 e 5.5) é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Seja A um conjunto. Representamos por id_A, e designamos por ***identidade*** de A, a aplicação

$$\mathrm{id}_A : \ A \longrightarrow A$$

definida por

$$\forall_{a\in A} \qquad \mathrm{id}_A(a) = a.$$

Recorde que sendo A, B e C conjuntos podemos definir uma operação de ***composição de aplicações*** que a cada par (f, g), sendo f uma aplicação de A em B e g uma aplicação de B em C, faz corresponder uma, e uma só, aplicação de A em C, definida como se segue.

Definição 5.7 Sejam A, B e C conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ aplicações. Define-se ***aplicação composta*** de g com f, também designada por "g ***após*** f", e representa-se por $g \circ f$, a aplicação

$$g \circ f : \; A \longrightarrow C$$

tal que

$$\forall_{a \in A} \qquad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Exercício 5.8 Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(a, b) = (0, b),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e

$$g(a, b) = (a, a),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Justifique que

$$0 = f \circ g \neq g \circ f,$$

onde 0 representa a aplicação nula de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5.9

(a) Sendo A e B conjuntos verifique que para qualquer aplicação

$$f : A \longrightarrow B$$

se tem

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \qquad \text{e} \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

(b) Mostre que, sempre que têm sentido as operações indicadas, se verifica que:

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
(ii) $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$.
(iii) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$.
(iv) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.

Proposição 5.8 *A aplicação obtida por composição de duas aplicações lineares é, ainda, uma aplicação linear.*

Demonstração:

Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Demonstremos que a aplicação

$$g \circ f : E \longrightarrow E''$$

tal que

$$\forall_{u \in E} \qquad (g \circ f)(u) = g(f(u))$$

é uma aplicação linear.

Tem-se

$$\begin{aligned} \forall_{u,v \in E} \qquad (g \circ f)(u + v) &= g(f(u + v)) \\ &= g(f(u) + f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \;\; \forall_{u \in E} \qquad (g \circ f)(\alpha u) &= g(f(\alpha u)) \\ &= g(\alpha f(u)) \\ &= \alpha(g(f(u))) \\ &= \alpha(g \circ f)(u) \end{aligned}$$

e, portanto, $g \circ f$ é uma aplicação linear.

■

Tal como na definição de potência de uma matriz quadrada, se A é um conjunto, $f : A \longrightarrow A$ é uma aplicação e $k \in \mathbb{N}_0$, define-se ***potência*** de f, e representa-se por f^k, a aplicação

$$f^k : A \longrightarrow A$$

tal que

$$f^k = \begin{cases} \mathrm{id}_A, & \text{se} \quad k = 0 \\ f^{k-1} \circ f, & \text{se} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

5.3 Imagem e núcleo

Recordemos que sendo A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação se diz que

- f é ***sobrejectiva*** se
$$\forall_{b \in B} \quad \exists_{a \in A} \qquad f(a) = b.$$

- f é ***injectiva*** se
$$\forall_{a,a' \in A} \qquad a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$
ou equivalentemente,
$$\forall_{a,a' \in A} \qquad f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

- f é ***bijectiva*** se f é sobrejectiva e injectiva, ou equivalentemente,
$$\forall_{b \in B} \quad \exists^1_{a \in A} \qquad f(a) = b.$$

Habitualmente designa-se por ***contradomínio*** de f ou ***imagem*** de f, e representa-se por $f(A)$ ou $\operatorname{Im} f$, o conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{f(a) : \ a \in A\} \subseteq B.$$

Assim, a aplicação $f : A \longrightarrow B$ é sobrejectiva se, e só se, $\operatorname{Im} f = B$.

Exemplo 5.9

A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

não é injectiva pois, por exemplo, $f(2) = f(-2) = 4$ e não é sobrejectiva porque, em particular, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$. Tem-se

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_0^+ \subsetneq \mathbb{R}.$$

A aplicação $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$g(x) = x^2, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{N},$$

é injectiva mas não é sobrejectiva. (Justifique.)

A aplicação $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h(x) = x^2, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{C},$$

não é injectiva mas é sobrejectiva. (Porquê?)

Exercício 5.10 Considere as aplicações lineares $\Pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\Pi(a, b, c) = (a, b), \quad \text{para qualquer } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,$$

e $\tau : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\tau(a, b, c) = (a, b, 0), \quad \text{para qualquer } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Justifique que:

(a) Π é sobrejectiva mas não é injectiva.
(b) τ não é sobrejectiva mas é injectiva.

Exercício 5.11 Seja $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, a aplicação derivada, referida em 5 do Exemplo 5.2. Justifique que D não é sobrejectiva nem injectiva.

Exercício 5.12 Sejam A, B e C conjuntos,

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g : B \longrightarrow C.$$

Justifique que:

(a) Se f e g são sobrejectivas então $g \circ f$ é sobrejectiva.
(b) Se f e g são injectivas então $g \circ f$ é injectiva.
(c) Se f e g são bijectivas então $g \circ f$ é bijectiva.

Definição 5.10 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Define-se ***núcleo*** de f, e representa-se por $\operatorname{Nuc} f$ ou $\operatorname{Ker} f$ (do inglês "Kernel"), o conjunto

$$\operatorname{Nuc} f = \{u \in E : \ f(u) = 0_{E'}\}.$$

Pela Proposição 5.3 tem-se $0_E \in \operatorname{Nuc} f$ e, portanto, $\operatorname{Nuc} f \neq \emptyset$. De facto, tem-se

Proposição 5.11 *Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então*

1. $\operatorname{Nuc} f$ *é um subespaço de* E.
2. $\operatorname{Im} f$ *é um subespaço de* E'.

Demonstração:
Exercício.

■

As definições de imagem e de núcleo de uma aplicação linear podem ser generalizadas da seguinte forma.

Definição 5.12 Sejam $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, W um subespaço de E e W' um subespaço de E'. Define-se ***imagem de*** W por f como sendo

$$f(W) = \{f(u) : \ u \in W\}$$

e ***imagem inversa de*** W' por f como sendo

$$f^{\leftarrow}(W') = \{u \in E : \ f(u) \in W'\}.$$

Note que se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

$$\operatorname{Nuc} f = f^{\leftarrow}(\{0_{E'}\}) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im} f = f(E).$$

Exercício 5.13 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Mostre que se W é um subespaço de E e W' é um subespaço de E' então

(a) $f(W)$ é um subespaço de E'.
(b) $f^{\leftarrow}(W')$ é um subespaço de E.

Exemplo 5.13

1. Consideremos a aplicação id_E. Tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} \mathrm{id}_E &= \{u \in E : \ \mathrm{id}_E(u) = 0_E\} \\ &= \{u \in E : \ u = 0_E\} \\ &= \{0_E\}\end{aligned}$$

e concluímos facilmente que

$$\operatorname{Im} \mathrm{id}_E = E.$$

2. Consideremos a aplicação nula de E em E'. Tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} 0_{E,E'} &= \{u \in E : \ 0_{E,E'}(u) = 0_{E'}\} \\ &= \{u \in E : \ 0_{E'} = 0_{E'}\} \\ &= \{u \in E\} \\ &= E\end{aligned}$$

e trivialmente concluímos que

$$\operatorname{Im} 0_{E,E'} = \{0_{E'}\}.$$

3. Para a aplicação $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, referida em 5 do Exemplo 5.2, tal que

$$D\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

para todo $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$, tem-se

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc} D = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] :& \\ & D(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = 0x^n + \cdots + 0x + 0\} \\ = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] :& \\ & n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 = 0x^n + \cdots + 0x + 0\} \\ = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] :& \ n a_n = 0 \wedge \cdots \wedge 2a_2 = 0 \wedge a_1 = 0\} \\ = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] :& \ a_n = 0 \wedge \cdots \wedge a_2 = 0 \wedge a_1 = 0\} \\ = \{0x^n + \cdots + 0x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]\}& \\ = \{a_0 : \ a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}&\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

4. Determinemos o núcleo da aplicação $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, dada no Exemplo 5.2, tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^2 + 2cx - d,$$

para toda a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nuc} f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 0x^2 + 0x + 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (a+b)x^2 + 2cx - d = 0x^2 + 0x + 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+b=0 \ \wedge\ 2c=0 \ \wedge\ d=0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a=-b \ \wedge\ c=0 \ \wedge\ d=0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Neste caso, como em muitos outros, pode não ser imediato determinar $\operatorname{Im} f$. Mais à frente veremos um processo de resolver este problema.

Exercício 5.14 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a,b) = (b,0),$$

para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Justifique que $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f$.

Exercício 5.15 Determine o núcleo e uma base do núcleo para cada uma das aplicações lineares seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y,z) = (y,z),$$

para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (2a, c+d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a,b,c) = (a+b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $t : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 5.16 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Justifique que:

(a) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc}(\alpha f)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(b) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(\alpha f)$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Exercício 5.17 Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Justifique as afirmações:

(a) $\operatorname{Nuc} f \subseteq \operatorname{Nuc}(g \circ f)$.

(b) $\operatorname{Im} g \supseteq \operatorname{Im}(g \circ f)$.

Tal como a imagem de uma aplicação nos permite saber se a aplicação é sobrejectiva, o núcleo de uma aplicação linear permite-nos saber se a aplicação é injectiva.

Proposição 5.14 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se f é injectiva se, e só se,* $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

Demonstração:

Suponhamos que f é injectiva e demonstremos que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

Seja u um vector arbitrário de $\operatorname{Nuc} f$. Como

$$f(u) = 0_{E'} = f(0_E)$$

e f é injectiva concluímos que

$$u = 0_E.$$

Logo

$$\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ e demonstremos que f é injectiva. Se

$$\forall_{u,v \in E} \qquad f(u) = f(v)$$

então

$$\forall_{u,v \in E} \qquad f(u) + (-f(v)) = 0_{E'}.$$

Como f é linear e $-f(v) = f(-v)$ obtemos

$$f(u) + (-f(v)) = f(u) + f(-v) = f(u + (-v)) = 0_{E'}$$

e, portanto,

$$u + (-v) \in \operatorname{Nuc} f.$$

Dado que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ concluímos que

$$u + (-v) = 0_E.$$

Consequentemente

$$u = v.$$

■

Exercício 5.18 Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injectiva, determinando o seu núcleo.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + c, b - c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$g(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ 0 & a+b-c \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

OBSERVAÇÃO: Se $u_1, \ldots, u_r \in E$ são vectores linearmente dependentes e $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então $f(u_1), \ldots, f(u_r) \in E'$ são também linearmente dependentes.

De facto, se existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$$

então

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = f(0_E),$$

isto é,

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_r f(u_r) = 0_{E'}$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$, não todos nulos. Logo $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ são ainda linearmente dependentes.

Exercício 5.19 Indique espaços vectoriais E e E' e indique uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E'$ que transforme vectores de E linearmente independentes em vectores de $\operatorname{Im} f$ linearmente dependentes, isto é, $u_1, \ldots, u_r \in E$ são linearmente independentes mas $f(u_1), \ldots, f(u_r) \in \operatorname{Im} f$ são linearmente dependentes.

Vejamos agora que uma aplicação linear transforma geradores do espaço de partida em geradores da sua imagem e que, se a aplicação é injectiva, vectores linearmente independentes são transformados em vectores linearmente independentes.

Teorema 5.15 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:*

1. *Se E é finitamente gerado e $v_1, \ldots, v_s \in E$ são tais que*

$$E = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$

então

$$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \ldots, f(v_s) \rangle .$$

Dizemos então que f transforma geradores de E em geradores de $\operatorname{Im} f$.

2. *Se $u_1, \ldots, u_r \in E$ são linearmente independentes e f é injectiva então $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ são linearmente independentes.*

Dizemos então que se f é injectiva então f transforma vectores de E linearmente independentes em vectores de $\operatorname{Im} f$ *linearmente independentes.*

Demonstração:

1. Seja u' um vector arbitrário de $\operatorname{Im} f$. Assim

$$\exists_{u \in E} \qquad f(u) = u'.$$

Como $u \in E$ e $E = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ então

$$\exists_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}} \qquad u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s.$$

Logo

$$\begin{aligned} u' = f(u) &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_s f(v_s) \end{aligned}$$

e portanto $u' \in \langle f(v_1), \dots, f(v_s)\rangle$. Demonstrámos pois que

$$\operatorname{Im} f \subseteq \langle f(v_1), \dots, f(v_s)\rangle.$$

Reciprocamente, se $w \in \langle f(v_1), \dots, f(v_s)\rangle$ então

$$\exists_{\beta_1,\dots,\beta_s \in \mathbb{K}} \quad \begin{aligned} w &= \beta_1 f(v_1) + \cdots + \beta_s f(v_s) \\ &= f(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s). \end{aligned}$$

Como $v_1, \dots, v_s \in E$ também se tem $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s \in E$. Logo $w \in \operatorname{Im} f$. Consequentemente

$$\langle f(v_1), \dots, f(v_s)\rangle \subseteq \operatorname{Im} f.$$

Concluímos, como pretendíamos, que

$$\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_s)\rangle.$$

2. Suponhamos que $f : E \longrightarrow E'$ é linear e injectiva e que $u_1, \dots, u_r \in E$ são linearmente independentes. Demonstremos, utilizando o Critério de Independência Linear, que os vectores $f(u_1), \dots, f(u_r)$ são linearmente independentes.

Notemos que se

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_r f(u_r) = 0_{E'}$$

então

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = 0_{E'} = f(0_E).$$

Como f é injectiva podemos afirmar que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Dado que, por hipótese, $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes concluímos, pelo Critério de Independência Linear, que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Logo $f(u_1), \dots, f(u_r)$ são linearmente independentes.

■

Recordando a Definição 5.12 e como consequência do teorema anterior tem-se

Corolário 5.16 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear e seja W um subespaço de E de dimensão finita. Tem-se*

1. *Se $W = \langle w_1, \dots, w_r\rangle$ então $f(W) = \langle f(w_1), \dots, f(w_r)\rangle$.*
2. *Se f é injectiva então $\dim W = \dim f(W)$.*

Demonstração:

Exercício.

■

Exercício 5.20 Determine uma base da imagem de cada uma das aplicações lineares seguintes e também indicadas no Exercício 5.15.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c + d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a, b, c) = (a + b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $t : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 5.21 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, com E de dimensão finita. Mostre que:

(a) f é injectiva se, e só se, transforma vectores de E linearmente independentes em vectores de $\operatorname{Im} f$ (e, portanto, de E') linearmente independentes.

(b) f é sobrejectiva se, e só se, transforma geradores de E em geradores de E'.

(c) f é bijectiva se, e só se, transforma cada base de E numa base de E', isto é, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f é bijectiva.

(ii) $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E se, e só se, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ é uma base de E'.

Notemos que a afirmação 1 do Teorema 5.15 é válida quando E é finitamente gerado, isto é, quando E tem dimensão finita. Logo se $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E então

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \ldots, f(e_n) \rangle .$$

Logo $\operatorname{Im} f$ é também de dimensão finita e, pelo Teorema 4.48,

$$\dim \operatorname{Im} f \leq n = \dim E.$$

Como $\operatorname{Nuc} f$ é um subespaço de E, se E tem dimensão finita então, pela Proposição 4.53, $\operatorname{Nuc} f$ também tem dimensão finita e

$$\dim \operatorname{Nuc} f \leq \dim E.$$

As dimensões de $\operatorname{Nuc} f$ e de $\operatorname{Im} f$ designam-se por ***nulidade*** de f e por ***característica*** de f e representam-se por $\eta(f)$ e $\mathrm{r}(f)$, respectivamente. Se E tem dimensão finita a sua soma é igual à dimensão de E, conforme estabelece o resultado que seguidamente apresentamos e que é conhecido por Teorema da Dimensão.

Teorema 5.17 (Teorema da Dimensão) *Se* $f : E \longrightarrow E'$ *é uma aplicação linear, com* E *de dimensão finita, então* $\operatorname{Nuc} f$ *e* $\operatorname{Im} f$ *também têm dimensão finita e*

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Demonstração:

A justificação de que se E tem dimensão finita então o mesmo sucede a $\operatorname{Im} f$ e a $\operatorname{Nuc} f$ foi feita nas observações que precedem este teorema.

Demonstremos então que

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Seja $n = \dim E$. Se $n = 0$ então $E = \{0_E\}$ e a única aplicação linear de E em E' é a aplicação nula de E em E'. Neste caso tem-se $\operatorname{Nuc} f = E$ e $\operatorname{Im} f = \{0_{E'}\}$. Como

$$\dim \operatorname{Nuc} f = n = \dim E \quad \text{e} \quad \dim \operatorname{Im} f = 0$$

resulta que

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Consideremos que

$$n = \dim E \geq 1.$$

Caso 1: $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$, isto é, $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$, ou equivalentemente, f é injectiva.

Seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e demonstremos que

$$\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big)$$

é uma base de $\operatorname{Im} f$. De facto, como $E = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, por 1 do Teorema 5.15, concluímos que

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \ldots, f(e_n) \rangle .$$

Como f é injectiva e $e_1, \ldots, e_n$ são linearmente independentes, por 2 do Teorema 5.15, resulta que $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ são também linearmente independentes. Assim

$$\Big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\Big)$$

é uma base de $\operatorname{Im} f$ e, portanto, $\dim \operatorname{Im} f = n$. Dado que

$$\dim \operatorname{Nuc} f = 0 \qquad \text{e} \qquad \dim \operatorname{Im} f = n = \dim E$$

resulta que

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Caso 2: $\dim \operatorname{Nuc} f = n$, isto é, $\operatorname{Nuc} f = E$, ou equivalentemente, f é a aplicação nula de E em E'.

Como $\operatorname{Im} f = \{0_{E'}\}$ concluímos que $\dim \operatorname{Im} f = 0$ e portanto

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Caso 3: $\dim \operatorname{Nuc} f = p$, com $1 \leq p \leq n-1$.

Seja $(v_1, \ldots, v_p)$ uma base de $\operatorname{Nuc} f$. Note que

$$f(v_1) = \cdots = f(v_p) = 0_{E'}.$$

Pelo Teorema do Completamento (Teorema 4.50), existem vectores $w_1, \ldots, w_{n-p} \in E$ tais que

$$(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p})$$

é uma base de E.

Tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \langle f(v_1), \ldots, f(v_p), f(w_1), \ldots, f(w_{n-p}) \rangle \\ &= \langle 0_{E'}, \ldots, 0_{E'}, f(w_1), \ldots, f(w_{n-p}) \rangle \\ &= \langle f(w_1), \ldots, f(w_{n-p}) \rangle . \end{aligned}$$

Vejamos que $f(w_1), \ldots, f(w_{n-p})$ são linearmente independentes e, portanto, que

$$\dim \operatorname{Im} f = n - p.$$

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 f(w_1) + \cdots + \alpha_{n-p} f(w_{n-p}) = 0_{E'}$$

e demonstremos que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-p} = 0.$$

A igualdade

$$\alpha_1 f(w_1) + \cdots + \alpha_{n-p} f(w_{n-p}) = 0_{E'}$$

pode escrever-se na forma

$$f(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-p} w_{n-p}) = 0_{E'}$$

pelo que

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-p} w_{n-p} \in \operatorname{Nuc} f.$$

Como $(v_1, \ldots, v_p)$ é uma base de $\operatorname{Nuc} f$ existem $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-p} w_{n-p} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p v_p.$$

Logo

$$(-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_p) v_p + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-p} w_{n-p} = 0_E.$$

Dado que $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p})$ é uma base de E, podemos afirmar que é uma sequência linearmente independente e portanto

$$(-\beta_1) = \cdots = (-\beta_p) = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-p} = 0.$$

Demonstrámos então que $f(w_1), \ldots, f(w_{n-p})$, além de serem geradores de $\operatorname{Im} f$, são também linearmente independentes. Logo

$$\dim \operatorname{Im} f = n - p.$$

Dado que

$$\dim E = n \qquad \text{e} \qquad \dim \operatorname{Nuc} f = p$$

continua a verificar-se a igualdade

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

■

Exercício 5.22 Determine a nulidade de cada uma das aplicações lineares seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ com $\dim \operatorname{Im} f = 4$.
(b) $g : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ com $\dim \operatorname{Im} g = 1$.
(c) $h : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com h sobrejectiva.
(d) $t : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com t sobrejectiva.

Exercício 5.23 Justifique que não existe nenhuma aplicação linear $f : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão inferior ou igual a 3.

Exercício 5.24 Seja $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear com nulidade $\eta(f)$ e característica $\mathrm{r}(f)$. Indique todos os pares possíveis

$$(\eta(f), \mathrm{r}(f)).$$

Exercício 5.25 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, com E e E' ambos de dimensão finita. Justifique que:

(a) Se $\dim E < \dim E'$ então f não é sobrejectiva, ou equivalentemente, se f é sobrejectiva então $\dim E \geq \dim E'$.
(b) Se $\dim E > \dim E'$ então f não é injectiva, ou equivalentemente, se f é injectiva então $\dim E \leq \dim E'$.
(c) Se f é bijectiva então $\dim E = \dim E'$.

Como consequência do Teorema da Dimensão obtemos

Proposição 5.18 *Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear e E e E', ambos de dimensão finita, verificam*

$$\dim E = \dim E'$$

então são equivalentes as afirmações:

1. f é injectiva.

2. f é sobrejectiva.

3. f é bijectiva.

Demonstração:

Suponhamos que $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear com

$$\dim E = \dim E'.$$

Afirmar que f é injectiva equivale a afirmar que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ ou, ainda, que $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.

Como $\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$ concluímos que

$$\dim \operatorname{Nuc} f = 0$$

se, e só se,

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f.$$

Dado que $\dim E = \dim E'$, tem-se $\dim E = \dim \operatorname{Im} f$ se, e só se,

$$\dim E' = \dim \operatorname{Im} f.$$

A igualdade anterior é equivalente a

$$\operatorname{Im} f = E',$$

pois uma das implicações é trivial e a outra resulta da Proposição 4.53 (atenda a que $\operatorname{Im} f$ é um subespaço de E').

Demonstrámos então que f é injectiva se, e só se, $\operatorname{Im} f = E'$ e portanto que 1 e 2 são equivalentes.

Trivialmente, 3 implica 1. Reciprocamente, se 1 se verifica, como 2 também é satisfeita, tem-se 3.

■

Exercício 5.26 Utilizando a Proposição 5.18, determine se é bijectiva cada uma das seguintes aplicações lineares.

(a) A aplicação da alínea (a) do Exercício 5.18, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + c, b - c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d)x^3 + 2ax^2 + (b - c)x + (a + c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Seguidamente apresentamos um resultado que, tal como o Teorema da Dimensão (Teorema 5.17), é válido apenas quando E tem dimensão finita. Estabelece, em particular, que uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E'$ fica perfeitamente determinada se conhecermos as imagens, por f, dos vectores de uma base de E.

Teorema 5.19 (Teorema da Extensão Linear) *Sejam E e E' espaços vectoriais, com E de dimensão finita. Seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e sejam $u'_1, \ldots, u'_n$ vectores arbitrários de E'. Existe uma, e uma só, aplicação linear $f : E \longrightarrow E'$ tal que*

$$f(e_i) = u'_i, \quad \textit{para } i = 1, \ldots, n.$$

Demonstração:

Como $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E podemos afirmar que

$$\forall_{u \in E} \quad \exists_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}} \qquad u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ únicos. De facto, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas do vector u na base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Considere-se a aplicação $f : E \longrightarrow E'$ tal que

$$\forall_{u \in E} \qquad f(u) = \alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_n u'_n,$$

sendo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

Notemos que f é uma aplicação de E em E' pois cada elemento de E tem uma, e uma só, imagem em E'.

Demonstremos que

$$f(e_i) = u'_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Como

$$e_i = 0e_1 + \cdots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \cdots + 0e_n,$$

a sequência das coordenadas do vector e_i na base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ é $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, com o 1 na i-ésima posição do n-uplo. Assim

$$\begin{aligned} f(e_i) &= 0u'_1 + \cdots + 0u'_{i-1} + 1u'_i + 0u'_{i+1} + \cdots + 0u'_n \\ &= u'_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Demonstremos que f é linear. Sendo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (respectivamente, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$) a sequência das coordenadas de u (respectivamente, v) na base $\mathcal{B}$, tem-se

$$\begin{aligned} \forall_{u,v \in E} \quad f(u+v) &= f\Big((\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n)\Big) \\ &= f\Big((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)e_n\Big) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)u'_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)u'_n \\ &= (\alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_n u'_n) + (\beta_1 u'_1 + \cdots + \beta_n u'_n) \\ &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) + f(\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \ \forall_{u \in E} \qquad f(\alpha u) &= f\Big(\alpha(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\Big) \\ &= f\Big((\alpha\alpha_1)e_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)e_n\Big) \\ &= (\alpha\alpha_1)u'_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)u'_n \\ &= \alpha(\alpha_1 u'_1) + \cdots + \alpha(\alpha_n u'_n) \\ &= \alpha(\alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_n u'_n) \\ &= \alpha f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

Logo f é linear.

