

Ley de Faraday aplicada a una región que no es simplemente conexa

Carlos A. Ríos Chávez

Laboratorio 3 del Departamento de Física de la Universidad de Buenos Aires

26 de junio, 2018

Resumen

En este informe se analiza el siguiente sistema: Un solenoide que induce una corriente a un circuito compuesto por dos resistencias. Mediante la ley de Faraday se estimarán los valores de las caídas de tensión en las resistencias, exponiendo algunas propiedades de los campos vectoriales y del electromagnetismo en general.

1. Introducción

El objetivo principal de este informe es analizar un circuito aparentemente sencillo que consiste en dos resistencias conectadas directamente una a la otra (figura 1). Dicho circuito encierra un solenoide que genera un campo magnético, este campo induce una f.e.m. en el circuito y por lo tanto hay una corriente. Como se verá luego, al medir la caída de tensión en las resistencias los resultados son contraintuitivos, sin embargo es posible encarar el problema utilizando principalmente la ley de Faraday.

Aunque este experimento está enfocado en analizar una de las supuestas paradojas de la ley de Faraday, también nos será útil para comprender mejor algunos conceptos físicos, entonces también nos planteamos los siguientes objetivos secundarios:
1) Mostrar de forma experimental e intuitiva que al hablar de electricidad y magnetismo nos referimos en realidad a un mismo fenómeno físico. 2) Mostrar que la f.e.m. inducida no está localizada. 3) Mostrar la importancia de las superficies multiplemente conexas

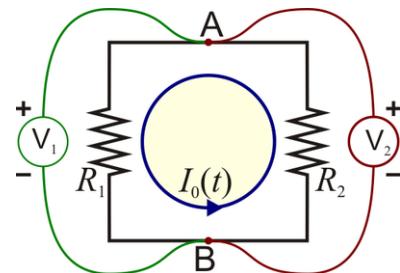


Figura 1: Solenoide rodeado por un circuito de dos resistencias de las cuales se quiere medir la diferencia de tensión.

en los campos vectoriales, en este caso en los campos electromagnéticos.

1.1. Ley de Faraday y Ley de Lenz

La Ley de Faraday describe, mediante la ecuación 1, la inducción magnética sobre un circuito. En pocas palabras esta ecuación quiere decir que el

voltaje que induce un campo magnético sobre un circuito cerrado está directamente relacionado con la variación temporal del flujo magnético que atraviesa alguna superficie que tiene al circuito como borde.

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

También nos es útil mencionar la ley de Lenz que nos dice que la polaridad de la tensión inducida es tal que la corriente producida por esa tensión, tiene un campo magnético que es opuesto al campo magnético inductor, ésta es una consecuencia de la conservación de la energía y es el motivo del signo negativo en la Ley de Faraday. La tensión inducida también conocida como fuerza electromotriz (f.e.m.) no solo genera una corriente en un circuito cerrado, sino que también puede generar una diferencia de potencial en dos puntos un circuito abierto.

1.2. Corriente que pasa por el circuito

Para aplicar la Ley de Faraday al sistema del solenoide y el circuito desarrollaremos por separado cada lado de la ecuación 1. Comenzando por el lado izquierdo tenemos que la f.e.m. es igual a la circulación magnética, por tanto:

$$\epsilon = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} \quad (2)$$

Esta integral cerrada se puede descomponer en dos tramos, uno que va del punto A al B pasando por la resistencia R_1 y otro que va de B al punto A por R_2 . En ambos casos las integrales serán proporcionales a la corriente que pasa por el circuito.

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{r} + \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{r} = IR_1 + IR_2 \quad (3)$$

Por lo tanto tenemos que la corriente que pasa por el circuito es:

$$I = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2} \quad (4)$$

Ahora, para encontrar otra expresión de la f.e.m. desarrollaremos el lado derecho de la ecuación 1. Primero, por la definición de flujo magnético tenemos que

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S} \quad (5)$$

Considerando

$$\bar{B} = \mu_0 n I_S \hat{k} \quad (6)$$

Donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética, n es el numero de espiras del solenoide e I_S es la corriente que pasa por el solenoide. Cabe considerar que precisamos el campo magnético en toda la región que encierra el circuito, sin embargo este campo es nulo fuera del solenoide, al menos idealmente. Es por eso que al integrar la ecuación 5 consideramos a S solamente como la sección del solenoide. Es importante notar que aunque el campo magnético fuera del solenoide es nulo, la variación de flujo de campo magnético no lo es y es por eso que existe una f.e.m. inducida, entonces

$$\Phi = \mu_0 n I_S S \quad (7)$$

Derivando

$$\epsilon = \mu_0 n S \frac{dI_S}{dt} \quad (8)$$

Reemplazando esta ultima ultima expresión de la f.e.m. en la ecuación 4 obtenemos lo que buscábamos, una expresión para la corriente que circula por el circuito.

