Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

APRENDIZAJE AUTOMÁTICO
(E. Computación y Sistemas Inteligentes)

TRABAJO-2: Programación

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Carlos Santiago Sánchez Muñoz

Grupo de prácticas 3 - Lunes

Email: carlossamu7@correo.ugr.es

23 de abril de 2020

Índice

1. Ejercicio sobre la complejidad de $\mathcal{H}$ y el ruido

En este ejercicio debemos aprender la dificultad que introduce la aparición de ruido en las etiquetas a la hora de elegir la clase de funciones más adecuada. Haremos uso de tres funciones ya programadas:

- **`simula_unif (N, dim, rango)`, que calcula una lista de `N` vectores de dimensión `dim`. Cada vector contiene `dim` números aleatorios uniformes en el intervalo `rango`.**
- **`simula_gaus(N, dim, sigma)`, que calcula una lista de longitud `N` de vectores de dimensión `dim`, donde cada posición del vector contiene un número aleatorio extraído de una distribución Gaussiana de media 0 y varianza dada, para cada dimensión, por la posición del vector `sigma`.**
- **`simula_recta(intervalo)`, que simula de forma aleatoria los parámetros, $v = (a, b)$ de una recta, $y = ax + b$, que corta al cuadrado $[-50, 50] \times [-50, 50]$.**

Apartado 1

Dibujar una gráfica con la nube de puntos de salida correspondiente.

a) Considere `N = 50`, `dim = 2`, `rango = [-50, 50]` con `simula_unif (N, dim, rango)`.

En este ejercicio sólo tenemos que llamar a la función `simula_unif` con los parámetros del enunciado. Después pintaremos los puntos obtenidos usando `pyplot.scatter`.

```
print("a) simula_unif(N, dim, rango) con N=50, dim=2 y rango=[-50,50].")
x_unif = simula_unif(50, 2, [-50, 50])
plt.scatter(x_unif[:, 0], x_unif[:, 1])
plt.title("Nube de puntos con simula_unif")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 1 - Apartado 1a)')
plt.show()
```

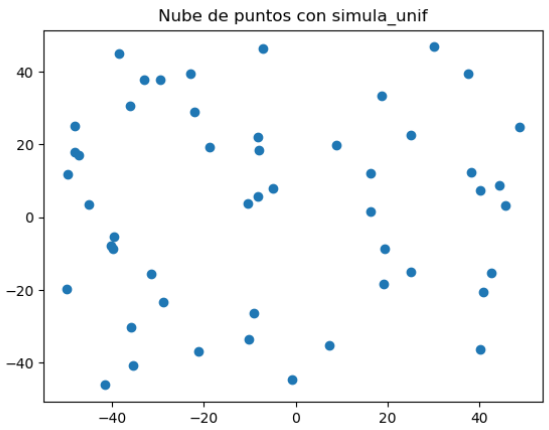


Figura 1: Nube de puntos con `simula_unif`

La Figura 1 es el resultado de la implementación en donde encontramos `50` puntos distribuidos uniformemente en el intervalo `[-50, 50]`.

b) Considere `N = 50`, `dim = 2` y `sigma = [5, 7]` con `simula_gaus(N, dim, sigma)`.

Este apartado es idéntico al anterior, llamaremos a la función `simula_gauss` con los parámetros indicados. Posteriormente pintamos los puntos.

```
print("\nb) simula_gaus(N, dim, sigma) con N=50, dim=2 y sigma=[5,7].")
x_gaus = simula_gaus(50, 2, np.array([5, 7]))
plt.scatter(x_gaus[:, 0], x_gaus[:, 1])
plt.title("Nube de puntos con simula_gaus")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 1 - Apartado 1b)')
plt.show()
```

El resultado de la implementación debe ser una gráfica donde están representados `50` puntos $2D$ en la que cada punto ha sido extraído de una distribución gaussiana de media μ`=(0,0)` y varianza (σ_x^2,σ_y^2)`=(5,7)`. Resultado:

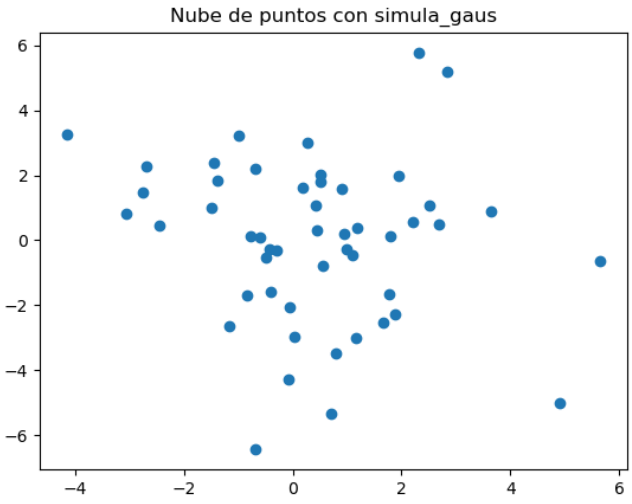


Figura 2: Nube de puntos con `simula_gaus`

Efectivamente como resultado de la distribución Gaussiana los puntos están agrupados entorno a la media.

Apartado 2

Con ayuda de la función `simula_unif(100, 2, [-50, 50])` generar una muestra de puntos $2D$ a los que vamos añadir una etiqueta usando el signo de la función $f(x, y) = y - ax - b$, es decir el signo de la distancia de cada punto a la recta simulada con `simula_recta()`.

Voy a utilizar los parámetros `N=100` puntos $2D$ e intervalo `[-50, 50]` para llamar a `simula_unif` y generar la muestra. Para las etiquetas utilizo la función `simula_recta` con el mismo intervalo como parámetro y me devuelve la pendiente y la ordenada en el origen.