Finalmente demonstremos que f é a única aplicação linear nas condições pretendidas, mostrando que se existisse uma aplicação linear $g : E \longrightarrow E'$ tal que

$$g(e_i) = u'_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

então ter-se-ia

$$g = f.$$

Como f e g são aplicações com o mesmo conjunto de partida (E) e o mesmo conjunto de chegada (E'), para demonstrar que são iguais teremos apenas de verificar que

$$\forall_{u \in E} \qquad f(u) = g(u).$$

Tem-se

$$\forall_{u \in E} \quad \exists_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}} \qquad u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ únicos. Como f e g são aplicações lineares e para $i = 1, \ldots, n$ se tem $f(e_i) = u'_i = g(e_i)$ resulta que

$$\begin{aligned} \forall_{u \in E} \qquad f(u) &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n) \\ &= \alpha_1 g(e_1) + \cdots + \alpha_n g(e_n) \\ &= g(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= g(u). \end{aligned}$$

Concluímos então que

$$g = f.$$

■

OBSERVAÇÃO: Atendendo ao Teorema da Extensão Linear é usual afirmar que se o espaço de partida de uma aplicação linear tem dimensão finita então a aplicação fica completamente determinada dando as imagens de uma base arbitrária do espaço de partida.

Exemplo 5.20

Suponhamos que pretendemos determinar se existe alguma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Nuc} f = \Big\langle (0,1,1,0), (1,1,1,1) \Big\rangle \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \Big\langle (2,3,4), (0,-1,3) \Big\rangle .$$

Se existir tem de verificar

$$f(0,1,1,0) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad f(1,1,1,1) = (0,0,0).$$

Pelo Teorema do Completamento (Teorema 4.50), como

$$S' = \Big((1,1,1,1), (0,1,1,0) \Big)$$

é uma sequência linearmente independente, existe uma base S de $\mathbb{R}^4$ que admite S' como subsequência. Por exemplo

$$S = \Big((1,1,1,1), (0,1,1,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \Big) .$$

A aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} f(1,1,1,1) &= (0,0,0) \\ f(0,1,1,0) &= (0,0,0) \\ f(0,0,1,0) &= (2,3,4) \\ f(0,0,0,1) &= (0,-1,3) \end{aligned}$$

está nas condições pretendidas.

Exercício 5.27 Justifique que não existe nenhuma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(2,2) = (2,-6) \quad \text{e} \quad f(5,5) = (5,-16).$$

Há alguma "contradição" com o Teorema da Extensão Linear (Teorema 5.19)?

Exercício 5.28 Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$g(1,0) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad g(0,-1) = (0,0,1).$$

Determine $g(a,b)$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5.29 Justifique que existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nas condições abaixo referidas, indicando um exemplo.

(a) $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
(b) $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

Exercício 5.30 Indique se existe alguma aplicação linear nas condições indicadas e em caso afirmativo dê um exemplo.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que

$$\operatorname{Im} f = \Big\langle (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,2,0) \Big\rangle \quad \text{e} \quad \dim \operatorname{Nuc} f = 2.$$

(b) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\operatorname{Nuc} g = \Big\langle (0,1,1,0), (1,1,1,1) \Big\rangle \quad \text{e} \quad (1,1,1) \in \operatorname{Im} g.$$

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, tal que

$$\operatorname{Im} h = \Big\langle (1,2,0,-4), (2,0,-1-3) \Big\rangle .$$

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Definição 5.21 Sejam A e B conjuntos. Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ diz-se ***invertível*** se existe uma aplicação $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A .$$

Proposição 5.22 *Sejam A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação. Tem-se:*

1. *f é invertível se, e só se, f é uma aplicação bijectiva.*
2. *Se f é invertível (isto é, bijectiva) então existe uma, e uma só, aplicação $g : B \longrightarrow A$ tal que*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad e \quad g \circ f = \mathrm{id}_A .$$

Demonstração:

1. Suponhamos que $f : A \longrightarrow B$ é invertível, isto é, que existe uma aplicação $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A\,.$$

Demonstremos que f é sobrejectiva. Tem-se

$$\forall_{b\in B} \quad b = \mathrm{id}_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b)).$$

Como $g(b) \in A$, tomando $a = g(b)$ podemos afirmar que

$$\forall_{b\in B}\ \exists_{a\in A} \quad b = f(a)$$

e portanto f é sobrejectiva.

Para demonstrar que f é injectiva notemos que se

$$\forall_{a,a'\in A} \quad f(a) = f(a')$$

então

$$g(f(a)) = g(f(a')),$$

isto é,

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a').$$

Assim

$$\mathrm{id}_A(a) = \mathrm{id}_A(a')$$

e, portanto,

$$a = a'.$$

Logo f é bijectiva.

Reciprocamente, suponhamos que $f : A \longrightarrow B$ é bijectiva e demonstremos que existe $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A\,.$$

Como f é bijectiva tem-se

$$\forall_{b\in B}\ \exists^1_{a\in A} \qquad f(a) = b.$$

Defina-se $g : B \longrightarrow A$ por

$$\forall_{b\in B} \qquad g(b) = a,$$

sendo a o vector, único, de A que verifica $f(a) = b$.

Constatamos facilmente que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A\,.$$

2. Basta atender a que se existissem $g : B \longrightarrow A$ e $h : B \longrightarrow A$ tais que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad , \quad g \circ f = \mathrm{id}_A$$
$$f \circ h = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ h = \mathrm{id}_A$$

então ter-se-ia

$$h = h \circ \mathrm{id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

■

Definição 5.23 Se a aplicação $f : A \longrightarrow B$ é invertível então a aplicação única $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = \mathrm{id}_B \quad \text{e} \quad g \circ f = \mathrm{id}_A$$

diz-se a (aplicação) ***inversa*** de f e representa-se por f^{-1}.

OBSERVAÇÃO: Trivialmente tem-se

- $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$.
- Se f é invertível então o mesmo sucede a f^{-1} e $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemplo 5.24

Se $f : E \longrightarrow E$ verifica

$$f^3 = \mathrm{id}_E$$

então

$$f \circ f^2 = \mathrm{id}_E = f^2 \circ f.$$

Podemos então afirmar que f é invertível e que

$$f^{-1} = f^2.$$

Exercício 5.31 Mostre que cada uma das aplicações lineares seguintes é invertível e determine a sua inversa.

(a) $f : E \longrightarrow E$ tal que $f^2 - f - \mathrm{id}_E = 0$.
(b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(a,b) = (b,\ 2a+b)$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5.32 Mostre que se $f : E \longrightarrow E$ é uma aplicação linear invertível e $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então αf é invertível tendo-se $(\alpha f)^{-1} = \alpha^{-1} f^{-1}$.

Exercício 5.33 Sejam A, B e C conjuntos. Demonstre que se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são invertíveis o mesmo sucede à aplicação $g \circ f$ tendo-se

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Proposição 5.25 *A inversa de uma aplicação linear invertível é, ainda, uma aplicação linear invertível.*

Demonstração:

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear invertível (ou equivalentemente, bijectiva) e seja $f^{-1} : E' \longrightarrow E$ a sua inversa. Como é trivial que f^{-1} é invertível demonstremos apenas que f^{-1} é linear.

Utilizando a afirmação da alínea (a) do Exercício 5.1, demonstremos que

$$\forall_{\alpha,\beta\in\mathbf{K}} \ \forall_{u',v'\in E'} \quad f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v').$$

Recordemos que como f é, em particular, injectiva basta demonstrar que

$$\forall_{\alpha,\beta\in\mathbf{K}} \ \forall_{u',v'\in E'} \quad f\left(f^{-1}(\alpha u' + \beta v')\right) = f\left(\alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v')\right).$$

Como

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}(\alpha u' + \beta v')\right) &= \left(f \circ f^{-1}\right)(\alpha u' + \beta v') \\ &= \mathrm{id}_{E'}(\alpha u' + \beta v') \\ &= \alpha u' + \beta v' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f\left(\alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v')\right) &= f\left(\alpha f^{-1}(u')\right) + f\left(\beta f^{-1}(v')\right) \\ &= \alpha f\left(f^{-1}(u')\right) + \beta f\left(f^{-1}(v')\right) \\ &= \alpha\left(f \circ f^{-1}\right)(u') + \beta\left(f \circ f^{-1}\right)(v') \\ &= \alpha\ \mathrm{id}_{E'}(u') + \beta\ \mathrm{id}_{E'}(v') \\ &= \alpha u' + \beta v', \end{aligned}$$

concluímos que f^{-1} é, ainda, uma aplicação linear.

■

Definição 5.26 Uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$ linear e bijectiva/invertível diz-se um ***isomorfismo linear***, ou simplesmente, um ***isomorfismo*** de E em E'.
Dizemos que E é ***isomorfo*** a E', e representamos por $E \simeq E'$, se existe um isomorfismo de E em E'.
Se f é um isomorfismo de E em E' escrevemos então $E \underset{f}{\simeq} E'$.

Exemplo 5.27

1. A aplicação $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a,b,c,d),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, é um isomorfismo.

De facto, verificamos facilmente que f é linear. Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^4$ para mostrar que f é bijectiva basta demonstrar apenas, pela Proposição 5.18, que f é injectiva ou que f é sobrejectiva, sendo a demonstração de qualquer uma trivial.

2. Tal como em 1, verificamos facilmente que a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(ax^2 + bx + c) = (a,b,c),$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$, é um isomorfismo.

3. Seja E um espaço vectorial de dimensão n e $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base arbitrária de E. De acordo com a Proposição 4.44, qualquer que seja $u \in E$ existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Consideremos a correspondência f de E em $\mathbb{K}^n$ que a cada $u \in E$ associa a sequência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, que designámos por sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. f é, de facto, uma aplicação bijectiva de E em $\mathbb{K}^n$, conforme verificámos na Secção 4.6 do Capítulo 4.

Demonstremos que f é linear.

Sejam u e v vectores arbitrários de E, com a sequência de coordenadas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, respectivamente, em relação à base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Tem-se

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\Big((\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n)\Big) \\ &= f\Big((\alpha_1 + \beta_1)\, e_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\, e_n\Big) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Para qualquer $\gamma \in \mathbb{K}$, verifica-se que

$$\begin{aligned} f(\gamma u) &= f\Big(\gamma\,(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\Big) \\ &= f\Big((\gamma\alpha_1)\, e_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n)\, e_n\Big) \\ &= (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n) \\ &= \gamma\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= \gamma f(u). \end{aligned}$$

Logo f é um isomorfismo de E em $\mathbb{K}^n$.

OBSERVAÇÃO: Atendendo a 3 do Exemplo 5.27 e ao Exercício 5.21, obtém-se a justificação de que a resolução dos problemas 1, 2, 3 e 4 formulados no início da Secção 4.6 do Capítulo 4 se pode reduzir à sua resolução em $\mathbb{K}^r$, para algum $r \in \mathbb{N}$.

Exercício 5.34 Sejam

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\} \quad \text{e} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0\}.$$

Justifique que F é isomorfo a G, indicando um isomorfismo de F em G.

Exercício 5.35 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Mostre que:

(a) Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então a aplicação $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(u) = \alpha u,$$

para qualquer $u \in E$, é um isomorfismo de E em E.

(b) Se $w \in E \setminus \{0_E\}$ então a aplicação $g : \mathbb{K} \longrightarrow E$ tal que

$$g(\alpha) = \alpha w,$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, é linear e injectiva e é um isomorfismo se, e só se, $\dim E = 1$.

(c) Se $w \in E$ então a aplicação $h : E \longrightarrow E$ tal que

$$h(u) = u + w,$$

para qualquer $u \in E$, designada por translação segundo o vector w, é uma aplicação bijectiva e é um isomorfismo se, e só se, $w = 0_E$.

Exercício 5.36 Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ (todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$). Mostre que:

(a) $E \simeq E$.

(b) Se $E \simeq E'$ então $E' \simeq E$.

(c) Se $E \simeq E'$ e $E' \simeq E''$ então $E \simeq E''$.

Se existe um isomorfismo de E em E' então, de acordo com (b) do exercício anterior também existe um isomorfismo de E' em E. Nessas condições é usual afirmar que E e E' são ***isomorfos***.

Teorema 5.28 *Sejam E e E' espaços vectoriais, com E de dimensão finita. Tem-se, E e E' são isomorfos se, e só se, $\dim E = \dim E'$.*

Demonstração:

Suponhamos que $\dim E = n$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E.

Se E e E' são isomorfos então existe uma aplicação linear bijectiva $f : E \longrightarrow E'$. Como $E = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, de acordo com 1 do Teorema 5.15 tem-se

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle .$$

Como f é injectiva e $e_1, \dots, e_n$ são linearmente independentes, de acordo com 2 do mesmo teorema, concluímos que $f(e_1), \dots, f(e_n)$ são linearmente independentes. Logo

$$\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$$

é uma base de $\operatorname{Im} f$.

Dado que f é também sobrejectiva, isto é, $\operatorname{Im} f = E'$ resulta que $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ é uma base de E'.

Concluímos pois que E' tem dimensão finita e que

$$\dim E = n = \dim E'.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\dim E = \dim E' = n$. Seja $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ uma base de E'. Pelo Teorema da Extensão Linear (Teorema 5.19) existe uma, e uma só, aplicação linear

$$f : E \longrightarrow E'$$

tal que

$$f(e_i) = e'_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \langle f(e_1), \dots, f(e_n) \rangle \\ &= \langle e'_1, \dots, e'_n \rangle = E' \end{aligned}$$

concluímos que tal aplicação f é sobrejectiva. De acordo com a Proposição 5.18, como $\dim E = \dim E'$ e f é sobrejectiva então f é bijectiva.

Logo f é um isomorfismo de E em E'.

■

Como consequência imediata do resultado anterior tem-se:

Corolário 5.29 *Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com E de dimensão n, então E é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Exemplo 5.30

1. $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^6$ são isomorfos porque têm ambos dimensão finita e
$$\dim \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6 = \dim \mathbb{R}^6.$$
Por exemplo, a aplicação
$$f : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$$
tal que
$$\forall_{\left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})} \quad f\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d, e, f)$$
é um isomorfismo de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^6$. (Verifique.)
2. $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ são isomorfos porque têm ambos dimensão finita e
$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}.$$
Por exemplo, a aplicação
$$g : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$
tal que
$$\forall_{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]} \quad g(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_n, \dots, a_1, a_0)$$
é um isomorfismo de $\mathbb{R}_n[x]$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. (Verifique.)

Exercício 5.37 Indique três espaços vectoriais isomorfos a $\mathbb{R}^5$ e uma base para cada um desses espaços.

Exercício 5.38

(a) Mostre que, apesar de $\mathbb{R}^2$ não ser subespaço de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a um subespaço F de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine F e G, subespaços de $\mathbb{R}^3$, tais que
$$F \simeq \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad G \simeq \mathbb{R}^2, \quad \text{com } F \neq G.$$

Exercício 5.39 Justifique que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}_3[x]$ são isomorfos e indique um isomorfismo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

Exercício 5.40 Justifique, por dois processos distintos, que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ são isomorfos.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

No que vai seguir-se suporemos que os espaços vectoriais E e E' são ambos de dimensão finita, com $\dim E = n \geq 1$ e $\dim E' = m \geq 1$.

Veremos que se fixarmos em E uma base $\mathcal{B}$ e em E' uma base $\mathcal{B}'$ toda a aplicação linear $f : E \longrightarrow E'$ é representada, em relação a essas bases, por uma única matriz que determina completamente a aplicação linear.

Pelo Teorema da Extensão Linear, se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, f fica completamente determinada conhecendo as imagens dos vectores de uma base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Por sua vez, cada vector $f(e_j) \in E'$, $j = 1, \ldots, n$, fica perfeitamente determinado se conhecermos a sequência das suas coordenadas em relação a uma base $\mathcal{B}'$ de E'. De facto, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ é a sequência das coordenadas de $f(e_i)$ na base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$f(e_i) = \alpha_1 e'_1 + \cdots + \alpha_m e'_m.$$

Consideremos que a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$ é a coluna j de uma matriz, $j = 1, \ldots, n$. Temos então, nessa matriz, toda a informação necessária para obter a imagem de qualquer vector de E.

Definição 5.31 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ uma base de E'. Designa-se por ***matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$*** (por esta ordem), e representa-se por

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'),$$

a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja coluna j, $j = 1, \ldots, n$, é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$. Assim

$$f(e_j) = a_{1j} e'_1 + \cdots + a_{mj} e'_m, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 5.32

1. Considere a aplicação id_E e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base arbitrária de E. Determinemos

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E(e_1) &= e_1 = \mathbf{1}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{0}e_n \\ \mathrm{id}_E(e_2) &= e_2 = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{1}e_2 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{0}e_n \\ &\vdots \\ \mathrm{id}_E(e_n) &= e_n = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{1}e_n \end{aligned}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n, \quad \text{com } n = \dim E.$$

Se considerarmos a base $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$ de E (verifique que é base) e pretendermos a matriz $\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ obteremos

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ (Porquê?)}$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(a, b, c) = (2a + b, -c).$$

Sejam $\mathcal{B} = \big((1,1,2), (0,2,6), (0,0,-4)\big)$ e $\mathcal{B}' = \big((1,0), (0,2)\big)$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determinemos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Tem-se

$$\begin{array}{lclclcl} f(1,1,2) & = & (3,-2) & = & \mathbf{3}(1,0) & + & (\mathbf{-1})(0,2) \\ f(0,2,6) & = & (2,-6) & = & \mathbf{2}(1,0) & + & (\mathbf{-3})(0,2) \\ f(0,0,-4) & = & (0,4) & = & \mathbf{0}(1,0) & + & \mathbf{2}(0,2) \end{array}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.41 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e a aplicação linear $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c + d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ sendo

$$\mathcal{B} = \Big((1, 2, 3), (0, -2, 1), (0, 0, 3)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((0, -2), (-1, 0)\Big).$$

(b) Determine $\mathcal{M}(g;\, \mathcal{B}'', \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ sendo

$$\mathcal{B}'' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Exercício 5.42 Seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ uma base de um espaço vectorial E e $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Determine $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ se:

(a) $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_4$ e $f(u_4) = 0_E$.
(b) $f(u_1) = u_2$, $f(u_2) = 0_E$, $f(u_3) = u_4$ e $f(u_4) = 0_E$.
(c) $f(u_1) = u_3$, $f(u_2) = u_1$, $f(u_3) = 0_E$ e $f(u_4) = u_1$.

Exercício 5.43 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ bases de E e E', respectivamente. Seja

$$A = \mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Que alterações se verificam na matriz A se:

(a) Na base $\mathcal{B}$ se efectua a troca das posições dos vectores e_i e e_j, com $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$?
(b) Na base $\mathcal{B}'$ se efectua a troca das posições dos vectores e'_k e e'_l, com $k \neq l$, $k, l \in \{1, \ldots, m\}$?

O resultado seguinte permite determinar a característica de uma aplicação linear, isto é, a dimensão da sua imagem, através da característica de qualquer matriz que a represente, em relação a bases fixadas no espaço de partida e no espaço de chegada.

Teorema 5.33 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases arbitrárias de E e E', respectivamente, e*

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Tem-se

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{r}(A).$$

Demonstração:

Se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E então

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), \ldots, f(e_n)\rangle\,.$$

Sendo $\mathcal{B}'$ uma base de E', com $\dim E' = m$, seja $g : E' \longrightarrow \mathbb{K}^m$ o isomorfismo, referido em 3 do Exemplo 5.27, que a cada $u' \in E'$ associa a sequência das suas coordenadas na base $\mathcal{B}'$. Notemos que, sendo C_i a coluna i de A, $i = 1, \ldots, n$, e atendendo à definição de matriz de uma aplicação linear, se tem

$$g\,(f(e_i)) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por 2 do Corolário 5.16 concluímos que

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim g(\operatorname{Im} f).$$

Por 1 do mesmo corolário tem-se

$$g(\operatorname{Im} f) = \langle C_1, \ldots, C_n\rangle = \mathcal{C}(A),$$

onde $\mathcal{C}(A)$ é o espaço das colunas de A.

Logo

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{r}(A).$$

■

Exercício 5.44 Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases dos espaços vectoriais $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a característica da matriz anterior, determine se f é sobrejectiva.

Sendo $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e E', respectivamente, vejamos agora como utilizar $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ para determinar a imagem por f de qualquer vector de E.

Proposição 5.34 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ uma base de E' e $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.*

Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de um vector $u \in E$ na base $\mathcal{B}$ então a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ tal que

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Sabemos que

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Pretendemos calcular $f(u)$, para qualquer $u \in E$.

Como $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Logo

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n) \\ &= \alpha_1 (a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m) + \cdots + \alpha_n (a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n})e'_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn})e'_m \\ &= (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)e'_1 + \cdots + (a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)e'_m. \end{aligned}$$

Assim a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ é

$$\Big((a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n), \ldots, (a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)\Big).$$

Como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n \end{bmatrix}$$

está demonstrado o que pretendíamos.

■

Notemos que de acordo com a proposição anterior podemos determinar a imagem por f de um vector u, isto é, $f(u)$ através da multiplicação da matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ pela matriz coluna das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$, sendo o resultado a matriz das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$.

Exemplo 5.35

Consideremos a mesma aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de 2 do Exemplo 5.32 mas definida de uma forma alternativa. Sejam

$$\mathcal{B} = \Big((1,1,2),(0,2,6),(0,0,-4)\Big)$$

uma base de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B}' = \Big((1,0),(0,2)\Big)$$

uma base de $\mathbb{R}^2$ e considere-se a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $f(1,-3,-6)$.

Comecemos por determinar a sequência das coordenadas do vector $u = (1,-3,-6)$ na base $\mathcal{B}$. Tem-se

$$(1,-3,-6) = \alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(0,2,6) + \alpha_3(0,0,-4)$$

com

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 4\alpha_3 = -6 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos a solução única $(1,-2,-1)$. Logo

$$(1,-3,-6) = \mathbf{1}(1,1,2) + (\mathbf{-2})(0,2,6) + (\mathbf{-1})(0,0,-4).$$

Assim, de acordo com a Proposição 5.34, a sequência das coordenadas de $f(u)$, na base $\mathcal{B}'$, é $(-1,3)$ pois

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Se $(-1,3)$ é a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = \big((1,0),(0,2)\big)$ então

$$\begin{aligned} f(u) &= \mathbf{-1}(1,0) + \mathbf{3}(0,2) \\ &= (-1,6), \end{aligned}$$

que é o vector pretendido.

Exercício 5.45 Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente,

$$\mathcal{B} = \Big((0,1,0),(-1,0,0),(0,0,1)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((0,1),(-1,0)\Big).$$

Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine

(a) $f(1,-2,3)$.
(b) $f(a,b,c)$, para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 5.46 Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente,

$$\mathcal{B} = \Big((0,1,0),(1,0,0),(0,0,2)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((1,1),(0,1)\Big).$$

Determine se $v = (2,4)$ pertence à imagem da aplicação linear $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

(a) $\mathcal{M}(f;\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
(b) $\mathcal{M}(f;\text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
(c) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
(d) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Exercício 5.47 Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = (a+b, b+c),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \qquad \mathcal{B}_2 = \Big((0,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\Big)$$

e, em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1' = \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}, \qquad \mathcal{B}_2' = \Big((1,1),(1,0)\Big).$$

(a) Calcule $f(1,2,3)$.
(b) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1')$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(c) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1')$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(d) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2')$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(e) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2')$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.

Como consequência imediata da Proposição 5.34, no caso particular

$$E = E' \qquad \text{e} \qquad f = \text{id}_E,$$

tem-se

Proposição 5.36 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e seja $u \in E$. Se $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ então a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ com*

$$\mathcal{M}(\text{id}_E;\mathcal{B},\mathcal{B}')\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

A proposição anterior sugere a seguinte definição.

Definição 5.37 Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E designamos por ***matriz de mudança de base*** $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ a matriz

$$\mathcal{M}(\text{id}_E;\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

Notemos que, de acordo com a proposição anterior, a matriz de mudança de base $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ nos permite relacionar as coordenadas, na base $\mathcal{B}$, de um qualquer elemento de E com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}'$.

Exemplo 5.38

1. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3 e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de E.

   A sequência $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ com

   $$e_1' = e_1 + e_2 - e_3, \qquad e_2' = e_2 + e_3 \qquad \text{e} \qquad e_3' = 2e_3$$

   é também uma base de E. (Verifique.)

   Seja

   $$w = 2e_1' + e_2' - 3e_3'.$$

   A sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}'$, é

   $$(2, 1, -3).$$

   Determinemos a sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}$.