$$I = \frac{\mu_0 n S}{R_1 + R_2} \frac{dI_S}{dt} \quad (9)$$

1.3. Los Voltajes

Es conveniente renombrar la polaridad de los cables de los voltímetros, puesto que en este punto el concepto de voltaje puede tornarse ambiguo, por lo tanto los llamaremos cable rojo y cable negro en lugar de positivo y negativo. Ahora nos enfocaremos en obtener expresiones para las tensiones que miden los voltímetros, un razonamiento rápido e incorrecto puede ser pensar que los cables negros

de los voltímetros están conectados a un mismo punto, de igual forma que los cables rojos y entonces la diferencia de potencial medida tiene que ser la misma. Este tentador razonamiento se basa en una idea que si es valida, que es considerar que el voltímetro (o osciloscopio) es un instrumento óhmico, es decir que se basa en la ley de Ohm para sus mediciones, estos dispositivos poseen una resistencia generalmente alta por la cual pasa una corriente y luego el voltímetro da una medida proporcional a esa corriente. Entonces el razonamiento que si es valido es considerar que lo que mide un voltímetro es la integral de linea del campo eléctrico, con todas las propiedades de campos vectoriales que conlleva ésta integral. Afirmar que ambos voltímetros medirán lo mismo sería correcto si el campo eléctrico fuera conservativo, algo que justamente en este caso no lo es debido a que la superficie que encierra el circuito (el de las dos resistencias) no es simplemente conexa pues en el centro está el solenoide que es una fuente.

Entonces para conocer V_1 consideremos aquellas curvas que si son cerradas y simplemente conexas, como la que se resalta en la figura 2, que comienza en el lado positivo del voltímetro, se dirige hacia el punto A, luego va al punto B pasando por R_1 , y vuelve al voltímetro. (En realidad escogemos esta curva por la simplicidad que nos ofrece su topología, pero como también podríamos haber considerado otras curvas que incluyan al solenoide y por lo tanto no sean simplemente conexas, obteniendo el mismo resultado.)

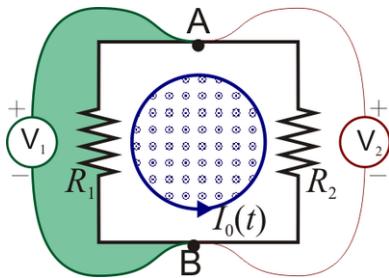


Figura 2: Curva utilizada para medir V_1

Aplicando la Ley de Faraday (ecuación 1) en esta curva obtenemos por un lado que:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (10)$$

pues evidentemente esta curva, a diferencia de la del circuito, no encierra ningún solenoide, ni hay una variación del flujo magnético. Por otro lado, podemos separar la integral cerrada del campo eléctrico en dos trayectos, uno que va del punto A al punto B pasando por V_1 y otro que va de B a A pero pasando por R_1 :

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{r} + \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{r} \quad (11)$$

donde

$$\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{r} = \Delta V_1 \quad (12)$$

$$\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{r} = -IR_1 \quad (13)$$

Por tanto (introduciendo 10 y 11 en 1)

$$\Delta V_1 = IR_1 \quad (14)$$

Mediante un calculo similar podemos hallar una expresión para la lectura del segundo voltímetro V_2 , considerando que sepáramos la integral cerrada en la curva que va de A a B pasando por R_2 y luego de B a A pasando por V_2 (ver figura 3). En este primer trayecto estamos recorriendo la curva en sentido contrario del sentido de la corriente dado por la Ley de Lenz, por eso el signo negativo en la corriente.

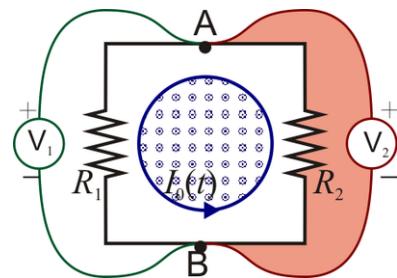


Figura 3: Curva utilizada para medir V_2

$$0 = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{r} + \int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{r} = -IR_1 - \Delta V_2 \quad (15)$$

En resumen, mediante las multiples aplicaciones de la ley de Faraday llegamos a que las lecturas de los voltímetros son:

$$V_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu_0 n S \frac{dI_S}{dt} \quad (16)$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mu_0 n S \frac{dI_S}{dt} \quad (17)$$

Y reemplazando la ecuación 15 en la ecuación 14, la relación entre los voltajes es:

$$V_1 = -\frac{R_1}{R_2} V_2 \quad (18)$$

este resultado nos muestra que aunque $R_1 = R_2$ los voltajes siempre serán distintos al menos por un signo, lo cual como se explico anteriormente, puede ser contraintuitivo.

