DOBLE GRADO EN
INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

TRABAJO FIN DE GRADO

Desarrollo de algoritmos para la aproximación no lineal mediante bases especiales en espacios de Banach

Carlos Santiago Sánchez Muñoz

Tutores
Javier Merí de la Maza
Alberto Fernández Hilario

XX de junio de 2020

Facultad de Ciencias

E.T.S. Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Índice general

Desarrollo de algoritmos para la aproximación no lineal mediante bases especiales en espacios de Banach

Carlos Santiago Sánchez Muñoz

Palabras clave: bases greedy, aproximación no lineal, sistema de Haar, compresión de información y matching pursuit

Resumen

Poner aquí el resumen.

Development of algorithms for non-linear approximation through special bases in Banach spaces

Carlos Santiago Sánchez Muñoz

Keywords: greedy bases, non-linear approximation, Haar system, matching pursuit and information compression

Abstract
Write here the abstract in English.

Yo, **Carlos Santiago Sánchez Muñoz**, alumno de la titulación DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS de la **Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación y Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada**, con DNI 75931715K, autorizo la ubicación de la siguiente copia de mi Trabajo Fin de Grado en la biblioteca del centro para que pueda ser consultada por las personas que lo deseen.

Fdo: Carlos Santiago Sánchez Muñoz

Granada a X de junio de 2020.

D. **Javier Merí de la Maza**, Profesor del Departamento Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

D. **Alberto Fernández Hilario**, Profesor del Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada.

Informan:

Que el presente trabajo, titulado ***Desarrollo de algoritmos para la aproximación no lineal mediante bases especiales en espacios de Banach***, ha sido realizado bajo su supervisión por **Carlos Santiago Sánchez Muñoz**, y autorizamos la defensa de dicho trabajo ante el tribunal que corresponda.

Y para que conste, expiden y firman el presente informe en Granada a X de junio de 2020.

Los directores:

Javier Merí de la Maza **Alberto Fernández Hilario**

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres y a mis hermanos su cariño, incondicionalidad y constante apoyo hacia mí. Ellos son lo más importante para cualquier meta que me propongo.

Quiero agradecer también a todos los profesores con los que he tenido contacto en estos cinco años, han realizado una gran labor docente y de algunos he aprendido mucho más que matemáticas o informática.

Del mismo modo he sentido la fuerza que me han dado todos mis amigos, algunos de los cuales los conocí en esta carrera y junto a ellos he superado obstáculos y dificultades.

Por último quiero darle las gracias a mis tutores, Javier Merí y Alberto Fernández, quienes me han dado las herramientas para llevar a cabo este Trabajo Fin de Grado.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Este Trabajo Fin de Grado se enmarca dentro de la rama del Análisis Funcional conocida como Geometría de los Espacios de Banach, y tiene por objeto avanzar en el estudio de bases especiales en tales espacios. Una de las ideas principales en el estudio isomórfico de los espacios de Banach es el uso de las propiedades de bases y sucesiones básicas como herramienta fundamental para comprender las diferencias y las similitudes entre distintos espacios.

En los años 90 del siglo pasado surge el concepto de base greedy que está íntimamente relacionado con la aproximación no lineal y con la búsqueda de algoritmos que se pueden implementar en computadoras para realizar compresión de datos y recuperación de información.

1.2. Problema

1.3. Herramientas

Capítulo 2

Objetivos del trabajo

2.1. Estudio de tipos especiales de bases

Uno de los objetivos del presente trabajo consiste en estudiar el concepto de base de Schauder en espacios de Banach, presentando ejemplos y analizando las distintas propiedades que pueden tener las bases. En un segundo paso el estudio se centrará en las bases greedy y en su relación con la aproximación no lineal que debe culminar con la presentación y análisis de algún modelo teórico de aproximación mediante bases greedy.

2.2. Búsqueda de algoritmos de compresión de información

La tercera fase del trabajo consistirá en utilizar técnicas de aprendizaje y / o optimización para determinar los parámetros de las funciones bajo estudio. Surge la necesidad de utilizar algoritmos y modelos que trabajen de manera automática por los grados de libertad que tiene el problema, y la necesidad de la eficiencia en la obtención de la solución, equilibrando precisión y tiempo de cómputo frente a metodologías de tipo exacto.

Capítulo 3

Desarrollo matemático del trabajo

3.1. Bases y sucesiones básicas

Una de las ideas clave en la teoría de isomorfismos de espacios de Banach es usar las propiedades de las bases y sucesiones básicas para estudiar las diferencias y similitudes entre espacios. Durante el desarrollo convendremos en que todos los espacios de Banach son reales a menos que se indique lo contrario y en algunas ocasiones probaremos el caso complejo para demostrar que se obtiene el mismo resultado.

3.1.1. Bases de Schauder

Aunque la noción de base de un espacio vectorial tiene sentido para espacios de dimensión infinita, no resulta satisfactoria en el ambiente de los espacios normados porque no tiene en cuenta su estructura topológica. Pasamos a definir el concepto adecuado de base en este ambiente.

3.1.1 Definición. *Una sucesión de elementos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach de dimensión infinita se dice que es una base de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Esto significa que necesitamos que $(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n)_{N=1}^{\infty}$ converja a x en la topología de la norma.

De la definición es claro ver que una base consiste en vectores linealmente independientes y distintos de cero. Si X tiene una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces su cierre coincide con X y por tanto X es separable.

Nos damos también cuenta de que si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de un espacio de Banach X, las aplicaciones $x \mapsto a_n$ son funcionales lineales en X. Escribiremos $e_n^{\#}(x) = a_n$. Sin embargo, no es de ninguna manera inmediato ver que los funcionales lineales $(e_n^{\#})_{n=1}^{\infty}$ son en realidad continuos. Hagamos la siguiente definición:

3.1.2 Definición. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Supongamos que hay una sucesión $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ en X^* tal que*

(I) *$e_k^*(e_j) = 1$ si $j = k$ o bien $e_k^*(e_j) = 0$ si $j \neq k$ para todo k y j en $\mathbb{N}$,*

(II) *$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n$ para cada x en X.*

Entonces decimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de X y los funcionales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son los funcionales biortogonales asociados a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de X y $x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n$, el *soporte de x* es el subconjunto de enteros n tales que $e_n^*(x) \neq 0$. Lo denotamos como $sop(x)$. Si $sop(x) < \infty$ diremos que x tiene *soporte finito.*

El nombre de *Schauder* en la definición anterior es en honor a J. Schauder quien introdujo el concepto de base en 1927. En la práctica, cualquier base de un espacio de Banach es una base de Schauder. La prueba de la equivalencia entre los conceptos de base y base de Schauder es consecuencia del teorema de la gráfica cerrada. Aunque este resultado tiene un uso muy agradable de algunos de los principios básicos del análisis funcional, hay que reconocer que es esencialmente inútil en el sentido de que en todas las situaciones prácticas somos capaces de demostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base mostrando la conclusión formalmente más fuerte de que ya es una base de Schauder.

3.1.3 Teorema. *Sea X un espacio de Banach (separable). Una sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es una base de Schauder si y solo si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X.*

Demostración. Asumimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X e introducimos las *proyecciones de suma parcial* $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ asociadas a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas por $S_0 = 0$ y para $n \geq 1$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^{\#}(x)e_k.$$

Por supuesto, no sabemos todavía que estos operadores están acotados. Consideremos una nueva norma en X definida por la fórmula

$$|||x||| = \sup_{n \geq 1} \|S_n x\| .$$

Como $\lim_{n\to\infty} \|x - S_n x\| = 0$ para cada $x \in X$, se sigue que $|||\cdot||| \geq \|\cdot\|$. Demostraremos que $(X, |||\cdot|||)$ es completo.

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, |||\cdot|||)$. Por supuesto, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a algún $x \in X$ en la norma original. Nuestro objetivo es probar que $\lim_{n\to\infty} |||x_n - x||| = 0$.

Para cada k fijado la sucesión $(S_k x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente en la norma original a algún $y_k \in X$, nos damos cuenta también de que $(S_k x_n)_{n=1}^{\infty}$ está contenido en el subespacio finito dimensional generado por $e_1, ..., e_k$, el cual notamos por $[e_1, ..., e_k]$. Ciertamente, los funcionales $e_j^{\#}$ son continuos en cada subespacio finito dimensional; por tanto si $1 \leq j \leq k$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} e_j^{\#}(x_n) = e_j^{\#}(y_k) := a_j.$$

Argumentamos ahora que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j = x$ para la norma original.

Dado $\varepsilon > 0$, cogemos un entero n tal que si $m \geq n$ entonces $|||x_m - x_n||| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, y tomamos k_0 tal que $k \geq k_0$ implica $\|x_n - S_k x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces para $k \geq k_0$ tenemos

$$\|y_k - x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|S_k x_m - S_k x_n\| + \|S_k x_n - x_n\| + \lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Así $\lim_{k\to\infty} \|y_k - x\| = 0$ y por la unicidad de la expansión de x con respecto a la base, $S_k x = y_k$.

Ahora,

$$|||x_n - x||| = \sup_{k\geq 1} \|S_k x_n - S_k x\| \leq \lim_{m\to\infty} \sup \sup_{k\geq 1} \|S_k x_m - S_k x_n\|,$$

así que el $\lim_{n\to\infty} |||x_n - x||| = 0$ y $(X, |||\cdot|||)$ es completo.

Por el teorema de la gráfica cerrada (o de la aplicación abierta), la aplicación $(x, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ está acotada, i.e., existe K tal que $|||x||| \leq K\|x\|$ $\forall x \in X$. Esto implica que

$$\|S_n x\| \leq K\|x\|, \quad x \in X, \ n \in \mathbb{N}.$$

En particular,

$$\left|e_n^{\#}(x)\right| \|e_n\| = \|S_n x - S_{n-1} x\| \leq 2K\|x\|;$$

por lo que $e_n^{\#} \in X^*$ y $\left\|e_n^{\#}\right\| \leq 2K\|e_n\|^{-1}$. □

Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder de X. El teorema anterior nos dice que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es de hecho una base de Schauder; de aquí que usemos la notación $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ para los funcionales biortogonales.

Consideramos los operadores de la suma parcial $S_n : X \to X$ dada por $S_0 = 0$ y para $n \geq 1$

$$S_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x)e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k.$$

S_n es un operador lineal y continuo ya que e_k^* es continuo. Que los operadores $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ estén uniformemente acotados es consecuencia del principio de acotación uniforme. Recogemos este resultado:

3.1.4 Proposición. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de un espacio de Banach X y $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones naturales asociadas a él. Entonces:*

$$\sup_n \|S_n\| < \infty.$$

Demostración. Para una base de Schauder los operadores $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ están acotados a priori. Como $S_n(x) \to x$ para cada $x \in X$ tenemos que $\sup_n \|S_n(x)\| < \infty$ para cada $x \in X$. Entonces el principio de acotación uniforme nos dice que $\sup_n \|S_n\| < \infty$. □

3.1.5 Definición. *Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de un espacio de Banach X entonces el número*

$$K_b = \sup_n \|S_n\|$$

se llama la constante básica. En el caso óptimo de que $K_b = 1$ la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice monótona.

3.1.6 Observación. Siempre podemos renormar un espacio de Banach X con una base de manera que la base dada sea monótona. Simplemente ponemos:

$$|||x||| = \sup_{n\geq 1} \|S_n x\|.$$

Tenemos $\|x\| \leq |||x||| \leq K_b \|x\|$ por lo que la nueva norma es equivalente a la antigua y rápidamente verificamos que $|||S_n||| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado establece un método para construir una base para un espacio de Banach X siempre que tengamos una familia de proyecciones que cumplan las propiedades de los operadores de suma parcial.

3.1.7 Proposición. *Supongamos $S_n : X \to X, n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de proyecciones lineales acotadas en un espacio de Banach X tal que*

(I) *dim $S_n(X) = n$ para cada n;*

(II) *$S_n S_m = S_m S_n = S_{\text{mín}\{n,m\}}$ para cualesquiera números naturales m y n; y*

(III) *$S_n(x) \to x$ $\forall x \in X$.*

Entonces toda sucesión de vectores distintos de cero $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *en* X *escogidos inductivamente de manera que* $e_1 \in S_1(X)$ *y* $e_k \in S_k(X) \cap S_{k-1}^{-1}(0)$ *si* $k \geq 2$ *es una base para* X *con las proyecciones de las sumas parciales* $(S_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demostración. Sea $0 \neq e_1 \in S_1(X)$ y definimos $e_1^* : X \to \mathbb{R}$ por $e_1^*(x)e_1 = S_1(x)$. A continuación cogemos $0 \neq e_2 \in S_2(X) \cap S_1^{-1}(0)$ y definimos el funcional $e_2^* : X \to \mathbb{R}$ por $e_2^*(x)e_2 = S_2(x) - S_1(x)$. Esto nos da por inducción un procedimiento para extraer la base y los funcionales biortogonales: para cada número natural n, cogemos $0 \neq e_n \in S_n(X) \cap S_{n-1}^{-1}(0)$ y definimos $e_n^* : X \to \mathbb{R}$ por $e_n^*(x)e_n = S_n(x) - S_{n-1}(x)$. Entonces

$$|e_n^*(x)| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \, \|e_n\|^{-1} \leq 2 \sup_n \|S_n\| \, \|e_n\|^{-1} \, \|x\| \, ;$$

por lo tanto $e_n^* \in X^*$. Es inmediato comprobar que $e_k^*(e_j) = \delta_{kj}$ para cualesquiera números naturales k, j.

Por otro lado si $S_0(x) = 0$ para todo x, podemos escribir

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (S_k(x) - S_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x)e_k,$$

que por la hipótesis III converge a x para todo $x \in X$. Entonces, la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base y $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ sus proyecciones naturales. □

En la siguiente definición relajamos la suposición de que una base debe abarcar el espacio entero. Vamos a introducir el concepto de *sucesión básica* el cual es de fundamental importancia en la teoría de espacios de Banach.

3.1.8 Definición. *Una sucesión* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *en un espacio de Banach* X *es una sucesión básica si es una base para* $[e_k]_{k \in \mathbb{N}}$*, el cierre de la expansión lineal de* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$.

Para reconocer las sucesiones de elementos en un espacio de Banach como una sucesión básica tenemos la siguiente proposición también conocida como el *Criterio de Grunblum.*

3.1.9 Proposición. *Una sucesión* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *de elementos distintos de cero de un espacio de Banach* X *es una sucesión básica si y solo si existe una constante positiva* K *tal que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \tag{3.1}$$

para cada sucesión de escalares $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *y cualesquiera enteros* m, n *tales que* $m \leq n$.

Demostración. Asumimos que $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica y sean $S_m : [e_k] \to [e_k]$,

$m = 1, 2, ...,$ las proyecciones de las sumas parciales. Si $m \leq n$ tenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| = \left\| S_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right) \right\| \leq \sup_m \|S_m\| \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|,$$

por lo que 3.1 se da con $K = \sup_m \|S_m\|$.

