Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Matemáticas III (8208)
Prof. Oliver Ramos

ESCUELA DE MATEMATICA

Guía XIII
Límites de funciones de varias variables.

1. Demuestre aplicando la definición formal de Weierstrass los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x+y^2\right) = 0$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2} = 0$

   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \left(2x^2-y^2\right) = -1$

   e) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = 0$

   f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \left(x^2+2x-y\right) = 4$

   g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3y^2}{x^2+y^2} = 0$

   h) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} \left(x^2+y^2-4x+2y\right) = -4$

   i) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0$

2. Calcular los siguientes límites si es que existen.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left(2x^2-y^2\right)$

   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{6x-2y}{9x^2-y^2}$

   c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+yz^2}{x^4+y^4+z^4}$

   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

   e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^4+yx^3+z^2x^2}{x^2+y^2+z^2}$

   f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

   g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y}{x^8+y^2}$

   h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2}$

   i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

   j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$

   k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-3y+1}{x+5y-3}$

   l) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{2x^2+y^2-z^2}{x^2-y^2}$

   m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$

   n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

   ñ) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+y^2-3}{x-2y}$

   o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$

   p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

   q) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}$

   r) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2xy^4}{x^5+6y^5}$

   s) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

   t) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

   u) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

w) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

x) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{x^5+6y^5}$

y) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y+z}{x+y-z}$

z) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^4+y^2}}{e^{xy}-2}$

aa) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(\pi,\frac{\pi}{4}\right)} \cos(3x+y)$

ab) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x)-1-\dfrac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$

ac) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

ad) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{x^2+y^2}$

ae) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$

af) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z^3y}{x^6+y^6}$

ag) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$

ah) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

ai) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{7/3}}{x^2+y^2}$

aj) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$

ak) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

al) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

am) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2y\cos(z)}{x^2+y^2}$

an) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{xy+1}{x^2-y}$

añ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$

ao) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

ap) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x+y}{xy+1}$

aq) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{y-2x^2}$

ar) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\cos(x)}{xy-\cos(x)}$

as) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

at) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$

au) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-1)} \left(x^2+y^2\right)$

av) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy-y^3}{(x+y+1)^2}$

aw) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$

ax) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

ay) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0,0} \frac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$

az) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x^2+y^2}$

ba) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

bb) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

bc) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2}$

bd) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2z^3y}{x^6+z^6}$

be) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{8x^3y^2}{x^9+y^3}$

bf) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3x}{y^6+x^2}$

bg) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

bh) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$

bi) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3y^3+z^3}$

bj) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^2}{x^2+y^2+1}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-25}} & \text{si} \quad x^2+y^2>25 \\ x^2+y^2-24 & \text{si} \quad x^2+y^2=25 \\ 1 & \text{si} \quad x^2+y^2<25 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & \text{si} \quad x+y\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x+y=0 \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} y\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & \text{si} \quad x+y>0 \\ 2x & \text{si} \quad x+y\leq 0 \end{cases}$

j) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$

k) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

l) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

m) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{si} \quad x\neq y \\ x-y & \text{si} \quad y=x \end{cases}$

n) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x+y} & \text{si} \quad y<|x| \\ 1 & \text{si} \quad y=|x| \\ (x-y)^2-xy & \text{si} \quad y>|x| \end{cases}$

ñ) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+y} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

o) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

p) $f(x,y) = x^2+4xy+5y^2-7x+9y-10$

q) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$

r) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

s) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

t) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{e^{x+y}-1} & \text{si} \quad x+y>0 \\ 2x & \text{si} \quad x+y=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x+y} & \text{si} \quad x+y<0 \end{cases}$

u) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

v) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+3y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

w) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)$

x) $f(x,y) = \begin{cases} \ln(xy-1) & \text{si} \quad xy>1 \\ 0 & \text{si} \quad xy=1 \\ e^{xy-1} & \text{si} \quad xy<1 \end{cases}$

y) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

z) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

aa) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^3+y^3} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ab) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ac) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(y)}$

ad) $f(x,y) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ y & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

4. Considérese la función

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4y^2}{x-2y} & \text{si} \quad x-2y \neq 0 \\ \varphi(x) & \text{si} \quad x-2y = 0 \end{cases}$$

Si ψ es continua en todo el plano, encuentre una fórmula para φ

5. Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^3-2 & \text{si} \qquad y-x>0, y>0 \\ 5xy-3y^2 & \text{si} \qquad y+x^2 \leq 0 \\ x^3-y^3 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en los siguientes puntos.

a) $(0,0)$ *b)* $(0,-1)$ *c)* $(-1,0)$ *d)* $(-2,2)$ *e)* $(1,1)$

6. Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy^2-5^{xy} & \text{si} \quad |x|+|y| \leq 1 \\ 5xy-3^{xy^2} & \text{si} \quad |x|+|y| > 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en los siguientes puntos

a) $(0,0)$ *b)* $(0,-1)$ *c)* $(-1,0)$ *d)* $(-2,2)$ *e)* $(1,1)$

7. Hallar los valores de α para que las siguientes funciones sean continuas en el origen

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3-3y^3}{x^2-y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *b)* $f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

"El cálculo de límites es como contemplar el infinito a través de una ventana matemática, donde las magnitudes se acercan y se alejan en un baile eterno hacia lo desconocido."

Karl Weierstrass

$\LaTeX$

Contenido: Límites de funciones de varias variables.