2. Diseño Experimental

Este experimento se realizó en tres días de los cuales de forma resumida se puede decir que el primer día fue dedicado a la exploración del instrumental y a la planificación, se observó que el fenómeno era muy difícil de distinguir en el osciloscopio(Tektronix TBS 1052B-EDU) principalmente porque el solenoide utilizado era de menores dimensiones comparado con otros solenoides utilizados en distintas experiencias sobre el mismo experimento, por ejemplo el descrito en al artículo de Robert H. Romer, "What do voltmeters measure? Faraday's law in a multiply connected region"(artículo, que por cierto, nos sirvió de base para este informe). Por lo tanto para aumentar la intensidad del campo magnético se utilizo un solenoide con espiras más gruesas, con $6,19\text{mm}$ de diámetro y que permitía el paso de una mayor corriente ($I_{max} = 4A$), sin embargo también se tuvo que introducir un variac y un transformador de $220V$ a $15V$ (de la casa del transformador). Entonces se conectó el variac a la toma de corriente alterna que tiene una frecuencia de $50Hz$ (frecuencia de las tomas de corriente en Argentina), se fijó el variac en $180V$ y se lo conectó al transformador obteniéndose una salida de

$13,0V$, pero que al conectar el solenoide la salida del transformador era de $7,80V$, aunque al principio no lo notamos, es lógico que esta tensión disminuya al conectar el solenoide pues éste se calienta y además genera un campo magnetico. Las dimensiones del solenoide utilizado son: $H = (30,0 \pm 0,1)\text{cm}$ de altura, $D = (8,00 \pm 0,1)\text{cm}$ de diámetro y con $n = 276 \pm 3$, también poseía una resistencia de $r = 1,6\Omega$.

El segundo día fue dedicado al probar el experimento para distintas resistencias de las cuales se seleccionaron $R_1 = (1,48 \pm 0,02)k\Omega$ y $R_4 = (10,0 \pm 0,01)k\Omega$. Se observó que el circuito de las resistencias tenía que estar muy cerca del solenoide, así que se acortaron los cables que conectaban las resistencias, también se notó que era importante que el circuito este lo más centrado al medio del solenoide para lo cual se utilizaron varas, dobles nueces y una superficie de cartón. Luego, se observaron algunas posibles configuraciones del circuito como intercambiar los cables rojo y negro de un canal del osciloscopio, o como dar más vueltas al solenoide con alguno de estos cables. En general, además de utilizar el osciloscopio, se utilizo un multímetro (UNI-T UT 55) para medir voltajes y resistencias.

En el tercer día estaba planificado volver a probar distintas resistencias y configuraciones, pero esta vez con un núcleo de hierro en el interior del solenoide, se observó que este núcleo aumentaba el campo magnético, que la corriente en el circuito era mayor y que se podía observar el fenómeno con mayor claridad en el osciloscopio, sin embargo también le añadió bastante sensibilidad al experimento, produciendo grandes variaciones en los datos cuando este núcleo tenia ligeros movimientos. Por ese motivo y además porque también se producían fenómenos de autoinducción no despreciables, se determinó no utilizar el núcleo de hierro. Luego se midió el campo magnético tanto fuera como dentro del solenoide, utilizando una Sonda Hall conectada a la interfaz de recolección de datos Vernier SensorDAQ (aunque esas mediciones no están incluidas en este informe).

3. Resultados

El primer resultado que se observó fue la evidente influencia del campo magnético en el circuito, es decir que aunque el circuito no esté conectado a ninguna fuente, corría una corriente a través de éste cuando se encendía el solenoide. Aunque este resultado es básico, también es fundamental pues muestra que hay una clara relación entre la electricidad y el magnetismo, además de ser un buen ejemplo de la no localización de la f.e.m. inducida.

Para medir las tensiones V_1 y V_2 en el caso $R_1 = R_2 = (1,48 \pm 0,02)k\Omega$ podemos reescribir las ecuaciones 16, 17 y 18 como:

$$V_1 = -\frac{1}{2}\mu_0 n S \frac{dI_S}{dt} \quad (19)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\mu_0 n S \frac{dI_S}{dt} \quad (20)$$

$$V_1 = -V_2 \quad (21)$$

Por un lado vamos a obtener la sección del solenoide con $S = \pi \frac{D^2}{4}$ y hacer un ajuste para obtener una expresión experimental para la corriente que pasa por el solenoide, considerando que vamos a medir el voltaje en la resistencia del solenoide y luego aplicaremos la ley de Ohm para obtener los datos del ajuste, así luego reemplazar los datos en las anteriores ecuaciones. Por otro lado, vamos a medir directamente las tensiones con el osciloscopio tal como esta en la figura 1, para posteriormente realizar un ajuste y comparar ambos resultados.