Para la otra implicación, sea E la expansión lineal de $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. La condición 3.1 implica que los vectores $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ son linealmente independientes. Esto nos permite definir para cada m un operador de rango finito $s_m : E \to [e_k]_{k=1}^{m}$ por

$$s_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_j e_j \right) = \sum_{k=1}^{\text{mín}(m,n)} a_k e_k, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Por densidad cada s_m se extiende a $S_m : [e_k] \to [e_k]_{k=1}^{m}$ con $\|S_m\| = \|s_m\| \leq K$.

Nos damos cuenta de que para cada $x \in E$ tenemos

$$S_n S_m(x) = S_m S_n(x) = S_{\text{mín}(m,n)}(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

y nos damos cuenta de que 3.2 se da para todo $x \in [e_k]$.

Para cada $x \in [e_k]$ la sucesión $(S_n(x))_{k=1}^{\infty}$ converge a x, ya que el conjunto $\{x \in [e_k] : S_m(x) \to x\}$ es cerrado y contiene a E, el cual es denso en $[e_k]$. Ahora por la Proposición 3.1.7 $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ es una base para $[e_k]$ con proyecciones de las sumas parciales $(S_m)_{m=1}^{\infty}$. $\square$

3.1.2. Ejemplos: Series de Fourier

Algunos de los espacios de Banach clásicos vienen con una base natural dada. Por ejemplo en los espacios ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ y c_0 existe una base canónica dada por la sucesión $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ donde la única entrada distinta de 0 es la n-ésima. Vamos a mostrar un ejemplo que proviene del análisis de Fourier y también la construcción original de Schauder de una base en $\mathcal{C}[0, 1]$.

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Denotamos un elemento de $\mathbb{T}$ por $e^{i\theta}$ y podemos identificar el espacio $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de las funciones continuas de variable compleja en $\mathbb{T}$ con el espacio de las funciones 2π-periódicas continuas en $\mathbb{R}$. En el contexto de las series de Fourier es más natural considerar espacios de funciones complejas que de funciones reales.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $e_n \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ la función tal que $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. La pregunta que queremos abordar es si la sucesión $(e_o, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2}, ...)$ en este orden particular es una base de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. De hecho veremos que no lo es. Este es un resultado clásico en análisis de Fourier que es equivalente a decir que que hay una función continua f cuya serie de Fourier no converge uniformemente.

Que $[e_n]_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ se sigue del teorema de Stone-Weierstrass pero también probaremos esto directamente.

Los *coeficientes de Fourier* de $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ están definidos por la fórmula

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Los funcionales lineales

$$e_n^* : \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \ f \mapsto e_n^*(f) = \hat{f}(n)$$

son biortogonales a la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

La *serie de Fourier* de f es la serie formal

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Vamos a enunciar dos lemas que nos serán muy útiles más adelante.

3.1.10 Lema. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene*

(I) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$,

(II) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$.

Demostración. Vamos a probar ambas igualdades simultáneamente. Comencemos:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin(kx)\right).$$

Usamos la fórmula de Moivre y obtenemos

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^k.$$

Sea $z = \cos(x) + i\sin(x)$. Sabemos que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

con la salvedad de que $z = 1$. En ese caso $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y las igualdades son ciertas trivialmente. Usando $z^{n+1} = \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x)$ junto con las igualdades trigonométricas $2\sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$ y $\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ llegamos a

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{1-\cos(x)-i\sin(x)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)-2i\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Simplificamos,

$$\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)-i\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)-i\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)-i\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Desarrollando la parte real

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right).$$

A continuación desarrollamos la parte imaginaria

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left(\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Finalizamos la demostración juntando ambas partes,

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right).$$

□

3.1.11 Lema. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$. La siguiente igualdad es cierta:*

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Demostración. Lo que queremos probar es equivalente a

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Vamos a desarrollar el sumatorio

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) + i \sum_{k=-n}^{n} \sin(kx) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) = 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + 1 = 2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) - 1.\end{aligned}$$

Usando lo anterior y aplicando el apartado I del Lema 3.1.10

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Desarrollando y usando la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned}&2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= \sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{nx}{2}\right)^2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Recordamos que $2\cos^2(\alpha/2) = \cos(\alpha) + 1$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y posteriormente identificamos el seno de la suma en la expresión finalizando la demostración.

$$\begin{aligned}&\sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + (\cos(nx)+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin\left(nx + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right).\end{aligned}$$

□

Para cada entero n sea $T_n : \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ el operador

$$T_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k,$$

el cual nos da la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f. Entonces

$$\begin{aligned}T_n(f)(\theta) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(t)e^{ik(\theta-t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt.\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado el Lema 3.1.11. La función

$$D_n(t) = \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{\sin\frac{t}{2}}$$

es conocida como el *núcleo de Dirichlet.*

Consideremos también los operadores

$$A_n = \frac{1}{n}(T_0 + ... + T_{n-1}), \quad n = 2, 3, ...$$

Entonces

$$A_n f(\theta) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

La función

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

es el *núcleo de Fejér*. Nos damos cuenta de que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1.$$

Sin embargo, una diferencia crucial es que F_n es una función positiva mientras que D_n no lo es.

Mostremos ahora que si $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ entonces $\|A_n f - f\| \to 0$. Como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $0 < \delta < \pi$ de manera que $|\theta - \theta'| < \delta$ implica que $|f(\theta) - f(\theta')| \leq \varepsilon$. Entonces para cada θ tenemos

$$A_n f(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)(f(\theta - t) - f(\theta))dt.$$

Por tanto

$$\|A_n f - f\| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|\int_{\delta<|t|\leq\pi} F_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} F_n(t)dt.$$

Ahora

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|\int_{\delta<|t|\leq\pi} F_n(t)dt \leq \frac{1}{n}\sin^{-2}\frac{\delta}{2}$$

y por tanto

$$\operatorname{lím\,sup}\|A_n f - f\| \leq \varepsilon.$$

Esto muestra que $[e_n]_{n\in\mathbb{Z}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

Como los funcionales biortogonales están dados por los coeficientes de Fourier, se sigue que si $(e_0, e_1, e_{-1}...,)$ es una base entonces los operadores de las sumas parciales (S_n) satisfacen $S_{2n+1} = T_n$ para todo $\mathbb{N}$. Para mostrar que no es una base es suficiente ver que las sucesiones de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ no están uniformemente acotadas.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ dado por

$$\varphi(f) = f(0).$$

Entonces

$$\varphi(T_n(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(-t)dt;$$

por tanto

$$\|T_n^*\varphi\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt.$$

Por lo tanto, como $|\sin x| \leq |x|$ para todo x real,

$$\begin{aligned}\|T_n\| &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\left|\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{2n+1}}\right|\frac{dt}{2n+1} \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right| dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{n\to\infty}\|T_n\| \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = \infty.$$

Ya hemos probado que $\sup_n \|T_n^*\varphi\| = \infty$; entonces por el principio de acotación de uniforme existe $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ tal que $(T_nf(0))_{n=1}^{\infty}$ es no acotado. Notamos también que no es un ejemplo explícito; en [2] se puede encontrar el desarrollo de un tal ejemplo.

Si preferimos tratar con el espacio de las funciones continuas de variable real $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, exactamente los mismos cálculos muestran que el sistema trigonométrico (real)

$$\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, ...\}$$

no es una base. En efecto, los operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ están no acotados en el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ y corresponden a los operadores de las sumas parciales $(S_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ como antes.

Sin embargo, $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ tienen una base. Podemos mostrar esto de manera similar a la construcción original de la base de Shauder en $\mathcal{C}[0,1]$ que ahora describiremos. Sea $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que es densa en $[0,1]$ y tal que $q_1 = 0$ y $q_2 = 1$. Construimos inductivamente una sucesión de operadores $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, definidos en $\mathcal{C}[0,1]$, por $S_1f(t) =$

$f(q_1)$ para $0 \leq t \leq 1$, y posteriormente $S_n f$ es la función lineal a trozos definida por $S_n f(q_k) = f(q_k)$ para $1 \leq k \leq n$ y lineal en todos los intervalos de $[0,1] \setminus \{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Es entonces fácil ver que $\|S_n\| = 1$ para todo n y todos los supuestos de la Proposición 3.1.7 son satisfechos. De esta manera obtenemos una base monótona para $\mathcal{C}[0,1]$. Los elementos de la base están dados por $e_1(t) = 1$ para todo t, y entonces e_n es definido recursivamente por $e_n(q_n) = 1$, $e_n(q_k) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$, y e_n es lineal en cada intervalo en $[0,1] \setminus \{q_1, q_2, ..., q_n\}$.

Para modificar esto para el caso del caso del círculo identificamos $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ (respectivamente $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$) con las funciones en $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ (respectivamente $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$) tal que $f(0) = f(2\pi)$. Sea $q_1 = 0$ y supongamos $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ es denso en $[0, 2\pi)$. Entonces definimos $S_n f$ para $n > 1$ por $S_n f(q_k) = f(q_k)$ para $1 \leq k \leq n$ y $S_n f(2\pi) = f(q_1)$ y para ser afín en cada intervalo en $[0, 2\pi) \setminus \{q_1, ..., q_n\}$.

En ambos casos este procedimiento construye una base monótona. Resumimos esto en el siguiente teorema.

3.1.12 Teorema. *Los espacios $\mathcal{C}[0,1]$ y $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ tienen una base monótona. El sistema trigonométrico complejo $(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}, ...)$ no es una base de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.*

3.1.3. Equivalencia de bases y sucesiones básicas

Cuando seleccionamos una base de un espacio de vectores de dimensión finita estamos, en efecto, seleccionando un sistema de coordenadas. Las bases en espacios de Banach de dimensión infinita juegan el mismo papel. Así, si tenemos una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces podemos escribir x usando sus coordenadas $(e_n^*(x))_{n=1}^{\infty}$. Por supuesto no es cierto que toda sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ define un elemento de X. Por tanto obtenemos un sistema de coordenadas de X a través de una cierta sucesión del espacio, es decir, un subespacio lineal del espacio de vectores de todas las sucesiones. Esto nos lleva naturalmente a la siguiente definición.

3.1.13 Definición. *Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en sus respectivos espacios de Banach X e Y son equivalentes si siempre que tomamos una sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.*

Por lo tanto si las bases $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes entonces los espacios de sucesiones asociados a X por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y a Y por $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ coinciden. Es una consecuencia fácil del teorema de la gráfica cerrada que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes, entonces los espacios X e Y deben ser isomorfos. De una manera más precisa tenemos el siguiente teorema.

3.1.14 Teorema. *Dos bases (o sucesiones básicas) son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo $T : [x_n] \to [y_n]$ de manera que $Tx_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $X = [x_n]$ e $Y = [y_n]$. Es obvio que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes si existe un isomorfismo T de X a Y tal que $Tx_n = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos a la inversa que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son equivalentes. Definamos $T : X \to Y$ por $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Entonces T es inyectiva y sobreyectiva. Para probar que es continua usaremos el teorema de la gráfica cerrada. Supongamos $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $u_j \to u$ en X y $Tu_j \to v$ en Y. $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j)x_n$ y $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u)x_n$. Se sigue de la continuidad de los funcionales biortogonales asociados respectivamente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que $x_n^*(u_j) \to x_n^*(u)$ e $y_n^*(Tu_j) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$ para todo n. Por la unicidad del límite, $x_n^*(u) = y_n^*(v)$ para todo n. Por tanto $Tu = v$ por lo que T es continuo. □

3.1.15 Corolario. *Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dos bases para los espacios de Banach X e Y respectivamente. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión de escalares distintos de cero $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tenemos*

$$C^{-1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \right\|. \tag{3.3}$$

Si $C = 1$ en 3.3 entonces las sucesiones básicas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ se dicen isométricamente equivalentes.

La equivalencia de sucesión básicas (y en particular de bases) es una técnica poderosa para estudiar la estructura isomórfica de los espacios de Banach. Introducimos ahora un tipo especial de sucesión básica.

3.1.16 Definición. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X. Supongamos que $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros con $p_0 = 0$ y que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son escalares. Entonces una sucesión de vectores distintos de cero $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en X de la forma*

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j.$$

los llamaremos bloque de sucesión básica de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

3.1.17 Lema. *Supongamos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para el espacio de Banach X con constante básica K_b. Sea $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ un bloque de sucesión básica de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica menor o igual a K_b.*

Demostración. Supomgamos que $u_k = \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j$, $k \in \mathbb{N}$, es un bloque de sucesión básica de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces para cualesquiera escalares (b_k) y enteros m, n con $m \leq n$

tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\| &= \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} b_k a_j e_j\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j\right\|, \text{ donde } c_j = a_j b_k \text{ si } p_{k-1}+1 \leq j \leq p_k \\ &\leq K_b \left\|\sum_{j=1}^{p_n} c_j e_j\right\| = K_b \left\|\sum_{k=1}^{p_n} b_k u_k\right\|\end{aligned}$$

Esto es, $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ satisface la condición de Grunblum por lo que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión básica con constante básica K_b. □

3.1.18 Definición. *Una sucesión básica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X está complementada si $[x_n]$ es un subespacio complementado de X.*

3.1.19 Nota. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica complementada en un espacio de Banach X. Sea $Y = [x_n]$ y $P : X \to Y$ una proyección. Si $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ son los funcionales biortogonales asociados a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces usando el teorema de Hahn-Banach podemos obtener una sucesión biortogonal $(\hat{x}_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tal que cada $\hat{x}_n^*$ es una extensión x_n^* que preserva la norma. Pero ya que tenemos una proyección, P, podemos también extender cada x_n^* a todo el espacio X poniendo $u_n^* = x_n^* \circ P$. Entonces para cada $x \in X$ tendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x) x_n = P(x)$$

De manera la inversa, si podemos construir una sucesión $(u_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tal que $u_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ y las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x) x_n$ converge $\forall x \in X$, entonces el subespacio $[x_n]$ está complementado por la proyección $X \to [x_n]$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x) x_n$.

3.1.20 Definición. *Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ son congruentes con respecto a (X, Y) si existe un operador $T : X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando (x_n) e (y_n) satisfacen esta condición en el caso particular de $X = Y$, simplemente diremos que son congruentes.*

Supongamos que las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ son congruentes con respecto a (X, Y). El operador T de X a Y que existe por la definición previa preserva todas las propiedades isomórficas de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Por ejemplo, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de X, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de Y; si K_b es la constante básica de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces la constante básica de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es $K_b \|T\| \left\|T^{-1}\right\|$.

El siguiente resultado de estabilidad data de 1940. Más o menos, dice que si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

es una sucesión básica en un espacio de Banach X e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión en X tal que $(\|x_n - y_n\|)_{n=1}^{\infty}$ converge suficientemente rápido a 0, entonces $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son congruentes.