   - Sem utilizar matrizes de mudança de base temos

     $$\begin{aligned} w &= 2e_1' + 1e_2' - 3e_3' \\ &= 2(e_1 + e_2 - e_3) + 1(e_2 + e_3) - 3(2e_3) \\ &= 2e_1 + 3e_2 - 7e_3 \end{aligned}$$

     e, portanto, a sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}$, é

     $$(2, 3, -7).$$

   - Utilizando matrizes de mudança de base temos um processo alternativo para resolver o problema. Determinemos a matriz de mudança de base $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, isto é,

     $$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

     Tem-se

     $$\begin{aligned} \mathrm{id}_E(e_1') &= e_1' = \mathbf{1}e_1 + \mathbf{1}e_2 + (\mathbf{-1})e_3 \\ \mathrm{id}_E(e_2') &= e_2' = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{1}e_2 + \mathbf{1}e_3 \\ \mathrm{id}_E(e_3') &= e_3' = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \mathbf{2}e_3 \end{aligned}$$

     pelo que

     $$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

     Como

     $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix},$$

     de acordo com a Proposição 5.36 a sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}$, é

     $$(2, 3, -7).$$

2. Sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ as bases indicadas em 1, de um espaço vectorial E de dimensão 3, se pretendemos a sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, de um vector arbitrário u de E conhecendo a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ das suas coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, procedemos de forma idêntica à de 1. Como

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{bmatrix},$$

   a sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, do vector u é

   $$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Exercício 5.48 Considere em $\mathbb{R}^3$ as bases

$$\mathcal{B}_1 = \Big((1,-1,0), (-1,1,-1), (0,1,0)\Big), \qquad \mathcal{B}_2 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}$$

e

$$\mathcal{B}_3 = \Big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\Big).$$

Determine

(a) A matriz de mudança de base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.
(b) A matriz de mudança de base $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.
(c) A matriz de mudança de base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$.

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E \longrightarrow E'$ aplicações lineares. Como vimos, $f + g : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear e, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$, o mesmo sucede com a aplicação $\alpha f : E \longrightarrow E'$.

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e E', respectivamente. Podemos então colocar o problema de saber se existe alguma relação entre a matriz

$$\mathcal{M}(f + g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

e as matrizes

$$\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \qquad \text{e} \qquad \mathcal{M}(g;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

e, com $\alpha \in \mathbb{K}$, entre a matriz

$$\mathcal{M}(\alpha f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

e a matriz

$$\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

A resposta é dada pelo resultado seguinte.

Teorema 5.39 *Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E \longrightarrow E'$ aplicações lineares e $\alpha \in \mathbb{K}$. Seja $\mathcal{B}$ uma base de E e seja $\mathcal{B}'$ uma base de E'. Se*

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A \qquad e \qquad \mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = B$$

então

$$\mathcal{M}(f+g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A + B \qquad e \qquad \mathcal{M}(\alpha f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \alpha A.$$

Demonstração:

Exercício.

■

Recordemos que, contrariamente às operações de adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz, a definição de multiplicação de matrizes não surgiu, no Capítulo 1, de uma forma "natural".

Conforme referimos na altura, a definição de multiplicação de matrizes tem uma motivação que só agora estamos em condições de compreender. Conforme explicita o resultado a seguir apresentado, a determinação da matriz da aplicação composta de duas aplicações lineares motiva tal definição.

Teorema 5.40 *Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ bases, respectivamente, de E, E' e E''. Se*

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A \qquad e \qquad \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = B$$

então

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = BA,$$

isto é,

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Demonstração:

Sejam $n = \dim E$, $m = \dim E'$ e $p = \dim E''$. Consideremos

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n), \quad \mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_p)$$

bases de E, E' e E'', respectivamente.

Seja $C = \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$ e demonstremos que $C = BA$.

Por definição de matriz de uma aplicação linear tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') &= A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\\ \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') &= B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Logo C e BA pertencem ambas a $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstremos que

$$c_{ij} = (BA)_{ij}.$$

Sendo c_{ij} o elemento da posição (i,j) da matriz $\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$, c_{ij} é a i-ésima coordenada do vector $(g \circ f)(e_j)$, na base $\mathcal{B}''$. Como

$$\begin{aligned}(g \circ f)(e_j) &= g\left(f(e_j)\right)\\ &= g(a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m)\\ &= a_{1j}g(e'_1) + \cdots + a_{mj}g(e'_m)\\ &= a_{1j}(b_{11}e''_1 + \cdots + b_{p1}e''_p) + \cdots\\ &\quad + a_{mj}(b_{1m}e''_1 + \cdots + b_{pm}e''_p)\\ &= (a_{1j}b_{11} + \cdots + a_{mj}b_{1m})\, e''_1 + \cdots\\ &\quad + (a_{1j}b_{p1} + \cdots + a_{mj}b_{pm})\, e''_p,\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}c_{ij} &= a_{1j}b_{i1} + \cdots + a_{mj}b_{im}\\ &= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj}.\end{aligned}$$

Assim

$$c_{ij} = (BA)_{ij},$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Esquematicamente

$$\begin{tikzcd} \begin{matrix} E \\ \mathcal{B} \end{matrix} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \begin{matrix} E' \\ \mathcal{B}' \end{matrix} \arrow[r, "g"] & \begin{matrix} E'' \\ \mathcal{B}'' \end{matrix} \end{tikzcd} .$$

Proposição 5.41 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de E, $\mathcal{B}'$ uma base de E' e*

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Tem-se

1. *A é invertível se, e só se, f é invertível.*
2. *Nas condições de 1,*
$$A^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$
(Note a "troca" da ordem das bases nas matrizes A e A^{-1}.)

Demonstração:

Exercício.

■

Exercício 5.49 Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$$f(a,b,c) = (2a+b, -b, a+2c) \quad \text{e} \quad g(a,b,c) = (a, b, a+b+c),$$

para quaisquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Sem determinar a expressão analítica de h, indique

$$\mathcal{M}(h; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$$

para

(a) $h = g - 2f$.
(b) $h = g \circ f$.
(c) $h = f \circ g$.
(d) $h = 2g^2$.

Exercício 5.50 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a,b,c) = (c, a, b),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Verifique que
$$f^3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} .$$

(b) Utilizando (a), indique uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que
$$A^3 = I_3, \text{ com } A \neq I_3.$$

Proposição 5.42 *Toda a matriz de mudança de base é invertível e se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E tais que*

$$A = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

então

$$A^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Demonstração:

Pelo Teorema 5.40 e atendendo a que $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\ &= \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}') \\ &= I_n, \end{aligned}$$

com $n = \dim E$. Logo, pela Proposição 3.23, o resultado está demonstrado.

■

Sabemos que se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, em geral, muda a matriz de f (em relação a bases de E e E') quando, em E ou em E', as bases mudam. Mas, apesar de tais matrizes serem, em geral, diferentes, estão relacionadas. O resultado seguinte estabelece essa relação.

Teorema 5.43 *Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e sejam $\mathcal{B}'_1$ e $\mathcal{B}'_2$ bases de E'. Se*

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = A_1 \qquad e \qquad \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = A_2$$

então

$$A_2 = QA_1P$$

em que

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \qquad e \qquad Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{E'}; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2),$$

isto é, P é a matriz de mudança de base $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ e Q é a matriz de mudança de base $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)$.

Demonstração:

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}_2}{E} \arrow[r, "\mathrm{id}_E", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "f", "A_2"'] & \underset{\mathcal{B}_1}{E} \arrow[r, "f", "A_1"'] & \underset{\mathcal{B}'_1}{E'} \arrow[r, "\mathrm{id}_{E'}", "Q"'] & \underset{\mathcal{B}'_2}{E'}
\end{tikzcd}.$$

Como

$$f = \mathrm{id}_{E'} \circ f \circ \mathrm{id}_E$$

tem-se

$$A_2 = \mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{E'} \circ f \circ \mathrm{id}_E;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2).$$

Atendendo ao Teorema 5.40, que continua válido para a composição de $k \geq 2$ aplicações, tem-se

$$A_2 = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{E'};\, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)\mathcal{M}(\mathrm{id}_E;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = QA_1P,$$

como pretendíamos demonstrar.

■

Corolário 5.44 *Nas condições do teorema anterior tem-se*

$$\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2) = QA_1$$

e

$$\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_1) = A_1P.$$

Demonstração:

Basta atender a que, para a primeira igualdade, se tem

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E;\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = I_n, \quad \text{com } n = \dim E$$

e, para a segunda, se tem

$$Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{E'};\, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1) = I_m, \quad \text{com } m = \dim E'.$$

■

Exercício 5.51 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;\ \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \Big((0,1,0), (1,0,1), (1,0,0)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((1,1), (1,0)\Big)$$

de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

(a) $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2})$.
(b) $\mathcal{M}(f;\ \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.
(c) $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Em relação ao Teorema 5.43, se $\dim E = n$ e $\dim E' = m$ tem-se

$$A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$$

e com P e Q invertíveis, por serem matrizes de mudança de base.

Tal teorema sugere então a seguinte definição.

Definição 5.45 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é ***equivalente*** a B se existem matrizes invertíveis $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ tais que

$$B = QAP.$$

Note que se A é equivalente a B então também B é equivalente a A e, por isso, dizemos apenas que A e B são equivalentes.

Considerando no Teorema 5.43 o caso particular

$$E = E', \qquad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1' \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2'$$

resulta

$$A_2 = P^{-1} A_1 P$$

com

$$A_1, A_2, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ e com } P \text{ invertível.}$$

Surge assim a seguinte definição, caso particular da equivalência de matrizes, que utilizaremos no próximo capítulo.

Definição 5.46 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é ***semelhante*** a B se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exercício 5.52 Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(a,b,c) = (3a + 6b, a - b + 3c, -2a - 3b - c),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determine $A = \mathcal{M}(g; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$.

(b) Utilizando matrizes, indique o conjunto dos valores de k para os quais o vector $(k, 2+k, 1) \in \operatorname{Im} g$.

(c) Utilizando a matriz A da alínea (a), mostre que g não é sobrejectiva.

Exercícios suplementares

Secção 5.1 Definição, exemplos e propriedades

Exercício 5.53

(a) Determine se é linear a aplicação

(i) $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

(ii) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c+d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Indique $f(x^2 - 2x)$ e averigúe se existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (0,0,0).$$

Exercício 5.54 Justifique que é linear a aplicação $g : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$g(A) = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii},$$

para qualquer $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Exercício 5.55 No capítulo anterior, referiu-se que $\mathbb{R}^+$ com as operações $\boxplus$ e $\boxdot$ definidas por

$$a \boxplus b = ab,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$, e

$$\alpha \boxdot a = a^\alpha,$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}^+$, constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Justifique que são lineares as seguintes aplicações:

(a) $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot)$ tal que

$$f(x) = e^{x},$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g : (\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que

$$g(x) = \log x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 5.56 Determine se é linear a aplicação $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f\Big(p(x)\Big) = p(x) + 1,$$

para qualquer $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

Exercício 5.57 Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$ diz-se $\mathbb{R}$-***linear*** ou ***linear sobre*** $\mathbb{R}$ se verifica as condições

1. $\forall_{u,v \in E} \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$

   e

2. $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \forall_{u \in E} \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u),$

e diz-se $\mathbb{C}$-***linear*** ou ***linear sobre*** $\mathbb{C}$ se a condição 2 vem substituída por

2'. $\forall_{\alpha \in \mathbb{C}} \quad \forall_{u \in E} \qquad f(\alpha u) = \alpha f(u).$

Justifique as afirmações:

(a) Se f é $\mathbb{C}$-linear então f é $\mathbb{R}$-linear.

(b) Se f é $\mathbb{R}$-linear então f é $\mathbb{C}$-linear se, e só se,

$$\forall_{u \in E} \qquad f(iu) = if(u)$$

sendo i a unidade imaginária.

Secção 5.2 Operações com aplicações

Exercício 5.58 Seja E o espaço vectorial das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sejam F e G, respectivamente, o conjunto das funções pares e o conjunto das funções ímpares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Justifique que:

(a) F e G são subespaços de E.

(b) $E = F \oplus G$.

Sugestão: Atenda a que, para qualquer $h \in E$, a aplicação $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(x) = h(x) + h(-x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

é uma função par e a aplicação $g : E \longrightarrow E$ tal que

$$g(x) = h(x) - h(-x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

é uma função ímpar.

Secção 5.3 Imagem e núcleo

Exercício 5.59 Seja $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$ tal que

$$f\Big(p(x)\Big) = xp(x),$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}_3[x]$. Indique se cada um dos polinómios seguintes pertence à imagem de f e se pertence ao núcleo de f.

(a) x^3.

(b) 0.

(c) 4.

(d) $5x - 3x^3$.

(e) $1 + 3x^2 - x^3$.

Exercício 5.60 Determine uma base do núcleo de cada uma das aplicações lineares seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$f(a,b) = ax^2 + ax + a,$$

para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d,$$

para cada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{[}x]$ tal que

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = dx^2 + c + b + a,$$

para cada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 5.61 Seja $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que

$$g(ax^2 + bx + c) = ax + b,$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Justifique que:

(a) $\operatorname{Nuc} g = \operatorname{Im} g^2$.

(b) $\operatorname{Nuc} g^2 = \operatorname{Im} g$.

(c) $\operatorname{Nuc} g^3 = \mathbb{R}_2[x]$.

(d) $\operatorname{Im} g^3 = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$.

Exercício 5.62 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $f_A : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a aplicação tal que

$$f_A(B) = BA - AB, \quad \text{para cada } B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que f_A é uma aplicação linear.
(b) Determine uma base do núcleo de f_A, quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.63 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e

$$W = \{v \in E : \ f(v) = v\}.$$

(a) Mostre que W é um subespaço de E.
(b) Determine $W \cap \operatorname{Nuc} f$.

Exercício 5.64 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e seja W um subespaço de E. Diz-se que W é um ***subespaço invariante*** em relação a f se

$$f(W) \subseteq W,$$

ou equivalentemente, se para qualquer $u \in W$, se tem $f(u) \in W$.
Mostre que se U e V são subespaços de E, invariantes em relação a f, então o mesmo sucede aos subespaços $U \cap V$ e $U + V$.

Exercício 5.65 Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$, (e_1, e_2, e_3) uma base de E e (e_1', e_2') uma base de E'. Seja $k \in \mathbb{R}$. Considere-se a aplicação $f : E \longrightarrow E'$ tal que

$$f(ae_1 + be_2 + ce_3) = (a+k)e_1' + (b+c)e_2',$$

para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de k para o qual f é uma aplicação linear.
(b) Para o valor de k determinado em (a) indique uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

Exercício 5.66 Caso seja possível, indique um exemplo de uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ tal que $f \neq \mathrm{id}_E$ e $f \neq 0$ com

(a) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.
(b) $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Nuc} f$.
(c) $\operatorname{Nuc} f \subsetneq \operatorname{Im} f$.
(d) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Im} f$.

Exercício 5.67 Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Demonstre que

$$g \circ f = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Nuc} g.$$

Exercício 5.68 Sejam $f : E \longrightarrow E$ e $g : E \longrightarrow E$ aplicações lineares. Mostre que:

(a) $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
(b) $\operatorname{Nuc}(f+g) \supseteq \operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Nuc} g$.
(c) Se $f \circ g = g \circ f$ então $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.
(d) Se $f \circ g = g \circ f$ então $\operatorname{Nuc}(f \circ g) \supseteq \operatorname{Nuc} f + \operatorname{Nuc} g$.

Exercício 5.69 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Mostre que:

(a) $\operatorname{Nuc} f^k \subseteq \operatorname{Nuc} f^{k+1}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.
(b) $\operatorname{Im} f^k \supseteq \operatorname{Im} f^{k+1}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 5.70 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear tal que

$$f^2 = f.$$

Justifique que

$$E = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Sugestão: Atenda a que, qualquer que seja $x \in E$, se tem

$$x = [x - f(x)] + f(x).$$

Exercício 5.71 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Mostre que são equivalentes as afirmações:

(i) $f^2 = f$.
(ii) $f(y) = y$, para qualquer $y \in \operatorname{Im} f$.
(iii) $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Nuc}(\mathrm{id}_E - f)$.

Exercício 5.72 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Justifique que

$$\operatorname{Nuc} f \cap \operatorname{Nuc}(f^2 - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}.$$

Exercício 5.73 Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E tais que

$$E = F \oplus G.$$

Recorde que, para qualquer $w \in E$ existem $u \in F$ e $v \in G$, únicos, tais que

$$w = u + v.$$

Sejam $f : F \longrightarrow F$ e $g : G \longrightarrow G$ aplicações lineares. Defina-se $h : E \longrightarrow E$ tal que

$$h(w) = f(u) + g(v),$$

para qualquer $w \in E$. Mostre que:

(a) h é uma aplicação linear.
(b) $\operatorname{Nuc} h = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Nuc} g$.
(c) $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercício 5.74 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, tal que se tem $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Mostre que

$$E = \operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f^2.$$

Exercício 5.75 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear e u, v vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^2$. Mostre que se verifica uma, e uma só, das condições seguintes:

(i) $f(u)$ e $f(v)$ são linearmente independentes.
(ii) $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$.
(iii) $\operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Exercício 5.76 Seja E um espaço vectorial de dimensão n e $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear com nulidade $\eta(f)$ e característica $\mathrm{r}(f)$. Justifique que são equivalentes as afirmações:

(a) $\eta(f) = 0$.
(b) $\mathrm{r}(f) = n$.
(c) Se $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E então $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ é uma base de E.

Exercício 5.77 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita n, com $n \geq 1$, e seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

(a) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Nuc} f$;
(b) A aplicação f é não nula, $f^2 = 0$, n é par e $\dim \operatorname{Im} f = \frac{n}{2}$.

Exercício 5.78 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, com E de dimensão finita. Justifique que são equivalentes as afirmações:

(i) $E = \operatorname{Nuc} f + \operatorname{Im} f$.
(ii) $E = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.
(iii) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f^2$.
Sugestão: Atenda a (a) do Exercício 5.17 e aplique o Teorema da Dimensão.
(iv) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
Sugestão: Atenda a (b) do Exercício 5.17 e aplique, a f^2, o Teorema da Dimensão.

Exercício 5.79 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear injectiva. Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$g(a, b) = (a + b, f(a)),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifique que:

(a) g é linear.
(b) g é injectiva.
(c) g é bijectiva.

Exercício 5.80 Em $\mathbb{R}^2$, considere os vectores

$$u_1 = (1, -1), \quad u_2 = (2, -1), \quad u_3 = (-3, 2)$$

e

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1), \quad v_3 = (1, 1).$$

Justifique que não existe nenhuma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(u_i) = v_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Há alguma "contradição" com o Teorema 5.19?

Exercício 5.81 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1, 0, 0) = (1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (1, 1) \quad \text{e} \quad f(0, 1, 1) = (0, 1).$$

(a) Determine $f(a, b, c)$, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Determine uma base do núcleo de f.
(c) Indique uma base de um subespaço G de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Nuc} f \oplus G.$$

Exercício 5.82 Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ a aplicação linear tal que

$$f(1) = x + 1, \quad f(x) = 2x + 1 \quad \text{e} \quad f(x^2) = -x^3 + x^2.$$

Determine $f(2x^2 - 3x + 1)$.

Exercício 5.83 Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1,0) = (0,0) \quad \text{e} \quad f(0,1) = (0,a),$$

com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Determine $\operatorname{Nuc} f$ e $\operatorname{Im} f$.
(b) Mostre que $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.
(c) Indique o conjunto dos valores de a para os quais se tem $f^2 = f$.

Exercício 5.84 Seja E um espaço vectorial e seja (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Considere a aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

e considere a aplicação linear $g : E \longrightarrow E$ tal que

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3 \quad \text{e} \quad g(e_3) = e_1.$$

(a) Justifique que $f \circ g = g \circ f$.
Sugestão: Note que basta demonstrar que

$$(f \circ g)(e_i) = (g \circ f)(e_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

(b) Determine as aplicações lineares f^2, g^2 e g^3.

Exercício 5.85 Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E. Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, tal que

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad \ldots, \quad f(e_{n-1}) = e_n \quad \text{e} \quad f(e_n) = 0_E.$$

(a) Determine uma base de $\operatorname{Im} f$.
(b) Indique a dimensão de $\operatorname{Nuc} f$ e uma sua base.

Exercício 5.86 Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $(u_1, \ldots, u_n)$ uma base de E. Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Justifique as afirmações:

(a) Se $f(u_i) = 0_E$, para $i = 1, \ldots, n$, então f é a aplicação nula de E.
(b) Se $f(u_i) = u_i$, para $i = 1, \ldots, n$, então f é a aplicação identidade de E.
(c) Se existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $f(u_i) = \beta u_i$, para $i = 1, \ldots, n$, então

$$f(u) = \beta u, \quad \text{para qualquer } u \in E.$$

Exercício 5.87 Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço

$$F = \{(x, 0, z, 0) : \; x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, se existir, uma aplicação linear

(a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc} f = F$.
(b) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} g = F$.

Secção 5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Exercício 5.88 Justifique que cada uma das aplicações lineares seguintes de $\mathbb{R}_2[x]$ em $\mathbb{R}_2[x]$ é bijectiva e determine a respectiva aplicação inversa.

(a) $f(ax^2 + bx + c) = 3ax^2 + 2bx + c$.
(b) $g(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$.

Exercício 5.89 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(ax + b) = (a - b, a),$$

para qualquer $ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$.

(a) Determine $f(-2x + 3)$, $f(2x + 3)$ e $f(x)$.
(b) Mostre que f é um isomorfismo de $\mathbb{R}_1[x]$ em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5.90 Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere o subespaço

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Justifique que a aplicação $\varphi : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow F$ tal que

$$\varphi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, é um isomorfismo.

Exercício 5.91 Seja $\varphi : \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ tal que

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}),$$

para qualquer $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$. Mostre que φ é um isomorfismo.

Exercício 5.92 Indique o conjunto dos valores de k para os quais $\mathbb{R}_k[x]$ é isomorfo a $\mathbb{R}^6$.

Exercício 5.93 Justifique, por dois processos distintos, que

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$$

e

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a + d = 0 \ \wedge \ b + 2c = 0 \right\}$$

são isomorfos.

Exercício 5.94 Indique dois espaços vectoriais isomorfos a E, distintos de $\mathbb{K}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, quando

(a) $E = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
(b) $E = \mathbb{R}_3[x]$.
(c) $E = \mathbb{C}^2$, espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.
(d) $E = \mathbb{C}^2$, espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.
(e) $E = \mathbb{C}_2[x]$, espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 5.95 Seja $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, a aplicação derivada referida em 5 do Exemplo 5.2. Justifique que

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]} - D$$

é um isomorfismo.

Secção 5.5 Matriz de uma aplicação linear

Exercício 5.96 Considere a aplicação linear $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a,b,c) = (a+b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e a aplicação linear $t : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

(a) Determine $\mathcal{M}(h;\ \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ para

$$\mathcal{B} = \big((0,0,1), (1,0,0), (0,1,1)\big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left(x^2+1,\ 2x,\ -x+1\right).$$

(b) Determine $\mathcal{M}(t;\ \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ para

$$\mathcal{B} = \left(2x^3 - 3,\ x^3 - x^2 + x + 1,\ -x^3 + x^2 - 2x - 3,\ 2\right)$$

e

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

Exercício 5.97 Considere em $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ a base $\mathcal{B} = (1, i)$. Seja $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ a aplicação tal que

$$f(z) = \overline{z},$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Determine $\mathcal{M}(f;\ \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Exercício 5.98 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(B) = AB - BA,$$

para qualquer $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Indique $\mathcal{M}(f;\ \mathcal{B}, \mathcal{B})$ com

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right).$$

Exercício 5.99 Determine a matriz de cada uma das aplicações lineares seguintes quando no espaço de partida se considera a base $\mathcal{B}$ e no espaço de chegada a base $\mathcal{B}'$.

(a) $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$D\left(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

e

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (1,\ x, \ldots, x^n).$$

(b) $g : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[x]$ tal que

$$g\left(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x,$$

com

$$\mathcal{B} = (1,\ x, \ldots, x^n) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left(1,\ x, \ldots, x^n,\ x^{n+1}\right).$$

(c) $h : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h\left(p(x)\right) = p(3),$$

para qualquer $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, com

$$\mathcal{B} = (1,\ x, \ldots, x^n) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = (1).$$

Exercício 5.100 Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$f\left(p(x)\right) = p''(x) - p(x),$$

para qualquer $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, onde $p''(x)$ representa a segunda derivada de $p(x)$. Determine $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, com $\mathcal{B} = \left(x,\, 2,\, x^2\right)$.

Exercício 5.101 Seja E um espaço vectorial e $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E. Seja $f : E \longrightarrow E$ a aplicação linear tal que

$$f(e_i) = e_{i+1}, \quad \text{se } i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

e

$$(-1)^n f(e_n) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \cdots - a_{n-1} e_n, \quad \text{com } a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}.$$

Determine $\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Exercício 5.102 Seja $D : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ a aplicação derivada referida em 3 do Exemplo 5.13. Em $\mathbb{R}_3[x]$, considere as bases

$$\mathcal{B} = \left(x^3,\, x^2,\, x,\, 1\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left(x^3 + x^2,\, x^2 - 1,\, 2x,\, 1\right).$$

Calcule $D(2x^3 - x^2 + 3x - 4)$ utilizando:

(a) $\mathcal{M}\,(D; \mathcal{B},\, \mathcal{B})$.
(b) $\mathcal{M}\,(D; \mathcal{B}',\, \mathcal{B})$.