A partir de aquí utilizo una función `signo` implementada por mí con la peculiaridad de que para el valor 0 me devuelve 1 (signo positivo). Del mismo modo implementamos la función $f(x, y) = y - ax - b$. Por último, las etiquetas son el signo de evaluar f con los parámetros adecuados, las primeras y segundas componentes de cada punto de la muestra junto con `a` y `b` (ver abajo). Sólo voy a mostrar en la memoria el código de la llamada:

```
print ("\n###  Apartado 2  ###\n")
N = 100
x = simula_unif(N, 2, [-50, 50])
a, b = simula_recta([-50, 50])
y = np.empty((N, ))
for i in range(N):
    y[i] = signo(f(x[i,0], x[i,1], a, b))
```

a) Dibujar una gráfica donde los puntos muestren el resultado de su etiqueta, junto con la recta usada para ello. (Observe que todos los puntos están bien clasificados respecto de la recta)

Pintamos adecuadamente los puntos con su etiqueta correspondiente $\{1, -1\}$. Usaremos colores distintos para cada etiqueta y del mismo modo añadimos la gráfica de la recta usada para el cálculo de las etiquetas.

```
print("a) Grafica con las etiquetas de los puntos y la recta simulada.")
plt.scatter(x[y == -1][:, 0], x[y == -1][:, 1], label="Etiqueta -1")
plt.scatter(x[y == 1][:, 0], x[y == 1][:, 1], c="orange", label="Etiqueta 1")
points = np.array([np.min(x[:, 0]), np.max(x[:, 0])])
plt.plot(points, a*points+b, c="red", label="Recta simulada")
plt.legend()
plt.title("Clasificando puntos con la recta simulada")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 1 - Apartado 2a)')
plt.show()
```

A continuación tenemos la gráfica resultante. En ella todos los puntos están bien clasificados respecto de la recta en rojo que es la que ha servido para etiquetar todos los puntos.

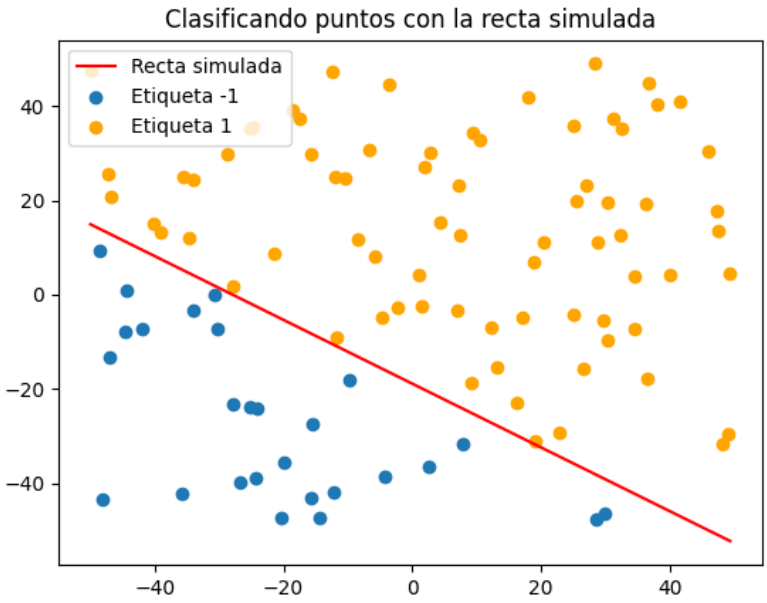


Figura 3: Clasificando puntos con la recta simulada

El resultado es lo esperado y comentado anteriormente. Como es la recta que los clasifica tiene un 100 % de acierto.

b) Modifique de forma aleatoria un 10 % etiquetas positivas y otro 10 % de negativas y guarde los puntos con sus nuevas etiquetas. Dibuje de nuevo la gráfica anterior. (Ahora hay puntos mal clasificados respecto de la recta)

Lo primero que vamos a hacer va a ser añadir ruido a las etiquetas. Más concretamente cambiaremos el signo a un 10 % de las etiquetas elegidas aleatoriamente. A continuación pintamos los resultados (con ruido) de nuevo. He usado una semilla con valor 1 al principio de cada fichero `*.py` y el valor de la semilla es importante porque influye en los resultados y porcentajes de acierto/error.

```
print("b) Grafica con las etiquetas de los puntos con ruido y la recta.")
y_noise = np.copy(y)      # Introducimos ruido en el 10%
ind = np.random.choice(N, size=int(N/10), replace=False)
for i in ind:
    y_noise[i] = -y[i]

plt.scatter(x[y_noise == -1][:, 0], x[y_noise == -1][:, 1],
            label="Etiqueta -1")
plt.scatter(x[y_noise == 1][:, 0], x[y_noise == 1][:, 1],
            c="orange", label="Etiqueta 1")
plt.plot(points, a*points+b, c="red", label="Recta simulada")
plt.legend()
plt.title("Clasificando puntos (con ruido) con la recta simulada")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 1 - Apartado 2b)')
plt.show()
```

La gráfica que obtenemos ya no tiene todos los puntos bien clasificados respecto de la recta en rojo. En concreto, como eran `N=100` puntos y hemos cambiado un 10 %, existen `10` puntos mal clasificados. Veamos:

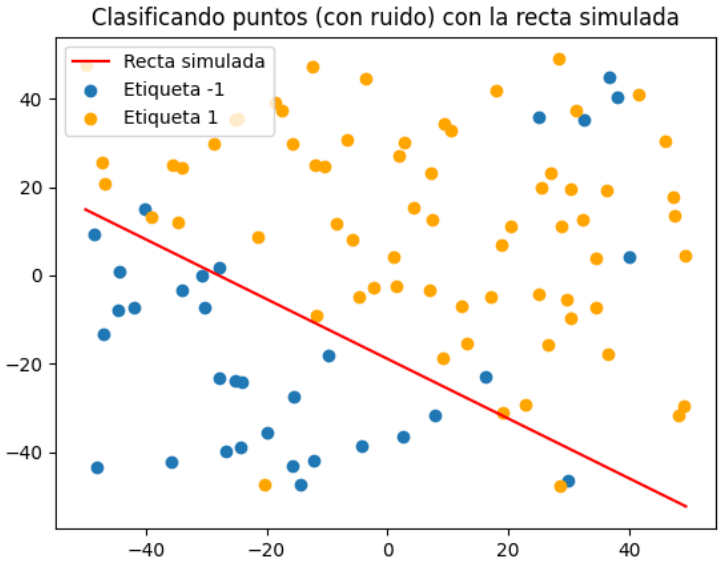


Figura 4: Clasificando puntos (con ruido) con la recta simulada

Como predecíamos hay `2` puntos amarillos con los azules y `8` azules en la zona de los amarillos.

c) Supongamos ahora que las siguientes funciones definen la frontera de clasificación de los puntos de la muestra en lugar de una recta.