3.1.21 Teorema. *(Principio de las pequeñas perturbaciones). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una base en un espacio de Banach X con constante básica K_b. Si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que*

$$2K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x_n - y_n\|}{\|x_n\|} = \theta < 1,$$

entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son congruentes. En particular:

(I) *$(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base con constante básica como mucho $K_b(1+\theta)(1-\theta)^{-1}$.*

(II) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base, también lo es $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.*

(III) *Si $[x_n]$ está complementado en X, también lo está $[y_n]$.*

Demostración. Para $n \geq 2$ y $x \in [x_n]$ tenemos

$$x_n^*(x)x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^*(x)x_k,$$

donde $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset [x_n]^*$ son los funcionales biortogonales de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces

$$\|x_n^*(x)x_n\| \leq 2K_b \|x\|,$$

y entonces

$$\|x_n^*\| \, \|x_n\| \leq 2K_b.$$

Para $n = 1$ es claro que $\|x_1^*(x)\| \, \|x_1\| \leq K_b$. Estas desigualdades se mantienen si reemplazamos x_n^* por su extensión Hahn-Banach $\hat{x}_n^*$ de X.

Para cada $x \in X$ ponemos

$$T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n^*(x)(y_n - x_n).$$

Entonces T es un operador acotado de X en X con $T(x_n) = y_n$ y con norma

$$\|T\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n^*\| \, \|y_n - x_n\| \leq 1 + 2K_b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n - x_n\|}{\|x_n\|} = 1 + \theta.$$

Más aún,

$$\|T - I_X\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n^*\| \, \|y_n - x_n\| = \theta < 1,$$

lo cual implica que T es invertible y $\left\|T^{-1}\right\| \leq (1-\theta)^{-1}$. $\square$

3.2. Tipos especiales de bases

Saber si un espacio de Banach separable tiene una base e identificar una que permita calcular fácilmente la norma de sus elementos es importante. Sin embargo, este conocimiento pasa a ser muy limitado si estamos interesados en usar las bases como una herramienta para profundizar en la geometría del espacio. En este apartado miraremos de una forma más cuidadosa los tipos espaciales de bases. En particular, consideraremos las nociones de bases shrinking, completamente acotadas, incondicionales y simétricas.

3.2.1. Bases incondicionales

Las bases incondicionales son muy útiles y son las más extensamente estudiadas debido a las buenas propiedades estructurales de los espacios que abarcan. Las bases incondicionales aparecieron por primera vez en 1948 en el trabajo de Karlin, quien demostró que $\mathcal{C}[0,1]$ no puede tener una base incondicional. Probaremos a lo largo del subapartado este hecho.

3.2.1 Definición. *Una base $(u_n)_{n=1}^\infty$ de un espacio de Banach X es incondicional si para cada $x \in X$ las series $\sum_{n=1}^\infty u_n^*(x)u_n$ convergen incondicionalmente.*

Obviamente, $(u_n)_{n=1}^\infty$ es una base incondicional de X si y solo si $(u_{\pi(n)})_{n=1}^\infty$ es una base de X para toda permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

3.2.2 Ejemplo. La base de vectores unitarios estándar $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base incondicional de c_0 y ℓ_p para $1 \leq p < \infty$. Un ejemplo de una base que es condicional (i.e., no es incondicional) es la *base sumatoria* de c_0, definida como

$$f_n = e_1 + \cdots + e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para ver que $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una base de c_0 probamos que para cada $\xi = (\xi(n))_{n=1}^\infty \in c_0$ tenemos $\xi = \sum_{n=1}^\infty f_n^*(\xi)f_n$, donde $f_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*$ son los funcionales biortogonales de $(f_n)_{n=1}^\infty$. Dado $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N f_n^*(\xi)f_n &= \sum_{n=1}^N (e_n^*(\xi) - e_{n+1}^*(\xi))f_n = \sum_{n=1}^N (\xi(n) - \xi(n+1))f_n \\
&= \sum_{n=1}^N \xi(n)f_n - \sum_{n=2}^{N+1} \xi(n)f_{n-1} = \sum_{n=1}^N \xi(n)(f_n - f_{n-1}) - \xi(N+1)f_N \\
&= \sum_{n=1}^N \xi(n)e_n - \xi(N+1)f_N,
\end{aligned}$$

donde hemos asumido que $f_0 = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\xi - \sum_{n=1}^{N} f_n^*(\xi) f_n\right\|_\infty &= \left\|\sum_{N+1}^{\infty} \xi(n) e_n + \xi(N+1) f_N\right\|_\infty \\ &\leq \left\|\sum_{N+1}^{\infty} \xi(n) e_n\right\|_\infty + |\xi(N+1)|\, \|f_N\|_\infty \xrightarrow{N\to\infty} 0,\end{aligned}$$

y $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una base.

Ahora identificaremos el conjunto S de coeficientes $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ tales que las series $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n$ convergen. De hecho, tenemos que $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \in S$ si y solo si existen $\xi = (\xi(n))_{n=1}^\infty \in c_0$ tal que $\alpha_n = \xi(n) - \xi(n+1)$ para todo n. Entonces, claramente, a menos que las series $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ converjan absolutamente, la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n$ en c_0 no es equivalente a la convergencia de $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n \alpha_n f_n$ para todas las elecciones de signos $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$. Por lo tanto $(f_n)_{n=1}^\infty$ no puede ser incondicional.

3.2.3 Lema. *Dada una serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ en un espacio de Banach X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ es incondicionalmente convergente (i.e., $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación π de $\mathbb{N}$).

(b) La serie $\sum_{n=1}^\infty x_{n_k}$ converge para toda sucesión creciente $(n_k)_{k=1}^\infty$.

(c) La serie $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$ converge para cualquier elección de signos $(\varepsilon)_{n=1}^\infty$.

(d) Para cada $\varepsilon > 0$ existe n tal que si F es cualquier subconjunto finito de $\{n+1, n+2, ...\}$, entonces

$$\left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| < \varepsilon.$$

Demostración. Vamos a probar la implicación (a) $\Rightarrow$ (d). Si (d) no es cierto entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada n podemos encontrar un subconjunto finito F_n de $\{n+1, n+2, ...\}$ con

$$\left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| \geq \varepsilon.$$

Vamos a construir una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ diverja.

En primer lugar tomamos $n_1 = 1$ y sea $A_1 = F_{n_1}$. Después cogemos $n_2 = \max A_1$ y sea $B_1 = \{n_1 + 1, ..., n_2\} \setminus A_1$. Repetimos el proceso y tomamos $A_2 = F_{n_2}$, $n_3 = \max A_2$ y $B_2 = \{n_2 + 1, ..., n_3\} \setminus A_2$. Iterando, construimos una sucesión $(n_k)_{k=1}^\infty$ y una partición $\{n_k + 1, ..., n_{k+1}\} = A_k \cup B_k$. Definimos π tal que π permute los elementos de $\{n_k + 1, ..., n_{k+1}\}$ de manera que A_k preceda a B_k. Entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ es divergente porque no es de Cauchy. $\square$

3.2.4 Proposición. *Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X es incondicionalmente convergente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ converge (incondicionalmente) para toda $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$.*

3.2.5 Proposición. *Una base $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es incondicional si y solo si existe una constante $K \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n u_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n u_n \right\| \tag{3.4}$$

siempre que $a_1, ..., a_N, b_1, ..., b_N$ sean escalares satisfaciendo $|a_n| \leq |b_n|$ para $n = 1, ..., N$.

Demostración. Asumimos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es incondicional. Si $\sum_{n=1}^{N} a_n u_n$ converge, entonces también lo hace $\sum_{n=1}^{N} t_n a_n u_n$ para todo $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ por la Proposición 3.2.4. Por el teorema de Banach-Steinhaus, la aplicación lineal $T_{(t_n):X \to X}$ dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n u_n$ es continua. Ahora el principio de acotación uniforme nos da K de manera que se da la desigualdad.

Demostramos ahora la implicación inversa. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ una serie convergente en X. Vamos a probar que las subseries $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} u_{n_k}$ son convergentes para cada sucesión creciente de enteros $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ y apelamos al Lema 3.2.3 para deducir que es incondicionalmente convergente. Dado $\varepsilon > 0$; existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $m_2 > m_1 \geq N$, entonces

$$\left\| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n u_n \right\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Por hipótesis, si $N \leq n_k < ... < n_{k+l}$, tenemos

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{k+l} a_{n_j} u_{n_j} \right\| \leq K \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_k+l} a_j u_j \right\| < \varepsilon,$$

y por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} u_{n_k}$ es de Cauchy. □

3.2.6 Definición. *Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional de un espacio de Banach X. La constante básica incondicional K_u de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es la menor constante K tal que la desigualdad 3.4 es cierta. Entonces decimos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es K-incondicional siempre que $K \geq K_u$.*

Supongamos que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional para un espacio de Banach X. Para cada sucesión de escalares (α_n) con $|\alpha_n = 1|$, sea $T_{(\alpha_n)} : X \to X$ el isomorfismo definido por $T_{(\alpha_n)}(\sum_{n=1}^{N} a_n u_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n a_n u_n$. Entonces

$$K_u = \sup \left\{ \left\| T_{(\alpha_n)} \right\| : (\alpha_n) \text{ escalares}, |\alpha_n| = 1 \text{ para todo } n \right\}$$

Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional de X. Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ existe una proyección lineal P_A de X sobre $[u_k : k \in A]$ definida para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^*(x)u_k$ en X por

$$P_A(x) = \sum_{k\in A} u_k^*(x)u_k.$$

Los miembros del conjunto $\{P_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ son las proyecciones naturales asociadas a la base incondicional $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

3.2.7 Proposición. *Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(I) *La base $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es incondicional.*

(II) *La aplicación P_A está bien definida para cada $A \subseteq \mathbb{N}$.*

(III) *La aplicación P_A está bien definida para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ y $\sup_A \|P_A\| < \infty$.*

(IV) $\sup\{\|P_F(x)\| : F \subseteq \mathbb{N},\ F \text{ finito}\} < \infty$.

(V) *La aplicación P_B está bien definida para cada subconjunto cofinito B de $\mathbb{N}$ y*

$$\sup\{\|P_B(x)\| :\ B \text{ conjunto cofinito de } \mathbb{N}\} < \infty$$

Además, si alguno de los enunciados de arriba es cierto entonces los supremos de III, IV *y* V *coinciden.*

3.2.8 Definición. *Si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base incondicional de X, llamamos al número*

$$K_{su} = \sup\{\|P_A\| : A \subseteq \mathbb{N}\}$$

la constante de supresión-incondicional de la base.

Observemos que en general, tenemos

$$1 \le K_{su} \le K_u \le 2K_{su}.$$

3.2.2. Bases y dualidad: bases completamente acotadas y bases shrinking

Supongamos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de un espacio de Banach X y que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funcionales biortogonales. Uno de los objetivos de este subapartado es establecer condiciones necesarias y suficientes para que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ sea una base de X^*. Este no es siempre el caso, ya que es necesario que X^* sea un espacio separable. De hecho, existen espacios de Banach X con una base y con dual separable tal que X^* no tiene la propiedad de aproximación; por lo tanto, X^* no puede tener una base. Sin embargo, como sucede, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es siempre una sucesión básica en X^*.

A continuación introducimos un lema que necesitaremos en varias demostraciones.

3.2.9 Lema. *(Vuelta parcial del teorema de Banach-Steinhaus). Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales continuos de un espacio de Banach X en un espacio lineal normado Y tal que $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Si $T : X \to Y$ es otro operador, entonces el subespacio*

$$\{x \in X : \|T_n(x) - T(x)\| \to 0\}$$

es cerrado para la norma en X.

3.2.10 Proposición. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X con constante básica K_b y funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Entonces $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para el subespacio $Z = [e_n^*]$ con constante básica no mayor a K_b. Más especificamente:*

1. *Los funcionales coordenados $(e_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ asociados a $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ están dados por $e_n^{**} = j(e_n)|_Z$ para cada n, donde j es el embebimiento canónico de X en su dual segundo X^{**}.*
2. *Las proyecciones de las sumas parciales asociadas a la sucesión básica $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son las restricciones $(S_N^*|_Z)_{N=1}^{\infty}$ de los operadores adjuntos de las proyecciones de las sumas parciales asociadas a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Más aún,*

$$Z = \left\{ x^* \in X^* : \lim_{N\to\infty} S_N^*(x^*) = x^* \right\}$$

Demostración. Los funcionales $(e_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ satisfacen $e_n^{**}(e_k^*) = 1$ si $n = k$ y 0 en otro caso. Basta probar que los operadores $T_N : Z \to Z$ definidos por

$$T_N(x^*) = \sum_{k=1}^{N} e_k^{**}(x^*)e_k^*, \quad x^* \in \mathbb{Z},$$

satisfacen $\|T_N\| \leq K_b$ y apelamos a la vuelta parcial del teorema de Banach-Steinhaus.

Sea $(S_N^*)_{N=1}^{\infty}$ la sucesión de operadores adjuntos de las proyecciones de las sumas parciales asociadas a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Para cada $x \in X$ y $x^* \in X^*$:

$$S_N^*(x^*)(x) = x^*(S_N(x)) = \sum_{k=1}^{N} e_k^*(x)x^*(e_k) = \sum_{k=1}^{N} e_k^*(x)j(e_k)(x^*).$$

Por tanto $S_N^* = \sum_{k=1}^{N} j(e_k)e_k^*$ y $T_N = S_N^*|_Z$. De este modo:

$$\sup_N \|T_N\| \leq \sup_N \|S_N^*\| = \sup_N \|S_N\| = K_b.$$

□

3.2.11 Ejemplo. La identificación natural de ℓ_1^* con ℓ_∞ muestra que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base para el subespacio de ℓ_1^* isométricamente isomorfo a c_0.

Vamos a introducir una definición que nos será útil en la siguiente Proposición.

3.2.12 Definición. *Supongamos que X es un espacio normado e Y es un subespacio de X^*. Consideremos una nueva norma en X dada por*

$$\|x\|_Y = \sup\{|y^*(x)| : y^* \in Y,\ \|y^*\| = 1\}, \quad x \in X,$$

entonces se dice que Y es un subespacio c-normado para X en X^*.

En términos generales, la siguiente proposición dice dice que si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para un espacio de Banach X, entonces el subespacio $Z = [e_n^*]$ de X^* es razonablemente grande, en el sentido de que es $1/K_b$-normado para X.

