

Demostración de la Fórmula del Modelo de Miller y Orr

Introducción al Modelo de Miller y Orr

El **Modelo de Miller y Orr** es utilizado para optimizar el manejo de efectivo en empresas con flujos de tesorería irregulares. El objetivo es determinar cuándo realizar transacciones para comprar o vender valores negociables para mantener un nivel de efectivo óptimo.

El modelo se basa en tres aspectos fundamentales:

1. **La variabilidad de los flujos de efectivo**, medida a través de la varianza.
2. **Los costos de transacción**, asociados a comprar o vender valores negociables.
3. **El costo de oportunidad**, que es el interés que podría haberse ganado invirtiendo en valores.

La Fórmula de Z

La fórmula general para calcular el saldo óptimo (Z) es:

$$Z = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot b \cdot \sigma^2}{4 \cdot i}}$$

Donde: - b es el costo de transacción. - σ^2 es la varianza de los flujos diarios de efectivo. - i es la tasa diaria de interés sobre valores negociables.

Derivación de la Fórmula

Paso 1: Componentes del Modelo

La fórmula de Z proviene de minimizar los costos totales que incluyen:

- **Costos de transacción:** cada vez que la empresa compra o vende valores, incurre en un costo de transacción b .
- **Costos de oportunidad:** es el costo de mantener efectivo sin invertir, medido a través de la tasa de interés diaria i .

Paso 2: Costos Totales

Los **costos totales esperados** a minimizar son la suma de los **costos de transacción** y los **costos de oportunidad**. Estos se expresan como:

- **Costos de transacción esperados:** Dependen de la cantidad de transacciones realizadas, aproximadamente

$$\frac{\sigma^2}{Z} \cdot b$$

- **Costos de oportunidad esperados:** Proporcionales al saldo medio de efectivo mantenido, que es aproximadamente:

$$\frac{Z}{2} \cdot i$$

Paso 3: Minimización de los Costos

El saldo óptimo Z se obtiene al minimizar la suma de ambos costos. Esto se logra tomando la derivada de los costos totales respecto a Z y resolviendo para Z . El resultado de esta minimización da como resultado la fórmula cúbica para el saldo óptimo:

$$Z = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot b \cdot \sigma^2}{4 \cdot i}}$$

Ejemplo Numérico

Si los costos de transacción son \$100, la varianza de los flujos diarios es \$500,000 y la tasa de interés diaria es 0.05%, el saldo óptimo se calcula como:

$$Z = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 100 \cdot 500,000}{4 \cdot 0.0005}} = \sqrt[3]{\frac{150,000,000}{0.002}} = \sqrt[3]{75,000,000,000} \approx 4,241$$

Por lo tanto, el saldo óptimo de efectivo que debe mantener la empresa es aproximadamente \$4,241.

Conclusión

El **Modelo de Miller y Orr** permite a las empresas gestionar sus saldos de efectivo de manera eficiente al considerar los costos de transacción y los costos de oportunidad, obteniendo así un saldo óptimo Z que minimiza los costos totales.

Este modelo es particularmente útil para empresas con flujos de caja irregulares y ayuda a optimizar las decisiones de inversión en valores negociables.