Exercício 5.103 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}\,(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}' = \left(1,\, x^2 + 1,\, x\right).$$

Determine se $2x + 1$ pertence à imagem de f.

Exercício 5.104 Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{bases de } E$$

e

$$\mathcal{B}_1' = (u_1', u_2', u_3') \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2' = (v_1', v_2', v_3') \quad \text{bases de } E'$$

tais que

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + u_2 \\ v_2 = u_2 + 3u_3 \\ v_3 = u_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_1' = v_1' \\ u_2' = v_1' + 2v_2' + v_3' \\ u_3' = 2v_1' + v_2' \end{cases}.$$

Seja

$$\mathcal{M}\,(f;\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

(a) A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$, do vector $u_1 + 2u_2 + u_3$.
(b) A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}_2'$, da imagem, por f, do vector $2u_1 + 3u_2$.
(c) A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$, de um vector w tal que $f(w) = v_1' + 2v_2' + 3v_3'$.

Exercício 5.105 Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$f\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = ax^2 + bx + c,$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

(a) Justifique que f^4 é a aplicação nula de $\mathbb{R}_3[x]$.
(b) Utilizando (a), indique uma matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, não nula, tal que $A^4 = 0$.

Exercício 5.106 Sejam E e E' espaços vectoriais, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base de E'. Sejam $f : E \longrightarrow E'$, $g : E' \longrightarrow E$ aplicações lineares tais que

$$\begin{cases} f(e_1) = 2v_1 + v_2 - v_4 \\ f(e_2) = v_1 + v_3 \\ f(e_3) = v_2 - v_4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} g(v_1) = 0_E \\ g(v_2) = e_2 + e_3 \\ g(v_3) = e_1 + e_3 \\ g(v_4) = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}.$$

Indique:

(a) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.
(b) $\mathcal{M}(f \circ g; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$, utilizando as matrizes da alínea anterior.

Exercício 5.107 Seja E um espaço vectorial de dimensão 3 e seja $\mathcal{B} = (u, v, w)$ uma base de E. Considere a aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(u) = u, \quad f(v) = u + v \quad \text{e} \quad f(w) = u + v + w.$$

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
(b) Justifique que f é invertível e determine $\mathcal{M}(f^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Exercício 5.108 Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$R_\alpha(a,b) = (a\cos\alpha - b\operatorname{sen}\alpha,\ b\cos\alpha + a\operatorname{sen}\alpha),$$

para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, designada habitualmente por ***rotação*** de ângulo α em torno da origem.

(a) Mostre que R_α é uma aplicação linear.
(b) Determine $V_\alpha = \mathcal{M}(R_\alpha; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2})$.
(c) Justifique que V_α é invertível e determine ${V_\alpha}^{-1}$.
(d) Justifique que R_α é invertível e que ${R_\alpha}^{-1} = R_{-\alpha}$.

Exercício 5.109 Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear. Considere a base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \Big((1,0,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\Big)$$

e seja

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando matrizes de mudança de base, determine

(a) $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4})$.
(b) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4})$.
(c) $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B})$.

Exercício 5.110 Sejam E um espaço vectorial real e (u_1,u_2,u_3) e (v_1,v_2,v_3) bases de E. Em $\mathbb{R}^4$, considere a base (e_1,e_2,e_3,e_4), com

$$e_1 = (1,1,1,1),\quad e_2 = (1,1,1,0),\quad e_3 = (1,1,0,0) \quad \text{e} \quad e_4 = (1,0,0,0).$$

Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow E$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;(e_i),(u_j)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine $\mathcal{M}(f;(e_i),(v_j))$ quando

(a) $\mathcal{M}(\text{id}_E;(u_j),(v_j)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathcal{M}(\text{id}_E;(v_j),(u_j)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 5.111 Sejam $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ uma base de E. Seja

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } a \in \mathbb{K}.$$

Em E, considere a base

$$\mathcal{B}' = (e_1,\ e_1+e_2,\ e_1+e_2+e_3,\ e_1+e_2+e_3+e_4).$$

Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

(a) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B})$.
(b) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$.

Exercício 5.112 Seja $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ a aplicação linear tal que

$$D(p(x)) = p'(x),$$

para qualquer $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, sendo $p'(x)$ a derivada de $p(x)$. Em $\mathbb{R}_n[x]$, considere as bases

$$\mathcal{B} = (1,\ x,\ \ldots,\ x^n) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}' = \left(1,\ x,\ \frac{x^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{x^n}{n!}\right).$$

Determine:

(a) $\mathcal{M}(D;\mathcal{B},\mathcal{B})$.
(b) $\mathcal{M}(D;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$, utilizando matrizes de mudança de base.

Exercício 5.113 Seja (u_1,u_2,u_3) uma base do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(au_1+bu_2+cu_3) = (a+b+c)u_1 + (2a+b-c)u_2 + (-a-b-c)u_3,$$

para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f;(u_i),(u_i))$.
(b) Indique se f é sobrejectiva.
(c) Indique se f é injectiva.
(d) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} f$.
(e) Seja (v_1,v_2,v_3) uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$u_1 = v_1+v_2+v_3, \quad u_2 = v_1+2v_2+v_3 \quad \text{e} \quad u_3 = v_1.$$

Determine $\mathcal{M}(f;(v_i),(u_i))$.
(f) Indique se $\mathcal{M}(f;(v_i),(u_i))$ é invertível.

Exercício 5.114 Seja E um espaço vectorial real e seja (u_1, u_2, u_3) uma sua base. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow E$ tal que

$$f(a, b, c, d, e) = (-b - c + d)u_1 + (2a + b + 3c - 3d)u_2 + (b + c - d)u_3,$$

para quaisquer $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \text{b.c.}, (u_i))$.
(b) Determine uma base de $\operatorname{Im} f$.
(c) Em $\mathbb{R}^5$, considere os vectores

$$v_1 = (2, 2, 0, 2, 2),\ v_2 = (-1, -1, 1, 0, 1) \text{ e } v_3 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

Mostre que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\operatorname{Nuc} f$.
(d) Determine uma base de $\mathbb{R}^5$ que inclua os vectores v_1, v_2 e v_3.
(e) Sendo $\mathcal{B}$ a base obtida em (d), determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, (u_i))$.

Soluções dos exercícios

5.2 (a) É
(b) Não é
(c) Não é
(d) Não é

5.5 Para $n = 1$ $\det A$ é linear

5.6 (a) Não
(b) Não

5.15 (a) $\operatorname{Nuc} f = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$
Por exemplo, $\big((1, 0, 0)\big)$
(b) $\operatorname{Nuc} g = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & b \\ -d & d \end{smallmatrix}\right] : b, d \in \mathbb{R}\}$
Por exemplo, $(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right])$
(c) $\operatorname{Nuc} h = \{(-b, b, 0) : b \in \mathbb{R}\}$
Por exemplo, $\big((-1, 1, 0)\big)$
(d) $\operatorname{Nuc} t =$
$\{ax^3 + bx^2 + ax - b : a, b \in \mathbb{R}\}$
Por exemplo, $(x^3 + x,\ x^2 - 1)$

5.18 (a) $\operatorname{Nuc} f = \{(0, 0, 0)\}$
Injectiva
(b) $\operatorname{Nuc} g = \{0x^2 + 0x + 0\}$
Injectiva

5.19 Por exemplo, $E \neq \{0_E\}$ e $f : E \to E'$ tal que $f(u) = 0_{E'}$, $\forall_{u \in E}$

5.20 (a) Por exemplo, $\big((1, 0), (0, 1)\big)$
(b) Por exemplo, $\big((2, 0, 0), (0, 1, 0)\big)$
(c) Por exemplo, $(x^2,\ 1)$
(d) Por exemplo, $(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right])$

5.22 (a) $\eta(f) = 1$
(b) $\eta(g) = 3$
(c) $\eta(h) = 3$
(d) $\eta(t) = 0$

5.24 $(2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$

5.26 (a) Sim
(b) Sim

5.28 $g(a, b) = (0, 0, -b)$

5.29 (a) Por exemplo,
$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$,
$f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$,
$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$
(b) Por exemplo,
$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$,
$f(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$,
$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

5.30 (a) Não
(b) Sim, por exemplo,
$f(0, 1, 1, 0) = (0, 0, 0)$,
$f(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0)$,
$f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$,
$f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0)$
(c) Sim, por exemplo,
$f(1, 0, 0) = (1, 2, 0, -4)$,
$f(0, 1, 0) = (2, 0, -1, -3)$,
$f(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

5.31 (a) $f^{-1} : E \to E$ tal que
$f^{-1} = f - \mathrm{id}_E$
(b) $g^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$g^{-1}(x, y) = (\frac{y - x}{2}, x)$

5.34 Por exemplo, $f : F \to G$, tal que $f(x, y, 0) = (0, x, y)$, para qualquer $(x, y, 0) \in F$.

5.37 Por exemplo,
$\mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_4[x]$

Base de $\mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R})$:
$([1\ 0\ 0\ 0\ 0], [0\ 1\ 0\ 0\ 0], [0\ 0\ 1\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 1\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ 1])$

Base de $\mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$:
$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

Base de $\mathbb{R}_4[x]$:
$(x^4, x^3, x^2, x, 1)$

5.38 (b) Por exemplo, os subespaços F e G do Exercício 5.34

5.39 Por exemplo, $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$, tal que
$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5.41 (a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.42 (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.43 (a) Trocam as colunas i e j

(c) Trocam as linhas k e l

5.44 $\mathrm{r}(\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')) = 2 = \dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3$
f não é sobrejectiva.

5.45 (a) $(-7,-1)$

(b) $f(a,b,c) = (b+2a, a-3c)$

5.46 (a) Sim

(b) Não

(c) Sim

(d) Não

5.47 (a) $(3,5)$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.48 (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

5.49 (a) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

5.50 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5.51 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.52 (a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\{-\frac{15}{8}\}$

5.53 (a) (i) É
(ii) É

(b) $f\left(x^2-2x\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Para $a = 0$ e $c = -d$,
$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ -d & d \end{bmatrix}\right) = (0,0,0)$

5.56 Não

5.59 (a) $x^3 \notin \operatorname{Nuc} f$, $x^3 \in \operatorname{Im} f$

(b) $0 \in \operatorname{Nuc} f$, $0 \in \operatorname{Im} f$

(c) $4 \in \operatorname{Nuc} f$, $4 \notin \operatorname{Im} f$

(d) $5x - 3x^3 \notin \operatorname{Nuc} f$, $5x - 3x^3 \notin \operatorname{Im} f$

5.60 (a) Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f = \big((0,1)\big)$

(b) Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f =$
$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

(c) Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

5.62 (b) $\operatorname{Nuc} f_A = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{bmatrix} : \ a,b \in \mathbb{R}\right\}$
Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f_A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

5.63 (b) $W \cap \operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

5.65 (a) $k = 0$

(b) Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f = (-e_2 + e_3)$

5.66 $f : E \to E$ aplicação linear com
(e_1, e_2, e_3, e_4) base de E

(a) $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$,
$f(e_3) = 0_E$, $f(e_4) = 0_E$

(b) $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = 0_E$,
$f(e_3) = 0_E$, $f(e_4) = 0_E$

(c) $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_1$,
$f(e_3) = e_2$, $f(e_4) = e_3$

(d) $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = e_4$,
$f(e_3) = 0_E$, $f(e_4) = 0_E$

5.81 (a) $f(a,b,c) = (a+b-c, b)$

(b) Por exemplo, $\big((1,0,1)\big)$

(c) Por exemplo, $\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$

5.82 $-2x^3 + 2x^2 - 5x - 2$

5.83 (a) $\operatorname{Nuc} f = \big\langle(1,0)\big\rangle$,
$\operatorname{Im} f = \big\langle(0,1)\big\rangle$

(c) $\{1\}$

5.84 (b) $f^2 : E \to E$ é tal que
$f^2(e_1) = f^2(e_2) = f^2(e_3) =$
$= 3(e_1 + e_2 + e_3)$
$g^2 : E \to E$ é tal que
$g^2(e_1) = e_3$, $g^2(e_2) = e_1$
e $g^2(e_3) = e_2$
$g^3 : E \to E$ é tal que $g^3 = \mathrm{id}_E$

5.85 (a) Por exemplo, $(e_2, e_3, \cdots, e_n)$

(b) $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$
Por exemplo,
Base de $\operatorname{Nuc} f = (e_n)$

5.87 (a) Por exemplo, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que
$f(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$,
$f(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$,
$f(0,1,0,0) = (0,1,0,0)$,
$f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$

(b) Por exemplo, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que
$g(1,0,0,0) = (1,0,0,0)$,
$g(0,1,0,0) = (0,0,1,0)$,
$g(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$,
$g(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

5.88 (a) $f^{-1}(ax^2+bx+c) = \frac{1}{3}ax^2 + \frac{1}{2}bx + c$

(b) $g^{-1} = g$

5.89 (a) $f(3-2x) = (-5,-2)$
$f(2x+3) = (-1,2)$
$f(x) = (1,1)$

5.92 $\{5\}$

5.94 (a) $(\dim E = 6)$ Por exemplo,
$\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}_5[x]$

(b) $(\dim E = 4)$ Por exemplo,
$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$

(c) $(\dim E = 2)$ Por exemplo,
$\mathbb{R}_1[x]$ e $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$

(d) $(\dim E = 4)$ Por exemplo,
$\mathbb{R}_3[x]$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(e) $(\dim E = 6)$ Por exemplo,
$\mathbb{R}_5[x]$ e $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

5.96 (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \\ -5 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

5.97 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.98 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5.99 (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+2)\times(n+1)}(\mathbb{R})$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times(n+1)}(\mathbb{R})$

5.100 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.101 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & (-1)^n a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & (-1)^n a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & (-1)^n a_2 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^n a_{n-1} \end{bmatrix}$

5.102 $D(2x^3 - x^2 + 3x - 4) = 6x^2 - 2x + 3$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 3&0&0&0\\ 2&2&0&0\\ 0&0&2&0 \end{bmatrix}$

5.103 Sim, $2x+1=f(1,0,1)$

5.104 (a) $(1,\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

(b) $(16,10,2)$

(c) $(6,-1,-\frac{11}{2})$

5.105 (b) $\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$

5.106 (a) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&0\\ -1&0&-1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{M}(g;\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0&0&1&1\\ 0&1&0&-1\\ 0&1&1&2 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0&1&2&1\\ 0&1&2&3\\ 0&1&0&-1\\ 0&-1&-2&-3 \end{bmatrix}$

5.107 (a) $\begin{bmatrix} 1&1&1\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$

5.108 (b) $V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(c) ${V_\alpha}^{-1} = V_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

5.109 (a) $\begin{bmatrix} 2&0&0&0\\ 2&0&-1&0\\ 2&1&-1&1\\ 1&1&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2&0&0&2\\ 1&-1&0&1\\ 2&0&1&3\\ 2&1&1&3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&-1&1\\ -1&0&1&0\\ 2&0&-1&0 \end{bmatrix}$

5.110 (a) $\begin{bmatrix} 1&0&-2&-1\\ -1&-3&-1&-5\\ 0&-1&-1&-2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3&4&-2&5\\ -2&-3&1&-4\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$

5.111 (a) $\begin{bmatrix} 1&a+1&a+1&a+1\\ 0&1&a+1&a+1\\ 0&0&1&a+1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1&a&0&0\\ 0&1&a&0\\ 0&0&1&a\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$

5.112 (a) $\begin{bmatrix} 0&1&0&\cdots&0&0\\ 0&0&2&\cdots&0&0\\ &&&\cdots&&\\ 0&0&0&\cdots&n-1&0\\ 0&0&0&\cdots&0&n\\ 0&0&0&\cdots&0&0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathcal{M}(D;\mathcal{B},\mathcal{B})$

5.113 (a) $\begin{bmatrix} 1&1&1\\ 2&1&-1\\ -1&-1&-1 \end{bmatrix}$

(b) Não

(c) Não

(d) Por exemplo, $(2u_1-3u_2+u_3)$

(e) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\ -1&-1&4\\ -1&0&0 \end{bmatrix}$

(f) Não

5.114 (a) $\begin{bmatrix} 0&-1&-1&1&0\\ 2&1&3&-3&0\\ 0&1&1&-1&0 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, (u_1-u_3,u_2)

(d) Por exemplo,
$\big((2,2,0,2,2),(-1,-1,1,0,1)$, $(0,0,0,0,1),(0,1,0,0,0),$ $(0,0,0,1,0)\big)$

(e) $\begin{bmatrix} 0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&1&-3\\ 0&0&0&1&-1 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 6

Valores e Vectores Próprios

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição 6.1 Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos ***endomorfismo*** de E a qualquer aplicação linear de E em E.

Neste capítulo estudaremos apenas aplicações que sejam endomorfismos de E e consideraremos que E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com $E \neq \{0_E\}$.

Por ter aplicações práticas, nomeadamente em Física, tem interesse determinar para um dado endomorfismo

$$f : E \longrightarrow E$$

o conjunto dos vectores, não nulos, de E que, por f, se transformam em múltiplos escalares deles próprios, isto é, o conjunto dos vectores $u \in E$ tais que

$$u \neq 0_E \quad \text{e} \quad f(u) = \alpha u, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Notemos que

$$f(0_E) = 0_E = \alpha 0_E, \text{ para qualquer } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Por outro lado, se

$$f(u) = \alpha u = \beta u,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então

$$(\alpha - \beta)u = 0_E.$$

Assim, se $u \neq 0_E$ tem-se

$$\alpha - \beta = 0$$

e portanto

$$\alpha = \beta.$$

As considerações anteriores motivam a seguinte definição:

Definição 6.2 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Dizemos que $u \in E$ é um ***vector próprio*** de f se

(i) $u \neq 0_E$

e (ii) $\exists_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad f(u) = \alpha u.$

Um tal α é único e diz-se o ***valor próprio de f associado ao vector próprio u.***

Conforme referimos anteriormente, a cada vector próprio de um endomorfismo está associado um, e um só, valor próprio. No entanto, pode colocar-se o seguinte problema:

Dado uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ existirão vectores próprios distintos associados a um mesmo $\alpha \in \mathbb{K}$, isto é, existirão $u, v \in E$ tais que

$$u \neq 0_E, \quad f(u) = \alpha u$$

e

$$v \neq 0_E, \quad f(v) = \alpha v,$$

com $u \neq v$?

Veremos que a resposta é sempre afirmativa.

Definição 6.3 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Diz-se que $\alpha \in \mathbb{K}$ é um ***valor próprio*** de f se

$$\exists_{u \neq 0_E} \qquad f(u) = \alpha u.$$

Qualquer vector u nestas condições diz-se um ***vector próprio de f associado ao valor próprio α.***

Exercício 6.1 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a + b, b, 2c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considere os vectores $u_1 = (2, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 7)$ e $u_3 = (0, 0, 0)$. Indique se cada um dos vectores u_1, u_2, u_3 é um vector próprio de f e, em caso afirmativo, qual é o valor próprio associado.

Vejamos que a cada valor próprio corresponde mais do que um vector próprio.

Proposição 6.4 *Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ um valor próprio de f e*

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \{u \in E : \ f(u) = \alpha u\} \\ &= \mathrm{Nuc}(f - \alpha\, \mathrm{id}_E). \end{aligned}$$

Tem-se:

1. *E_α é um subespaço de E e $1 \leq \dim E_\alpha \leq \dim E$.*
2. *Os vectores próprios de f associados ao valor próprio α são os elementos não nulos de E_α, isto é, são os elementos de $E_\alpha \setminus \{0_E\}$.*

Demonstração:

1. Para justificar que E_α é um subespaço de E basta atender à Proposição 5.11 e a que, como f é uma aplicação linear, $f - \alpha\, \mathrm{id}_E$ é ainda uma aplicação linear.

Como α é um valor próprio de f, pela definição de valor próprio, tem-se

$$\exists_{u \neq 0_E} \qquad f(u) = \alpha u.$$

Podemos pois afirmar que

$$1 \leq \dim E_\alpha.$$

Como E_α é um subespaço de E tem-se

$$\dim E_\alpha \leq \dim E.$$

2. A demonstração é evidente se atendermos à definição de vector próprio de f e à definição de E_α.

∎

Definição 6.5 Sejam $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e α um valor próprio de f. Ao subespaço vectorial

$$E_\alpha = \{u \in E : \ f(u) = \alpha u\} = \mathrm{Nuc}(f - \alpha\, \mathrm{id}_E)$$

chamamos ***subespaço próprio*** de f ***associado ao valor próprio*** α.

Se E tem dimensão finita então fixando, em E, uma base $\mathcal{B}$ podemos determinar

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

com $n = \dim E$. Se $u \in E$ e $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é a matriz cuja coluna é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ então

$$u \neq 0_E \quad \text{se, e só se,} \quad X \neq 0.$$

Por outro lado,

$$f(u) = \alpha u, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{K},$$

é equivalente, pela Proposição 5.34, a

$$AX = \alpha X.$$

Correspondendo, respectivamente, às Definições 6.2 e 6.3 surgem naturalmente os seguintes conceitos:

Definição 6.6 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é um ***vector próprio*** de A se

(i) $X \neq 0_{n\times 1}$

e (ii) $\exists_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad AX = \alpha X.$

Um tal α é único e diz-se o ***valor próprio de*** A ***associado ao vector próprio*** X.

OBSERVAÇÃO: Para certos autores a definição de vector próprio de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é

$$X = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$$

tal que

(i) $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$

e (ii) $\exists_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad A\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$

Definição 6.7 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que $\alpha \in \mathbb{K}$ é um ***valor próprio*** de A se

$$\exists_{X\neq 0_{n\times 1}} \qquad AX = \alpha X.$$

Qualquer vector X nestas condições diz-se um ***vector próprio de*** A ***associado ao valor próprio*** α.

Exemplo 6.8

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz escalar, isto é,

$$A = \beta I_n, \ \text{com } \beta \in \mathbb{K}.$$

Tem-se

$$AX = (\beta I_n)\, X = \beta\, (I_n X) = \beta X,$$

para qualquer $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, pelo que A tem apenas o valor próprio β.

Exercício 6.2 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.

(b) Questão análoga à de (a) para $\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 6.3 Justifique que se α é valor próprio de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ então $\overline{\alpha}$ é valor próprio de $\overline{A}$.

Exercício 6.4 Justifique que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

são vectores próprios de qualquer matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e indique os valores próprios correspondentes.

Correspondendo à Proposição 6.4 surge o seguinte resultado.

Proposição 6.9 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ um valor próprio de A e*

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (A - \alpha I_n) X = 0\}. \end{aligned}$$

Tem-se:

1. *M_α é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e $1 \leq \dim M_\alpha \leq n$.*
2. *Os vectores próprios de A associados ao valor próprio α são os elementos não nulos de M_α.*

Demonstração:

Exercício.

■

Definição 6.10 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Ao subespaço vectorial

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (A - \alpha I_n) X = 0\} \end{aligned}$$

chamamos ***subespaço próprio*** de A ***associado ao valor próprio*** α. A dimensão do subespaço M_α designa-se por ***multiplicidade geométrica*** do valor próprio α e é representada por $\mathrm{mg}(\alpha)$.

De acordo com a Proposição 6.9 tem-se

$$1 \leq \mathrm{mg}(\alpha) \leq n.$$

O resultado seguinte permite determinar a multiplicidade geométrica de um valor próprio sem determinar o subespaço próprio que lhe está associado.

Proposição 6.11 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Tem-se*

$$\mathrm{mg}(\alpha) = n - \mathrm{r}(A - \alpha I_n).$$

Demonstração:

Notemos que

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (A - \alpha I_n) X = 0\} \\ &= \mathcal{N}(A - \alpha I_n). \end{aligned}$$

A Proposição 4.69, aplicada à matriz $A - \alpha I_n$, permite afirmar que

$$\dim \mathcal{N}(A - \alpha I_n) = n - \mathrm{r}(A - \alpha I_n).$$

Logo

$$\mathrm{mg}(\alpha) = n - \mathrm{r}(A - \alpha I_n).$$

■

Exercício 6.5 De acordo com o Exemplo 6.8, se

$$A = \beta I_n, \text{ com } \beta \in \mathbb{K},$$

então A tem apenas o valor próprio β. Indique a respectiva multiplicidade geométrica.

O resultado seguinte vai permitir determinar as possibilidades para os valores próprios de alguns tipos particulares de matrizes.

Proposição 6.12 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é tal que*

$$AX = \alpha X$$

então

$$A^k X = \alpha^k X,$$

qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Demonstremos o resultado por indução em k.

O resultado é obviamente verdadeiro para $k = 1$.