3.2.13 Proposición. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X con constante básica K_b y sea $Z = [e_n^*]$. La norma en X definida por*

$$\|x\|_Z = \sup\{|h(x)| : h \in Z,\ \|h\| \leq 1\}$$

satisface

$$K_b^{-1} \|x\| \leq \|x\|_Z \leq \|x\|, \quad x \in X.$$

Así:

(I) *El subespacio Z de X^* es $1/K_b$-normado para X.*

(II) *La aplicación $x \to j(x)|_Z$ define un embebimiento isomórfico de X en Z^*. Este embebimiento es isométrico si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como $Z \subseteq X^*$,

$$\|x\|_Z \leq \sup\{|x^*(x)| : x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leq 1\} = \|x\|.$$

Por la desigualadad inversa cogemos $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = \|x\|$. Para cada N,

$$\frac{|(S_N^* x^*)x|}{K_b} \leq \frac{|(S_N^* x^*)x|}{\|S_N^* x^*\|} \leq \sup\{|h(x)| : h \in Z,\ \|h\| \leq 1\} = \|x\|_Z .$$

Dejamos que $N \to \infty$ y usamos que si $\|S_N(x) - x\| \to 0$ entonces $|S_N^* x^*(x)| = |x^*(S_N x)| \to \|x\|$. □

Como consecuencia del embebimiento isomórfico de X en Z^* y la Proposición 3.2.10 obtenemos una propiedad reflexiva interesante para sucesiones básicas.

3.2.14 Corolario. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base de un espacio de Banach X. La sucesión básica $(e_n^{**})_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (isométricamente equivalente si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona).*

Aunque $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ puede no ser una base para X^*, uno podría ir más lejos y, basado en la siguiente proposición, decir que $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base débil* para X^*.

3.2.15 Proposición. *Sea $(e_n)_{n=1}^\infty$ una base para un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^\infty$. Entonces para cada $x^* \in X^*$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que*

$$x^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^*,$$

la convergencia de la serie está en la topología débil de X^*. Más precisamente,*
$x^* =$ *débil** $- \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x^*(e_n)e_n^*$.

Demostración. Para cada $x \in X$,

$$|(x^* - S_N^*(x^*))(x)| = |(x^*(x - S_N(x)))| \leq \|x^*\| \, \|x - S_N(x)\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

□

De la Proposición 3.2.10 (1) deducimos que $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ será una base para X^* (en el sentido regular) si y solo si $[e_n^*] = X^*$. Nuestro próximo resultado proporciona una comprobación útil para esto, pero primero veamos un caso trivial.

3.2.16 Proposición. *Si $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base para un espacio de Banach reflexivo X, entonces $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para X^*.*

Demostración. La Proposición 3.2.15 nos dice que el cierre lineal de $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es denso débil* en X^*. Como X es reflexivo, las topologías débil y la débil* de X^* coinciden, por lo que el cierre lineal de $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es de hecho denso débilmente en X^*. Una aplicación del teorema de Mazur (expuesto a continuación) asegura que el cierre lineal de $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es denso para la norma en X^* , que junto a la Proposición 3.2.10 (1) da que $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para X^*. □

3.2.17 Teorema. *(Teorema de Mazur). Si C es un conjunto convexo en un espacio normado X, entonces la clausura de C en la norma de la topología, $\bar{C}$, coincide con $\bar{C}^w$, la clausura de C en la topología débil.*

3.2.18 Ejemplo. Supongamos $1 < p < \infty$. Si $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base para ℓ_p [respectivamente, $L_p[0,1]$], entonces $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para ℓ_q [respectivamente $L_q[0,1]$], donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3.2.19 Proposición. *Supongamos que $(e_n)_{n=1}^\infty$ es una base para un espacio de Banach X. Los funcionales coordenados $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ son una base para X^* si y solo si*

$$\lim_{N\to\infty} \|x^*\|_N = 0 \quad \textit{para cada } x^* \in X^*, \tag{3.5}$$

donde $\|x^*\|_N$ *es la norma de* x^* *restringida al espacio (cola)* $[e_n]_{n>N}$, *i.e.*,

$$\|x^*\|_N = \sup\{|x^*(y)| : y \in [e_n]_{n>N}, \ \ \|y\| \leq 1\}.$$

Demostración. Supongamos $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ es una base para X^*. Cada $x^* \in X^*$ puede descomponerse como $(x^* - S_N^* x^*) + S_N^* x^*$ para cada N. Entonces

$$\|x^*\|_N \leq \left\|(x^* - S_N^* x^*)|_{[e_n]_{n>N}}\right\| + \left\|S_N^* x^*|_{[e_n]_{n>N}}\right\| \leq \|x^* - S_N^* x^*\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Asumamos ahora que 3.5 es válido. Sea x^* un elemento de X^*. Como para cada $x \in X$, $(I_X - S_N)(x)$ está en el subespacio $[e_n]_{n>N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |(x^* - S_N^* x^*)(x)| &= |x^*(I_X - S_N)(x)| \\ &\leq \left\|x^*|_{[e_n]_{n\geq N+1}}\right\| \|I_X - S_N\| \|x\| \\ &\leq (K_b + 1)\left\|x^*|_{[e_n]_{n\geq N+1}}\right\| \|x\|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|x^* - S_n^* x^*\| \leq (K_b + 1)\left\|x^*|_{[e_n]_{n\geq N+1}}\right\| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Así $X^* = [e_n^*]$ y hemos acabado. □

3.2.20 Definición. *Una base* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *cumpliendo la propiedad 3.5 se dice ser shrinking.*

3.2.21 Ejemplo. La base unitaria de vectores $(e_n)_{n=1}^\infty$ de c_0 es shrinking, ya que $c_0^* = \ell_1$ y dado $x^* = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ tenemos

$$\|x^*\|_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

En general, solo porque un espacio tenga una base shrinking no significa que toda base para ese espacio sea shrinking también. Las base sumatoria $(f_n)_{n=1}^\infty$ de c_0, por ejemplo, no es shrinking. Para ver esto podemos tomar el funcional coordenado e_1^* correspondiente a el primer vector de la base canónica de c_0 y simplemente observar que $e_1^*(f_n) = 1$ para todo n, por lo que la condición 3.5 no se puede dar.

A continuación damos una caracterización adicional de bases shrinking.

3.2.22 Proposición. *Una base* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *de un espacio de Banach* X *es shrinking si y solo si cada bloque acotado de sucesión básica de* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *es débilmente nula.*

Demostración. Asumimos que $(e_n)_{n=1}^\infty$ no es shrinking. Entonces $Z \neq X^*$; por lo tanto existe $x^* \in X^* \setminus [e_n^*]$, $\|x^*\| = 1$, tal que por la Proposición 3.2.15 la serie $\sum_{n=1}^\infty x^*(e_n)e_n^*$ converge a x^* en la topología débil* de X^* pero no converge en la topología de la norma de X^*. Usando la condición de Cauchy, podemos encontrar dos sucesiones de naturales positivos $(p_n)_{n=1}^\infty$, $(q_n)_{n=1}^\infty$ y $\delta > 0$ tal que $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < p_3 \leq q_3 < \ldots$ y $\left\|\sum_{n=p_k}^{q_k} x^*(e_n)e_n^*\right\| > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así para cada k existe $x_k \in X$, $\|x_k\| = 1$, para lo cual $\left\|\sum_{n=p_k}^{q_k} x^*(e_n)e_n^*(x_k)\right\| > \delta$. Ponemos

$$y_k = \sum_{n=p_k}^{q_k} e_n^*(x_k)e_n^*, \quad k = 1, 2, \ldots$$

La sucesión $(y_k)_{k=1}^\infty$ es un bloque de sucesión básica de $(e_n)_{n=1}^\infty$ que no es débilmente nulo, ya que $x^*(y_k) > \delta$ para todo k.

La implicación inversa se sigue rápidamente de la Proposición 3.2.19. □

Una definición compañera a la de bases shrinking que fue dada por James como una herramienta para el estudio de la estructura de los espacios de Banach es la de bases *completamente acotadas*. Esta propiedad había sido usada por Dunford y Morse en 1936 para garantizar la existencia de derivadas de aplicaciones de Lipschitz en la recta real tomando valores en espacios de Banach.

3.2.23 Definición. *Sea X un espacio de Banach. Una base $(e_n)_{n=1}^\infty$ de X es una base completamente acotada si para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que*

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| < \infty,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ converge.

3.2.24 Ejemplo. (a) La base canónica de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ es completamente acotada.

(b) La base natural $(e_n)_{n=1}^\infty$ de c_0 no es completamente acotada. En efecto, las series $\sum_{n=1}^\infty e_n$ no son convergentes en c_0 a pesar de que

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^N e_n\right\|_\infty = \sup_N \left\|(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{N}, 0, 0, \ldots)\right\|_\infty = 1.$$

(c) La base sumatoria $(f_n)_{n=1}^\infty$ de c_0 no es completamente acotada, ya que

$$\sup_N \left\|\sum_{n=1}^N (-1)^n f_n\right\|_\infty = 1,$$

pero las series $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n f_n$ no convergen.

Los dos próximos teoremas mostrarán que las bases completamente acotadas y las bases shrinking están en dualidad. Antes de enunciar estos resultados y probarlos deberíamos enunciar un lema sobre bases completamente acotadas que es de interés y aísla una propiedad que necesitamos.

3.2.25 Lema. *Supongamos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base completamente acotada para un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Entonces para cada $x^{**} \in X^{**}$ tenemos*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^*)e_n \in X.$$

Demostración. Para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^*)e_n = S_N^{**}(x^{**}),$$

donde S_N^{**} es el dual doble de S_N. Por lo tanto,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^{**})e_n \right\| = \|S_n^{**}(x^{**})\| \leq \sup_N \|S_N^{**}\| \, \|x^{**}\| = K_b \, \|x^{**}\| \, .$$

El hecho de que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ sea completamente acotada implica que $\lim_N \sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^*)e_n \in X$. □

Vamos a introducir un teorema que nos será útil más adelante.

3.2.26 Teorema. *(Teorema de Banach-Alaoglu). Si X es un espacio lineal normado, entonces el conjunto $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es debil* compacto.*

3.2.27 Teorema. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Son equivalentes:*

(I) *$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base completamente acotada para X.*

(II) *$(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base shrinking para $Z = [e_n^*]$, i.e., la sucesión de sus funcionales biortogonales $(j(e_n)|_Z)_{n=1}^{\infty}$ es una base para Z^*.*

(III) *La aplicación $x \mapsto j(x)|_Z$ define un isomorfismo de X en Z^* que es isométrico si $K_b = 1$.*

Demostración. $(I) \Rightarrow (III)$ Usando la Proposición 3.2.13 solo necesitamos ver que la aplicación es sobreyectiva. Dado $h^* \in Z^*$, existen $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}|_Z = h^*$. Por el Lema 3.2.25 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{**}(e_n^*)e_n$ convergen a algún $x \in X$. Ahora $j(x)|_Z = h^*$, ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$j(x)|_Z(e_k^*) = e_k^*(x) = x^{**}(e_k^*) = h^*(e_k^*).$$

$(III) \Rightarrow (II)$ Asumimos que $x \mapsto j(x)|_Z$ es un isomorfismo de X en Z^*. Entonces $(j(e_n)|_Z)_{n=1}^{\infty}$ es una base para Z^* y es también la sucesión de funcionales coordenados para $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Esto significa que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base shrinking para Z.

$(II) \Rightarrow (I)$ Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares para los cuales

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < \infty.$$

Como $(\sum_{n=1}^{N} a_n j(e_n))_{N=1}^{\infty}$ está acotada en X^{**}, entonces por el teorema de Banach-Alaoglu (3.2.26) existe un punto de acumulación debil* $x^{**} \in X^{**}$ de esa sucesión. Sea $h^* = x^{**}|_Z$.

Como

$$\lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n j(e_n)(e_k^*) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} a_n e_k^*(e_n) = a_k,$$

tenemos que $h^*(e_k^*) = x^{**}(e_k^*) = a_k$ para todo k. Usando la hipótesis y la Proposición 3.2.10, obtenemos

$$h^* = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{***}(h^*) e_n^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} h^*(e_n^*) e_n^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n j(e_n)|_Z.$$

En particular, la serie anterior converge en Z^*. Como por la Proposición 3.2.13, la aplicación $x \mapsto j(x)|_Z$ es un embebimiento isomórfico, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge en X. □

3.2.28 Corolario. *El espacio c_0 no tiene una base completamente acotada.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 3.2.27, teniendo en cuenta que c_0 no es isomórfico a un espacio dual. □

3.2.29 Teorema. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base para un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Son equivalentes:*

(I) *$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base shrinking para X.*

(II) *$(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es una base completamente acotada para $Z = [e_n^*]$.*

(III) *$Z = X^*$.*

Demostración. Simplemente aplicar el Teorema 3.2.27 a la base $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ de Z teniendo en cuenta el Corolario 3.2.14. □

En 1948, Karlin [3] planteó la siguiente pregunta: Si el dual X^* de un espacio de Banach X tiene un base, ¿tiene X un base? Johnson, Rosenthal, y Zippin dieron en 1971 una respuesta afirmativa a esta pregunta [4], resolviendo uno de los problemas fundamentales en la teoría de bases. Ellos mostraron que de hecho X tiene una base shrinking. De su resultado se sigue que si X tiene una base y X^* es separable y satisface la propiedad de aproximación, entonces X^* tiene un base. Una pregunta relacionada pero más fácil es esta:

Si X tiene una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, ¿qué propiedad de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ nos dice si X es el dual de otro espacio de Banach con una base? El Teorema 3.2.27 nos da la respuesta: si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base completamente acotada, entonces X es isomorfo al espacio dual $Z^* = [e_n^*]^*$.

Puede que no sepamos mucho más de X^* más allá de que tiene una base completamente acotada si todo lo que sabemos de X es que tiene un base shrinking. Sin embargo, es posible dar una descripción muy útil de X^{**} como el espacio de todas las sucesiones de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ para las cuales $\sup_N \sum_{n=1}^{N} a_n e_n < \infty$. El propósito original del siguiente teorema era sentar las bases del espacio de James $\mathcal{J}$. Su prueba usa una combinación de ideas esencialmente contenidas en la demostración del Teorema 3.2.27 por lo que no la vamos a realizar.

3.2.30 Teorema. *Supongamos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base shrinking para un espacio de Banach X con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$. La aplicación*

$$x^{**} \to (x^{**}(e_n^*))_{n=1}^{\infty}$$

define un isomorfismo de X^{**} con el espacio de todas las sucesiones de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| < \infty$. En particular,

$$\|x^{**}\| \approx \sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^*) e_n \right\|,$$

y si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces

$$\|x^{**}\| \approx \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} x^{**}(e_n^*) e_n \right\|.$$

La imagen canónica de X dentro de X^{**} corresponde a todas las sucesiones de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ para las cuales $(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n)_{n=1}^{\infty}$ no sólo está acotada sino que converge en norma.

Ahora vamos a exponer el resultado principal de este subapartado que se debe a James [5].