- $f(x, y) = (x - 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$
- $f(x, y) = 0,5(x + 10)^2 + (y - 20)^2 - 400$
- $f(x, y) = 0,5(x - 10)^2 - (y + 20)^2 - 400$
- $f(x, y) = y - 20x^2 - 5x + 3$

Visualizar el etiquetado generado en 2b junto con cada una de las gráficas de cada una de las funciones. Comparar las regiones positivas y negativas de estas nuevas funciones con las obtenidas en el caso de la recta. ¿Son estas funciones más complejas mejores clasificadores que la función lineal? Observe las gráficas y diga que consecuencias extrae sobre la influencia del proceso de modificación de etiquetas en el proceso de aprendizaje. Explicar el razonamiento.

Como para cada función deseamos visualizar la muestra de los puntos, con su etiquetado y la gráfica de las funciones voy a implementar una función `print_graf` que realice este trabajo. De esta manera pintaremos cómodamente los resultados de cada clasificador.

```
""" Para cada funcion pasada por argumento visualiza los puntos con sus
etiquetas y la grafica de la funcion como frontera de clasificacion.
- x: vector de puntos 2D que son las caracteristicas.
- y: vector de etiquetas.
- fun: funcion a representar.
- title: titulo de la funcion."""
def print_graf(x, y, fun, title=""):
    plt.scatter(x[y == -1][:, 0], x[y == -1][:, 1], label="Etiqueta -1")
    plt.scatter(x[y == 1][:, 0], x[y == 1][:, 1],
                c="orange", label="Etiqueta 1")
    #Generamos el contorno de fun
    x1, y1 = np.meshgrid(np.linspace(-50, 50, 100), np.linspace(-50, 50, 100))
    contorno = fun(x1,y1)
    plt.contour(x1, y1, contorno, [0], colors='red')
    plt.title("Clasificando puntos (con ruido) con la " + title)
    plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 1 - Apartado 3')
    plt.legend()
    plt.show()
```

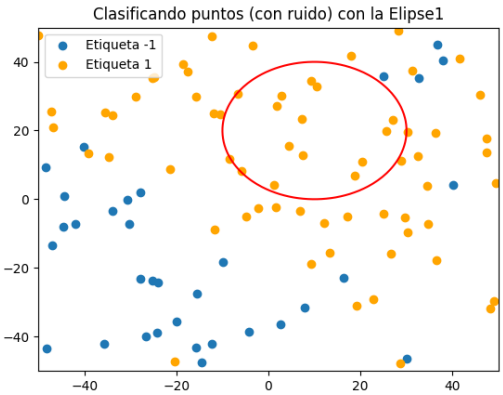
En segundo lugar he implementado una función `get_porc` que devuelve el porcentaje de puntos bien clasificados para los puntos `datos`, las etiquetas `labels` y la función `fun`. Para cada función llamaremos a `get_porc` y así manejaremos este dato también.

```
""" Calcula el porcentaje de puntos bien clasificados
- datos: datos.
- labels: etiquetas.
- fun: funcion clasificadora."""
def get_porc(datos, labels, fun):
    aciertos = labels*fun(datos[:, 0], datos[:, 1])
    return 100*len(aciertos[aciertos >= 0])/len(labels)
```

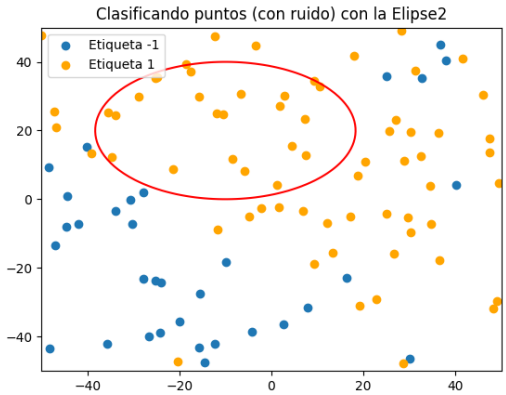
Provistos de todo lo anterior la ejecución de lo pedido es sencillo. Una vez tengamos definidas las funciones clasificadoras, las cuales he denominado `f1`, `f2`, `f3` y `f4`, llamo para cada función a `print_graf` y muestro el procentaje de acierto con `get_porc`.

```
""" Funcion en dos variables que representa una elipse
- x: primera variable de la funcion.
- y: segunda variable de la funcion."""
def f1(x, y):
    return (x-10)**2 + (y-20)**2 - 400

# El resto de funciones son análogas.

""" Ejecucion del apartado 2c """
print ("\n###  Apartado 3  ###\n")
print_graf(x, y, f1, "Elipse1")
print("Acierto para '{}': {}%".format("Elipse1", get_porc(x, y, f1)))
print_graf(x, y, f2, "Elipse2")
print("Acierto para '{}': {}%".format("Elipse2", get_porc(x, y, f2)))
print_graf(x, y, f3, "Elipse3")
print("Acierto para '{}': {}%".format("Elipse3", get_porc(x, y, f3)))
print_graf(x, y, f4, "áParbola")
print("Acierto para '{}': {}%".format("áParbola", get_porc(x, y, f4)))
input("--- Pulsar tecla para continuar ---")
```

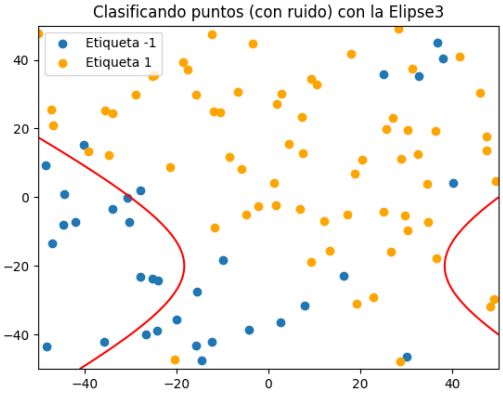
Podemos observar las cuatro gráficas obtenidas.