Se obtuvo que la sección de solenoide es $S = 5,03 \cdot 10^{-3}$. La figura 4 muestra el ajuste obtenido para la corriente, la ecuación utilizada para dicho ajuste es de la forma $y = y_0 + A \sin(wx + c)$, con una amplitud de $I_S = (0,500 \pm 0,001)A$, una frecuencia de $w = (314 \pm 0,04) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, una fase de $c = 0,340 \pm 0,003$ y no se mencionará y_0 pues siempre es muy pequeño y no tiene especial relevancia. Sobre la frecuencia obtenida se puede decir que es justamente la que se esperaba observar pues $w = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ con $f = 50\text{Hz}$. La

bondad del ajuste fue $R - Square = 0,99934$, que consideramos un valor bueno para nuestros fines, sin embargo la figura 5 muestra los residuos del ajuste y debido a que los residuos no están distribuidos de forma aleatoria entonces hay algún fenómeno que no estamos considerando en nuestro modelo del ajuste.

Mediante esta forma indirecta de medir los voltajes se obtuvo: $V_1 = (-1,36 \pm 0,02)10^{-4}V$ y $V_2 = (-1,36 \pm 0,02)10^{-4}V$ (Observación: estas son solo las amplitudes de las tensiones, pues éstas, en realidad, dependen del tiempo de forma sinusoidal, en este caso como $V(t)_i = V_i \cos(340t + 0,340)$. En este informe al hablar de las tensiones me refiero a estas amplitudes).

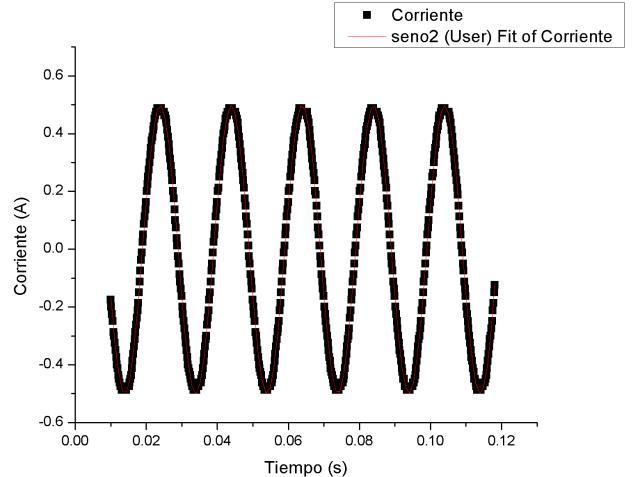


Figura 4: Datos obtenidos para la corriente que pasa por el solenoide

Para hacer el ajuste de las mediciones directas se utilizó una ecuación de la forma $y = y_0 + A \cos(wx + c)$. Las figuras 6 y 7 muestran los datos recolectados y la curva del ajuste de los cuales se obtuvo: $V_1 = (-4,72 \pm 0,06)10^{-3}V$ y $V_2 = (1,68 \pm 0,07)10^{-3}V$ y la bondad del ajuste es 0,916 y 0,53, respectivamente. Las frecuencias en ambos (y en los siguientes) casos no es particularmente distinta al valor esperado $314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