Suponhamos que

$$A^k X = \alpha^k X$$

e demonstremos que

$$A^{k+1} X = \alpha^{k+1} X.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} A^{k+1} X &= \left(A A^k\right) X = A \left(A^k X\right) = A \left(\alpha^k X\right) = \alpha^k (AX) \\ &= \alpha^k (\alpha X) = \left(\alpha^k \alpha\right) X = \alpha^{k+1} X, \end{aligned}$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Exemplo 6.13

1. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ***nilpotente***, isto é, uma matriz tal que

$$A^s = 0, \text{ para algum } s \in \mathbb{N}.$$

Se α é valor próprio de A então, de acordo com a Proposição 6.12, α^s é valor próprio de A^s. Atendendo ao Exemplo 6.8, a matriz escalar $0 I_n$ tem apenas o valor próprio 0. Logo

$$\alpha^s = 0$$

e consequentemente

$$\alpha = 0.$$

2. Sejam

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{e} \quad q(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{K}_r[x].$$

Defina-se

$$q(A) = b_r A^r + b_{r-1} A^{r-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I_n.$$

Verifiquemos que se α é valor próprio de A associado ao vector próprio $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ então $q(\alpha)$ é valor próprio de $q(A)$ associado ao mesmo vector próprio X.

Por hipótese, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que

$$X \neq 0_{n\times 1} \quad \text{e} \quad AX = \alpha X.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} q(A)X &= \left(b_r A^r + b_{r-1} A^{r-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I_n\right) X \\ &= \left(b_r A^r\right) X + \left(b_{r-1} A^{r-1}\right) X + \cdots + \left(b_1 A\right) X + \left(b_0 I_n\right) X \\ &= b_r \left(A^r X\right) + b_{r-1} \left(A^{r-1} X\right) + \cdots + b_1 (AX) + b_0 \left(I_n X\right). \end{aligned}$$

Atendendo à Proposição 6.12 concluímos que

$$\begin{aligned} q(A)X &= b_r \left(\alpha^r X\right) + b_{r-1} \left(\alpha^{r-1} X\right) + \cdots + b_1 (\alpha X) + b_0 X \\ &= \left(b_r \alpha^r\right) X + \left(b_{r-1} \alpha^{r-1}\right) X + \cdots + \left(b_1 \alpha\right) X + b_0 X \\ &= \left(\alpha^r b_r\right) X + \left(\alpha^{r-1} b_{r-1}\right) X + \cdots + \left(\alpha b_1\right) X + b_0 X \\ &= \left(\alpha^r b_r + \alpha^{r-1} b_{r-1} + \cdots + \alpha b_1 + b_0\right) X \\ &= q(\alpha) X, \end{aligned}$$

conforme pretendíamos.

3. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^2 = I_n.$$

Atendendo a que a igualdade anterior é equivalente a

$$A^2 - I_n = 0$$

e considerando o polinómio $q(x) = x^2 - 1$, tem-se

$$q(A) = 0.$$

De acordo com 2, se α é valor próprio de A então $q(\alpha) = \alpha^2 - 1$ é valor próprio de $q(A)$. Logo

$$\alpha^2 - 1 = 0$$

e portanto

$$\alpha \in \{-1, 1\}.$$

Exercício 6.6 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^3 = I_n.$$

O que pode afirmar sobre os valores próprios de A?

Exercício 6.7 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$.)

(a) Mostre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0,1\}$.

(b) Indique uma matriz que tenha todos os valores próprios no conjunto $\{0,1\}$ e que não seja idempotente.

O resultado seguinte vai ser muito útil para determinar, na prática, os valores próprios de uma matriz.

Teorema 6.14 *Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se, α é valor próprio de A se, e só se,*

$$|A - \alpha I_n| = 0.$$

Demonstração:

Por definição, α é valor próprio de A se, e só se, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que

$$X \neq 0 \quad \text{e} \quad AX = \alpha X,$$

ou equivalentemente,

$$X \neq 0 \quad \text{e} \quad (A - \alpha I_n)\, X = 0.$$

Notemos que o sistema homogéneo, com n incógnitas,

$$(A - \alpha I_n)\, Y = 0$$

admite uma solução não nula se, e só se, é indeterminado. Tal sucede se, e só se,

$$\mathrm{r}\,(A - \alpha I_n) < n$$

(ou equivalentemente, $\mathrm{r}\,(A - \alpha I_n) \neq n$).

Recordando que são equivalentes as afirmações

(i) $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível.

(ii) $\mathrm{r}(B) = n$.

(iii) $\det B \neq 0$.

concluímos que $\mathrm{r}\,(A - \alpha I_n) \neq n$ se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$, conforme pretendíamos demonstrar.

■

Exercício 6.8 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz hemi-simétrica. Mostre que $\alpha \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A se, e só se, o mesmo sucede a $-\alpha$.

Exercício 6.9 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = I_n$). Conforme refere o Exercício 3.71 tem-se

$$\det A \in \{-1, 1\}.$$

Mostre que:

(a) Se $\det A = -1$ então -1 é valor próprio de A.
<u>Sugestão</u>: Verifique que $A^\top (I_n + A) = (I_n + A)^\top$.

(b) Se $\det A = 1$ e n é ímpar ou se $\det A = -1$ e n é par então 1 é valor próprio de A.
<u>Sugestão</u>: Verifique que $(A - I_n)^\top = -A^\top (A - I_n)$.

O teorema anterior motiva a seguinte definição.

Definição 6.15 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos ***polinómio característico*** de A e representamos por $p_A(x)$, ou simplesmente $p(x)$ se não houver ambiguidade, o polinómio na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$, dado por

$$p(x) = |A - xI_n|.$$

À equação $p(x) = 0$ chamamos ***equação característica*** de A.

Atendendo ao Teorema 3.34 demonstra-se sem dificuldade que

Proposição 6.16 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então o seu polinómio característico, $p_A(x)$, tem grau igual a n, sendo da forma*

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Demonstração:

Exercício.

■

Exemplo 6.17

1. A matriz
$$A=\begin{bmatrix}4&0&2\\1&1&3\\0&0&-2\end{bmatrix}$$
tem polinómio característico
$$p(x)=\begin{vmatrix}4-x&0&2\\1&1-x&3\\0&0&-2-x\end{vmatrix}\overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}}(-2-x)\begin{vmatrix}4-x&0\\1&1-x\end{vmatrix}$$
$$=(-2-x)(4-x)(1-x).$$
2. O polinómio característico da matriz I_n é
$$p(x)=(1-x)^n.$$
3. O polinómio característico da matriz nula de ordem n é
$$p(x)=(-x)^n.$$

Exercício 6.10 Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que A e $A^\top$ têm o mesmo polinómio característico.

De acordo com o Teorema 6.14, tem-se

Proposição 6.18 *Seja $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com polinómio característico $p_A(x)$. São equivalentes as afirmações:*

1. *$\alpha\in\mathbb{K}$ é valor próprio de A.*
2. *$p_A(\alpha)=|A-\alpha I_n|=0$, isto é, α é um zero do polinómio característico de A.*

Para certos autores o polinómio característico de $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é definido por
$$|xI_n-A|.$$
Notemos que
$$|xI_n-A|=|-(A-xI_n)|=(-1)^n\,|A-xI_n|.$$
Logo, para qualquer $\alpha\in\mathbb{K}$, tem-se
$$|\alpha I_n-A|=0\quad\text{se, e só se,}\quad|A-\alpha I_n|=0.$$

A proposição anterior resolve completamente o problema da determinação dos valores próprios de uma matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ pois são os zeros do polinómio característico de A, ou equivalentemente, as raízes da equação característica de A, $p_A(x)=0$. Tal equação é da forma
$$p_A(x)=(-1)^nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$
e o resultado seguinte dá-nos o seu número de raízes em $\mathbb{C}$.

Teorema 6.19 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Qualquer equação, na variável x, da forma*
$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$
com $a_n\neq 0$, $n\geq 1$ e $a_i\in\mathbb{C}$, $i=0,1,\ldots,n$, tem exactamente n raízes em $\mathbb{C}$.

Exercício 6.11 Determine os valores próprios da matriz
$$A=\begin{bmatrix}2&-i&0\\i&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$$
e as respectivas multiplicidades algébricas.

Exercício 6.12 Seja
$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{K}).$$
Mostre que:

(a) Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ então A não tem valores próprios.
(b) Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ então A tem dois valores próprios distintos.
(c) As matrizes A e $B=\begin{bmatrix}-2&-1\\5&2\end{bmatrix}$ têm o mesmo polinómio característico.

Exercício 6.13 Dê exemplos que ilustrem que os valores próprios de uma matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ podem mudar quando:

(a) Se trocam duas linhas (colunas).
(b) Se multiplica uma linha (coluna) por $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$.
(c) Se substitui uma linha (coluna) pela sua soma com outra multiplicada por $\beta\in\mathbb{K}$.

Exercício 6.14 Mostre, com um exemplo, que se α é valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e β é valor próprio de $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $\alpha + \beta$ pode não ser valor próprio de $A + B$.

Sugestão: Procure nas matrizes diagonais.

Exercício 6.15 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Utilizando determinantes, justifique que 0 é valor próprio de AB se, e só se, 0 é valor próprio de BA.

(b) Mostre que se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ é valor próprio de AB associado ao vector próprio X então α é valor próprio de BA associado ao vector próprio BX.

(c) Conclua que AB e BA têm os mesmo valores próprios.

Proposição 6.20 *Os valores próprios de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ triangular são os elementos da sua diagonal principal.*

Demonstração:

Exercício.

∎

Definição 6.21 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Designamos por ***multiplicidade algébrica*** do valor próprio α, e representamos por ma(α), a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A, $p_A(x)$, isto é, o maior inteiro k tal que $(\alpha - x)^k$ divide $p_A(x)$.

Proposição 6.22 *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ os valores próprios, dois a dois distintos, de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mas o polinómio característico de A tem n zeros em $\mathbb{R}$ (não necessariamente distintos) então*

1. $\sum_{i=1}^r \mathrm{ma}\,(\alpha_i) = n$.

2. $\Pi_{i=1}^r {\alpha_i}^{s_i} = \det A$, *com* $s_i = \mathrm{ma}\,(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, r$.

Demonstração:

1. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra (Teorema 6.19) um polinómio de grau n tem exactamente n zeros em $\mathbb{C}$ (não necessariamente, dois a dois distintos) e tem, no máximo, n zeros em $\mathbb{R}$. Atendendo a que o polinómio característico de A tem grau n e, por hipótese, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tem n zeros em $\mathbb{R}$, concluímos o que pretendíamos.

2. Atendamos a que no polinómio característico de A, $p(x)$, que tem grau n, o coeficiente de x^n é $(-1)^n$. Assim, como $p(x)$ tem n zeros em $\mathbb{K}$, é da forma

$$p(x) = (\alpha_1 - x)^{s_1} \cdots (\alpha_r - x)^{s_r},$$

com $s_i = \mathrm{ma}\,(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Dado que

$$p(x) = |A - xI_n|$$

obtemos

$$p(0) = |A - 0I_n| = |A|.$$

Por outro lado

$$p(0) = (\alpha_1 - 0)^{s_1} \cdots (\alpha_r - 0)^{s_r} = \alpha_1^{s_1} \cdots \alpha_r^{s_r} = \Pi_{i=1}^r {\alpha_i}^{s_i}.$$

Logo concluímos o que pretendíamos.

∎

OBSERVAÇÃO:

1. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e o polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem k zeros em $\mathbb{R}$, com $k < n$, em relação à Proposição 6.22 apenas podemos afirmar que
$$\sum_{i=1}^r \mathrm{ma}\,(\alpha_i) < n. \text{ (Porquê?)}$$

2. Notemos que, para qualquer polinómio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $q(0)$ é igual ao seu termo constante. Logo se o polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é
$$p(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = |A - xI_n|$$
então
$$p(0) = a_0 = |A - 0I_n| = |A|.$$

É possível determinar se uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível conhecendo os valores próprios de A ou o termo constante do seu polinómio característico. De facto, tem-se:

Proposição 6.23 *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:*

1. *A é invertível.*
2. *A não tem o valor próprio zero.*
3. *O termo constante do polinómio característico de A é não nulo.*

Demonstração:

É trivial se atendermos às últimas igualdades da observação anterior e a que A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.

■

Exercício 6.16 Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com polinómio característico

$$p(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x + a_0.$$

Indique

(a) O conjunto dos valores de a_0 para o qual A é invertível.
(b) $\det A$.

Exercício 6.17 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Mostre que:

(a) Se α é valor próprio de A então $\alpha \neq 0$ e α^{-1} é valor próprio de A^{-1}.
(b) Se $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é vector próprio de A associado ao valor próprio α então X é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio α^{-1}.

Exercício 6.18 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^\top = I_n$). Justifique que se α é valor próprio de A então $\alpha \neq 0$ e α^{-1} é valor próprio de $A^\top$ e de A.

Uma vez resolvido o problema da determinação dos valores próprios de uma dada matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e das respectivas multiplicidades algébricas, vejamos como determinar os subespaços próprios de A e as respectivas multiplicidades geométricas.

Se α é um valor próprio de A então o subespaço próprio de A associado ao valor próprio α é

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (A - \alpha I_n)\, X = 0\}. \end{aligned}$$

Assim o problema da determinação de M_α reduz-se à resolução do sistema homogéneo

$$(A - \alpha I_n)\, X = 0.$$

Exemplo 6.24

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Como

$$p(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)^2,$$

A tem os valores próprios

$$2, \quad \text{com} \quad \mathrm{ma}(2) = 1,$$

e

$$1, \quad \text{com} \quad \mathrm{ma}(1) = 2.$$

Determinemos o subespaço próprio de A associado a cada um dos seus valores próprios, bem como a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é:

$$\begin{aligned} M_2 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 2I_3)\, X = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 2I_3)\, X = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(-1)l_1 \\ (-1)l_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Logo

$$M_2=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ b=0\ \wedge\ c=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a\\ 0\\ 0\end{bmatrix}:\ a\in\mathbb{R}\right\}$$
$$=\left\{a\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}:\ a\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Como $\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente e, portanto, obtemos

$$\text{Base de } M_2=\left(\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right).$$

Concluímos então que

$$\operatorname{mg}(2)=\dim M_2=1.$$

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é:

$$M_1=\{X\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ (A-1I_3)\,X=0\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ a=0\ \wedge\ c=0\right\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} 0\\ b\\ 0\end{bmatrix}:\ b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{b\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}:\ b\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Assim obtemos

$$\text{Base de } M_1=\left(\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right)\quad\text{e}\quad \operatorname{mg}(1)=1.$$

2. Consideremos a matriz I_n. O seu polinómio característico é

$$p(x)=(1-x)^n$$

e I_n tem apenas o valor próprio 1 com

$$\operatorname{ma}(1)=n.$$

O subespaço próprio de I_n associado ao seu único valor próprio é

$$\begin{aligned} M_1&=\{X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}):\ (I_n-1I_n)\,X=0\}\\ &=\{X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}):\ 0X=0\}\\ &=\{X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\}\\ &=\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{mg}(1)=\dim M_1=n.$$

Concluímos então que qualquer vector $X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, com $X\neq 0$, é vector próprio de I_n associado ao valor próprio 1.

Exercício 6.19

(a) Mostre que uma matriz e a sua transposta têm o mesmo polinómio característico e portanto os mesmos valores próprios.

(b) Considerando a matriz $A=\begin{bmatrix} 1&0\\ 1&1\end{bmatrix}$, mostre que os subespaços próprios, respectivamente, de A e $A^\top$ associados a um mesmo valor próprio não são necessariamente iguais.

Exercício 6.20 Considere as matrizes, apenas com o valor próprio α,

$$A_1=\begin{bmatrix} \alpha&1&0\\ 0&\alpha&1\\ 0&0&\alpha\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} \alpha&1&0\\ 0&\alpha&0\\ 0&0&\alpha\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} \alpha&0&0\\ 0&\alpha&0\\ 0&0&\alpha\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Mostre que em A_i se tem $\operatorname{mg}(\alpha)=i$, $i=1,2,3$.

Exercício 6.21 Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 2&1&-1\\ k&0&k\\ 1&-1&1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de k para o qual A admite o valor próprio 2.

(b) Para o valor de k determinado em (a), indique o subespaço próprio associado ao valor próprio 2.

Já sabemos determinar os valores próprios e os vectores próprios de uma matriz $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Vejamos agora como resolver tais problemas para um endomorfismo.

Notemos que, de acordo com as observações feitas no final do Capítulo 5, se f é um endomorfismo de E, com E de dimensão finita, e $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de E então as matrizes

$$A_1 = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) \quad \text{e} \quad A_2 = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2)$$

relacionam-se da forma

$$A_2 = P^{-1}A_1P, \quad \text{sendo } P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1).$$

Recordemos a definição de matrizes semelhantes, apresentada inicialmente no Exercício 1.101 e referida novamente no final do Capítulo 5.

Definição 6.25 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A e B são ***semelhantes*** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exercício 6.22 Justifique que se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes e $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível tal que

$$P^{-1}AP = B$$

então

(a) $P^{-1}A^kP = B^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sugestão: Por indução em k.

(b) $P^{-1}q(A)P = q(B)$, com

$$q(x) = b_rx^r + b_{r-1}x^{r-1} + \cdots + b_1x + b_0 \in \mathbb{K}_r[x]$$

e

$$q(A) = b_rA^r + b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_1A + b_0I_n.$$

Tem-se a seguinte propriedade:

Proposição 6.26 *Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes então os seus polinómios característicos são iguais e, consequentemente, têm os mesmos valores próprios e com iguais multiplicidades algébricas.*

Demonstração:

Como existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, tal que

$$P^{-1}AP = B$$

tem-se

$$\begin{aligned}|B - xI_n| &= \left|P^{-1}AP - xI_n\right| = \left|P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP\right| \\ &= \left|P^{-1}(A - xI_n)P\right| = \left|P^{-1}\right||A - xI_n||P| \\ &= \left|P^{-1}\right||P||A - xI_n| = \left|P^{-1}P\right||A - xI_n| \\ &= |I_n||A - xI_n| = |A - xI_n|.\end{aligned}$$

■

Exercício 6.23 Indique matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com o mesmo polinómio característico e que não sejam semelhantes.

Sugestão: Atenda a (d) do Exercício 1.101.

Exercício 6.24 Considere o polinómio

$$p(x) = (2 + x)(-x)(1 - x).$$

Indique, caso seja possível, uma matriz, não triangular, com polinómio característico $p(x)$.

Notemos que duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ semelhantes não têm necessariamente os mesmos subespaços próprios associados a cada um dos seus valores próprios, podendo até suceder que um vector $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ seja vector próprio de A e não seja vector próprio de B, conforme se ilustra no exemplo seguinte.

Exemplo 6.27

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = B$$

e portanto A e B são semelhantes.

Se determinarmos os subespaços próprios de A obtemos

$$M_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad M_0(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ 3b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

e ao determinarmos os subespaços próprios de B obtemos

$$M_2(B) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad M_0(B) = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ 2b \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Assim

$$M_2(A) \neq M_2(B) \quad \text{e} \quad M_0(A) \neq M_0(B).$$

Tem-se ainda que qualquer vector da forma

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

é vector próprio de B mas não é vector próprio de A e qualquer vector da forma

$$\begin{bmatrix} -b \\ 3b \end{bmatrix}, \quad \text{com } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

é vector próprio de A mas não é vector próprio de B.

Exercício 6.25 Indique matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que A e B são equivalentes e

(a) A e B têm polinómios característicos iguais.
(b) A e B têm polinómios característicos distintos.

(Recorde a Definição 5.45 de equivalência de matrizes.)

Como matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, tem sentido a seguinte definição.

Definição 6.28 Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E, com E de dimensão finita, e seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E. Chamamos ***polinómio característico*** de f ao polinómio característico da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

O resultado seguinte permite-nos reduzir o problema da determinação dos valores próprios e dos vectores próprios de um endomorfismo ao problema da sua determinação para uma matriz.

Teorema 6.29 *Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E de dimensão finita. Seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E e*

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

Tem-se:

1. *u é vector próprio de f se, e só se, a matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, cuja coluna é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$, é um vector próprio de A.*

2. *α é valor próprio de f se, e só se, α é valor próprio de A.*

Demonstração:

Exercício.

∎

Exercício 6.26 Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, com $E \neq \{0_E\}$. Determine o polinómio característico da aplicação

(a) nula de E.
(b) identidade de E.

Exercício 6.27 Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (-b - c, -2a + b - c, 4a + 2b + 4c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Determine os valores próprios e os vectores próprios de f.

As multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ estão relacionadas da forma estabelecida pelo seguinte resultado.

Proposição 6.30 *Seja α um valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se*

$$\text{mg}(\alpha) \leq \text{ma}(\alpha).$$

Demonstração:

Seja M_α o subespaço próprio de A associado ao valor próprio α. Sejam

$$k = \dim M_\alpha = \mathrm{mg}(\alpha) \quad \text{e} \quad (X_1, \ldots, X_k) \text{ uma base de } M_\alpha.$$

Como $X_1, \ldots, X_k$ são linearmente independentes, pelo Teorema do Completamento (Teorema 4.50) existem vectores $Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ tais que

$$(X_1, \ldots, X_k, Y_{k+1}, \ldots, Y_n) \text{ é uma base de } \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Seja $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$S = \left[X_1 \mid \cdots \mid X_k \mid Y_{k+1} \mid \cdots \mid Y_n\right].$$

Notemos que S é invertível pois $\mathrm{r}(A) = n$ e

$$\begin{aligned} AS &= \left[AX_1 \mid \cdots \mid AX_k \mid AY_{k+1} \mid \cdots \mid AY_n\right] \\ &= \left[\alpha X_1 \mid \cdots \mid \alpha X_k \mid X'_{k+1} \mid \cdots \mid X'_n\right]. \end{aligned}$$

Como $S^{-1}S = I_n$ e as colunas $1, \ldots, k$ de AS são, respectivamente, as colunas $1, \ldots, k$ de S, com cada uma multiplicada por α, obtemos

$$S^{-1}AS = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \alpha & \\ \hline & 0_{(n-k)\times k} & & * \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha I_k & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right],$$

em que $*$ são elementos não especificados.

Aplicando o Teorema de Laplace sucessivamente às colunas $1, \ldots, k$ concluímos que o polinómio característico de $S^{-1}AS$ e portanto o de A é

$$p_A(x) = \alpha^k q(x),$$

onde $q(x)$ é um polinómio de grau $n - k$.

Logo

$$\mathrm{mg}(\alpha) = k \leq \mathrm{ma}(\alpha),$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Como consequência do resultado anterior tem-se:

$$\text{Se } \mathrm{ma}(\alpha) = 1 \text{ então } \mathrm{mg}(\alpha) = 1.$$

Teorema 6.31 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ valores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com*

$$\alpha \neq \beta.$$

Se $X_1, \ldots, X_k$ são vectores próprios de A, linearmente independentes, associados ao valor próprio α e $Y_1, \ldots, Y_l$ são vectores próprios de A, linearmente independentes, associados ao valor próprio β, então

$$X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$$

são linearmente independentes.

Demonstração:

Demonstremos que, nas condições do teorema,

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k + \beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_l Y_l = 0_{n\times 1} \tag{6.1}$$

implica

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_l = 0.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (6.1), à esquerda, por A obtemos

$$A\left(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k + \beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_l Y_l\right) = A0,$$

isto é,

$$\alpha_1 AX_1 + \cdots + \alpha_k AX_k + \beta_1 AY_1 + \cdots + \beta_l AY_l = 0.$$

Como

$$AX_i = \alpha X_i, \text{ para } i = 1, \ldots, k,$$

e

$$AY_j = \beta Y_j, \text{ para } j = 1, \ldots, l,$$

concluímos que

$$(\alpha_1\alpha)X_1 + \cdots + (\alpha_k\alpha)X_k + (\beta_1\beta)Y_1 + \cdots + (\beta_l\beta)Y_l = 0.$$

Por outro lado, multiplicando ambos os membros da igualdade (6.1), à esquerda, por β obtemos

$$(\beta\alpha_1)X_1 + \cdots + (\beta\alpha_k)X_k + (\beta\beta_1)Y_1 + \cdots + (\beta\beta_l)Y_l = 0$$

Subtraindo o 1° membro (respectivamente, 2° membro) da última igualdade ao 1° membro (respectivamente, 2° membro) da penúltima igualdade obtemos

$$\begin{aligned}(\alpha_1\alpha - \beta\alpha_1)X_1 + \cdots + (\alpha_k\alpha - \beta\alpha_k)X_k \\ + (\beta_1\beta - \beta\beta_1)Y_1 + \cdots + (\beta_l\beta - \beta\beta_l)Y_l = 0,\end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\alpha_1(\alpha - \beta)X_1 + \cdots + \alpha_k(\alpha - \beta)X_k = 0.$$

Como, por hipótese, $X_1, \ldots, X_k$ são linearmente independentes tem-se

$$\alpha_1(\alpha - \beta) = \cdots = \alpha_k(\alpha - \beta) = 0.$$

Dado que $\alpha \neq \beta$ obtemos

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Substituindo, em (6.1), $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ por 0 resulta

$$\beta_1 Y_1 + \cdots + \beta_l Y_l = 0$$

e, como $Y_1, \ldots, Y_l$ são linearmente independentes, concluímos que

$$\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0.$$

Assim

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_l = 0,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

■

Exercício 6.28 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz tal que

$$A^2 = I_n.$$

Seja $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ um vector, não nulo, que não é vector próprio de A. Justifique que:

(a) Se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{-1, 1\}$.
(b) $X + AX$ e $X - AX$ são vectores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.
(c) $X + AX$ e $X - AX$ são linearmente independentes.