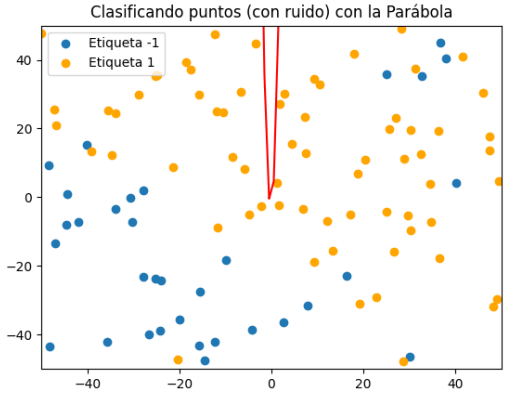
(a) Clasificando puntos (con ruido) con la Elipse1



(b) Clasificando puntos (con ruido) con la Elipse2



(c) Clasificando puntos (con ruido) con la Elipse3



(d) Clasificando puntos (con ruido) con la Parábola

Figura 5: Usando diferentes clasificadores

Para mostrar los porcentajes de acierto de los clasificadores y poder dar un análisis he organizado los datos en una tabla en donde a parte de `get_porc` también he realizado un conteo manual para comprobar.

Clasificador	Bien clasificados	Mal clasificados	`get_porc`
f_1	53	47	53 %
f_2	45	55	45 %
f_3	22	78	22 %
f_4	33	67	33 %

Tabla 1: Porcentaje de acierto de cuatros clasificadores

Podemos observar que los porcentajes son muy variados y cambian entre los distintos

clasificadores. Eso sí, todos son bajos y no se ajustan nadie bien a los datos aunque sea por el efecto del "azar".

Si probamos diferentes semillas obteniendo otros 100 puntos nuevos con diferentes clasificaciones el porcentaje de acierto de los cuatro clasificadores varía bastante, pero casi siempre para mal.

La explicación es que aunque estos clasificadores sean complejos y puedan ser muy buenos clasificando nubes de puntos distintas, ésta no. Porque las etiquetas de esta han sido generadas y mediante una recta y posteriormente se les ha metido ruido. De este modo, es imposible que los clasificadores propuestos tuviesen acierto.

En conclusión, estas funciones no son mejores clasificadores que la función lineal para estos datos.

2. Modelos Lineales

Apartado 1

Algoritmo Perceptron: Implementar la función

`ajusta_PLA(datos, label, max_iter, vini)`

que calcula el hiperplano solución a un problema de clasificación binaria usando el algoritmo PLA. La entrada `datos` es una matriz donde cada item con su etiqueta está representado por una fila de la matriz, `label` el vector de etiquetas (cada etiqueta es un valor +1 o -1), `max_iter` es el número máximo de iteraciones permitidas y `vini` el valor inicial del vector. La función devuelve los coeficientes del hiperplano.

En primer lugar programo la función `ajusta_PLA` teniendo en cuenta el número máximo de iteraciones y el vector de pesos inicial. La condición de parada es fundamental, a parte del número máximo de iteraciones también pararemos cuando después de pasar por todos los datos no se ha actualizado ninguna componente del vector de pesos.

La actualización del vector de pesos la realizaremos cuando para un punto y su etiqueta (x_i, y_i) ocurra que $\text{signo}(w^T x_i) \neq y_i$ y actualizaremos w haciendo $w = w + y_i x_i$.

```
""" Calcula el hiperplano solucion a un problema de clasificacion binaria.
Devuelve el vector de pesos y el numero de iteraciones.
- datos: matriz de datos.
- labels: etiquetas.
- max_iters: numero maximo de iteraciones.
- vini: valor inicial."""
def ajusta_PLA(datos, labels, max_iters, vini):
    w = vini.copy()

    for it in range(1, max_iters + 1):
        w_old = w.copy()

        for dato, label in zip(datos, labels):
            if signo(w.dot(dato)) != label:
                w += label*dato

        if np.all(w == w_old):  # No hay cambios
            return w, it

    return w, it
```

a) Ejecutar el algoritmo PLA con los datos simulados en los apartados 2a de la sección 1. Inicializar el algoritmo con: a) el vector cero y, b) con vectores de números aleatorios en $[0, 1]$ (10 veces). Anotar el número medio de iteraciones necesarias en ambos para converger. Valorar el resultado relacionando el punto de inicio con el número de iteraciones.

Para poder saber el acierto obtenido y valorar adecuadamente los resultados usaré la función `get_porc()` que había preparado en el ejercicio anterior. Aunque construyamos los datos de igual manera y con la misma semilla que en el ejercicio anterior es posible

que éstos sean distintos, ya que intervienen otros factores en la aleatoriedad.

He implementado una función `ejecuta_PLA` que me será útil para las ejecuciones del Algoritmo del Perceptrón de la forma pedida a lo largo de este Apartado.

```
""" Ejecuta ajusta_PLA() con vini un vector de ceros y luego 10 aleatorios
- datos: matriz de datos.
- labels: etiquetas.
- max_iters: numero maximo de iteraciones.
"""
def ejecuta_PLA(datos, labels, max_iters):
    print("   Vector inicial cero")
    w, it = ajusta_PLA(datos, labels, max_iters, np.zeros(3))
    print("   Num. iteraciones: {}".format(it))
    print("   Acierto: {}%".format(get_porc(datos, labels, w)))

    print("\n   Diez vectores iniciales aleatorios")
    iters = np.empty((10, ))
    percs = np.empty((10, ))
    for i in range(10):
        w, it = ajusta_PLA(datos, labels, max_iters, np.random.rand(3))
        iters[i] = it
        percs[i] = get_porc(datos, labels, w)
    print("   N. iteraciones: {}".format(np.mean(iters)))
    print("   Aciertos: {}%".format(np.mean(percs)))
```

Así, para el resolver a) simplemente:

```
print("a) Ejecutar PLA con los datos del ejercicio 1.2a).\n")
N = 100
a, b = simula_recta([-50, 50])
x = np.hstack((np.ones((N, 1)), simula_unif(N, 2, [-50, 50])))
y = np.empty((N, ))
for i in range(N):
    y[i] = signo(f(x[i,1], x[i,2], a, b))
ejecuta_PLA(x, y, 1000)
```

Los resultados son los que esperabamos, un 100 % de acierto tanto cuando `v_ini` es el vector cero como para 10 vectores aleatorios. Cuando digo que son los esperados es porque sabemos que los datos eran linealmente separables y en ese caso tenemos asegurado que el algoritmo del Perceptrón es capaz de encontrar un vector w de manera que $h(x_i) = \text{signo}(w^T x_i) = y_i$ para cada i del conjunto de datos/etiquetas.