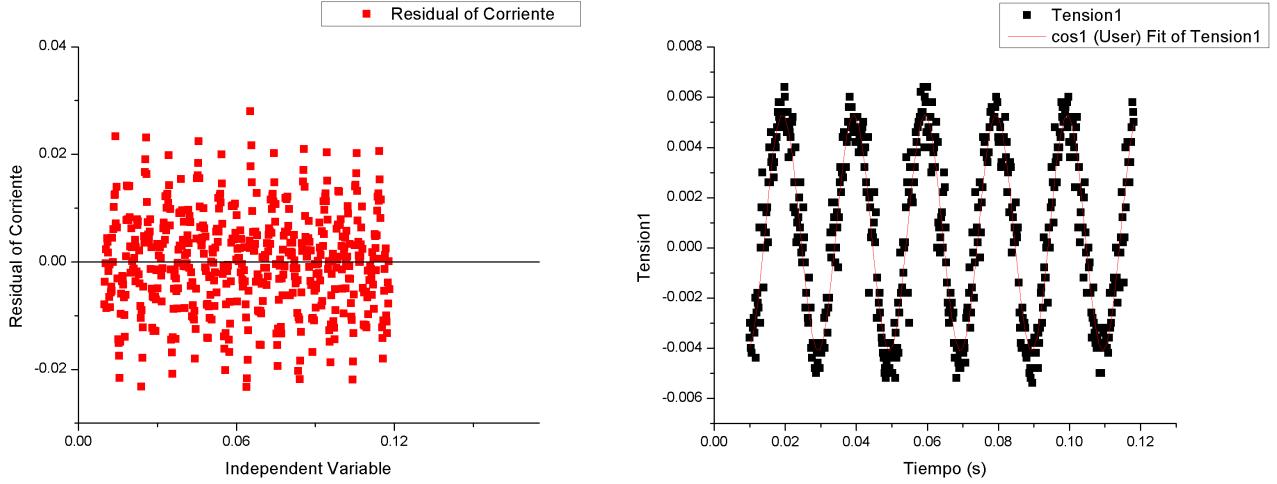


Figura 5: Gráfico de los residuos para la corriente que pasa por el solenoide

En la figura 8 se puede comparar y notar que las tensiones no son iguales de amplitud aunque si están en contrafase.

Se realizó el mismo procedimiento descrito anteriormente, pero esta vez utilizando $R_1 = (1,48 \pm 0,02)k\Omega$ y $R_2 = (10,0 \pm 0,01)k\Omega$. Mediante el método indirecto se obtuvo: $V_1 = (-3,54 \pm 0,03)10^{-5}V$ y $V_2 = (-2,36 \pm 0,06)10^{-4}V$. Las figuras 9 y 10 muestran los datos recolectados y el ajuste para las tensiones medidas de forma directa, los resultados son: $V_1 = (-1,67 \pm 0,09)10^{-3}V$ y $V_2 = (-4,00 \pm 1,37)10^{-3}V$. Las bondades de los ajustes son: 0,40 y 0,32 respectivamente. En la figura 11 se puede comparar las tensiones obtenidas, y aunque los resultados mediante los distintos métodos no coinciden ni las bondades de los ajustes son buenos, se puede observar que las tensiones están en contrafase y además conservan la proporción $V_1 < V_2$ (aunque no de manera exacta).

También se ensayaron varias configuraciones con los cables rojos y negros del osciloscopio y ambas resistencias del mismo valor $R_1 = R_2 = (1,48 \pm 0,02)k\Omega$, de estas configuraciones a continuación presentaremos dos: a) El cable rojo del primer canal del osciloscopio se conecta al mismo punto pero esta vez

Figura 6: Datos obtenidos por el canal 1 utilizando las resistencias R_1 y R_2

rodeando R_2 como se muestra en la figura 12, en este caso se espera que $V_1 = V_2$. b) El cable rojo del canal 2 del osciloscopio da dos vueltas al rededor del solenoide antes de ser conectado al mismo punto donde estaba antes.

En la figura 15 se puede observar que ahora las tensiones están en fase y mediante un ajuste (figuras 13 y 14) se obtuvo que: $V_1 = (6,92 \pm 0,04)10^{-3}V$ y $V_2 = (2,85 \pm 0,04)10^{-3}V$.

Para la configuración b) se obtuvieron los siguientes resultados: $V_1 = (3,80 \pm 0,09)10^{-3}V$ y $V_2 = (2,50 \pm 0,01)10^{-2}V$. Se puede observar un notable crecimiento en V_2 debido a que las dos vueltas que da el cable rojo produce un mayor contacto con el flujo magnético que produce el solenoide, y este flujo al variar produce una mayor f.e.m. para el canal 2.

4. Conclusión y Discusión

En este informe se pretendía tener más resultados experimentales en comparación al didáctico artículo de Romer, sin embargo las bondades y los residuos de los ajustes muestran que los datos obtenidos