Mais geralmente, tem-se

Proposição 6.32 *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ valores próprios, dois a dois distintos, de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $X_{i1}, \ldots, X_{ik_i}$ são vectores próprios de A, linearmente independentes, associados ao valor próprio α_i, $i = 1, \ldots, r$, então*

$$X_{11}, \ldots, X_{1k_1}, \ldots, X_{r1}, \ldots, X_{rk_r}$$

são linearmente independentes.

Demonstração:

Exercício. (Por indução em r, adaptando a demonstração já efectuada, no Teorema 6.31, para $r = 2$.)

■

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Definição 6.33 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é uma matriz ***diagonalizável*** se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

Nessas condições, diz-se que P é uma matriz ***diagonalizante*** de A.

Exercício 6.29 Justifique que qualquer matriz diagonal é diagonalizável.

Exercício 6.30 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) A é diagonalizável se, e só se, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, αA é diagonalizável.
(b) A é diagonalizável se, e só se, $A^\top$ é diagonalizável.
(c) Se A é invertível então A é diagonalizável se, e só se, A^{-1} é diagonalizável.

Exercício 6.31 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonalizável. Justifique que:

(a) A^k é diagonalizável, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.
Sugestão: Atenda a (a) do Exercício 6.22.

(b) $q(A) = b_rA^r + b_{r-1}A^{r-1} + \cdots + b_1A + b_0I_n$, com $b_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, r$, é diagonalizável.
Sugestão: Atenda a (b) do Exercício 6.22.

Se A é diagonalizável então não existe uma só matriz diagonalizante de A. Notemos que se P verifica a definição anterior então o mesmo sucede, em particular, com αP, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pois

$$(\alpha P)^{-1} A (\alpha P) = \left(\alpha^{-1}P^{-1}\right) A (\alpha P) = \left(\alpha^{-1}\alpha\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}AP = D.$$

Nas condições da definição anterior, como as matrizes A e D são semelhantes, de acordo com a Proposição 6.26, têm os mesmos valores próprios e com iguais multiplicidades algébricas. Dado que os valores próprios de uma matriz diagonal são os elementos da sua diagonal principal concluímos que é válido o seguinte resultado.

Proposição 6.34 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz diagonalizável e D é uma matriz diagonal semelhante a A então os valores próprios de A são os elementos da diagonal principal de D.*

Exemplo 6.35

Vejamos algumas matrizes que não são diagonalizáveis.

Recordemos que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz escalar então A é a única matriz semelhante a A. Assim qualquer matriz cujo polinómio característico seja da forma

$$p(x) = (\alpha - x)^n$$

e não seja a matriz αI_n, não é diagonalizável.

Logo não são diagonalizáveis as matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

e a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad \text{com } n \geq 2,$$

cujos polinómios característicos são, respectivamente,

$$(3-x)^2, \quad x^2, \quad (\alpha - x)^2, \quad (\alpha - x)^n.$$

O resultado seguinte é uma das caracterizações mais importantes das matrizes diagonalizáveis.

Teorema 6.36 *Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável se, e só se, A tem n vectores próprios linearmente independentes.*

Neste caso, se $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ são n vectores próprios de A linearmente independentes correspondentes, respectivamente, aos valores próprios $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (não necessariamente distintos) então a matriz P cuja coluna i é o n-uplo correspondente a X_i, $i = 1, \ldots, n$, que representamos por

$$P = \left[X_1 \mid \cdots \mid X_n\right] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

é invertível e é uma matriz diagonalizante de A. Mais especificamente, tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Suponhamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável e seja $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = D.$$

Assim

$$AP = PD$$

ou ainda

$$A\left[X_1 \mid \cdots \mid X_n\right] = \left[X_1 \mid \cdots \mid X_n\right]\begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix},$$

sendo $X_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $i = 1,\ldots,n$, a i-ésima coluna de P.

Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, podemos concluir que a igualdade anterior é equivalente a

$$\left[AX_1 \mid \cdots \mid AX_n\right] = \left[d_1X_1 \mid \cdots \mid d_nX_n\right]$$

e portanto

$$AX_1 = d_1X_1$$

$$\cdots$$

$$AX_n = d_nX_n.$$

Como $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível, ou equivalentemente,

$$\mathrm{r}(P) = n,$$

concluímos que as suas colunas são linearmente independentes.

Logo $X_1,\ldots,X_n$ são n vectores próprios de A linearmente independentes.

A implicação recíproca obtém-se de forma idêntica pois, como A tem n vectores próprios linearmente independentes, se os denotarmos por $X_1,\ldots,X_n$ e considerarmos a matriz

$$P = \left[X_1 \mid \cdots \mid X_n\right]$$

concluímos que P é invertível e que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

■

Exercício 6.32 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.
(c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal D tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

Exercício 6.33 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Mostre que A não é diagonalizável mas B é diagonalizável.

Como consequência do Teorema 6.36 e da Proposição 6.32, tem-se:

Proposição 6.37 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem n valores próprios, dois a dois distintos, então A é diagonalizável.*

Demonstração:

Exercício.

■

Exercício 6.34 Considere as matrizes triangulares

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Sem efectuar cálculos, justifique que A e B são ambas diagonalizáveis e indique uma matriz diagonal D_A semelhante a A e uma matriz diagonal D_B semelhante a B.

Exercício 6.35 Caso seja possível, indique matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que:

(a) A e B sejam diagonalizáveis mas $A + B$ não seja diagonalizável.
(b) $A + B$ seja diagonalizável mas nem A nem B sejam diagonalizáveis.

Exercício 6.36 Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Sem calcular os subespaços próprios de A conclua que A é diagonalizável.

OBSERVAÇÃO: Existem outras caracterizações das matrizes diagonalizáveis além da indicada no Teorema 6.36. Nomeadamente, notemos que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem os valores próprios $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, dois a dois distintos, como para cada valor próprio α_i, $i = 1, \ldots, r$, o número máximo de vectores próprios linearmente independentes é

$$\dim M_{\alpha_i} = \mathrm{mg}(\alpha_i), \quad i = 1, \ldots, r,$$

concluímos, pelo teorema anterior, que o número máximo de vectores próprios linearmente independentes da matriz A é

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mg}(\alpha_i).$$

Logo se

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mg}(\alpha_i) = n$$

então A é diagonalizável.

A implicação recíproca é também verdadeira (verifique), tendo-se:

Teorema 6.38 *Se $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ são os valores próprios, dois a dois distintos, de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então A é diagonalizável se, e só se,*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mg}(\alpha_i) = n.$$

Exemplo 6.39

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

referida no Exemplo 6.24. Nesse exemplo foi visto que A tem apenas os valores próprios $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 1$. Como as respectivas multiplicidades geométricas são

$$\mathrm{mg}(2) = 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{mg}(1) = 1$$

concluímos que A não é diagonalizável pois

$$\sum_{i=1}^{2} \mathrm{mg}(\alpha_i) = 2 \neq 3 = \text{ ordem de } A.$$

Exemplo 6.40

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$, cujo polinómio característico é

$$\begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} (3-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (3-x)(x^2+1).$$

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então A tem apenas o valor próprio 3 com
$$\mathrm{ma}(3) = 1.$$
Como $\mathrm{mg}(3) \leq \mathrm{ma}(3) = 1 < 3$ concluímos que, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a matriz A não é diagonalizável.
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então A tem os valores próprios
$$3, \quad i \quad \text{e} \quad -i.$$
Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e tem, em $\mathbb{C}$, 3 valores próprios distintos então A é diagonalizável.
Se pretendermos obter uma matriz P diagonalizante de A, determinamos os subespaços próprios correspondentes a cada um desses valores próprios. Obteremos, respectivamente,
$$M_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad M_i = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad M_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$
Assim uma matriz diagonalizante de A é a matriz
$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e, de acordo com o Teorema 6.36, obteremos
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$
Note que se considerarmos a matriz, também diagonalizante de A,
$$Q = \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
então
$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.37 Indique, se existir, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ que tenha os valores próprios 2, 1 e -1 e em que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sejam vectores próprios de A associados, respectivamente, a cada um dos valores próprios indicados.

Exercício 6.38 Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades geométricas.

(b) Indique, se existir, uma matriz diagonal semelhante a A.

(c) Determine uma matriz A nas condições do enunciado.

OBSERVAÇÃO: Uma das aplicações da diagonalização é o cálculo das potências de uma matriz diagonalizável $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

De facto, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = D,$$

ou equivalentemente,

$$A = PDP^{-1}.$$

Tem-se

$$A^k = PD^kP^{-1},$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$, conforme se demonstra facilmente por indução em k. Como

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix},$$

podemos com duas multiplicações de matrizes calcular A^k, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.39 Calcule A^9 e A^{100} sendo A a matriz do Exercício 6.32.

Para endomorfismos de um espaço vectorial E de dimensão finita tem-se a seguinte noção:

Definição 6.41 Uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$, com E de dimensão finita, diz-se ***diagonalizável*** se existe uma base $\mathcal{B}$ de E tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

é uma matriz diagonal.

Teorema 6.42 *Se $f : E \longrightarrow E$ é uma aplicação linear, com $\dim E = n$, então f é diagonalizável se, e só se, f tem n vectores próprios linearmente independentes.*

Demonstração:

Exercício.

■

Exemplo 6.43

Consideremos o endomorfismo f, de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(a,b,c) = (a, 2b+c, c).$$

Determinemos se existe uma base $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ é uma matriz diagonal e, em caso afirmativo, indiquemos uma base nessas condições.

Consideremos uma base arbitrária $\mathcal{B}'$, de $\mathbb{R}^3$, e determinemos $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$. Tomando para $\mathcal{B}'$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtemos

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem os valores próprios 1 e 2 e os subespaços próprios

$$M_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{com } \dim M_1 = 2$$

e

$$M_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{com } \dim M_2 = 1.$$

Logo A é diagonalizável pois tem 3 (= ordem de A) vectores próprios linearmente independentes ou, alternativamente, porque

$$\text{mg}(1) + \text{mg}(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A.$$

Como

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

podemos afirmar que

$$f(1,0,0) = 1(1,0,0), \; f(0,-1,1) = 1(0,-1,1) \text{ e } f(0,1,0) = 2(0,1,0).$$

Logo sendo

$$\mathcal{B} = \big((1,0,0),(0,-1,1),(0,1,0)\big)$$

concluímos que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.40 Sejam f um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Se

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

determine:

(a) Os valores próprios de f.
(b) Uma base $\mathcal{B}'$, de $\mathbb{R}^3$, constituída por vectores próprios de f.
(c) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ sendo $\mathcal{B}'$ a base indicada em (b).

Observação: Compare os resultados com os obtidos no Exercício 6.32.

Exercícios suplementares

Secção 6.1 Definição, exemplos e propriedades

Exercício 6.41 Determine os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

Exercício 6.42 Seja

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -12 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

Indique quais dos vectores seguintes são vectores próprios de A e, para cada um desses, o valor próprio correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 6.43 Considere a matriz

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}).$$

Justifique que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

são vectores próprios de V_α e indique os valores próprios correspondentes.

Exercício 6.44 Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Justifique que se $X \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{K})$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio α então X é ainda vector próprio de $\beta A + \gamma I_n$ e indique o valor próprio correspondente.

Exercício 6.45 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A + A^\top = \alpha I_n, \quad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{K}$$

Mostre que se X é um vector próprio de A associado ao valor próprio β então X é um vector próprio de $A^\top$ associado ao valor próprio $\alpha - \beta$.

Exercício 6.46 Indique o que está errado no seguinte raciocínio:

> "*Se $\alpha \in \mathbb{K}$ é valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\beta \in \mathbb{K}$ é valor próprio de $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $\alpha\beta$ é valor próprio de AB. De facto, como existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $X \neq 0$ e*
>
> $$BX = \beta X$$
>
> *tem-se*
>
> $$A(BX) = A(\beta X) = \beta(AX) = \beta(\alpha X) = (\beta\alpha)X = (\alpha\beta)X."$$

Exercício 6.47 Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear tal que

$$f^r = \mathrm{id}_E, \quad \text{para algum } r \in \mathbb{N}.$$

Seja

$$g = \mathrm{id}_E + f + \cdots + f^{r-1}.$$

Justifique que:

(a) $f \circ g = g$.

(b) Se $u \in E$ e $u \notin \operatorname{Nuc} g$ então $g(u)$ é um vector próprio de f e indique o valor próprio correspondente.

Exercício 6.48 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é um ***co–valor próprio*** de A se existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, não nulo, tal que

$$A\overline{X} = \alpha X.$$

Mostre que:

(a) Se α é um co–valor próprio de A então $|\alpha|^2$ é um valor próprio de $A\overline{A}$.

(b) A matrix $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ não tem co–valores próprios.

Sugestão: Calcule $A\overline{A}$ e atenda à alínea (a).

Exercício 6.49 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz hermítica. Mostre que:

(a) Se X é um vector próprio de A associado ao valor próprio α então

$$X^*A^*X = \overline{\alpha}X^*X.$$

(b) Se α é valor próprio de A então $\overline{\alpha} = \alpha$ e portanto α é um número real.

Exercício 6.50 Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é hemi–hermítica então os valores próprios de A são imaginários puros.

Sugestão: Atenda a que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é hemi–hermítica se, e só se, iA é hermítica.

Exercício 6.51 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Mostre que os valores próprios de A^*A são reais positivos.

Sugestão: Atenda a que A^*A é hermítica e a 2 do Exemplo 1.38.

Exercício 6.52 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz unitária (isto é, tal que $UU^* = I_n$).
Mostre que:

(a) Se X é um vector próprio de U associado ao valor próprio α então

$$X^*U^*UX = \overline{\alpha}\alpha X^*X.$$

(b) Se α é valor próprio de U então $|\alpha| = 1$.

Exercício 6.53 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que

$$A^4 = I_n.$$

O que pode afirmar sobre os valores próprios de A?

Exercício 6.54 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^2 + 2A = I_n.$$

Justifique que se α é valor próprio de A então

$$\alpha \in \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}.$$

Exercício 6.55 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^{k+1} = A^k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, 1\}$.

Exercício 6.56 Considere a matriz

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \mathcal{M}\left(R_\alpha; \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2}, \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^2}\right),$$

onde $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação ***rotação*** de ângulo α em torno da origem.

(a) Determine os valores próprios de V_α.

(b) Indique o conjunto dos valores de α para os quais V_α tem dois valores próprios reais.

Exercício 6.57 Caso seja possível, indique uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$, com todos os elementos reais, que tenha um valor próprio real e os restantes não sejam reais.

Exercício 6.58 Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

(a) Mostre que o seu polinómio característico é

$$p(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A,$$

onde $\operatorname{tr} A$ representa o traço de A.

(b) Indique uma condição necessária e suficiente para que os dois valores próprios de A sejam iguais.

(c) Indique uma condição necessária e suficiente para que A tenha os dois valores próprios reais e distintos.

(d) Mostre que se α é um valor próprio de A então

$$(\alpha - a_{11})(\alpha - a_{22}) = a_{12}a_{21}.$$

Exercício 6.59 Determine o conjunto dos valores de α para os quais a matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

tem três valores próprios dois a dois distintos.

Exercício 6.60 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz cujo polinómio característico tem todos os coeficientes reais. Justifique que se $\alpha \in \mathbb{C}$ é valor próprio de A então o mesmo sucede a $\overline{\alpha}$ e que α e $\overline{\alpha}$ têm iguais multiplicidades algébricas.

Exercício 6.61 Determine os valores próprios da matriz $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A_{ij} = 1 - \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

e as respectivas multiplicidades algébricas.

Exercício 6.62 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes ortogonais, isto é,

$$AA^\top = I_n \quad \text{e} \quad BB^\top = I_n.$$

(a) Justifique que $|AB^\top| \in \{-1, 1\}$.

(b) Mostre que se $|AB^\top| = -1$ então $|AB^\top + I_n| = 0$.
Sugestão: Atenda a (a) do Exercício 6.9.

(c) Justifique que $A + B$ não é invertível.
Sugestão: Calcule $(A + B)B^\top$.

Exercício 6.63 Representemos por K_n a matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com todos os elementos nulos excepto os da diagonal secundária que são iguais a 1, matriz habitualmente designada por ***contra–identidade*** de ordem n.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Designam-se por ***contra–valores próprios*** de A os zeros da equação, na variável μ,

$$|A - \mu K_n| = 0.$$

Justifique as afirmações:

(a) Se α é valor próprio de A então α é um contra–valor próprio de K_nA.

(b) Se α é um contra–valor próprio de A então α é um valor próprio de K_nA.

Exercício 6.64 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

Exercício 6.65 Mostre que o único valor próprio da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

tem multiplicidade geométrica 1 e descreva o correspondente subespaço próprio.

Exercício 6.66 Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha & \beta \\ -1-\beta & -1 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Justifique que:

(a) Os valores próprios de A não dependem de β.

(b) Os vectores próprios de A não dependem de α.

Exercício 6.67 Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Mostre que se α é valor próprio de A então $|A|\alpha^{-1}$ é um valor próprio da matriz adjunta de A.

Exercício 6.68 Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se ***estocástica generalizada*** se a soma dos elementos de cada linha é constante. Mostre que:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ verifica

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} = r, \quad \text{com } i \in \{1,\dots,n\},$$

então r é valor próprio de A.

Sugestão: Considere $X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

(b) Se A é estocástica generalizada e invertível então A^{-1} também é estocástica generalizada.

Sugestão: Atenda a (b) do Exercício 6.17.

Exercício 6.69 Seja $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que

$$f(a,b,c) = (a,b,0),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Determine os valores próprios e os vectores próprios de f.

Exercício 6.70 Considere a aplicação linear $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, referida no Exercício 5.112. Determine:

(a) O polinómio característico de D.

(b) Os vectores próprios de D.

Secção 6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exercício 6.71 Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes semelhantes. Mostre que A é diagonalizável se, e só se, B é diagonalizável.

Exercício 6.72 Justifique que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável então a característica de A é igual à soma das multiplicidades algébricas dos seus valores próprios não nulos.

Exercício 6.73 De acordo com o Exercício 6.7, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é idempotente (isto é, tal que $A^2 = A$) qualquer valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0,1\}$.

Mostre que se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável e todo o seu valor próprio pertence ao conjunto $\{0,1\}$ então A é idempotente.

Exercício 6.74 Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Justifique que M é diagonalizável.

(b) Mostre que qualquer matriz diagonalizante de M é diagonalizante de N.

Sugestão: Atenda a que $N = \alpha I_3 + \beta M$.

(c) Indique uma matriz diagonal semelhante a N.

Exercício 6.75 Considerando apenas o polinómio característico, justifique que não é diagonalizável a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.76 Considere as matrizes, todas com traço zero e determinante -1,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mostre, por dois processos distintos, que σ_x e σ_y são diagonalizáveis, sendo semelhantes a σ_z.

Exercício 6.77 Seja $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

é diagonalizável, sendo semelhante à matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.78 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Justifique que A não é diagonalizável.

Exercício 6.79 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Mostre que:

(a) A é diagonalizável.

(b) Existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2-2i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.80 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine os valores próprios de cada uma das matrizes.

(b) (i) Mostre que A é diagonalizável.

(ii) Indique se B é diagonalizável.

(c) Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ estejam ordenados por ordem crescente.

Exercício 6.81 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K}).$$

Justifique que:

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então A não é diagonalizável.

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então A é diagonalizável e indique uma matriz diagonal semelhante a A.

Exercício 6.82 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Mostre que o polinómio característico de A não depende de m.

(b) Verifique que 2 é valor próprio de A.

(c) Indique o conjunto dos valores de m para os quais A é diagonalizável, utilizando a Proposição 6.11.

Exercício 6.83 Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Sem calcular os subespaços próprios, justifique que A é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 6.84 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Justifique que A é diagonalizável.

(b) Indique A^k, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Exercício 6.85 Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}.$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $(1, -1, 0)$ é vector próprio de f associado ao valor próprio 2 e

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0),$$

para qualquer $(a, b, c) \in F$.

(a) Justifique que $\mathcal{B} = \big((1, -1, 0), (1, 1, -3), (1, 0, -1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de f.

(b) Mostre que 0 é valor próprio de f e que $\mathrm{mg}(0) = \mathrm{ma}(0)$.

(c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercício 6.86 Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão $n \geq 1$ e f um endomorfismo de E. Mostre que f é um isomorfismo se, e só se, zero não é valor próprio de f.

Sugestão: Atenda à Proposição 5.41.

Exercício 6.87 Considere a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Seja E um espaço vectorial real de dimensão 3 e sejam $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ bases de E tais que $\mathcal{M}(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = P$. Seja f o endomorfismo de E tal que $f(e_1) = u_1$, $f(e_2) = u_2$ e $f(e_3) = u_3$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.

(b) Mostre que 1 é valor próprio de f.

(c) Indique, caso existam, vectores $v_1, v_2 \in E$ tais que $v_1 \neq v_2$ e v_1, v_2 sejam vectores próprios de f associados ao valor próprio 1.

(d) Indique se f é um isomorfismo.

Soluções dos exercícios

6.1 u_1 vector próprio associado ao valor próprio 1
u_2 vector próprio associado ao valor próprio 2

6.2 **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 1
$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 2

(b) $\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 1
$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ vector próprio associado ao valor próprio 2

6.4 $D_{11}, D_{22}, \ldots, D_{nn}$, respectivamente

6.5 $\mathrm{mg}(\beta) = n$

6.6 Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, valores próprios de A: 1
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, valores próprios de A:
$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6.7 **(b)** Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.11 Valores próprios de A: 3 e 1
$\mathrm{ma}(3) = 2$ e $\mathrm{ma}(1) = 1$

6.13 (Para transformações elementares sobre linhas)
Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 0 e 1

(a) $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 0 e 2

(b) $A \xrightarrow[2l_1]{} A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 0 e 2

(c) $A \xrightarrow[l_1 + (-\frac{1}{2})l_2]{} A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ tem apenas o valor próprio 0

6.14 Por exemplo, para $n = 2$,
1 é valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
2 é valor próprio de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
mas $1 + 2 = 3$ não é valor próprio de $A + B = 0$

6.16 **(a)** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) $\det A = a_0$

6.21 **(b)** $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2c \\ c \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$

6.23 Por exemplo, $A = \alpha I_n$ e $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$

6.24 Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

6.25 **(a)** Para $\alpha \neq 0$ as matrizes A e B do Exercício 6.23

(b) $A = \alpha I_n$ e $B = \beta I_n$ com $\alpha \neq \beta$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6.26 **(a)** $p(x) = (-x)^n$

(b) $p(x) = (1 - x)^n$

6.27 Valores próprios de f: 1 e 2

$E_1 = \big\langle (-1, -1, 2) \big\rangle$

$E_2 = \big\langle (-1, 2, 0), (-1, 0, 2) \big\rangle$

6.32 **(a)** Valores próprios de A: -1 e 1
$\mathrm{ma}(-1) = 2$ e $\mathrm{ma}(1) = 1$

(b) Base de M_{-1}: por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
Base de M_1: por exemplo,
$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

(c) Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.34 $D_A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.35 **(a)** Por exemplo,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,
$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo,
$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6.37 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -30 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

6.38 **(a)** Valores próprios de A: 0 e 2
$\mathrm{mg}(0) = 1$ e $\mathrm{mg}(2) = 2$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

6.39 $A^9 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$
$A^{100} = I_3$

6.40 (a) Valores próprios de f: -1 e 1

(b) Por exemplo,
$\mathcal{B} = (e_1 - 2e_2,\ e_3,\ e_1 - e_2 + e_3)$

(c) $\mathcal{M}(f;\ \mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.41 $0, 3, 4$

6.42 (a) Sim; -1

(b) Sim; 1

(c) Não

(d) Sim; -1

6.43 $\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

6.47 (b) 1

6.53 Valores próprios de A: $-1, 1, -i, i$

6.56 (a) $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha,\ \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha$

(b) $\{k\Pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$

6.57 Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6.58 (b) $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 0$

(c) $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A \neq 0$

6.59 $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{4}, 4\}$

6.61 Valores próprios de A: -1 e $n-1$
$\operatorname{ma}(-1) = n-1$ e $\operatorname{ma}(n-1) = 1$

6.64 Por exemplo,
Base de M_2: $\big((1,0,1)\big)$
Base de M_3: $\big((1,0,0)\big)$

6.65 $M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : a_2 = \cdots = a_n = 0 \right\}$

6.69 Valores próprios de f: 0 e 1
$E_0 = \big\langle (0,0,1) \big\rangle$
$E_1 = \big\langle (1,0,0), (0,1,0) \big\rangle$

6.70 (a) $(-x)^n$

(b) Qualquer polinómio constante e não nulo, isto é, da forma $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6.74 (c) Por exemplo, $\begin{bmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2\beta \end{bmatrix}$

6.79 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6.80 (a) Valores próprios de A: 1, 2 e 3
Valores próprios de B: 1

(b) (ii) Não

(c) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.81 (b) Por exemplo, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

6.82 (a) $p_A(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

(c) $\emptyset$

6.83 (a) Valores próprios de A: -1 e 2
$\operatorname{ma}(-1) = 2$ e $\operatorname{ma}(2) = 1$

6.84 (b) $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 4^k & -4^k-1 \\ 0 & 2\times 4^k & -2\times 4^k \\ 0 & 4^k & -4^k \end{bmatrix}$

6.85 (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6.87 (a) $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Por exemplo, $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$ e $v_2 = 2v_1$

(d) f é um isomorfismo

Apêndice

Notações envolvendo conjuntos

Sejam A e B conjuntos. Se A e B têm os mesmos elementos escrevemos $A = B$. Caso contrário, escrevemos $A \neq B$. Utilizamos a notação $A \subseteq B$, e lemos "A está contido em B" ou "A é subconjunto de B", para representar que todo o elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B. Caso contrário, escrevemos $A \not\subseteq B$. Neste caso, dizemos que "A não está contido em B" ou que "A não é subconjunto de B" o que equivale a afirmar que existe pelo menos um elemento de A que não pertence ao conjunto B. Usamos a notação $A \subsetneq B$ com o significado de $A \subseteq B$, com $A \neq B$.