3.2.31 Teorema. *Sea X un espacio de Banach. Si X tiene una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces X es reflexivo si y solo si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base completamente acotada y shrinking.*

Demostración. Asumimos que X es reflexivo y que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base para X. Entonces $X^* = Z$. Si no, usando el teorema de Hahn-Banach, uno puede encontrar $0 \neq x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**}(h) = 0$ para todo $h \in Z$. Por reflexividad existe $0 \neq x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n \in X$ tal que $x = x^{**}$. En particular, tendríamos $0 = x^{**}(e_n^*) = e_n^*(x)$ para todo n, lo cual implicaría $x = 0$. Así $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es shrinking. Ahora consideremos $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ como una base para el espacio de Banach reflexivo $X^* = Z$. Lo anterior muestra que $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ es shrinking; por tanto por el Teorema 3.2.27, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es completamente acotada. $\square$

Este teorema da un criterio para la reflexividad que es muy útil, particularmente en la construcción de ejemplos. El hecho de que la base canónica de ℓ_1 no sea shrinking y que la base canónica de c_0 no sea completamente acotada están explicados ahora por la no reflexividad de estos espacios.

Durante los 1960s estaba de moda estudiar la estructura de los espacios de Banach entendiendo las propiedades de sus bases. Por supuesto, este hecho se vio algo debilitado cuando Enflo demostró que no todos los espacios de Banach separables tienen una base [6]. Uno de los puntos altos de esta teoría fue el teorema de Zippin [7] el cual dice que un espacio de Banach con una base es reflexivo si y solo si toda base está completamente acotada o si y solo si toda base es shrinking. Así, todo espacio de Banach no reflexivo que tiene una base debe de tener al menos una base que no sea completamente acotada y al menos una base que no sea shrinking.

3.2.3. Bases simétricas

A continuación estudiamos un tipo especial de bases que incluye a las bases canónicas de los espacios ℓ_p y c_0.

3.2.32 Definición. *Una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es simétrica si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a $(e_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ para toda permutación π de $\mathbb{N}$.*

Las bases simétricas son en particular incondicionales. También tienen la propiedad de ser equivalentes a todas sus subsucesiones (infinitas), como dice el próximo lema.

3.2.33 Lema. *Supongamos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base simétrica de un espacio de Banach X. Entonces existe una constante D tal que*

$$D^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{N} a_i e_{j_i}\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{N} a_i e_{k_i}\right\| \leq D\left\|\sum_{n=1}^{N} a_i e_{j_i}\right\|$$

para cada $N \in \mathbb{N}$, cada elección de escalares $(a_i)_{i=1}^{N}$ y cualesquiera dos familias de números naturales $\{j_1, ..., j_N\}$ y $\{k_1, ..., k_N\}$.

Demostración. Es suficiente probar el lema para la sucesión básica $(e_n)_{n \geq n_0}$ para algún n_0. Si es falso, entonces para cada n_0 podemos construir una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ con $p_0 = 0$, números naturales $m_n \leq p_n - p_{n-1}$, escalares $(a_{n,i})_{n=1,i=1}^{\infty,m_n}$, y familias $\{j_{n,1}, ..., j_{n,m_n}\}$ y $\{k_{n,1}, ..., k_{n,m_n}\}$ tales que para todo $n = 1, 2, ...$ tenemos

$$p_{n-1} + 1 \leq j_{n,i}, k_{n,i} \leq p_n, \quad 1 \leq i \leq m_n,$$
$$\left\|\sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} e_{j_{n,i}}\right\| < 2^{-n},$$

y

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_n} a_{n,i} e_{k_{n,i}} \right\| > 2^n.$$

Ahora podemos hacer una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\pi[p_{n-1}+1, p_n] = [p_{n-1}+1, p_n]$ y $\pi(j_{n,i}) = k_{n,i}$, y esto contradice la equivalencia de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(e_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$. □

3.2.34 Nota. El recíproco del lema no tiene por qué ser cierto. De hecho, la base sumatoria de c_0 es equivalente a todas sus subsucesiones y no es ni siquiera incondicional.

3.2.35 Definición. *Una base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es subsimétrica si es incondicional y para cada sucesión creciente de enteros $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, la subbase $(e_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ es equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.*

El Lema 3.2.33 dice que las bases simétricas son subsimétricas. Sin embargo, estos dos conceptos no coinciden tal y como muestra el siguiente ejemplo, dado por Garling [8].

3.2.36 Ejemplo. Una base subsimétrica que no es simétrica.

Sea X el espacio de Banach de todas las sucesiones de escalares $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ para las cuales

$$\|\xi\| = \sup \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_{n_k}|}{\sqrt{k}} < \infty,$$

se toma el supremo de todas las sucesiones crecientes de enteros $(n_k)_{k=1}^{\infty}$. Dejamos para el lector la tarea de comprobar que X, con la norma dotada es un espacio de Banach cuyos vectores unidad $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ forman una base subsimétrica que no es simétrica.

Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base simétrica de un espacio de Banach X. Para cada permutación π de $\mathbb{N}$ y cada sucesión de signos $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, existe un automorfismo

$$T_{\pi,\varepsilon} : X \to X, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \mapsto T_{\pi,\varepsilon}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_{\pi(n)}.$$

El principio de acotación uniforme nos da un número K tal que

$$\sup_{\pi,\varepsilon} \|T_{\pi,\varepsilon}\| \leq K,$$

i.e., la estimación

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_{\pi(n)} \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \right\| \tag{3.6}$$

es válida para todas las elecciones de signos (ε_n) y todas las permutaciones π.

La constante más pequeña $1 \leq K$ en 3.6 es llamada la *constante simétrica* de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ y se denotará por K_s. Entonces diremos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es K-simétrica siempre que $K_s \leq K$.

Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in X$, pongamos

$$|||x||| = \sup \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n e_{\pi(n)} \right\|, \tag{3.7}$$

el supremo tomado sobre todas las opciones de escalares (ε_n) de signos y todas las permutaciones de números naturales. La ecuación 3.7 define una nueva norma en X equivalente a $\|\cdot\|$, ya que $\|x\| \leq |||x||| \leq K\,\|x\|$ para todo $x \in X$. Con respecto a esta norma, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una 1-simétrica base de X.

3.3. Los espacios L_p para $1 \leq p < \infty$

En este capitulo presentaremos la base de Haar en $L_p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$ y estudiaremos algunas de sus propiedades. Continuaremos el estudio de las base de Haar en el Capítulo 3.4.

3.3.1. La base de Haar en $L_p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$

El *sistema de Haar* es una sucesión de funciones $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas en $[0,1]$ por $h_1 = 1$ y para $n = 2^k + s$, donde $k = 0, 1, 2, ...,$ y $s = 1, 2, ..., 2^k$,

$$h_n(t) = \chi_{\left[\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right)}(t) - \chi_{\left[\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}\right)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{2s-2}{2^{k+1}} \leq t < \frac{2s-1}{2^{k+1}} \\ -1 & \text{si } \frac{2s-1}{2^{k+1}} \leq t < \frac{2s}{2^{k+1}} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dados $k = 0, 1, 2, ...$ y $1 \leq s \leq 2^k$, cada intervalo de la forma $\left[\frac{s-1}{2^k}, \frac{s}{2^k}\right)$ es llamado *diádico*. Es a menudo útil etiquetar los elementos del sistema de Haar por sus soportes; por tanto escribimos h_I para denotar h_n cuando I es el soporte del intervalo diádico de h_n.

En este apartado veremos que el sistema de Haar es una base de Schauder (no normalizada) en L_p para cada $1 \leq p < \infty$ y que es incondicional cuando $1 < p < \infty$. Necesitaremos el concepto de expectativa condicional, que introducimos a continuación.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad, y Σ' una sub-σ-álgebra de Σ. Dados $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, podemos definir una medida, ν, en Σ' como

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \quad E \in \Sigma'.$$

La medida ν es absolutamente continua con respecto a $\mu|_{\Sigma'}$; por el teorema de Radon-Nikodym, existe una (única, salvo conjuntos de medida cero) función Σ'-medible $\psi \in L_1(\Omega, \Sigma', \mu)$ tal que

$$\nu(E) = \int_E \psi d\mu, \quad E \in \Sigma'$$

3.3.1 Definición. *Dados $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, la expectativa condicional de f en el σ-álgebra Σ' es la (única) función ψ que satisface*

$$\int_E f d\mu = \int_E \psi d\mu, \quad \forall E \in \Sigma'.$$

Denotaremos a la función ψ por $\mathbb{E}(f|\Sigma')$.

Tengamos en cuenta que si Σ' consiste en innumerables $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ disjuntos, la definición de $\mathbb{E}(f|\Sigma')$ es especialmente simple:

$$\mathbb{E}(f|\Sigma')(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_j)} \left(\int_{A_j} f d\mu \right) \chi_{A_j}(t).$$

También observamos que si $f \in L_1(\mu)$, para toda función simple Σ'-medible g, tenemos

$$\int_\Omega fg d\mu = \int_\Omega g\mathbb{E}(f|\Sigma') d\mu$$

y

$$\mathbb{E}(fg|\Sigma') = g\mathbb{E}(f|\Sigma').$$

3.3.2 Lema. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y supongamos que Σ' es un sub-σ-álgebra de Σ. Entonces $\mathbb{E}(\cdot|\Sigma')$ es una proyección lineal de norma uno de $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ en $L_p(\Omega, \Sigma', \mu)$ para cada $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. Fijamos $1 \leq p \leq \infty$. Es inmediato comprobar que $\mathbb{E}(\cdot|\Sigma')^2 = \mathbb{E}(\cdot|\Sigma')$. Si $f \in L_p(\mu)$, usando la desigualdad de Hölder en $L_p(\Omega, \Sigma', \mu)$, tenemos

$$\begin{aligned} \left\|\mathbb{E}(\cdot|\Sigma')\right\|_p &= \sup\left\{ \int_\Omega \mathbb{E}(\cdot|\Sigma') g d\mu : \text{g simple } \Sigma'\text{-medible con } \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \int_\Omega fg d\mu : \text{g simple } \Sigma'\text{-medible con } \|g\|_q \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \int_\Omega fg d\mu : \text{g simple con } \|g\|_q \leq 1 \right\} = \|f\|_p \end{aligned}$$

□

3.3.3 Nota. El resultado anterior también es válido en el caso $p = \infty$.

3.3.4 Proposición. *El sistema de Haar es una base monótona en L_p* para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Consideremos una sucesión creciente de σ-álgebras, $(\mathcal{B})_{n=1}^{\infty}$, contenida en el σ-álgebra de Borel de $[0,1]$ definida como sigue: sea $\mathcal{B}_1$ el σ-álgebra trivial, $\{\phi, [0,1]\}$, y para $n = 2^k + s$ ($k = 0, 1, 2, ...,\ 1 \le s \le 2^k$) sea $\mathcal{B}_n$ el subálgebra finito de los conjuntos de Borel de $[0,1]$ cuyos elementos son los intervalos diádicos de la familia

$$\mathcal{F}_n = \begin{cases} \left[\frac{j-1}{2^{k+1}}, \frac{j}{2^{k+1}}\right) & \text{para } j = 1, ..., 2s \\ \\ \left[\frac{j-1}{2^{k}}, \frac{j}{2^{k}}\right) & \text{para } j = s+1, ..., 2^k \end{cases}$$

Fijamos $1 \le p < \infty$. Para cada n, $\mathbb{E}_n$ denotará al operador de expectativa condicional en el σ-álgebra $\mathcal{B}_n$. Por el Lema 3.3.2 $\mathbb{E}_n$ es una proyección de norma uno de L_p en $L_p([0,1], \mathcal{B}_n, \lambda)$, el espacio de funciones que son constantes en intervalos de la familia $\mathcal{F}_n$. Denotaremos este espacio por $L_p(\mathcal{B}_n)$. Claramente, *rango* $\mathbb{E}_n = n$. Además, $\mathbb{E}_n\mathbb{E}_m = \mathbb{E}_m\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_{\text{mín}\{m,n\}}$ para cualesquiera dos enteros positivos m, n.

Por otro lado, el conjunto

$$\{f \in L_p : \|\mathbb{E}_n(f) - f\| \to 0\}$$

es cerrado por la vuelta parcial del teorema de Banach-Steinhaus y contiene al conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_p(\mathcal{B}_k)$, el cual es denso en L_p. Por lo tanto $\|\mathbb{E}_n(f) - f\| \to 0$ para todo $f \in L_p$. Por la Proposición 3.1.7 L_p tiene una base cuya proyecciones naturales son $(\mathbb{E}_n)_{n=1}^{\infty}$. Esta base es de hecho el sistema de Haar, porque para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathbb{E}_m(h_n) = h_n$ para $m \ge n$ y $\mathbb{E}_m h_n = 0$ para $m < n$. La constante básica es $\sup_n \|\mathbb{E}_n\| = 1$ □

3.3.5 Notas. (a) El sistema de Haar tal y como lo hemos definido no está normalizado en L_p para $1 \le p < \infty$. Está normalizado en L_∞, ya que $\left\|h_{2^k+s}\right\|_p = (1/2^k)^{1/p}$. Para normalizarlo en L_p uno debe tomar $h_n / \|h_n\|_p = |I_n|^{-1/p} h_n$, donde I_n denota el soporte de la función de Haar h_n.

(b) Observemos que si $f \in L_p$ $(1 \le p < \infty)$, entonces

$$\mathbb{E}_n(f) - \mathbb{E}_{n-1}(f) = \left(\frac{1}{|I_n|}\int f(t)h_n(t)dt\right) h_n$$

Deducimos que los funcionales duales asociados al sistema de Haar están dados por

$$h_n^* = \frac{1}{|I_n|} h_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

y la serie de expansión de $f \in L_p$ en términos de la base de Haar es

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|I_n|}\int f(t)h_n(t)dt\right) h_n.$$

Observamos que si p=2, entonces $(h_n/\|h_n\|_2)_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para el espacio de Hilbert L_2 y por tanto incondicional. Este es un hecho importante, en realidad, la base de Haar es una base incondicional en L_p para $1 < p < \infty$. Esto fue probado por Paley en 1932. Mucho más recientemente, Burkholder [9] estableció la *mejor* constante. Vamos a presentar la demostración de Burkholder de 1988 [10]. Aunque aquí solamente el caso real, la misma demostración funciona para escalares complejos con la misma constante; sin embargo, los cálculos necesarios para el caso complejo son un poco más duros de seguir. Para nuestros objetivos la constante no es tan importante, y simplemente nos damos cuenta de que si la base de Haar es incondicional para escalares reales, rápidamente comprobamos que es incondicional para escalares complejos. Hay un inconveniente a la discusión de Burkholder: es demasiado inteligente en el sentido de que la demostración parece hecha por arte de magia.

Empezamos con algunos cálculos elementales.