La única diferencia es que cuando `w_ini` es el vector cero las iteraciones que necesita son 34 y la media del número de iteraciones de las diez ejecuciones con `w_ini` aleatorio es 124,2. Por tanto, es mejor la primera elección.

b) Hacer lo mismo que antes usando ahora los datos del apartado 2b de la sección 1. ¿Observa algún comportamiento diferente? En caso afirmativo diga cual y las razones para que ello ocurra.

Construimos los datos con ruido de la misma manera que lo hacíamos en el ejercicio anterior y ejecutamos `ejecuta_PLA` sobre ellos.

```
print("\nb) Ejecutar PLA con los datos del ejercicio 1.2b).\n")
y_noise = np.copy(y)      # Introducimos ruido en el 10%
ind = np.random.choice(N, size=int(N/10), replace=False)
for i in ind:
    y_noise[i] = -y[i]
ejecuta_PLA(x, y_noise, 1000)
```

He preparado una tabla que recoge los resultados del apartado anterior y los de éste.

	`w_ini`	`get_porc`	N° iteraciones
Datos sin ruido	Ceros	100 %	34
	Aleatorio ($\times 10$)	100 %	124,2
Datos con ruido	Ceros	84 %	1000
	Aleatorio ($\times 10$)	75 %	1000

Tabla 2: Acierto y número de iteraciones de PLA

En este caso la parada del algoritmo ha sido porque se ha alcanzado el número máximo de iteraciones ya que no consigue separar todos lo datos. De hecho es que no se puede porque hay un ruido del 10 %. El porcentaje de acierto que el algoritmo del Perceptrón obtiene sobre estos datos es bueno ($\geq$ 75 %). El mayor porcentaje que puede conseguir es del 90 % así que es muy bueno. Nuevamente, tal y como sucedió antes para `w_ini` con ceros el acierto es mayor, del 84 %.

Aunque no nos lo pidan voy a mostrar el resultado de PLA en el caso con ruido para un vector inicial de ceros, donde tenemos un 84 % de acierto.

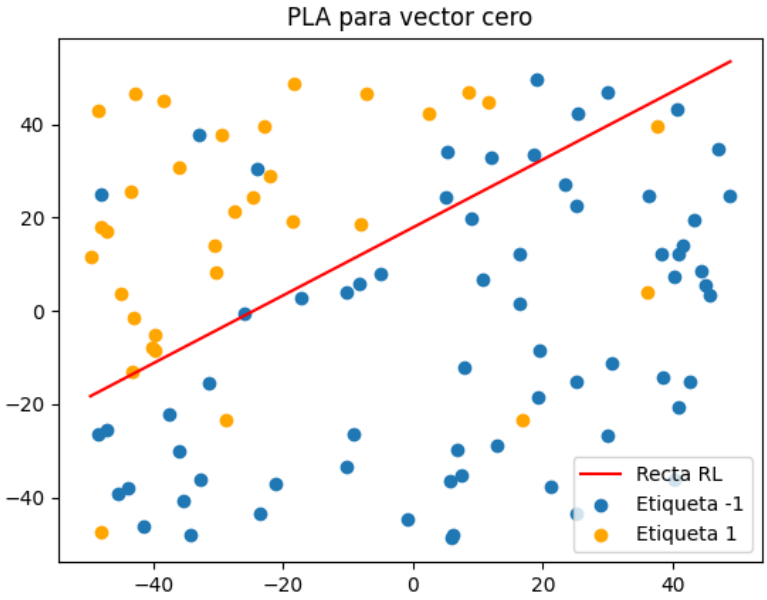


Figura 6: Algoritmo del Perceptrón para `w_ini` de ceros

Apartado 2

Regresión Logística: En este ejercicio crearemos nuestra propia función objetivo f (una probabilidad en este caso) y nuestro conjunto de datos $\mathcal{D}$ para ver cómo funciona regresión logística. Supondremos por simplicidad que f es una probabilidad con valores $0/1$ y por tanto que la etiqueta y es una función determinista de x.

Consideremos $d = 2$ para que los datos sean visualizables, y sea $\mathcal{X} = [0, 2] \times [0, 2]$ con probabilidad uniforme de elegir cada $x \in X$. Elegir una línea en el plano que pase por X como la frontera entre $f(x) = 1$ (donde y toma valores $+1$) y $f(x) = 0$ (donde y toma valores -1), para ello seleccionar dos puntos aleatorios del plano y calcular la línea que pasa por ambos. Seleccionar $N = 100$ puntos aleatorios $\{x_n\}$ de $\mathcal{X}$ y evaluar las respuestas y_n de todos ellos respecto de la frontera elegida.

a) Implementar Regresión Logística (RL) con Gradiente Descendente Estocástico (SGD) bajo las siguientes condiciones:

- **Inicializar el vector de pesos con valores 0.**
- **Parar el algoritmo cuando $\left\|w^{(t-1)} - w^{(t)}\right\| < 0,01$, donde $w^{(t)}$ denota el vector de pesos al final de la época t. Una época es un pase completo a través de los N datos.**
- **Aplicar una permutación aleatoria, $1, 2, ..., N$, en el orden de los datos antes de usarlos en cada época del algoritmo.**
- **Usar una tasa de aprendizaje de $\eta = 0,01$.**