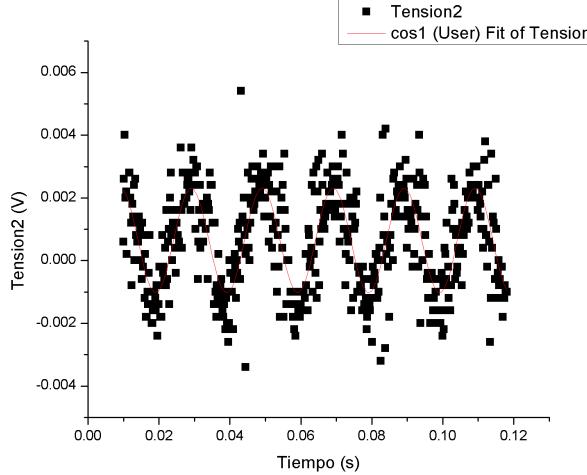


Figura 7: Datos obtenidos por el canal 2 utilizando las resistencias R_1 y R_1

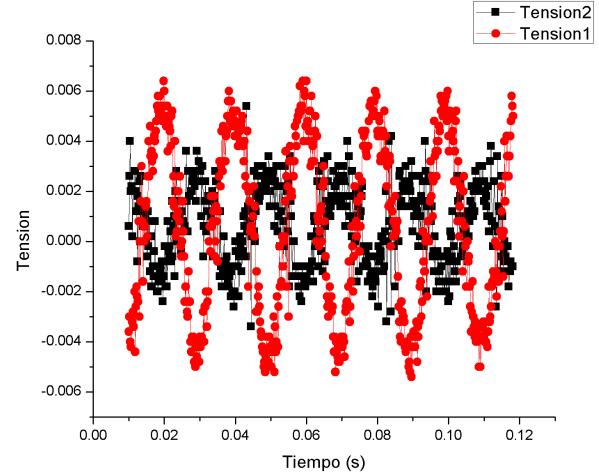


Figura 8: Gráfica comparativa entre los canales del osciloscopio, utilizando como resistencias R_1 y R_1

son de baja calidad. Aun así, rescatamos que se pudo observar los fenómenos deseados aunque con mala resolución. Por ejemplo se observo que aunque los cables rojos y negros de los canales del osciloscopio estén en un mismo punto", las tensiones están en contrafase. También se verificó que si $R_1 < R_2$ entonces $V_1 < V_2$. Aun así en ninguno de los casos los métodos indirecto y directo coincidieron.

Sugerimos medir el campo magnético del solenoide para poder contrastar método indirecto, es decir, para calcular la corriente que pasa por el solenoide por otro método. También sugerimos utilizar un solenoide más largo pues de esta manera la suposición de que el solenoide es muy grande tendrá más valor. Finalmente, se recomienda prestar atención a los circuitos que se miden con los voltímetros, porque en conclusión los voltímetros miden la integral cerrada de linea del campo eléctrico, con todas las propiedades vectoriales que este campo tiene.

5. Bibliografía

- Manual de Usuario Multímetro UNI-T UT 55
- Manual Tektronix TBS 1052B-EDU
- Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas, Paul Meyer
- El xyz de los Osciloscopios, Tektronix.
- Introduction to Electrodynamics, D. Griffiths, R. College .
- What do "voltmeters" measure?: Faraday's law in a multiply connected region, Robert H. Romer.

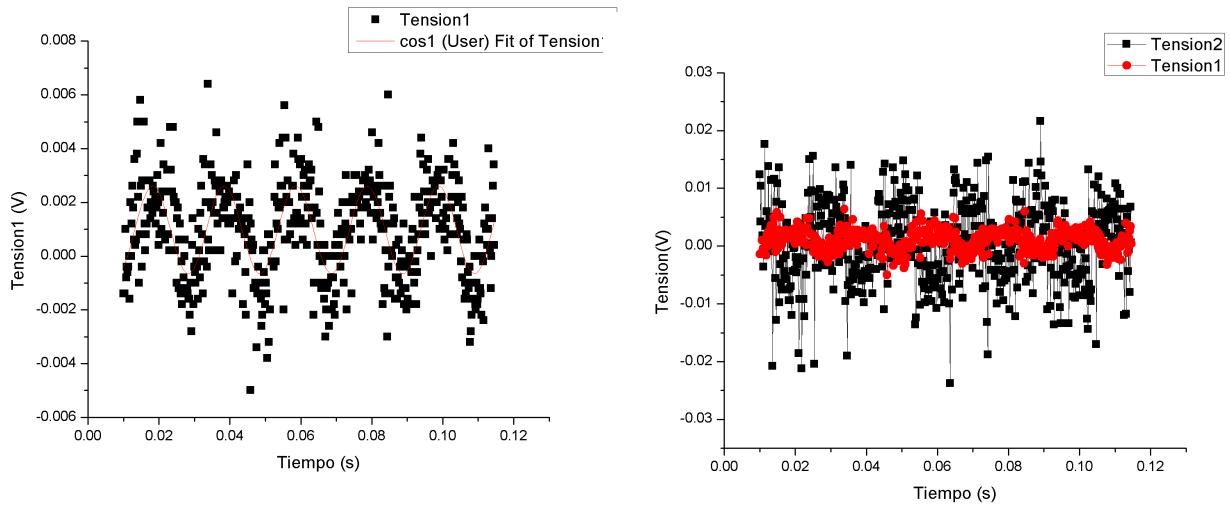


Figura 9: Datos obtenidos por el canal 1 utilizando las resistencias R_1 y R_2

Figura 11: Gráfica comparativa entre los canales del osciloscopio, utilizando como resistencias R_1 y R_2