Tem-se
$$A = B \text{ se, e só se, } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A,$$
pelo que utilizaremos frequentemente uma das implicações anteriores para demonstrar que dois conjuntos são iguais.

Alguns conjuntos podem ser obtidos a partir de outros através de operações sobre estes, das quais as mais conhecidas são a união e a intersecção de conjuntos. A ***união*** (também designada por ***reunião***) dos conjuntos A e B, que se denota por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são os que pertencem a A ou a B, isto é,
$$A \cup B = \{x :\ x \in A \ \vee\ x \in B\}.$$

A ***intersecção*** dos conjuntos A e B, que se denota por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e a B, ou seja,
$$A \cap B = \{x :\ x \in A \ \wedge\ x \in B\}.$$

Dados dois conjuntos A e B podemos ainda definir o ***complementar de*** B ***em*** A, que denotaremos por $A \setminus B$, e que é o conjunto cujos elementos são os elementos de A que não pertencem a B, isto é,
$$A \setminus B = \{x :\ x \in A \ \wedge\ x \notin B\}.$$

Ao longo do texto utilizaremos alguns conjuntos de números, bem conhecidos. Seguidamente tais conjuntos são referidos com a respectiva notação.

- Conjunto dos ***números naturais***

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Conjunto dos ***números inteiros***

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Conjunto dos ***números racionais***

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z} \, , \ b \neq 0\right\}.$$

- Conjunto dos ***números reais***

$$\mathbb{R}.$$

Sendo $\mathbb{W} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ utilizamos os conjuntos

$$\mathbb{W}^+ = \{w \in \mathbb{W} \ : \ w > 0\}, \qquad \mathbb{W}_0^+ = \{w \in \mathbb{W} \ : \ w \geq 0\},$$

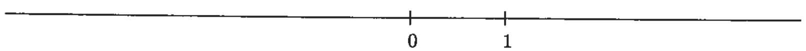
$$\mathbb{W}^- = \{w \in \mathbb{W} \ : \ w < 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{W}_0^- = \{w \in \mathbb{W} \ : \ w \leq 0\}.$$

Notemos que

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Os números e, $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números reais que não são racionais.

Podemos "visualizar" o conjunto $\mathbb{R}$ começando por pensar numa recta a que chamaremos ***eixo real*** e por marcar nessa recta dois pontos que representem o número 0 e o número 1.

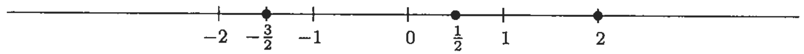


À distância entre tais pontos chamaremos a ***unidade de medida***.

Obtemos facilmente uma correspondência biunívoca entre cada número real e cada ponto da recta, isto é, uma correspondência tal que a cada ponto da recta fica a corresponder um e um só número real e reciprocamente, convencionando,

por exemplo, que cada número positivo (respectivamente, negativo) é representado por um ponto à direita (respectivamente, à esquerda) do zero a uma distância deste igual ao seu valor absoluto ou módulo multiplicado pela unidade de medida.

Assim, por exemplo, aos números $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 2 correspondem os pontos assinalados com • seguintes.



Algumas definições e resultados em $\mathbb{C}$

Consideremos agora a equação

$$x^2 + 1 = 0.$$

Sabemos que se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha^2 \in \mathbb{R}_0^+$ e, portanto, $\alpha^2 + 1 \geq 1$. Assim a equação anterior não tem raízes em $\mathbb{R}$.

Recordemos um outro conjunto importante de números, conhecido por conjunto dos ***números complexos***. Representado habitualmente por $\mathbb{C}$ tem-se

$$\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

onde i satisfaz a condição

$$i^2 = -1$$

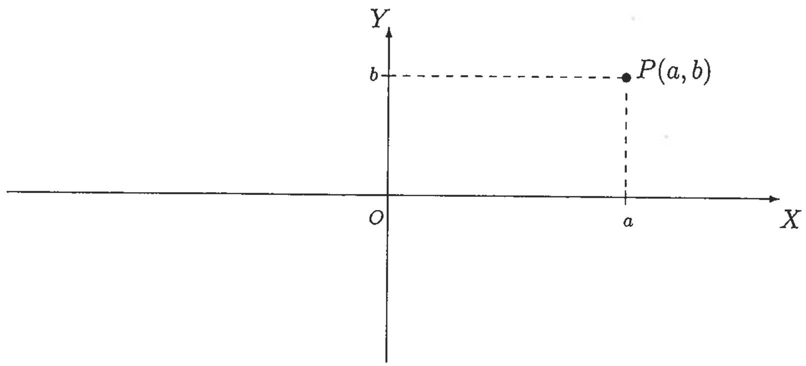
e se designa por ***unidade imaginária***.

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos então que z está representado na ***forma algébrica***. A a chamamos ***a parte real de*** z e escrevemos $a = \text{Re}(z)$ e a bi chamamos ***a parte imaginária de*** z. Designamos b por ***coeficiente da parte imaginária*** de z e escrevemos $b = \text{Im}(z)$. Se $a = 0$ temos $z = bi$ e dizemos que z é ***imaginário puro***. Se $b = 0$ temos $z = a + 0i$ e, identificando $a + 0i$ com $a \in \mathbb{R}$, dizemos que todos os números reais são também números complexos (são aqueles cuja parte imaginária é igual a 0). Assim a cadeia de inclusões referida anteriormente pode ser completada da seguinte forma:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

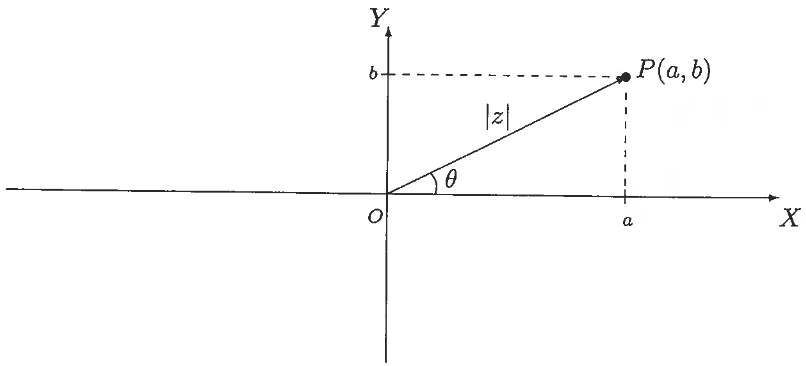
Recordemos que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o conjunto dos pontos de um plano, em que se fixou um referencial ortonormado, correspondência essa que a cada número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, associa o ponto de coordenadas (a, b).

Tal ponto, designado por ***representação geométrica*** de z, é denotado por $P(a, b)$.



O eixo das abcissas é, por razões óbvias, também designado por ***eixo real*** e o eixo das ordenadas por ***eixo imaginário***.

Conforme é conhecido, todo o número complexo $z = a + bi$, não nulo, além de se poder representar na forma algébrica também pode ser representado numa outra forma, por vezes mais conveniente, que seguidamente recordamos.



A distância de z à origem O, habitualmente designada por ***módulo*** de z e representada por $|z|$, é

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Seja θ a medida em radianos do ângulo $(\dot{O}X, \dot{O}P)$, designada por ***argumento*** de z e representado por $\arg z$.

Como

$$a = |z| \cos\theta \qquad \text{e} \qquad b = |z| \operatorname{sen}\theta$$

tem-se

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= |z|\cos\theta + (|z|\operatorname{sen}\theta)\, i \\ &= |z|\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\,. \end{aligned}$$

Esta última forma de representar um número complexo, não nulo, designa-se por ***forma polar*** ou ***forma trigonométrica*** de z. Usualmente escrevemos, de forma sugestiva e cómoda,

$$z = |z| \operatorname{cis}\theta.$$

Sejam

$$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad \text{e} \qquad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Tem-se

$$z_1 = z_2 \quad \text{se, e só se,} \quad a_1 = a_2 \quad \text{e} \quad b_1 = b_2,$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

e

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i.$$

Se os números complexos estão escritos na forma trigonométrica

$$z_1 = |z_1| \operatorname{cis}\theta_1 \qquad \text{e} \qquad z_2 = |z_2| \operatorname{cis}\theta_2$$

Assim

$$w^n = z \qquad \text{se, e só se,} \qquad |w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Concluímos então que as n raízes de índice n de z são

$$\sqrt[n]{|z|}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$

Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Recordemos que em $\mathbb{K}$ está definida uma operação, designada por "adição" e denotada por "+", que a quaisquer números reais (respectivamente, complexos) a e b faz corresponder um, e um só, número real (respectivamente, complexo) representado habitualmente por $a+b$ e designado por ***soma*** de a com b. Tal operação de adição tem as seguintes propriedades:

(i) Em $\mathbb{K}$, a adição é ***comutativa***, isto é,

$$\forall_{a,b \in \mathbb{K}} \qquad a + b = b + a.$$

(ii) Em $\mathbb{K}$, a adição é ***associativa***, isto é,

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$$

(iii) Em $\mathbb{K}$, existe ***elemento neutro*** para a adição, isto é,

$$\exists_{u \in \mathbb{K}} \quad \forall_{a \in \mathbb{K}} \qquad a + u = a = u + a.$$

Tem-se, como sabemos, $u = 0$.

(iv) Em $\mathbb{K}$, todo o elemento tem ***oposto para a adição***, também designado por ***oposto aditivo*** ou ***simétrico***, isto é,

$$\forall_{a \in \mathbb{K}} \quad \exists_{v \in \mathbb{K}} \qquad a + v = 0 = v + a.$$

Tem-se, como sabemos, $v = -a$.

Utilizamos ainda a notação $a - b$ para representar $a + (-b)$.

Em $\mathbb{K}$ está também definida uma operação, designada por "multiplicação" e denotada por " · ", que a quaisquer números reais (respectivamente, complexos) a e b faz corresponder um, e um só, número real (respectivamente, complexo) representado habitualmente por $a{\cdot}b$, ou simplesmente por ab, e designado por ***produto*** de a por b. Tal operação de multiplicação tem as seguintes propriedades:

(i)' Em $\mathbb{K}$, a multiplicação é ***comutativa***, isto é,

$$\forall_{a,b \in \mathbb{K}} \qquad ab = ba.$$

(ii)' Em $\mathbb{K}$, a multiplicação é ***associativa***, isto é,

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} \qquad (ab)c = a(bc).$$

(iii)' Em $\mathbb{K}$, existe ***elemento neutro*** para a multiplicação, isto é,

$$\exists_{u' \in \mathbb{K}} \quad \forall_{a \in \mathbb{K}} \qquad au' = a = u'a.$$

Tem-se, como sabemos, $u' = 1$.

(iv)' Em $\mathbb{K}$, todo o elemento, não nulo, tem ***oposto para a multiplicação***, também designado por ***oposto multiplicativo*** ou ***inverso***, isto é,

$$\forall_{a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \quad \exists_{v' \in \mathbb{K}} \qquad av' = 1 = v'a.$$

Como sabemos, tem-se $v' = \frac{1}{a}$, sendo também representado por a^{-1}.

Se $b \neq 0$, utilizamos a notação $\frac{a}{b}$ para representar ab^{-1}.

Envolvendo as operações de adição e de multiplicação em $\mathbb{K}$ temos a propriedade ***distributiva*** da multiplicação em relação à adição, à esquerda (respectivamente, à direita), que estabelece

$$\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} \qquad a(b + c) = ab + ac$$

(respectivamente, $\forall_{a,b,c \in \mathbb{K}} \qquad (a + b)c = ac + bc$).

Produto cartesiano de conjuntos

Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Consideremos o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de $\mathbb{K}$, habitualmente representado por $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ou abreviadamente

$$\mathbb{K}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{K}\}.$$

Para quaisquer $(a, b), (c, d) \in \mathbb{K}^2$ tem-se

$$(a, b) = (c, d) \text{ se, e só se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Em $\mathbb{K}^2$, podemos definir uma "adição" tal que

$$\forall_{(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2} \qquad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

que verificamos facilmente ser comutativa, associativa, ter elemento neutro (o par ordenado $(0, 0)$) e em que todo o elemento tem oposto (o oposto do par (a, b) é o par $(-a, -b)$).

Consideremos agora uma outra operação que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada par $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ associa um elemento de $\mathbb{K}^2$ dado por

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{(a,b)\in\mathbb{K}^2} \qquad \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

e a que chamaremos ***multiplicação por escalar***, em $\mathbb{K}^2$.

De forma análoga se definem a adição e a multiplicação por um escalar em

$$\mathbb{K}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}\},$$

a cujos elementos chamamos ***ternos*** de elementos de $\mathbb{K}$ e, mais geralmente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, em

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\},$$

a cujos elementos chamamos ***n-uplos*** de elementos de $\mathbb{K}$ ou ***sequências*** de n elementos de $\mathbb{K}$.

Se $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ então, generalizando a igualdade de sequências com $n = 2$ elementos, tem-se

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \text{ se, e só se, } a_i = b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

As operações correspondentes de adição e multiplicação por um escalar são, respectivamente,

$$\forall_{(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}^n} \quad (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

e

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \forall_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n} \quad \alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).$$

Note que estamos a representar pelo mesmo símbolo a operação de adição em $\mathbb{K}$ e a operação de adição em $\mathbb{K}^n$, uma vez que não há ambiguidade. O mesmo sucede à multiplicação por escalar entre um escalar e um elemento de $\mathbb{K}$ e entre um escalar e um elemento de $\mathbb{K}^n$.

Exercício 1 Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mostre que:

(a) Quaisquer que sejam

$$(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n,$$

tem-se:

(i) $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (b_1, \ldots, b_n) + (a_1, \ldots, a_n)$;

(ii) $[(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)] + (c_1, \ldots, c_n) = (a_1, \ldots, a_n) + [(b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)]$;

(iii) $(a_1, \ldots, a_n) + (0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + (a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$;

(iv) $(a_1, \ldots, a_n) + (-a_1, \ldots, -a_n) = (-a_1, \ldots, -a_n) + (a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$.

(b) Quaisquer que sejam

$$\alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n,$$

tem-se:

(i) $\alpha[(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n)] = \alpha(a_1, \ldots, a_n) + \alpha(b_1, \ldots, b_n)$;

(ii) $(\alpha + \beta)(a_1, \ldots, a_n) = \alpha(a_1, \ldots, a_n) + \beta(a_1, \ldots, a_n)$;

(iii) $(\alpha\beta)(a_1, \ldots, a_n) = \alpha(\beta(a_1, \ldots, a_n))$;

(iv) $1(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$.

Exercício 2 Em relação ao exercício anterior escreva as propriedades (b)(ii) e (b)(iii), considerando que a adição em $\mathbb{K}^n$ é representada por $\boxplus$ e a multiplicação por escalar, em $\mathbb{K}^n$, é representada por $\boxdot$.

Consideremos agora que, em $\mathbb{K}^n$, substituímos $\mathbb{K}$ por um conjunto A, não vazio. Aos elementos do conjunto

$$A^n = \{(a_1, \dots, a_n) : \ a_i \in A, \ i = 1, \dots, n\}$$

chamamos ***n-uplos*** de elementos de A ou ***sequências*** de n elementos de A.

Contrariamente ao que sucede nos conjuntos, numa sequência interessa a ordem pela qual os elementos ocorrem pois, conforme referimos anteriormente,

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{se, e só se,} \quad a_i = b_i, \ \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Por exemplo, $(1,1,2) \neq (1,2,1) \neq (2,1,1)$.

Chamamos ***subsequência*** da sequência $S = (a_1, \dots, a_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, a qualquer sequência da forma

$$S' = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}),$$

com $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ e $1 \leq i_1 < \cdots i_r \leq n$.

Por exemplo, se $S = (3,4,1,2)$ então $S'_1 = (3,1)$ e $S'_2 = (3,4,2)$ são subsequências de S mas $(1,3)$ e $(3,1,4)$ não são subsequências de S.

Considera-se que qualquer sequência S tem como subsequências S e a ***sequência vazia***, isto é, a sequência que não tem nenhum elemento.

Sejam A e B conjuntos, não vazios. Designamos por ***produto cartesiano*** de A por B, e representamos por $A \times B$, o conjunto

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = B = \mathbb{R}$ então $A \times B = \mathbb{R}^2$ e se

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{e} \quad B = \{1,2\}$$

então

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}.$$

Algumas estruturas algébricas

Nesta secção apresentamos algumas das estruturas algébricas mais conhecidas, como as de grupo comutativo e de corpo. A primeira permite-nos resumir que, em $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ a adição é uma operação binária satisfazendo as propriedades (i) a (iv) (referidas na secção anterior) afirmando simplesmente que $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo comutativo.

Em $\mathbb{K}$, a adição e a multiplicação usuais são operações binárias com as propriedades (i) a (iv), (i)' a (iv)' e a multiplicação é distributiva em relação à adição. Tal será resumido afirmando que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo.

Muitos dos resultados apresentados neste livro são válidos para corpos distintos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{C}$, não significando que sejam válidos para qualquer corpo. Nomeadamente alguns dos resultados do Capítulo 3 não são válidos no corpo indicado no Exercício 11.

Seja A um conjunto, não vazio. Dizemos que $*$ é uma ***operação binária***, em A, se $*$ é uma aplicação de A^2 em A, isto é, se $*$ a cada par (a,b) de elementos de A faz corresponder um, e um só, elemento de A, denotado por $*(a,b)$ ou, mais frequentemente, por $a * b$.

Em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, a adição e a multiplicação são operações binárias. Por exemplo, em $\mathbb{Z}_0^+$, em $\mathbb{Z}^-$ e em $\mathbb{R}_0^+$ a adição usual é uma operação binária. Em $\mathbb{Z}_0^-$ e em $\mathbb{R}_0^-$ a multiplicação usual não é uma operação binária mas em $\mathbb{Z}_0^+$ e em $\mathbb{R}_0^+$ tal operação é binária.

Exercício 3 Indique se é uma operação binária:

(a) A adição, em $\mathbb{Q}$.
(b) A multiplicação, em $\mathbb{Q}$.
(c) A multiplicação, em $\mathbb{Z}^+$.
(d) A multiplicação, em $\mathbb{Z}_0^-$.
(e) A adição usual de polinómios, em $\mathbb{R}_2[x]$, sendo $\mathbb{R}_2[x]$ o conjunto dos polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{R}$, com grau inferior ou igual a 2.

Seja $*$ uma operação binária em A. Dizemos que:

(i) Em A, a operação $*$ é ***comutativa*** se

$$\forall_{a,b\in A} \qquad a*b=b*a.$$

(ii) Em A, a operação $*$ é ***associativa*** se

$$\forall_{a,b,c\in A} \qquad (a*b)*c=a*(b*c)\,.$$

Notemos que se a operação $*$ é associativa então podemos suprimir os parêntesis e escrever, sem ambiguidade, $a*b*c$.

(iii) Em A, ***existe elemento neutro*** para a operação $*$ se

$$\exists_{u\in A} \quad \forall_{a\in A} \qquad a*u=a=u*a.$$

Notemos que o elemento neutro, quando existe, é único. De facto, se u e w fossem, em A, ambos elementos neutros para a operação $*$ ter-se-ia

$$u*w=w, \text{ por } u \text{ ser elemento neutro}$$

e

$$u*w=u, \text{ por } w \text{ ser elemento neutro.}$$

Logo

$$u=w.$$

Se $*$ é uma operação binária, em A, com elemento neutro u, dizemos que $a\in A$ tem ***oposto***, para a operação $*$, se existe $v\in A$ tal que

$$a*v=u=v*a.$$

Quando a operação $*$ é associativa, se o oposto de a existe então é único. De facto, se v e t fossem ambos opostos de a, isto é, se se verificasse

$$a*v=u=v*a$$

e simultaneamente

$$a*t=u=t*a$$

então concluiríamos que

$$v=v*u=v*(a*t)=(v*a)*t=u*t=t.$$

Exercício 4 Relativamente às propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro e existência de oposto para todo o elemento do conjunto, indique quais são satisfeitas pelas operações binárias seguidamente referidas e nos conjuntos indicados:

(a) A adição, em $\mathbb{R}_0^+$.
(b) A multiplicação, em $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
(c) A adição, em $\mathbb{R}_2[x]$, sendo $\mathbb{R}_2[x]$ o conjunto dos polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{R}$, com grau inferior ou igual a 2.
(d) A multiplicação, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Exercício 5 Considere o conjunto $A=\{a,b\}$ e a operação $*$ tal que

$$a*a=b, \quad a*b=a, \quad b*a=b \quad \text{e} \quad b*b=b,$$

representada pela tabela

$*$	a	b
a	b	a
b	b	b

Indique se:

(a) Em A, a operação $*$ é comutativa.
(b) Em A, a operação $*$ é associativa.
(c) Em A, a operação $*$ tem elemento neutro.

Exercício 6 Considere o conjunto $A=\{a,b,c,d\}$ e a operação $*$ dada pela tabela

$*$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	c	a	b
c	d	a	d	c
d	a	b	c	d

Justifique as afirmações:

(a) Em A, a operação $*$ é comutativa.
(b) Em A, a operação $*$ não é associativa.
(c) Em A, a operação $*$ tem elemento neutro.
(d) Em A, há dois elementos que têm um único oposto.
(e) Em A, há um elemento que não tem oposto.
(f) Em A, há um elemento que tem dois opostos.

Definição 1 Seja A um conjunto e $*$ uma operação binária em A. Dizemos que $(A,*)$ é um ***grupo*** se, em A, a operação $*$ é associativa, tem elemento neutro e todo o elemento de A tem oposto.
Um grupo $(A,*)$ diz-se ***comutativo*** se a operação $*$ é comutativa.

Exercício 7 Considere o conjunto $A = \{e,a,b,c\}$ e a operação $*$ dada pela tabela

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Justifique que $(A,*)$ é um grupo comutativo.

Exercício 8 Mostre que num grupo $(A,*)$ se verificam as propriedades

$$\forall_{a,b,c\in A} \qquad a*b=a*c \quad\Rightarrow\quad b=c$$

e

$$\forall_{a,b,c\in A} \qquad b*a=c*a \quad\Rightarrow\quad b=c$$

(designadas, respectivamente, por Lei do Corte, à esquerda, e Lei do Corte, à direita).

OBSERVAÇÃO: Conforme tivemos oportunidade de verificar, utilizam-se frequentemente os símbolos "$+$" e " $\cdot$ " para representar operações binárias num conjunto A, que pode não ser nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

Se utilizarmos o símbolo "$+$" para representar uma operação binária, num conjunto A, adoptamos uma "linguagem aditiva". Neste caso, por analogia com o que sucede em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, o elemento neutro, se existir, designa-se por "zero" e representa-se por "0". Analogamente, o oposto de $a \in A$, para a operação $+$, caso exista, designa-se por "simétrico de a" e representa-se por $-a$.

De forma idêntica, quando usamos o símbolo " $\cdot$ " para representar uma operação binária, num conjunto A, adoptamos uma "linguagem multiplicativa". Neste caso, o elemento neutro, se existir, designa-se por "um" e representa-se por "1". O oposto de $b \in A$, para a operação "$\cdot$", caso exista, designa-se por "inverso de b" e representa-se por b^{-1}.