La estructura que vamos a seguir es inicializar `w` a cero y escoger una permutación de índices en cada época. A partir de ahí seleccionaremos minibatches que en este caso van a ser de tamaño 1. La actualización de `w` con tasa de aprendizaje μ es así:

$$\mathtt{w}^{(t+1)} = \mathtt{w}^{(t)} - \mu \nabla E_{in}(\mathtt{w}^{(t)}).$$

La condición de parada nos indica el enunciado que ha de ser $\left\|\mathtt{w}^{(t+1)} - \mathtt{w}^{(t)}\right\| < 0{,}01$. El error en el caso de Regresión Logística es:

$$E_{in} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \log(1 + e^{-y_i w^T x_i}) \tag{1}$$

y el gradiente

$$\nabla E_{in} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \frac{-y_i x_i}{1 + e^{y_i w^T x_i}}$$

en donde se ha simplificado. En código

```
""" Calcula el gradiente de la Regresion Logistica.
- dato: un solo vector de caracteristicas.
- label: etiqueta del vector.
- w: vector de pesos.
"""
def grad_RL(dato, label, w):
    return -label*dato/(1 + np.exp(label*w.dot(dato)))

""" Algoritmo de regresion logistica con SGD.
- datos: matriz de datos.
- labels: etiquetas.
- eta: tasa de aprendizaje.
"""
def sgd_RL(datos, labels, eta):
    w = np.zeros(len(datos[0]))
    ind_set = np.arange(len(datos))
    changed = True          # indica si ha habido cambios en una época

    while changed:
        w_old = w.copy()
        ind_set = np.random.permutation(ind_set)
        for ind in ind_set:
            w = w - eta*grad_RL(datos[ind], labels[ind], w)
        changed = np.linalg.norm(w - w_old) >= 0.01

    return w
```

Después de lo anterior, lo relacionado al apartado a) es:

```
print("a) Implementar RL con SGD. Mostramos grafica con el resultado.")
# Calculamos datos y labels
N = 100; intervalo = [0, 2]
a, b = simula_recta([0, 2])
datos = np.hstack((np.ones((N, 1)), simula_unif(N, 2, intervalo)))
labels = np.empty((N, ))
for i in range(N):
    labels[i] = signo(f(datos[i, 1], datos[i, 2], a, b))

# Calculamos el vector de pesos usando RL+SGD
w = sgd_RL(datos, labels, 0.01)

# Representamos la recta obtenida
plt.scatter(datos[labels == -1][:, 1], datos[labels == -1][:, 2],
            label="Etiqueta -1")
plt.scatter(datos[labels == 1][:, 1], datos[labels == 1][:, 2],
            c="orange", label="Etiqueta 1")
points = np.array([np.min(datos[:, 1]), np.max(datos[:, 1])])
plt.plot(points, (-w[1]*points - w[0])/w[2], c="red", label="Recta RL")
plt.legend()
plt.title("Regresion Logistica con SGD")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 2 - Apartado 2a)')
plt.show()
```

La recta hallada con la Regresión Logística usando Gradiente Descendente Estocástico separa muy bien los datos. Veamos la gráfica:

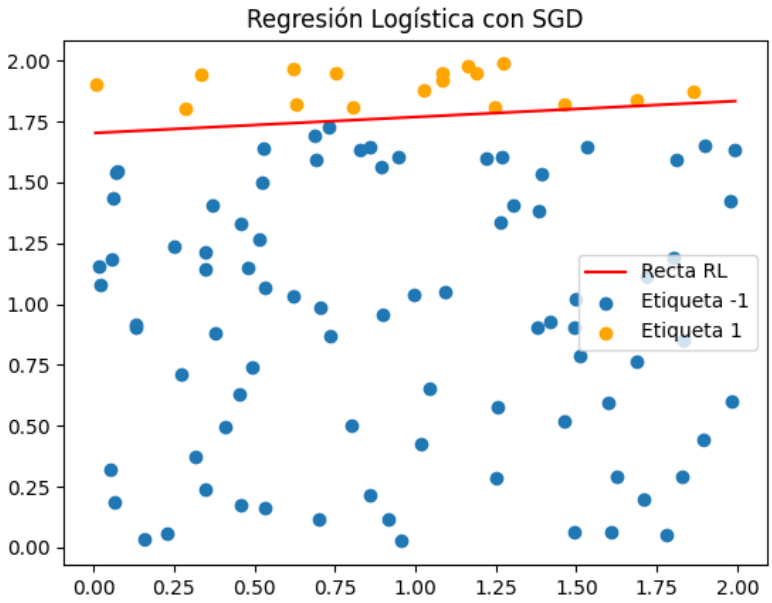


Figura 7: Regresión Logística con SGD

b) Usar la muestra de datos etiquetada para encontrar nuestra solución g y estimar E_{out} usando para ello un número suficientemente grande de nuevas muestras (> 999).

La función de error que vamos a usar es la de la Ecuación 1. Como es sencilla no muestro el código para no extender más. El código que recoge el Apartado b) es:

```
print("\nb) Encontrar solucion g y estimar Eout con nuevas muestras.\n")
# Calculamos datos y labels de test (uso el mismo N>999)
datos_test = np.hstack((np.ones((N, 1)), simula_unif(N, 2, intervalo)))
labels_test = np.empty((N, ))
for i in range(N):
    labels_test[i] = signo(f(datos_test[i, 1], datos_test[i, 2], a, b))

# Representamos la recta y el conjunto de test
plt.scatter(datos_test[labels_test == -1][:, 1],
        datos_test[labels_test == -1][:, 2], label="Etiqueta -1")
plt.scatter(datos_test[labels_test == 1][:, 1],
        datos_test[labels_test == 1][:, 2], c="orange", label="Etiqueta 1")
points = np.array([np.min(datos_test[:, 1]), np.max(datos_test[:, 1])])
plt.plot(points, (-w[1]*points - w[0])/w[2], c="red", label="Recta RL")
plt.legend()
plt.title("Regresion Logistica con SGD (test)")
plt.gcf().canvas.set_window_title('Ejercicio 2 - Apartado 2b)')
plt.show()

# Mostramos cálculos de porcentaje de aciertos y Eout
print("    Aciertos (test): {}%".format(get_porc(datos_test, labels_test, w)))
print("    Eout: {}".format(Err_RL(datos_test, labels_test, w)))
```