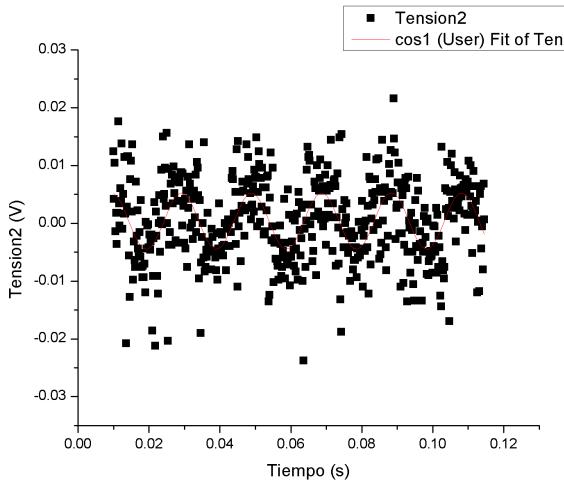


Figura 10: Datos obtenidos por el canal 2 utilizando las resistencias R_1 y R_2

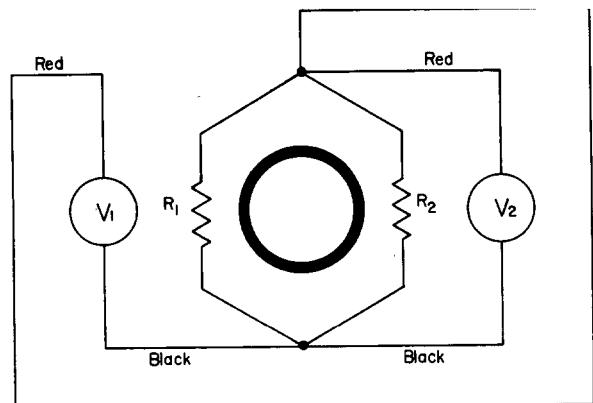


Figura 12: Esquema de la configuración a

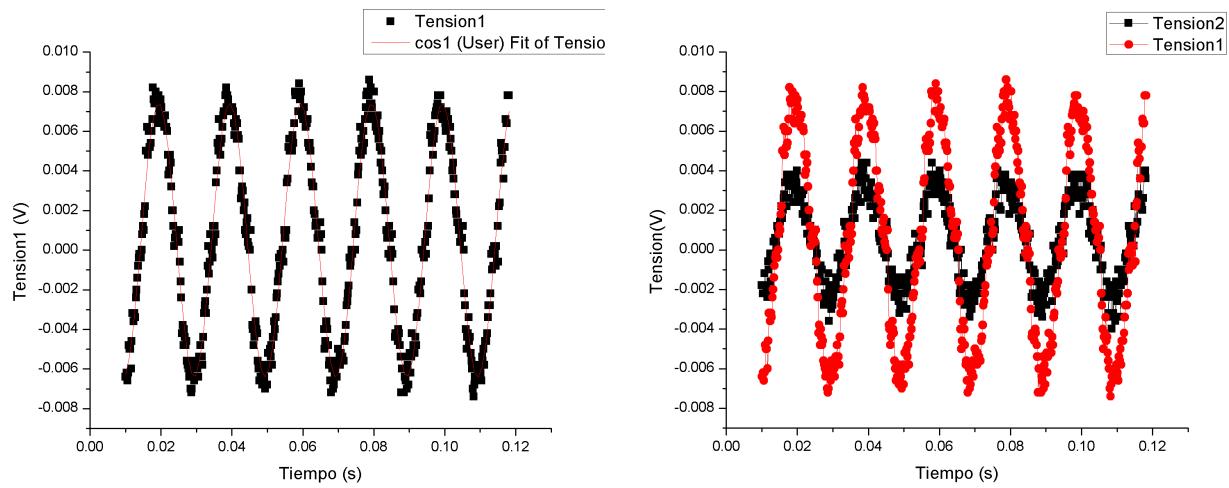


Figura 13: Datos obtenidos por el canal 1 para la configuración a

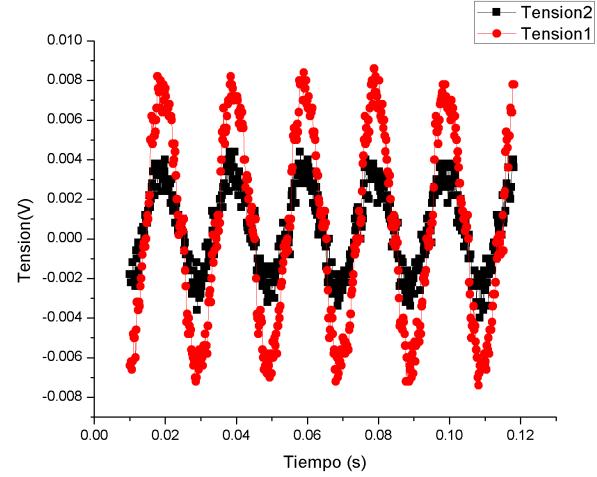


Figura 15: Gráfica comparativa entre los canales del osciloscopio para la configuración a