Exercício 9 Mostre que num grupo $(A,\cdot)$ se tem:

(a) $1^{-1} = 1$.

(b) $\forall_{a,b\in A} \qquad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(c) $\forall_{a\in A} \qquad \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

Definição 2 Seja A um conjunto e $+$ e $\cdot$ duas operações binárias em A. Dizemos que $(A,+,\cdot)$ é um ***anel*** se se verificam simultaneamente as propriedades 1, 2 e 3 seguintes:

1. $(A,+)$ é um grupo comutativo;
2. Em A, a operação $\cdot$ é associativa;
3. Em A, a operação $\cdot$ é distributiva em relação à operação $+$, à esquerda e à direita, isto é, tem-se respectivamente

$$\forall_{a,b,c\in A} \qquad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$
$$\forall_{a,b,c\in A} \qquad (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a.$$

O elemento neutro da operação $+$ designa-se por ***zero do anel***.
O anel $(A,+,\cdot)$ diz-se ***comutativo*** se a operação $\cdot$ é comutativa e diz-se que é um ***anel com identidade*** se a operação $\cdot$ tem elemento neutro. Tal elemento neutro diz-se a ***identidade do anel***.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e de multiplicação, são exemplos de anéis comutativos com identidade.

Exercício 10 Considere os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I} = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}.$$

Justifique que $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ e $(\mathcal{I}, +, \cdot)$, em que $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição e de multiplicação, são anéis. Tais anéis têm identidade?

Definição 3 Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um ***corpo*** se verifica simultaneamente as propriedades 1 e 2 seguintes:

1. $(A, +, \cdot)$ é um anel comutativo, com identidade;
2. Todos os elementos, excepto o zero do anel, têm oposto para a operação $\cdot$.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com as operações usuais de adição e de multiplicação, são exemplos de corpos.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é um anel mas não é um corpo. (Porquê?)

Exercício 11 Seja $Z_2 = \{0, 1\}$. Em Z_2, considere uma "adição" e uma "multiplicação" definidas por:

$$0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=0$$

e

$$0\cdot 0=0, \quad 0\cdot 1=0, \quad 1\cdot 0=0, \quad 1\cdot 1=1.$$

Justifique que $(Z_2, +, \cdot)$ é um corpo.

Exercício 12 Considere o conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos os polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Justifique que $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ é um anel comutativo com identidade (onde $+$ e $\cdot$ representam as operações usuais de adição e multiplicação de polinómios).

Exercício 13 Justifique que num corpo $(A, +, \cdot)$ se tem

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

(Lei do Anulamento do Produto).

2 (b) (ii) $(\alpha+\beta)\boxdot(a_1,\dots,a_n) = \big(\alpha\boxdot(a_1,\dots,a_n)\big)\boxplus\big(\beta\boxdot(a_1,\dots,a_n)\big)$

(b) (iii) $(\alpha\beta)\boxdot(a_1,\dots,a_n) = \alpha\boxdot\big(\beta\boxdot(a_1,\dots,a_n)\big)$

3 (a) Sim

(b) Sim

(c) Sim

(d) Não

(e) Sim

4 (a) Comutativa, associativa, tem elemento neutro (o zero), apenas o zero tem oposto (ele próprio)

(b) Comutativa, associativa, tem elemento neutro (o um), apenas o 1 e o -1 têm oposto

(c) Comutativa, associativa, tem elemento neutro (o polinómio $0x^2+0x+0$), todos os elementos têm oposto (para o polinómio ax^2+bx+c o oposto é $-ax^2-bx-c$)

(d) Comutativa, associativa, tem elemento neutro (o um), todos os elementos têm oposto (para cada $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ o oposto é $\frac{1}{a}$)

5 (a) Não

(b) Não

(c) Não

6 (c) d é o elemento neutro

(d) a tem um único oposto (o c)
d tem um único oposto (o d)

(e) b não tem oposto

(f) c tem dois opostos (o a e o c)

10 $\mathcal{P}$ não tem
$\mathcal{I}$ tem (o 1)

Bibliografia

[1] H. Anton e R. C. Busby, *Contemporary Linear Algebra*, Wiley, 2003.

[2] I. Cabral, C. Perdigão e C. Saiago, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, texto de apoio à disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica de diversas licenciaturas em Engenharia, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2006/2007.

[3] I. Cabral, *Álgebra Linear - Exercícios*, texto de apoio às aulas práticas da disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica de diversas licenciaturas em Engenharia, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 1987.

[4] J. V. Carvalho, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, texto de curso ministrado na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Departamento de Matemática da FCT/UNL, 2000.

[5] A. S. Deif, *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*, Abacus Press, 1982.

[6] F. R. Dias Agudo, *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Escolar Editora, 1992.

[7] J. Hefferon, *Linear Algebra*, Mathematics Saint Michael's College, Vermont, USA, 2003.
ftp://joshua.smcvt.edu/pub/hefferon/book/book.pdf

[8] R. Horn e C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[9] D. C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Addison-Wesley, 1994.

[10] S. J. Leon, *Linear Algebra with Applications*, 7th Edition, Prentice Hall, 2006.

[11] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, McGraw-Hill de Portugal, 2001.

[12] H. Schneider e G. P. Barker, *Matrices and Linear Algebra*, Dover Publications, 1989.

[13] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace & Company, 1988.

Notação

$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\subseteq$	contido em
$\subsetneq$	contido mas diferente de
$\not\subseteq$	não contido
$\forall$	qualquer que seja/para todo
$\exists$	existe pelo menos um
$\exists^1$	existe um, e um só
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	equivalente/se e só se
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
i	unidade imaginária
$z = a + bi$	forma algébrica do número complexo z
$A \cap B$	intersecção dos conjuntos A e B
$A \cup B$	união/reunião dos conjuntos A e B
$A \setminus B$	conjunto dos elementos de A que não pertencem a B
$A \times B$	produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B
$\mathbb{K}^n$	conjunto dos n-uplos de elementos de $\mathbb{K}$
$(a_1, \ldots, a_n)$	sequência de n elementos/n-uplo
CAPÍTULO 1	
A, B, C	matrizes
$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$	conjunto das matrizes do tipo $m\times n$, sobre $\mathbb{K}$
I_n	Matriz identidade de ordem n
δ_{ij}	símbolo de Kronecker
$[A_{ij}]$	matriz cuja entrada (i,j) é A_{ij}
a_{ij}	entrada (i,j) da matriz A
A_{ij}	entrada (i,j) da matriz A
α, β, γ	elementos de $\mathbb{K}$

$A+B$	matriz soma de A com B
αA	matriz produto de α por A
AB	matriz produto de A por B
A^k	potência de expoente k de A
A^{-1}	inversa de A
$A^\top$	transposta de A
$\overline{A}$	conjugada de A
A^*	transconjugada de A
E_1, E_2, E_3	matrizes elementares
$A \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} B$	por troca de posição, em A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$, obtém-se B
$A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$	por multiplicação da linha i de A por α, com $\alpha \neq 0$, obtém-se B
$A \xrightarrow[l_i + \beta l_j]{} B$	por substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por β, obtém-se B
$A \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{} B$	por troca de posição, em A, da coluna i com a coluna j, com $i \neq j$, obtém-se B
$A \xrightarrow[\alpha c_i]{} B$	por multiplicação da coluna i de A por α, com $\alpha \neq 0$, obtém-se B
$A \xrightarrow[c_i + \beta c_j]{} B$	por substituição da coluna i de A pela sua soma com a coluna j de A multiplicada por β, obtém-se B
$A \xrightarrow[T]{} B$	efectuando uma única transformação elementar em A, obtém-se B
$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$	A é equivalente, por linhas, a B
$\mathrm{r}(A)$	característica de A
(f.e.)	forma de escada
(f.e.r.)	forma de escada reduzida
A'	uma forma de escada de A
A''	a forma de escada reduzida de A
$\operatorname{tr} A$	traço de A

CAPÍTULO 2

$AX = B$	forma matricial de um sistema de equações lineares
$[A \mid B]$	matriz ampliada do sistema $AX = B$

CAPÍTULO 3

A	matriz quadrada
$A(i\|j)$	matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j
$\det A$	determinante de A
$\|A\|$	determinante de A
$\overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_i}{=}}$	igualdade justificada pela aplicação do Teorema de Laplace à linha i
$\overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_i}{=}}$	igualdade justificada pela aplicação do Teorema de Laplace à coluna i
$\widehat{A}_{ij}$	complemento algébrico da posição (i,j) de A
$\widehat{A}$	matriz dos complementos algébricos de A
$\operatorname{adj} A$	adjunta de A

CAPÍTULO 4

E, E', E''	espaços vectoriais
0_E	vector nulo de E
$0_{\mathbb{K}}$	o zero de $\mathbb{K}$
$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{C}$ espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$
$\mathbb{K}[x]$	conjunto/espaço vectorial dos polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_n[x]$	conjunto/espaço vectorial dos polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$, de grau inferior ou igual a n
F, G, H	subespaços vectoriais
$F \cap G$	intersecção dos subespaços F e G
$F + G$	soma dos subespaços F e G
$F \oplus G$	soma directa dos subespaços F e G
$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$	subespaço gerado por $u_1, \ldots, u_r$
$\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$	bases de espaços vectoriais
$(e_1, \ldots, e_n)$	base de um espaço vectorial
$\dim E$	dimensão do espaço vectorial E
$\mathcal{L}(A)$	espaço das linhas da matriz A
$\mathcal{C}(A)$	espaço das colunas da matriz A
$\mathcal{N}(A)$	espaço nulo da matriz A

CAPÍTULO 5

E, E', E''	espaços vectoriais
f, g, h	aplicações
$f : A \to B$	f é uma aplicação do conjunto A no conjunto B
$0_{E,E'}$	aplicação nula de E em E'
id_E	aplicação identidade de E
$f + g$	aplicação soma de f com g
αf	aplicação produto do escalar α por f
$g \circ f$	aplicação composta de g com f, g após f
f^k	aplicação composta de f por si própria, k vezes
$\mathrm{Im}\, f$	contradomínio/imagem da aplicação f
$\mathrm{Nuc}\, f$	núcleo da aplicação linear f
$f(W)$	imagem, pela aplicação linear f, do subespaço W
$f^{\leftarrow}(W')$	imagem inversa de W', pela aplicação linear f
$\mathrm{r}(f)$	característica da aplicação linear f
$\eta(f)$	nulidade da aplicação linear f
f^{-1}	aplicação inversa de f
$E \simeq E'$	E isomorfo a E'
$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$	matriz da aplicação linear f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

CAPÍTULO 6

A	matriz quadrada
$p_A(x) = \|A - xI_n\|$	polinómio característico de A
$\mathrm{ma}(\alpha)$	multiplicidade algébrica do valor próprio α
$\mathrm{mg}(\alpha)$	multiplicidade geométrica do valor próprio α
E_α	subespaço próprio de um endomorfismo associado ao valor próprio α
M_α	subespaço próprio de uma matriz associado ao valor próprio α

Índice Remissivo

A
adição
    de aplicações, 288
    de matrizes, 6
    em $\mathbb{K}$, 412
    em $\mathbb{K}^2$, 414
    em $\mathbb{K}^n$, 415
adjunta (matriz), 146
algébrico (complemento), 122
alternada (aplicação), 153
ampliada (matriz), 91
anel, 421
    (zero de um), 421
    comutativo, 421
    de polinómios numa variável, 422
aplicação
    (contradomínio de uma), 292
    (imagem de uma), 292
    alternada, 153
    bijectiva, 292
    composta, 290
    determinante, 153
    identidade, 289
    injectiva, 292
    inversa, 313
    invertível, 311
    linear, 281
    multilinear, 153
    produto por um escalar, 289
    sobrejectiva, 292
    soma, 288
aplicação linear, 281
    (característica de uma), 302
    (imagem de um subespaço por uma), 294
    (imagem de uma), 294
    (imagem inversa de um subespaço por uma), 294
    (matriz de uma), 320
    (núcleo de uma), 293
    (nulidade de uma), 302
    endomorfismo, 357
    identidade, 282
    isomorfismo, 315
    nula, 282
    Teorema da Dimensão, 302
aplicações
    (adição de), 288
    (composição de), 290
argumento de um número complexo, 409
associativa (propriedade), 418

B
base
    (matriz de mudança de), 327
    canónica, 224
    de um espaço vectorial, 217
bijectiva (aplicação), 292
binária (operação), 417

C
canónica (base), 224
característica
    (equação), 367
    de coluna de uma matriz, 253
    de linha de uma matriz, 253
    de uma aplicação linear, 302
    de uma matriz, 50, 258
característico (polinómio), 367
co–valor próprio
    de uma matriz, 394

codimensão, 272
coeficientes de uma combinação linear de vectores, 196
coeficientes de uma equação linear, 87
coluna
  (matriz), 3
  de uma matriz, 2
combinação linear de vectores, 196
complemento algébrico, 122
complementos algébricos (matriz dos), 146
complexos (números), 407
composição de aplicações, 290
comutativa
  (operação binária), 418
  (propriedade), 418
comutativo
  (anel), 421
  (grupo), 420
condensação da matriz, 46
conjugada, 31
conjugada de uma matriz, 31
conjugado de um número complexo, 410
contra–identidade
  (matriz), 397
contra–valor próprio de uma matriz, 397
contradomínio
  de uma aplicação, 292
coordenadas de um vector, 223
  (sequência das), 223
corpo, 422
Cramer
  (Regra de), 150
  (sistema de equações lineares de), 105
Critério de Independência Linear, 210

D
dependência linear de vectores, 208
dependente (sequência linearmente), 208
dependentes (vectores linearmente), 208
determinado (sistema de equações lineares), 88
determinante, 118, 153, 156
  (definição, por recorrência, de), 119
  Teorema de Laplace, 123
diagonal
  (matriz), 4
  principal de uma matriz, 4
  secundária de uma matriz, 4
diagonalização, 383, 385
diagonalizante (matriz), 383
diagonalizável
  (endomorfismo), 391
  (matriz), 383
dimensão de um espaço vectorial, 219

E
eixo
  imaginário, 408
  real, 406, 408
elementar
  (matriz), 38
  (transformação), 34
elemento
  (inverso de um), 413, 421
  (oposto de um), 418
  (simétrico de um), 412, 420
  neutro para uma operação binária, 418
elementos
  de uma matriz, 2
  diagonais de uma matriz, 4
  homólogos, 3
endomorfismo, 357
  (polinómio característico de um), 378
  (subespaço próprio de um), 360
  (valor próprio de um), 358

  (vector próprio de um), 358
  diagonalizável, 391
entradas
  de uma matriz, 2
equação característica de uma matriz, 367
equação linear, 87
  (coeficientes de uma), 87
  (segundo membro de uma), 87
  (solução de uma), 87
  (termo independente de uma), 87
equivalência de matrizes, 335
equivalente, por linhas (matriz), 37
escada (matriz em forma de), 44
escada reduzida (matriz em forma de), 52
escalar
  (matriz), 5
  (múltiplo), 209
escalares, 1
espaço
  das colunas de uma matriz, 253
  das linhas de uma matriz, 253
espaço nulo, 259
espaço vectorial, 172
  $\mathbb{K}[x]$, 174
  $\mathbb{K}^n$, 173, 176
  $\mathbb{K}_n[x]$, 174, 176
  $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, 174, 176
  (base de um), 217
  (dimensão de um), 219
  complexo, 173
  das colunas de uma matriz, 253
  das linhas de uma matriz, 253
  real, 173
espaços vectoriais
  (intersecção de), 188
  (soma de), 191
  (união de), 190
  isomorfos, 315, 317
estocástica generalizada (matriz), 398

F
forma algébrica de um número complexo, 407
forma de escada (matriz em), 44
forma de escada reduzida (matriz em), 52
forma de Hermite (matriz em), 53
forma polar de um número complexo, 409
forma trigonométrica de um número complexo, 409
fórmula de De Moivre, 411

G
gerado (subespaço vectorial), 199
geradora (sequência), 199
geradores (vectores), 199
grau de indeterminação de um sistema de equações lineares, 101
grupo, 420
  comutativo, 420
  linear de ordem n sobre $\mathbb{K}$, 72

H
hemi–hermítica (matriz), 33
hemi–ortogonal (matriz), 29
hemi–simétrica (matriz), 30
Hermite (matriz em forma de), 53
hermítica (matriz), 33
homólogos (elementos), 3

I
idempotente (matriz), 70
identidade
  (anel com), 421
  (aplicação), 289
  (matriz), 5
  de um anel, 421
imagem
  de um subespaço por uma aplicação linear, 294
  de uma aplicação linear, 294

inversa de um subespaço por uma aplicação linear, 294
imaginário puro, 407
impossível (sistema de equações lineares), 88
independência linear de vectores, 208
(Critério de), 210
independente (sequência linearmente), 208
independentes (vectores linearmente), 208
indeterminado (sistema de equações lineares), 88
injectiva (aplicação), 292
inteiros (números), 406
intersecção de subespaços, 188
inversa
de uma aplicação invertível, 313
de uma matriz invertível, 21
inversa direita (matriz), 72
inversa esquerda (matriz), 72
inverso de um elemento invertível, 413, 421
invertível
(aplicação), 311
(matriz), 21
involutiva (matriz), 70
isomorfismo de espaços vectoriais, 315
isomorfos (espaços vectoriais), 315, 317

L
Laplace (Teorema de), 123
linear (aplicação), 281
lineares (sistema de equações), 88
linearmente dependente (sequência), 208
linearmente dependentes (vectores), 208
linearmente independente (sequência), 208
linearmente independentes (vectores), 208
linha
(matriz), 3
(pivô de uma), 44
de uma matriz, 2

M
matriz, 1
(característica de coluna de uma), 253
(característica de linha de uma), 253
(característica de uma), 50, 258
(co–valor próprio de uma), 394
(coluna de uma), 2
(condensação da), 46
(conjugada de uma), 31
(contra–valor próprio de uma), 397
(diagonal principal de uma), 4
(diagonal secundária de uma), 4
(elementos de uma), 2
(elementos diagonais de uma), 4
(entradas de uma), 2
(equação característica de uma), 367
(espaço das colunas de uma), 253
(espaço das linhas de uma), 253
(espaço nulo de uma), 259
(linha de uma), 2
(ordem de uma), 3
(polinómio característico de uma), 367
(potência de uma), 19
(raiz quadrada de uma), 69
(subespaço próprio de uma), 362
(traço de uma), 67
(transconjugada de uma), 32
(transposta de uma), 27
(valor próprio de uma), 360, 361
(vector próprio de uma), 360, 361

adjunta, 146
ampliada de um sistema de equações lineares, 91
coluna, 3
contra–identidade, 397
das incógnitas de um sistema de equações lineares, 91
de mudança de base, 327
de permutação, 78
de uma aplicação linear, 320
diagonal, 4
diagonalizante, 383
diagonalizável, 383
dos complementos algébricos, 146
dos termos independentes de um sistema de equações lineares, 91
elementar, 38
em forma de escada, 44
em forma de escada reduzida, 52
em forma de Hermite, 53
equivalente, por linhas, 37
escalar, 5
estocástica generalizada, 398
hemi–hermítica, 33
hemi–ortogonal, 29
hemi–simétrica, 30
hermítica, 33
idempotente, 70
identidade, 5
inversa, 21
inversa direita, 72
inversa esquerda, 72
invertível, 21
involutiva, 70
linha, 3
nilpotente, 164, 364
normal, 77
nula, 9
ortogonal, 29
produto, 12
produto por um escalar, 9
quadrada, 3
simétrica, 30
simples de um sistema de equações lineares, 91
soma, 6
transposta, 27
triangular, 4
triangular inferior, 4
triangular superior, 4
unitária, 77
matrizes
(adição de), 6
(multiplicação de), 11
(produto de Jordan de), 67
comutáveis, 18
equivalentes, 335
iguais, 2
que comutam, 18
semelhantes, 336, 376
módulo de um número complexo, 409
mudança de base (matriz de), 327
multilinear (aplicação ou forma), 153
multiplicação
de matrizes, 11
de um escalar por uma aplicação, 288
de um escalar por uma matriz, 9
em $\mathbb{R}$, 413
por escalar em $\mathbb{K}^2$, 414
por um escalar em $\mathbb{K}^n$, 415
múltiplo
de uma linha, 35
escalar, 209

N
naturais (números), 406
neutro (elemento), 418
nilpotente (matriz), 164, 364

normal (matriz), 77
núcleo, 293
nula
(aplicação linear), 282
(matriz), 9
nulidade, 302
número complexo
(argumento de um), 409
(conjugado de um), 410
(forma algébrica de um), 407
(forma polar de um) , 409
(forma trigonométrica de um), 409
(módulo de um), 409
(representação geométrica de um), 408
números
complexos, 407
inteiros, 406
naturais, 406
racionais, 406
reais, 406

O
operação binária, 417
associativa, 418
com elemento neutro, 418
comutativa, 418
distributiva em relação a outra operação binária, 421
oposto
para a adição, 412, 420
para uma operação binária, 413, 421
oposto de um elemento, em relação a uma operação binária com elemento neutro, 418
ordem de uma matriz, 3
ortogonal (matriz), 29

P
paridade de uma permutação, 155
permutação, 154
(inversão numa), 154
(matriz de), 78
(paridade de uma), 155
ímpar, 155
par, 155
pivô de uma linha, 44
polinómio característico
de um endomorfismo, 378
de uma matriz, 367
possível (sistema de equações lineares), 88
potência de uma matriz, 19
produto
(matriz), 12
por um escalar (aplicação), 289
por um escalar (matriz), 9
produto cartesiano de conjuntos, 416
produto de Hadamard, 11
produto de Jordan, 67
projecção, 193
propriedade
associativa, 418
comutativa, 418
de existência de elemento neutro, 418
de existência de oposto, 418
distributiva, 421

Q
quadrada (matriz), 3

R
racionais (números), 406
raiz quadrada de uma matriz, 69
reais (números), 406
Regra de Cramer, 150
representação geométrica de um número complexo, 408
rotação de ângulo α em torno da origem, 350, 395, 410

S
segundo membro de uma equação linear, 87
semelhança de matrizes, 336
semelhantes
(matrizes), 336
sequência
linearmente dependente, 208
linearmente independente, 208
sequência das coordenadas de um vector, 223
sequência dos coeficientes de uma combinação linear de vectores, 196
sequência geradora
de um espaço vectorial, 199
linearmente independente, 217
sequência vazia, 416
simétrica (matriz), 30
simétrico de um elemento, 412, 420
sistema de equações lineares, 88
(discussão de um), 90
(forma matricial de um), 90
(grau de indeterminação de um), 101
(incógnitas básicas de um), 101
(incógnitas livres de um), 101
(matriz ampliada de um), 91
(matriz das incógnitas de um), 91
(matriz dos termos independentes de um), 91
(matriz simples de um), 91
(resolução de um), 90
(solução de um), 88
(solução nula), 89
de Cramer, 105, 150
determinado, 88
homogéneo, 88
impossível, 88
indeterminado, 88, 101
possível, 88
sistemas de equações lineares
equivalentes, 93
sobrejectiva (aplicação), 292
solução
de um sistema de equações lineares, 88
de uma equação linear, 87
soma
(aplicação), 288
(matriz), 6
de subespaços, 191
directa de subespaços vectoriais, 193
soma directa de subespaços vectoriais, 193
subespaço gerado por uma sequência de vectores, 199
subespaço próprio
de um endomorfismo, 360
de uma matriz, 362
subespaço vectorial, 182
(base de um), 217
(dimensão de um), 219
(geradores de um), 199
gerado, 199
suplementar, 193
subespaços vectoriais
(intersecção de), 188
(soma de), 191, 193
(soma directa de), 193
(união de), 190
triviais, 187

T
Teorema da Dimensão, 302
Teorema da Extensão Linear, 307
Teorema das Dimensões, 235
Teorema de Laplace, 123
Teorema do Completamento, 229
termo independente de uma equação

linear, 87
traço de uma matriz, 67
transconjugada, 32
transconjugada de uma matriz, 32
transformação elementar, 34
transposta de uma matriz, 27
triangular (matriz), 4
triangular inferior (matriz), 4
triangular superior (matriz), 4

U
união de subespaços vectoriais, 190
unitária (matriz), 77

V
valor próprio
(multiplicidade algébrica de um), 370
(multiplicidade geométrica de um), 362
de um endomorfismo, 358
de uma matriz, 360, 361
vector
(coordenadas de um), 223
(sequência das coordenadas de um), 223
vector próprio
de um endomorfismo, 358
de uma matriz, 360, 361
vectores, 173
(Critério de Independência Linear de), 210
(coeficientes de uma combinação linear de), 196
(combinação linear de), 196
(sequência dos coeficientes de uma combinação linear de), 196
geradores de um espaço vectorial, 199
linearmente dependentes, 208
linearmente independentes, 208
vectorial
espaço, 172
subespaço, 182