El porcentaje de acierto de los 1000 puntos generados como test es del 99,0 % y el error de máxima verosimilitud explicado anteriormente es $E_{out} = 0{,}10021174811552422$. Ambos son muy buenos, excelentes. Podemos concluir diciendo que la Regresión Logística con SGD ha sido exitosa. La gŕafica del test es:

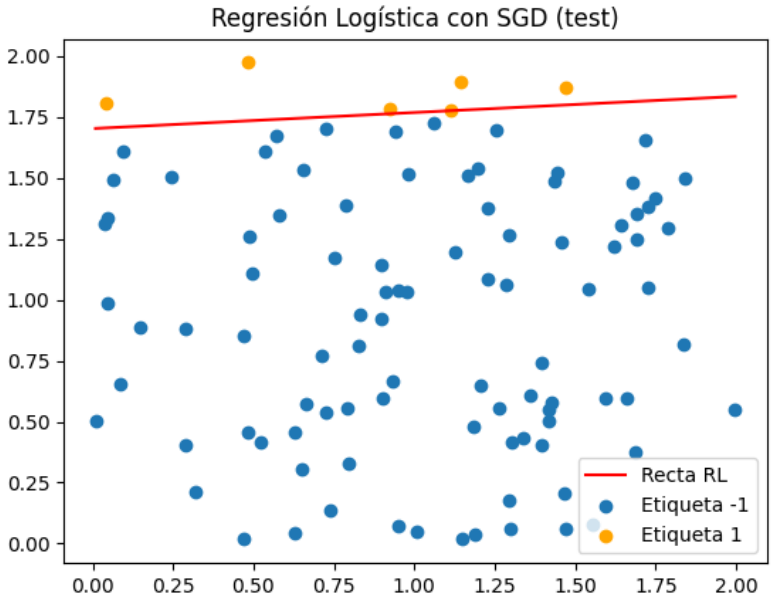


Figura 8: Regresión Logística con SGD (test)

3. Bonus

Clasificación de Dígitos. Considerar el conjunto de datos de los dígitos manuscritos y seleccionar las muestras de los dígitos 4 y 8. Usar los ficheros de entrenamiento (training) y test que se proporcionan. Extraer las características de intensidad promedio y simetría en la manera que se indicó en el ejercicio 3 del trabajo 1.

Apartado 1

Plantear un problema de clasificación binaria que considere el conjunto de entrenamiento como datos de entrada para aprender la función g.

El problema de clasificación binaria va a ser para clasificar dígitos manuscritos, en concreto los dígitos 4 y 8 representamos respectivamente por las etiquetas -1 y 1 a partir de sus características de intensidad promedio y simetría.

Leeremos los ficheros de la práctica anterior y modificamos la función de lectura de los datos que nos daban para leer los nuevos dígitos. Así obtendremos el conjunto de train y el test. Mediante la característica de intensidad promedio y los algoritmos que explicamos más adelante intentaremos clasificar los datos.

```
print("Leyendo los ficheros de datos de train y test.")
# Lectura de los datos de entrenamiento
x, y = readData('datos/X_train.npy', 'datos/y_train.npy')
# Lectura de los datos para el test
x_test, y_test = readData('datos/X_test.npy', 'datos/y_test.npy')
```

Apartado 2

Usar un modelo de Regresión Lineal y aplicar PLA-Pocket como mejora. Responder a las siguientes cuestiones.

El modelo de regresión Lineal que voy a usar es el de la Pseudoinversa (el código en el archivo Python) por su sencillez, el cual se obtenía w mediante el siguiente razonamiento:

$$\nabla E_{in}(w) = 0 \Rightarrow X^T X w = X^T y \Rightarrow w = X^\dagger y \quad \text{donde} \quad X^\dagger = (X^T X)^{-1} X^T.$$

De esa forma obtendremos el vector de pesos inicial y luego usaremos el algoritmo `PLA_Pocket` que es como el del Perceptrón pero guardando la mejor solución encontrada hasta el momento.

```
"""Calcula el hiperplano que hace de clasificador binario.
Devuelve el vector de pesos y el numero de iteraciones.
- datos: matriz de datos.
- labels: etiquetas.
- max_iters: numero maximo de iteraciones.
- vini: valor inicial."""
def PLA_Pocket(datos, labels, max_iter, vini):
    w = vini.copy()
    w_best = w.copy()
```

```
    err_best = get_err(datos, labels, w_best)

    for it in range(1, max_iter + 1):
        w_last = w.copy()
        for dato, label in zip(datos, labels):
            if signo(w.dot(dato)) != label:
                w += label * dato
        # calculamos el error
        err = get_err(datos, labels, w)
        # Si mejoramos el error
        if err < err_best:
            w_best = w.copy()
            err_best = err
        # Si no hay cambios fin
        if np.all(w == w_last):
            return w_best

    return w_best
```

a) Generar gráficos separados (en color) de los datos de entrenamiento y test junto con la función estimada.

No muestro el código porque lo relevante es `PLA_Pocket` que ya se ha expuesto y explicado y el código de generación de gráficas está presente a lo largo de la práctica.