3.3.6 Lema. *Supongamos $p > 2$. Entonces*

$$\frac{p^{p-2}}{(p-1)^{p-1}} < 1 \tag{3.8}$$

Demostración. Si cogemos $t = p - 1$ la desigualdad 3.8 es equivalente a

$$H(t) = -(t-1)\log(1+t) + t\log(t) > 0, \quad \forall t > 1.$$

En efecto, diferenciando H da

$$H'(t) = \frac{2}{t+1} - \log\left(\frac{1+t}{t}\right) \geq \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t(t+1)} > 0, \quad \forall t > 1.$$

Por lo tanto $H(t) > H(1) = 0$ para todo $t > 1$. □

En el siguiente lema introduciremos una función misteriosa que nos permitirá probar el teorema de Burkholder. Esta función parece ser sacada de la manga, aunque hay buenas razones detrás de su selección. El uso de tales funciones para probar desigualdades agudas ha sido desarrollado extensamente por Nazarov, Treil y Volberg quien las llamo las *funciones de Belmerg.*

3.3.7 Lema. *Supongamos $p > 2$ y definimos una función φ en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ por*

$$\varphi(x,y) = (x+y)^{p-1}((p-1)x - y), \quad x, y \geq 0.$$

(I) *La siguiente desigualdad es válida para todo (x, y) con $x \geq 0$ e $y \geq 0$:*

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-2}}\varphi(x,y) \leq (p-1)^p x^p - y^p.$$

(II) *Para cualesquiera números reales x, y, a y para $\varepsilon = \pm 1$,*

$$\varphi(|x+a|, |y+\varepsilon a|) + \varphi(|x-a|, |y-\varepsilon a|) \geq 2\varphi(|x|, |y|). \tag{3.9}$$

Demostración. (I) Por homogeneidad podemos suponer que $x + y = 1$. Entonces es suficiente mostrar que la función

$$G(x) = \frac{p^{p-2}}{(p-1)^{p-1}}((p-1)^p x^p - (1-x)^p) - px + 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

es no negativa. Las primeras dos derivadas de G son

$$G'(x) = \frac{p^{p-1}}{(p-1)^{p-1}}((p-1)^p x^{p-1} + (1-x)^{p-1}) - p,$$
$$G''(x) = \frac{p^{p-1}}{(p-1)^{p-2}}((p-1)^p x^{p-2} + (1-x)^{p-2}).$$

Como $p > 2$, G'' es creciente. Aún más,

$$G''(0) = -\frac{p^{p-1}}{(p-1)^{p-2}} < 0 < p((p-1)^2 - 1) = G''\left(\frac{1}{p}\right).$$

Por tanto, existe $0 < a < \frac{1}{p}$ tal que G es cóncava en $[0, a]$ y convexa en $[a, 1]$. Nos damos cuenta de que

$$G\left(\frac{1}{p}\right) = G'\left(\frac{1}{p}\right) = 0.$$

Consecuentemente, por la convexidad de G en $[a, 1]$, $G(x) > 0$ para todo $x \in [a, 1] \setminus \{\frac{1}{p}\}$. Uniendo esto con $G(a) > 0$ y aplicando 3.8 tenemos:

$$G(0) = 1 - \frac{p^{p-2}}{(p-1)^{p-1}} > 0.$$

Por lo tanto, por la concavidad de G en $[0, a]$, $G(x) > 0$ para todo $x \in [0, a]$.

(II) El caso $\varepsilon = -1$ se puede deducir del caso $\varepsilon = 1$ reemplazando y por $-y$. Para probar la desigualdad con $\varepsilon = 1$ consideramos la familia de funciones

$$F_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \varphi(|t+s|, |t-s|),$$

definido para cada $s \in \mathbb{R}$. Entonces, en orden de obtener 3.9 basta ver que F_s es una función convexa para cada s real. En efecto, si este fuera el caso, tendríamos:

$$F_s(t+a) + F_s(t-a) \geq 2F_s(t), \ \forall t, a \in \mathbb{R},$$

y escogiendo s y t tal que $t + s = x$ y $t - s = y$, tendríamos la desigualdad deseada.

Para mostrar la convexidad de las funciones F_s, notamos que por un argumento de continuidad, es suficiente tratar con $s \neq 0$. Ahora, si $s \neq 0$, tenemos $F_s(t) = |s|^p F_1(\frac{t}{s})$. Por eso solo necesitamos probar que F_1 es una función convexa. Claramente, F_1 es continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Un cálculo sencillo nos da:

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} p2^{p-1}(-t)^{p-2}((p-2)t-(p-1)) & \text{si } t < -1, \\ -p2^{p-1} & \text{si } -1 < t < 1, \\ p2^{p-1}t^{p-2}((p-2)t-(p-1)) & \text{si } 1 < t. \end{cases}$$

De aquí es claro que F_1' es creciente en $(-\infty, -1)$ y constante en $(-1, 1)$. Diferenciando nuevamente en puntos $t > 1$, obtenemos

$$F_1''(t) = p(p-1)(p-2)2^{p-1}(t-1)t^{p-2} > 0.$$

Por lo que F_1' es también creciente en $(1, \infty)$. En los puntos frontera ± 1, donde F_1 puede no ser suave,

$$F_1'((-1)^-) < F_1'((-1)^+) = F_1'(1^-) = F_1'(1^+).$$

Consecuentemente, F_1 es convexo en toda la recta real.

$\square$

3.3.8 Teorema. *Supongamos* $1 < p < \infty$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Sea* $p^* = \max(p, q)$. *La base de Haar* $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ *en* L_p *es incondicional con constante incondicional como mucho* $p^* - 1$. *Esto es,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n h_n \right\|_p \leq (p^* - 1) \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n h_n \right\|_p,$$

siempre que $N \in \mathbb{N}$, *para cualesquiera escalares reales* $a_1, ..., a_N$ *y cualesquiera elecciones de signos* $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N$.

Demostración. Supongamos primero $p > 2$, en cuyo caso $p^* = p$. Teniendo en cuenta el apartado I del Lema 3.3.7 solo necesitamos demostrar que

$$\int_0^1 \varphi\left(\left|\sum_{n=1}^{N} a_n h_n(u)\right|, \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n h_n(u)\right|\right) du \geq 0 \tag{3.10}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, todas las N-tuplas $(a_n)_{n=1}^{N}$ en $\mathbb{R}$, y todo $(\varepsilon_n)_{n=1}^{N}$ en $\{\pm 1\}$. Con ese fin, procedemos por inducción en N. Para $N = 1$ esto es trivial, ya que tomando $x = y = 0$ y $\varepsilon = 1$ en el apartado II del Lema 3.3.7.

$$\varphi(|a|, |a|) \geq \varphi(0, 0) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Para establecer el paso a la inducción, supongamos $N \ge 2$ y asumimos que 3.10 es válido para $(N-1)$ tuplas. Dados $(a_n)_{n=1}^N$ en $\mathbb{R}$ y $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ en $\{\pm 1\}$, pongamos

$$f_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} a_n h_n, \;\; g_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n a_n h_n$$

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n = f_{N-1} + a_N h_N, \;\; g_N = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n h_n = g_{N-1} + \varepsilon_N a_N h_N$$

$$\tilde{f}_N = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n = f_{N-1} - a_N h_N, \;\; \tilde{g}_N = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n a_n h_n = g_{N-1} - \varepsilon_N a_N h_N.$$

Dado que h_N tiene soporte en un intervalo en el cual f_{N-1} y g_{N-1} son constantes y toma valores opuestos en intervalos de la misma medida (o, usando terminología probabilística, h_N y h_{N-1} son variables aleatorias equidistribuidas, ambas independientes con la pareja de variables aleatorias (f_{N-1}, g_{N-1})),

$$J := \int_0^1 \varphi(|f_N(u)|, |g_N(u)|)du = \int_0^1 \varphi(|\tilde{f}_N(u)|, |\tilde{g}_N(u)|)du.$$

Por tanto, por el apartado II del Lema 3.3.7,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(\varphi(|f_N(u)|, |g_N(u)|) + \varphi(|\tilde{f}_N(u)|, |\tilde{g}_N(u)|)\Big)\, du \\ &\ge \int_0^1 \varphi(|f_{N-1}(u)|, |g_{N-1}(u)|)du \ge 0. \end{aligned}$$

El caso $p = 2$ es trivial, ya que el sistema de Haar es una base ortonormal de L_2; por lo tanto, su constante básica incondicional es 1. El caso $1 < p < 2$ se sigue ahora por dualidad. Con $f_N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n h_n$ y $g_N = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n a_n h_n$ como antes, elegimos $g'_N \in L_q(\mathcal{B}_N)$ tal que $\|g'_N\|_q = 1$ y

$$\int_0^1 g_N(u) g'_N(u) du = \|g_N\|_p .$$

Entonces $g'_N = \sum_{n=1}^N b_n h_n$ para alguna $(b_n)_{n=1}^N$. Sea $f'_N = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n b_n h_n$. Es claro que

$$\|g_N\|_p = \int_0^1 f_N(u) f'_N(u) du \le \|f_N\|_p \left\|f'_N\right\|_q \le \|f_N\|_p (q-1) \left\|g'_N\right\|_q \le (q-1) \|f_N\|_p .$$

□

3.3.9 Nota. La constante $p^* - 1$ en el teorema de Burkholder es perfecta, aunque este hecho no lo vamos a probar.

3.3.10 Teorema. *Sea $1 \le p < \infty$. Para cada conjunto finito de funciones $\{f_i\}_{i=1}^n$ en $L_p(\mu)$,*

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \le B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

donde A_p, B_p son las constantes en las desigualdades de Khintchine (en particular, $A_p = 1$ para $2 \leq p < \infty$ y $B_p = 1$ para $1 \leq p \leq 2$).

Demostración. Para cada $\omega \in \Omega$, de las desigualdades de Khintchine,

$$A_p \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\omega)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_i f_i(\omega) \right|^p \right)^{1/p}.$$

donde $A_p = 1$ para $2 \leq p < \infty$. Ahora, usando el teorema de Fubini, obtenemos

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leq \int_\Omega \mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_i f_i(\omega) \right|^p d\mu = \mathbb{E} \left(\int_\Omega \left| \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_i f_i(\omega) \right|^p d\mu \right) = \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \right\|_p^p.$$

La otra desigualdad se obtiene de manera similar. □

3.4. Bases de tipo greedy

Supongamos que X es un espacio de Banach y que $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^\infty$ es una base de X. Una *aproximación de m-términos* con respecto a $\mathcal{B}$ es una aplicación $T_m : X \to X$ tal que para cada $x \in X$, $T_m(x)$ es una combinación lineal de como mucho m elementos de $\mathcal{B}$. Un *algoritmo de aproximación* es una sucesión $(T_m)_{m=1}^\infty$ de tales aplicaciones.

El algoritmo de aproximación más natural es el *algoritmo lineal* $(S_m)_{m=1}^\infty$ dado por las proyecciones de las sumas parciales $S_m(x) = \sum_{j=1}^m e_j^*(x)e_j$. Para cada m, S_m proporciona la aproximación de m-términos más cercana para cada $x \in X$ del subespacio lineal $[e_1, ..., e_m]$. Esto es, si para cada $x \in X$ definimos el *error de la mejor aproximación lineal de m-términos* como

$$E_m(x) = \text{ínf} \left\{ \left\| x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\| : (\alpha_j)_{j=1}^m \text{ escalares} \right\},$$

tenemos

$$\|x - S_m(x)\| \leq C E_m(x), \quad m = 1, 2, ...,$$

para alguna constante $C \geq 1$ independiente de $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$. Así la teoría de aproximación lineal con respecto a bases resulta ser simple y conveniente si uno está contento con este nivel de precisión.

Motivados por el problema de encontrar algoritmos más eficientes (i.e., que mejoran el error de aproximación), los investigadores pusieron en juego la no linealidad permitiendo a los elementos usados en la aproximación depender del vector x al aproximarlos en vez de cogiéndolos de un espacio lineal fijado. Los correspondientes algoritmos de aproximación construidos en este camino definen aplicaciones que no necesitan ser lineales o continuos.

Konyagin y Telmyakov introdujeron en [11] el *algoritmo greedy* $(G_m)_{m=1}^{\infty}$, donde $G_m(x)$ se obtiene tomando los m primeros términos en orden decreciente de magnitud de la serie de expansión de x con respecto a $\mathcal{B}$; cuando dos términos tienen igual tamaño, los tomamos en el orden de la base.

Este apartado trata sobre la aproximación no lineal. En términos generales, nuestro objetivo es investigar cómo de bien $G_m(x)$ aproxima $x \in X$ para varias bases $\mathcal{B}$. El mínimo requisito para hacer de este un método razonable de aproximación es que $G_m(x)$ converja a x para cada $x \in X$. Nosotros vamos a exigir más a $G_m(x)$, queremos que nos proporcione la mejor aproximación de x por una suma de m elementos de la base, lo cual nos lleva a la noción de *base greedy*. La definición formal de base greedy fue dada por Konyagin y Temlyakov en [11].

3.4.1. Marco general

Sea X un espacio de Banach. A lo largo de este capítulo $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ será una base (de Schauder) seminormalizada en X (i.e., $1/c \leq \|e_n\| \leq c$ para cada n, para algún c) con funcionales biortogonales $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$.

Para cada $m = 1, 2, ...$, denotamos por $\Sigma_m[\mathcal{B}, X]$ a la colección de todos los $x \in X$ que pueden ser expresados por una combinación lineal de m elementos de B,

$$\Sigma_m[\mathcal{B}, X] = \left\{ \sum_{n \in A} a_n e_n : A \subset \mathbb{N}, |A| = m, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cuando la base $\mathcal{B}$, el espacio X, o ambos están claros por el contexto los suprimiremos de la notación anterior y usaremos solamente el símbolo Σ_m. Claramente $\Sigma_m \subset \Sigma_k$ siempre que $m \leq k$. Notemos que el espacio Σ_m no es lineal: la suma de dos elementos de Σ_m generalmente no está en Σ_m, está en Σ_{2m}.

La pregunta fundamental aquí es cómo podemos construir para cada $x \in X$ y cada $m = 1, 2, ...$ un elemento $y_m \in \Sigma_m$, tal que el error de aproximación de x por y_m, dado por la cantidad $\|x - y_m\|$, es pequeño.

La respuesta a esta pregunta en algunos casos particulares es simple. Por ejemplo, si $X = H$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, cada elemento $x \in H$ tiene una expansión de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

y por la identidad de Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

Uno se da rápidamente cuenta de que la mejor aproximación de x en Σ_m existe, y se obtiene como sigue. Ordenamos los coeficientes de Fourier $(\langle x, e_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ de x de acuerdo al valor absoluto de su tamaño, y escogemos $A_m(x)$ como el conjunto de índices n con cardinalidad m para los cuales $|\langle x, e_n\rangle|$ es el más grande. Entonces,

$$y_m = \sum_{n\in A_m(x)} \langle x, e_n\rangle e_n$$

es la mejor aproximación de x de Σ_m, y

$$\|x - y_m\|^2 = \sum_{n\notin A_m(x)} |\langle x, e_n\rangle|^2 .$$

Este es un ejemplo de lo que es conocido como *algoritmo greedy*. Existen dos caminos esencialmente equivalentes de formalizar esta idea y simultáneamente generalizarla a bases seminormalizadas en un espacio de Banach arbitrario X.