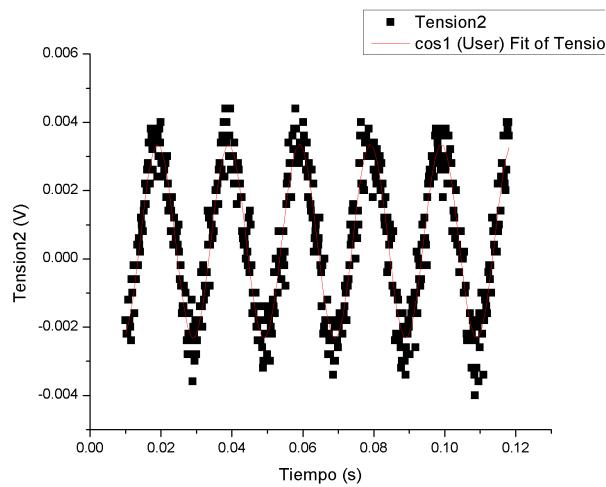


Figura 14: Datos obtenidos por el canal 2 para la configuración a

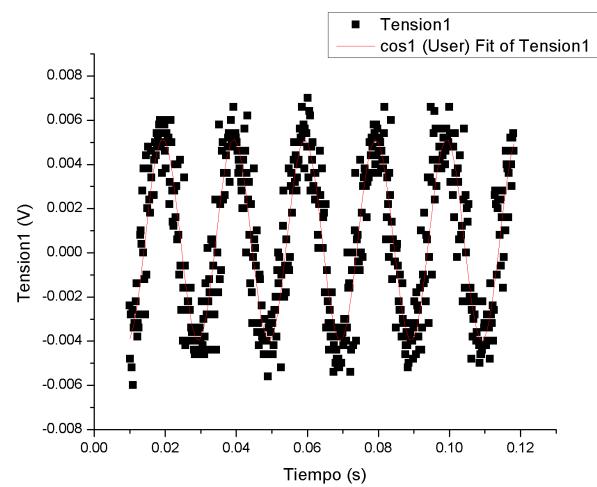


Figura 16: Datos obtenidos por el canal 1 para la configuración b

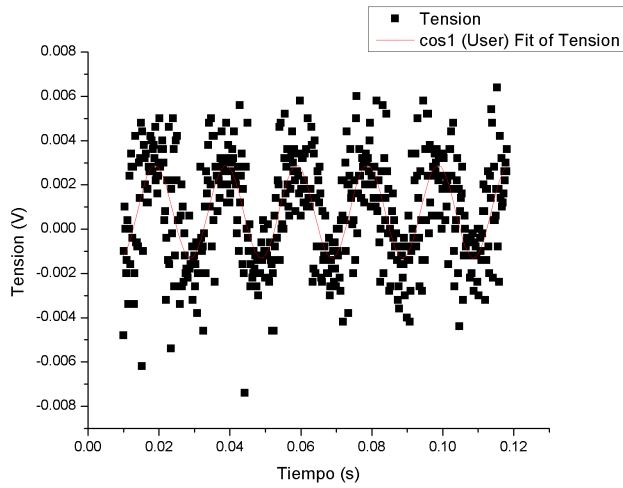


Figura 17: Datos obtenidos por el canal 2 para la configuración b

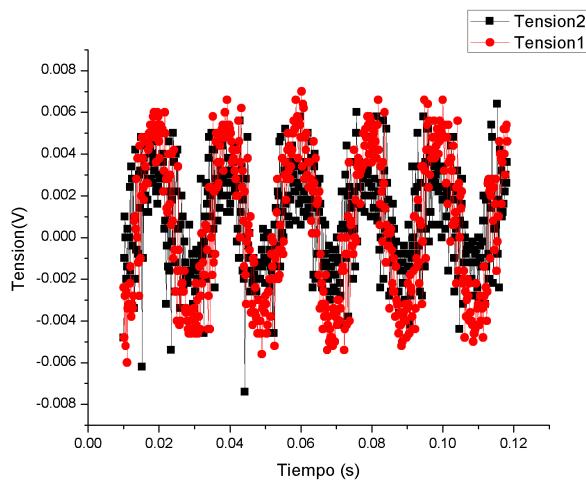


Figura 18: Gráfica comparativa entre los canales del osciloscopio para la configuración b