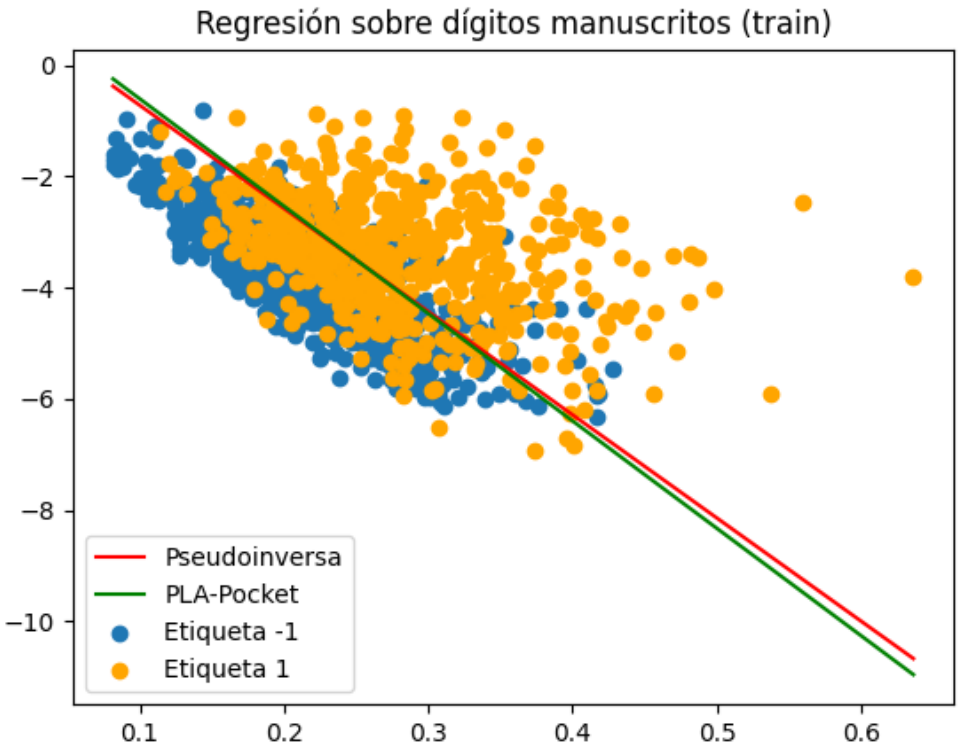


Figura 9: Imágenes sobre dígitos manuscritos (train)

La regresión es buena. Vemos la del conjunto de test y analizamos los datos. Observamos que el conjunto de train es mucho más numeroso que el de test.

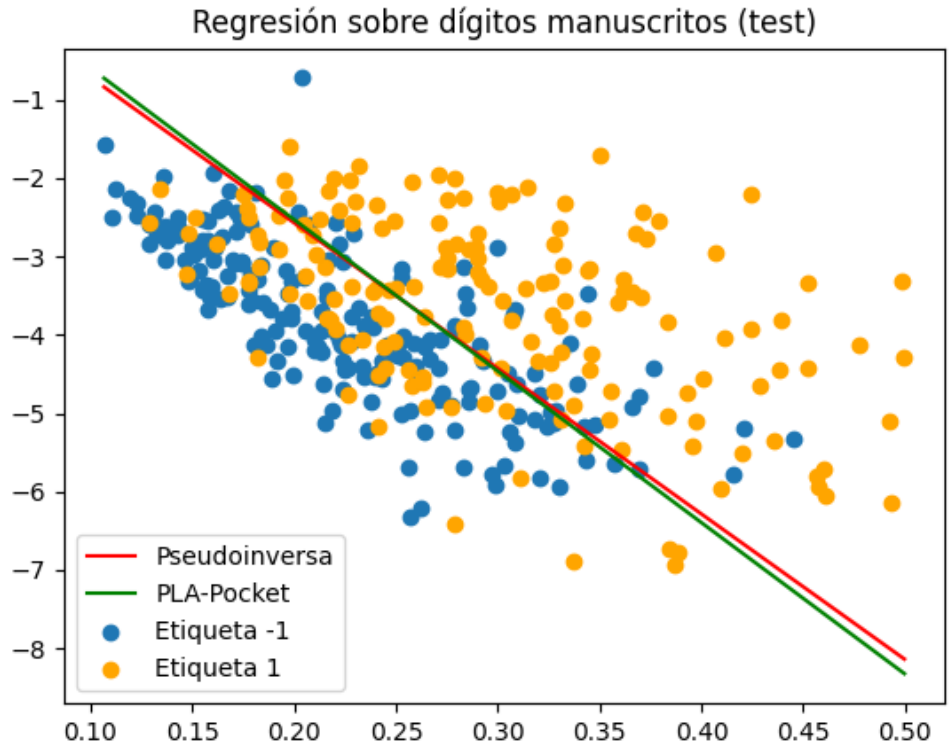


Figura 10: Imágenes sobre dígitos manuscritos (test)

Las rectas obtenidas son prácticamente idénticas tanto en train como en test. A continuación valoramos sus errores.

b) Calcular E_{in} y E_{test} (error sobre los datos de test).

He recogido los errores en la siguiente tabla:

Algoritmo	E_{in}	E_{test}
Pseudoinversa	0,22780569514237858	0,2513661202185792
`PLA_Pocket`	0,22529313232830817	0,25409836065573765

Tabla 3: E_{in} y E_{out} para Pseudoinversa y `PLA_Pocket`

El algoritmo `PLA_Pocket` consigue mejorar el error E_{in} con respecto al algoritmo de la Pseudoinversa pero en E_{test} esto no es así. No obstante, estamos hablando de una diferencia muy pequeña, y dada la sencillez del algoritmo de la Pseudoinversa podemos afirmar que el vector de pesos que me da es muy bueno.

c) Obtener cotas sobre el verdadero valor de E_{out}. Pueden calcularse dos cotas una basada en E_{in} y otra basada en E_{test}. Usar una tolerancia $\delta = 0,05$. ¿Que cota es mejor?

La fórmula de la cota del error es:

$$E_{out} \leq E_{in} + \sqrt{\frac{1}{2N} \log\left(\frac{2\,|\mathcal{H}|}{\delta}\right)}$$

donde $\delta = 0{,}05$ es la tolerancia, N el tamaño de la muestra (distinto en train y test) y falta por calcular $|\mathcal{H}|$. Como los flotantes son de 64 *bits* y tenemos tres parámetros entonces $|\mathcal{H}| = 2^{64*3}$.

```
""" Calcula y devuelve la cota de Eout.
- ein: error estimado.
- N: tamanio de la muestra.
- delta: tolerancia."""
def cotaErr(ein, N, delta):
    return ein + np.sqrt(1/(2*N)*((3*64+1)*np.log(2) - np.log(delta))))))
```

Las cotas obtenidas para E_{out} son de 0,4646154745114326 usando E_{in} y 0,6863581776020738 usando E_{test}. El resultado es entendible ya que E_{in} era más pequeño que E_{test}. Por tanto, es mejor la que usa E_{in}.