La primera es considerar para cada $\varepsilon > 0$ el *operador umbral*,

$$T_\varepsilon[\mathcal{B}, X](x) := T_\varepsilon(x) = \sum_{\{n:|e_n^*(x)|>\varepsilon\}} e_n^*(x)e_n.$$

Como $\text{lím}_{n\to\infty} e_n^* = 0$, estamos sumando solo un número finito de términos, y por tanto las aplicaciones $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ están bien definidas.

En el segundo enfoque fijamos $m \in \mathbb{N}$, y para $x \in X$ definimos la *suma greedy* de x de orden m como

$$G_m[\mathcal{B}, X](x) := G_m(x) = \sum_{n\in A_m(x)} e_n^*(x)e_n,$$

donde $A_m(x)$ es un conjunto de m-elementos de índices tales que

$$\text{mín}\{|e_n^*(x)| : n \in A_m(x)\} \geq \text{máx}\{|e_n^*(x)| : n \notin A_m(x)\}. \tag{3.11}$$

Por supuesto, los conjuntos $A_m(x)$ pueden no estar determinados únicamente por las condiciones previas; por lo tanto, un elemento $x \in X$ dado puede tener más de una suma greedy de cualquier orden. Sin embargo, nos damos cuenta de que si en 3.11 se da la desigualdad estricta entonces $\sum_{n\in A_m(x)} e_n^*(x)e_n$ es la única suma greedy de x de orden m.

Sumas estrictamtente greedy y operadores umbrales están estrechamente relacionados. A cada $x \in X$ le corresponde un subconjunto de enteros

$$\mathbb{N}_x = \{m \in \mathbb{N} : \text{ existe una suma estrictamente greedy de } x \text{ de orden m}\}.$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}_x$, tenemos

$$T_\varepsilon(x) = G_{m_\varepsilon} \text{ y } G_m(x) = T_{\varepsilon_m}(x), \tag{3.12}$$

donde

$$m_\varepsilon = |\{n \in \mathbb{N} : |e_n^*(x)| > \varepsilon\}| \text{ y } \max_{n \notin A_m(x)} |e_n^*(x)| \leq \varepsilon < \min_{n \in A_m(x)} |e_n^*(x)| .$$

La manera más natural de construir una suma greedy de un vector x es comenzar con una aplicación inyectiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(|e_{\pi(n)}^*(x)|)_{n=1}^\infty$ no es creciente y entonces considerar las sumas parciales

$$G_m(x) = \sum_{n=1}^m e_{\pi(n)}^*(x) e_{\pi(n)}$$

de las series formales $\sum_{n=1}^\infty e_{\pi(n)}^*(x) e_{\pi(n)}$. Toda sucesión $(G_m(x))_{n=1}^\infty$ obtenida así la llamaremos la *aproximación greedy* de x, y π se dirá el ordenamiento greedy de x. Si el soporte de x es finito, entonces también lo es $\mathbb{N}_x$; por lo tanto se puede enumerar en la forma $\mathbb{N}_x = (m_j)_{j=1}^\infty$ con los índices m_j crecientes. La sucesión $(G_{m_j}(x))_{j=1}^\infty$ es una subsucesión de cada aproximación greedy x, y la llamaremos la *aproximación estrictamente greedy* de x.

Las aproximaciones greedy de un vector x no tiene por qué ser única. Sin embargo, podemos usar el orden natural existente en $\mathbb{N}$ para construir para cada x un orden greedy únicamente determinado como sigue. Definimos $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\{n : e_n^*(x) \neq 0\} \subset \rho(\mathbb{N})$ y tal que si $j < k$, entonces o bien $|e_{\rho(j)}^*(x)| > |e_{\rho(k)}^*(x)|$ o $|e_{\rho(j)}^*(x)| = |e_{\rho(k)}^*(x)|$ y $\rho(j) < \rho(k)$. Con esta convención, la m-ésima suma greedy de x, dada por

$$\mathcal{G}_m[\mathcal{B}, X](x) := \mathcal{G}_m(x) = \sum_{n=1}^m e_{\rho(n)}^*(x) e_{\rho(n)},$$

está determinada de manera única, y $(\mathcal{G}_m(x))_{m=1}^\infty$ forma una aproximación greedy de x. Las sucesiones de aplicaciones $(\mathcal{G}_m)_{m=1}^\infty$ son el *algoritmo greedy* asociado a $\mathcal{B}$ en X. En algunas ocasiones nuestro razonamiento requerirá considerar las sumas greedy de orden nulo, así que acordamos poner $\mathcal{G}_0(x) = 0$ para todo x.

Nos damos cuenta de que $(\mathcal{G}_m)_{m=1}^\infty$ no son ni lineales ni continuos. Sin embargo, son homogéneos, es decir, $\mathcal{G}_m(\lambda x) = \lambda \mathcal{G}_m(x)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, gracias a lo que podemos definir su norma,

$$\|\mathcal{G}_m\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{G}_m(x)\| .$$

Notamos que si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre espacios de Banach, entonces

$$T(\mathcal{G}_m[\mathcal{B}, X](x)) = \mathcal{G}_m[T(\mathcal{B}), Y](T(x));$$

por lo que todos los conceptos relacionados con ser greedy que vamos a introducir a continuación serán invariantes bajo isomorfismos.

3.4.2. Bases democráticas

Vamos a introducir a continuación una propiedad que disfrutan algunas bases que es fundamental para nuestras consideraciones [11].

3.4.1 Definición. *Una base $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach se dice democrática si bloques del mismo tamaño de $\mathcal{B}$ tienen normas uniformemente comparables, i.e., existe una constante $C \geq 1$ tal que para cada dos subconjuntos finitos A, B de $\mathbb{N}$ con $|A| = |B|$,*

$$\left\| \sum_{n\in A} e_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n\in B} e_n \right\|.$$

La constante más pequeña verificando lo anterior se llama la constante democrática de $\mathcal{B}$ y será denotada por C_d

La falta de democracia de una base $\mathcal{B}$ exhibe algún tipo de asimetría. Para medir cuánto se desvía una base de ser democrática, consideramos su *función democrática superior*, también conocida como la *función fundamental* de $\mathcal{B}$,

$$\varphi_u[\mathcal{B}, X](m) := \varphi_u(m) = \sup_{|A|=m} \left\| \sum_{n\in A} e_n \right\|, \quad m = 1, 2, ...,$$

y su *función democrática inferior*,

$$\varphi_l[\mathcal{B}, X](m) := \varphi_l(m) = \inf_{|A|=m} \left\| \sum_{n\in A} e_n \right\|, \quad m = 1, 2, ...$$

Una base $\mathcal{B}$ es democrática si y solo si las sucesiones $(\varphi_u[\mathcal{B}, X](m))_{m=1}^{\infty}$ y $(\varphi_l[\mathcal{B}, X](m))_{m=1}^{\infty}$ son uniformemente comparables término a término, en cuyo caso

$$C_d = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{\varphi_u(m)}{\varphi_u(l)} < \infty.$$

Por supuesto, las funciones democráticas $\varphi_l[\mathcal{B}, X]$ y $\varphi_u[\mathcal{B}, X]$ pueden variar si consideramos diferentes bases $\mathcal{B}$ dentro del mismo espacio de Banach X.

Los siguientes resultados contienen propiedades elementales de funciones democráticas de bases que se convertirán útiles más tarde.

3.4.2 Lema. *Sea $\mathcal{B}$ una base democrática en un espacio de Banach X y sea $\tilde{\mathcal{B}}$ una base de un espacio de Banach finito-dimensional Y. La suma directa de $\mathcal{B}$ y $\tilde{\mathcal{B}}$ es una base democrática en $X \oplus Y$.*

El último resultado de este apartado relaciona la incondicionalidad con las funciones de democracia.

3.4.3 Lema. *Sea $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una base incondicional para un espacio de Banach X. Sean A y B conjuntos finitos de naturales. Supongamos que $x \in X$ es tal que*

$$\text{máx}\{|e_n^*(x)| : n \in A\} \leq \text{mín}\{|e_n^*(x)| : n \in B\}.$$

Entonces

$$\|P_A(x)\| \leq K_u^2 \frac{\varphi_u(|A|)}{\varphi_l(|B|)} \|P_B(x)\|.$$

Demostración. Sean $M = \text{máx}\{|e_n^*(x)| : n \in A\}$ y $m = \text{mín}\{|e_n^*(x)| : n \in B\}$. Entonces

$$\|P_A(x)\| = \left\| \sum_{n \in A} e_n^*(x) e_n \right\| \leq K_u \left\| \sum_{n \in A} M e_n \right\| = K_u M \left\| \sum_{n \in A} e_n \right\| \leq K_u M \varphi_u(|A|)$$

donde hemos usado la incondicionalidad y la definición de la función democrática superior. Ahora continuamos usando la hipótesis $M \leq m$ y la definición de la función democrática inferior para finalizar la demostración:

$$K_u M \varphi_u(|A|) \leq K_u m \frac{\varphi_u(|A|)}{\varphi_l(|B|)} \varphi_l(|B|) \leq K_u \frac{\varphi_u(|A|)}{\varphi_l(|B|)} \left\| \sum_{n \in B} m e_n \right\| \leq K_u^2 \frac{\varphi_u(|A|)}{\varphi_l(|B|)} \|P_B(x)\|.$$

□

3.4.3. Bases greedy

En la teoría de la aproximación es conveniente saber desde un punto teórico si el algoritmo greedy es eficiente, en el sentido de que el error que cometemos para cada m al aproximar cualquier x en X por $\mathcal{G}_m(x)$ es uniformemente comparable con el error teórico más pequeño en la aproximación de m-términos de x con respecto a la base B, dado por

$$\sigma_m[\mathcal{B}, X](x) := \sigma_m(x) = \inf_{y \in \Sigma_m} \|x - y\|.$$

Para formalizar esta idea, Konyagin y Temlyakov introdujeron el concepto de base greedy en [11].

3.4.4 Definición. *Una base $\mathcal{B}$ de un espacio de Banach X es greedy si existe una constante absoluta $C \geq 1$ tal que*

$$\|x - \mathcal{G}_m(x)\| \leq C \sigma_m(x), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X. \tag{3.13}$$

Llamaremos a la C más pequeña la constante greedy de $\mathcal{B}$ y la denotaremos por C_g.

Observamos que $0 \in \Sigma_m$ para todo m, por lo que tenemos

$$\sigma_m(x) \leq \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

También como $\cup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$ es denso en X, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = 0.$$

3.4.5 Nota. Si hemos estado atentos, la definición de base greedy es equivalente al cumplimiento de la condición

$$\|x - G_m(x)\| \leq C\sigma_m(x), \quad \forall m \in \mathbb{N},\ \forall x \in X$$

para alguna constante C, para cualesquiera sumas greedy $G_m(x)$.

3.4.6 Ejemplo. Si $\mathcal{B}$ es la base de vectores unitarios en ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o c_0, entonces para cada x en el espacio y cualquier entero m tenemos $\sigma_m(x) = \|x - G_m(x)\|$ para cada suma greedy de m-términos $G_m(x)$, la cual es lo mejor que podemos esperar. En otras palabras, $\mathcal{B}$ es una base greedy y $C_g = 1$. Esta propiedad puede ser extendida a las bases simétricas.

El principal resultado de esta sección es una caracterización intrínseca muy satisfactoria de Konyagin y Temlyakov de las bases greedy.

3.4.7 Teorema. *Una base $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es greedy si y solo si es incondicional y democrática.*

Demostración. Asumimos que $\mathcal{B}$ es una base greedy con constante greedy C_g. Fijamos $x \in X$ y sea $A \subset \mathbb{N}$ con cardinalidad m. Consideramos el vector

$$y = P_{A^c}(x) + \alpha \sum_{n\in A} e_n = x + \sum_{n\in A} (\alpha - e_n^*(x))e_n,$$

donde $\alpha > \sup_{n\notin A} |e_n^*(x)|$. Claramente, $\sigma_m(y) = \|x\|$ y $\mathcal{G}_m(y) = \alpha \sum_{n\in A} e_n$. Por lo tanto, la suposición de ser greedy nos dice

$$\|P_{A^c}(x)\| = \|y - \mathcal{G}_m(y)\| \leq C_g\sigma_m(y) \leq C_g \|x\|,$$

lo cual implica que $\mathcal{B}$ es incondicional con constante de supresión-incondicional acotada por C_g.

Para mostrar que $\mathcal{B}$ es democrática, cogemos cualesquiera dos conjuntos de enteros A, B del mismo cardinal. Consideramos $x = \sum_{n\in A\cup B} e_n$. Como $\sum_{n\in B\setminus A} e_n$ es la suma greedy de x de orden $m = |A \setminus B| = |B \setminus A|$, y $\sum_{n\in A\setminus B} e_n \in \Sigma_m$, tenemos

$$\left\|\sum_{n\in A} e_n\right\| = \left\|x - \sum_{n\in B\setminus A} e_n\right\| \leq C_g \left\|x - \sum_{n\in A\setminus B} e_n\right\| = C_g \left\|\sum_{n\in B} e_n\right\|,$$

por lo que $\mathcal{B}$ es democrática con constante democrática acotada por C_g.

Para demostrar la otra implicación, asumimos que $\mathcal{B}$ es incondicional con constante K_u y democrática con constante democrática C_d. Fijamos $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$. Cogemos $y = \sum_{n \in B} a_n e_n \in \Sigma_m$. Consideramos una suma greedy $G_m(x) = P_A(x)$. Notemos que

$$\|x - G_m(x)\| = \left\|P_{(A\cup B)^c}(x) + P_{B\setminus A}(x)\right\| \leq \left\|P_{(A\cup B)^c}(x)\right\| + \left\|P_{B\setminus A}(x)\right\|.$$

Por la definición de suma greedy,

$$\max_{n \in B\setminus A} |e_n^*(x)| \leq \min_{n \in A\setminus B} |e_n^*(x)|$$

Sea $r = |A \setminus B| = |B \setminus A|$. Usando el Lema 3.4.3, tenemos

$$\left\|P_{B\setminus A}(x)\right\| \leq K_u^2 \frac{\varphi_u(r)}{\varphi_l(r)} \left\|P_{A\setminus B}(x)\right\| \leq K_u^2 C_d \left\|P_{A\setminus B}(x)\right\|.$$

La incondicionalidad de $\mathcal{B}$ implica

$$\left\|P_{(B\cup A)^c}(x)\right\| = \left\|P_{(B\cup A)^c}(x-y)\right\| \leq K_{su} \|x - y\|.$$

Análogamente,

$$\left\|P_{A\setminus B}(x)\right\| = \left\|P_{A\setminus B}(x-y)\right\| \leq K_{su} \|x - y\|.$$

Combinándolos, obtenemos

$$\|x - G_m(x)\| \leq (K_{su} + K_{su} K_u^2 C_d) \|x - y\|,$$

y, con el Lema 3.4.3 en mente, la prueba finaliza tomando el ínfimo en y. □

3.4.8 Corolario. *Toda base subsimétrica en un espacio de Banach es greedy.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B} = (e_n)_{n=1}^\infty$ es subsimétrica y no greedy. Como $\mathcal{B}$ es incondicional, debe fallar que sea democrática. Recursivamente construimos sucesiones de subconjuntos mutuamente disjuntos de enteros $(A_k)_{k=1}^\infty$ y $(B_k)_{k=1}^\infty$ tal que $|A_k| = |B_k|$, $\max(A_{k-1} \cup B_{k-1}) < \min(A_k \cup B_k)$, y $\left\|\sum_{n\in A_k} e_n\right\| > k \left\|\sum_{n \in B_k} e_n\right\|$. Supongamos construidos $(A_j)_{j=1}^{k-1}$ y $(B_j)_{j=1}^{k-1}$. Establecemos $N = 1 + \max(A_{k-1} \cup B_{k-1})$. Usando el Lema 3.4.2, inferimos que la sucesión básica $(e_n)_{n=N}^\infty$ no es democrática. Por tanto, existen A_k, B_k subconjuntos de $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$ tal que $|A_k| = |B_k|$ y $\left\|\sum_{n\in A_k} e_n\right\| > k \left\|\sum_{n\in B_k} e_n\right\|$.

Ahora consideremos sucesiones estrictamente crecientes de enteros $(n_j^a)_{j=1}^\infty$ y $(n_j^b)_{j=1}^\infty$ tales que $\{n_j^a : j \in \mathbb{N}\} = \cup_{k=1}^\infty A_k$ y $\{n_j^b : j \in \mathbb{N}\} = \cup_{k=1}^\infty B_k$. Como las sucesiones básicas $(e_{n_j^a})_{j=1}^\infty$ y $(e_{n_j^b})_{j=1}^\infty$ no son equivalentes, alcanzamos una contradicción con que $\mathcal{B}$ sea subsimétrica. □

El siguiente lema será una herramienta importante para la demostración de la Proposición 3.4.10.

3.4.9 Lema. *Sea $1 < r < \infty$ y $0 < p < \infty$. Existen constantes positivas $c_{r,p}$ y $C_{r,p}$ tales que para cada conjunto finito de enteros A,*

$$c_{r,p}\left(\sum_{k\in A} r^{pk}\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k\in A} r^{2k}\right)^{1/2} \leq C_{r,p}\left(\sum_{k\in A} r^{pk}\right)^{1/p}.$$

El siguiente resultado fue obtenido por Temlyakov en [12].

3.4.10 Proposición. *El sistema de Haar normalizado $\mathcal{H}_p = (h_n^p)_{n=1}^\infty$ es una base greedy en $L_p[0,1]$ para $1 < p < \infty$.*

Demostración. Como $\mathcal{H}_p$ es incondicional (Teorema 3.3.8) por el Teorema 3.4.7 sólo necesitamos probar que $\mathcal{H}_p$ es democrática. Para probar esto, por el Lema 3.4.2 será suficiente estimar $\left\|\sum_{n\in A} h_n^p\right\|$ por subconjuntos finitos de enteros A tales que $1 \notin A$. Usaremos la siguiente propiedad de las series geométricas, de fácil verificación.

Tenemos en cuenta que las funciones $(h_n^p)_{n=2}^\infty$ solo alcanzan valores 0 y $\pm 2^{k/p}$, y que para cada $t \in [0,1]$ sólo una de esas funciones alcanza $2^{k/p}$ en valor absoluto. El Lema 3.4.9 con $r = 2^{1/p}$ nos da constantes c_p y C_p tal que para cada subconjunto finito $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y para cada $t \in [0,1]$,

$$c_p\left(\sum_{n\in A} |h_n^p(t)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n\in A} |h_n^p(t)|^2\right)^{1/2} \leq C_{r,p}\left(\sum_{n\in A} |h_n^p(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Tomando L_p-normas en las desigualdades anteriores y usando que $\|h_n^p\|_p = 1$ obtenemos

$$c_p\,|A|^{1/p} \leq \left\|\left(\sum_{n\in A} |h_n^p(t)|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq C_p\,|A|^{1/p}. \tag{3.14}$$

Por el Teorema 3.3.10 y la incondicionalidad de $\mathcal{H}_p = (h_n^p)_{n=1}^\infty$, para cada $1 < p < \infty$ existen constantes A_p' y B_p' tales que para cada $(a_n) \in c_{00}$,

$$A_p'\left\|\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2\,|h_n^p|^2\right)^{1/2}\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^\infty a_n h_n^p\right\|_p \leq B_p'\left\|\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2\,|h_n^p|^2\right)^{1/2}\right\|_p. \tag{3.15}$$

Usando 3.14 obtenemos

$$A_p' c_p\,|A|^{1/p} \leq \left\|\sum_{n\in A} h_n^p\right\| \leq B_p' C_p\,|A|^{1/p},$$

para cada $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ finito, lo cual implica la democracia de $(h_n^p)_{n=2}^\infty$. □

Los ejemplos naturales de bases greedy en los espacios clásicos que hemos visto en este apartado pueden convertirse útiles en la producción de bases greedy cuando están combinados con métodos teóricos simples. Observemos el hecho de que ser greedy es una propiedad isomórfica, i.e., si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base greedy en X y $T : X \to Y$ es un isomorfismo lineal, entonces $(T(e_n))_{n=1}^{\infty}$ es una base greedy en Y.

Capítulo 4

Desarrollo informático del trabajo

4.1. Algoritmos

La idea de reemplazar un objeto completo por uno más simple (aproximante) es usado exitosamente en muchas áreas de la ciencia y en particular en las matemáticas computacionales. En nuestro caso escogemos un espacio de Banach X y nos gustaría tener un algoritmo de construcción de m-términos que añade en cada paso un nuevo elemento de sistema dado $\mathcal{D}$. No es obvio que con este nivel de generalidad (X y $\mathcal{D}$ son arbitrarios) tal algoritmo exista.

Nuestra aproximación toma lugar en un espacio de Banach X equipado de una norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X$. Formulamos nuestro problema de aproximación de la siguiente manera general. Diremos que un conjunto de funciones $\mathcal{D}$ de un espacio de Banach X es un *diccionario* si cada $g \in X$ tiene norma uno ($\|g\|_X = 1$) y el cierre lineal de $\mathcal{D}$ coincide con X. Denotamos como $\sum_m(\mathcal{D})$ a la colección de todas las funciones (elementos) en X que pueden ser expresados como una combinación lineal de como mucho m elementos de D.

Por tanto cada función $s \in \sum_m(\mathcal{D})$ puede ser escrita de la forma

$$s = \sum_{g \in \Lambda} c_g g, \quad \Lambda \subset \mathcal{D}, \ \#\Lambda \leq m,$$

donde c_g son números reales o complejos. En algunos casos sería posible escribir un elemento de $\sum_m(\mathcal{D})$ de esta forma de más de una manera. El espacio $\sum_m(\mathcal{D})$ no es lineal: la suma de dos funciones de $\sum_m(\mathcal{D})$ no está generalmente en $\sum_m(\mathcal{D})$.

Para una función $f \in X$ definimos su error de aproximación

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_X := \inf_{s \in \sum_m(\mathcal{D})} \|f - s\|_X ,$$

y para una clase de funciones F,

$$\sigma_m(F,\mathcal{D})_X := \sup_{f\in F} \sigma_m(f,\mathcal{D})_X.$$

Vamos a concentrarnos en un problema importante de encontrar buenos métodos de aproximación de m-términos en el caso de un diccionario general $\mathcal{D}$ y estudiaremos su eficiencia.

4.1.1. Algoritmo Puro Greedy (AGP)

Comencemos esta discusión con una clase especial de espacios de Hilbert con el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Definimos en primer lugar el Algoritmo Puro Greedy (AGP) en espacios de Hilbert H. Describiremos este algoritmo para un diccionario general $\mathcal{D}$. Si $f \in H$, sea $g(f) \in \mathcal{D}$ un elemento de $\mathcal{D}$ que maximiza $|\langle f, g\rangle|$. Asumiremos por simplicidad que tal maximizador existe; si no modificaciones adecuadas son necesarias (Algoritmo Greedy Débil (AGD)) en el algoritmo que sigue. Definimos

$$G(f,\mathcal{D}) := \langle f, g(f)\rangle g(f)$$

y

$$R(f,\mathcal{D}) := f - G(f,\mathcal{D}).$$

Algoritmo Greedy Puro (AGP). Definimos $R_0(f,\mathcal{D}) := f$ y $G_0(f,\mathcal{D}) := 0$. Entonces, para cada $m \geq 1$, definimos inductivamente

$$G_m(f,\mathcal{D}) := G_{m-1}(f,\mathcal{D}) + G(R_{m-1}(f,\mathcal{D}),\mathcal{D}),$$
$$R_m(f,\mathcal{D}) := f - G_m(f,\mathcal{D}) = R(R_{m-1}(f,\mathcal{D}),\mathcal{D}).$$

El *algoritmo greedy* definido da un procedimiento para construir un aproximante que resulta ser bueno. El procedimiento para construir un aproximante greedy no es un algoritmo numérico listo para implementación computacional. Por tanto, sería más preciso llamarlo *algoritmo greedy teórico.* Llamamos un algoritmo *incremental* si en el paso m añadimos a lo mucho un elemento más, $\varphi_m \in \mathcal{D}$ y aproximamos por la combinación lineal $c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m$.

Usamos el término *tipo greedy* para un algoritmo incremental con φ_m escogido para maximizar un funcional dado $F(f_{m-1}, g)$ sobre $g \in \mathcal{D}$ con f_{m-1} el residuo después de $(m-1)$ pasos del algoritmo. La forma de $F(\cdot,\cdot)$ determina el tipo de algoritmo greedy. Usaremos el término *greedy débil* para un algoritmo incremental con φ_m satisfaciendo una condición más débil que maximizar un funcional dado. Por ejemplo,

$$F(f^{\tau}_{m-1}, \varphi_m) \geq t_m \sup_{g\in\mathcal{D}} F(f_{m-1}, g), \quad 0 \leq t_m \leq 1.$$

La sucesión $\tau := \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es llamada la *sucesión débil.*

También anotar que en otros campos de la investigación AGP recibe otros nombres, en procesamiento de señales recibe el nombre de *matching pursuit.*

Es claro que para una base ortonormal $\mathcal{B}$ de un espacio de Hilbert H tenemos, para cada f,

$$\|f - G_m(f, \mathcal{B})\| = \sigma_m(f, \mathcal{B}).$$

Existe una clase no trivial de ejemplos de un diccionario redundante, teniendo la misma propiedad: AGPs realizan la mejor aproximación de m-términos para cada función individual. Describimos ese diccionario ahora. Sea Π un conjunto de funciones de $L_2([0,1])^2$ de la forma $u(x_1)v(x_2)$ con la norma unitaria de L_2. Entonces para este diccionario y $H = L_2([0,1]^2)$ tenemos, para cada $f \in H$,

$$\|f - G_m(f, \Pi)\| = \sigma_m(f, \Pi).$$

4.1.2. Algoritmo X-Greedy

Sabemos mucho menos sobre algoritmos greedy con respecto a diccionarios redundantes generales en el caso de un espacio general de Banach X. Vamos a discutir una generalización de AGP de un espacio de Hilbert H a un espacio de Banach X. Llamamos a esta versión el Algoritmo X-Greedy cuando queremos indicar el espacio de Banach. Para un X y $\mathcal{D}$ dado definimos $G(f, \mathcal{D}, X) := \alpha(f)g(f)$ donde $\alpha(f) \in \mathbb{R}$ y $g(f) \in \mathcal{D}$ satisfacen (asumimos existencia) la relación

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{D}} = \|f - \alpha(f)g(f)\|.$$

Algoritmo X-Greedy. Definimos $R_0(f, \mathcal{D}, X) := f$ y $G_0(f, \mathcal{D}, X) := 0$. Entonces, para cada $m \geq 1$, inductivamente definimos

$$\begin{aligned} R_m(f) := R_m(f, \mathcal{D}, X) &:= R_{m-1}(f) - G(R_{m-1}(f), \mathcal{D}, X), \\ G_m(f, \mathcal{D}, X) &:= G_{m-1}(f, \mathcal{D}, X) + G(R_{m-1}(f), \mathcal{D}, X). \end{aligned}$$

La segunda versión de AGP en un espacio de Banach está basada en un el concepto de tomar un funcional normante. Lo llamamos el Algoritmo Greedy Dual (AGD). Sea un diccionario $\mathcal{D}$ en X dado. Tomamos un elemento $f \in X$ y encontramos un funcional F_f tal que $\|F_f\|_{X^*} = 1$ y $F_f(f) = \|f\|_X$. La existencia de tal funcional se sigue del Teorema de Hanh-Banach. Ahora modificamos el paso básico de un AGP a lo siguiente. Asumimos que existe $g_f \in \mathcal{D}$ tal que

$$|F_f(g_f)| = \max_{g \in D} |F_f(g)|.$$

Tomamos esta g_f y resolvemos un problema de optimización más: encontrar el número a tal que

$$\|f - ag_f\|_X = \min_b \|f - bg_f\|_X \, .$$

Ponemos

$$G^D(f,\mathcal{D}) := ag_f, \quad R^D(f,\mathcal{D}) := f - ag_f.$$

Repitiendo este paso m veces tenemos $G_m^D(f,\mathcal{D})$ como un aproximante y $R_m^D(f,\mathcal{D})$ como un residuo.

4.2.

4.2.1.

4.2.2.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

Bibliografía

[1] Fernando Albiac & Nigel J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics (2015, Second Edition).

[2] T. W. Körner, *Fourier Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge (1989, Second Edition).

[3] S. Karlin, *Bases in Banach Spaces.* Duke Math. J. **15**, 971-985 (1948).

[4] W.B. Johnson & H.P. Rosenthal & M. Zippin, *On bases, finite dimensional descompositions and weaker structures in Banach spaces.* Isr. J. Math. **9**, 488-506 (1971).

[5] R.C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. Math. (2) **52**, 518-527 (1950).

[6] P. Enflo, *A counter example to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. **130**, 309-317 (1973).

[7] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces.* Isr. J. Math. **6**, 74-79 (1968).

[8] D.J.H. Garling, *Symmetric bases of locally convex spaces.* Stud. Math. **30**, 163-181 (1968).

[9] D.L. Burkholder, *A nonlinear partial equation and the unconditional constant ofthe Haar system in* L_p. Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **7**(3), 591-595 (1982).

[10] D.L. Burkholder, *A proof of Pelczynśki's conjecture for the Haar system.* Stud. Math. **91**(1), 79-83 (1988).

[11] S. V. Konyagin & V. N. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces.* East J. Approx. **5**(3), 365-379 (1999).

[12] V. N. Temlyakov, *The best m-term approximation and greedy algorithms.* Adv. Comput. Math. **8**(3), 249-265 (1998).