

Lista 3 - Taxas Relacionadas

- 1 - Um ponto  $P$  move-se ao longo do gráfico de  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  de tal modo que sua abscissa  $x$  varia a uma velocidade constante de 5m/s. Qual a velocidade de  $y$  no instante em que  $x = 10$ m?
- 2 - Suponha que o raio  $r$  e a área  $A = \pi r^2$  de um círculo sejam funções deriváveis de  $t$ . Escreva uma equação que relaciona a taxa de variação da área com a taxa de variação de  $r$ .
- 3 - Sejam  $x$  e  $y$  funções deriváveis de  $t$  e seja  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$  a distância entre os pontos  $(x, 0)$  e  $(0, y)$  no plano  $xy$ .
- a) Como  $\frac{ds}{dt}$  se relaciona com  $\frac{dx}{dt}$  se  $y$  é constante?
- b) Como  $\frac{ds}{dt}$  se relaciona com  $\frac{dx}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt}$  se nem  $x$  nem  $y$  são constantes?
- c) Como  $\frac{dx}{dt}$  se relaciona com  $\frac{dy}{dt}$  se  $s$  é constante?
- 4 - A área  $A$  de um triângulo, com lados de comprimento  $a$  e  $b$  formando um ângulo  $\theta$  é dada por

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

- a) Como  $\frac{dA}{dt}$  se relaciona com  $\frac{d\theta}{dt}$ , se  $a$  e  $b$  são constantes?
- b) Como  $\frac{dA}{dt}$  se relaciona com  $\frac{d\theta}{dt}$  e  $\frac{da}{dt}$  se apenas  $b$  é constante?
- c) Como  $\frac{dA}{dt}$  se relaciona com  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{da}{dt}$  e  $\frac{db}{dt}$  se nem  $a$ , nem  $b$  e nem  $\theta$  são constantes?

- 5 - O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de  $8\text{cm/s}$  e sua largura está aumentando a uma taxa de  $3\text{cm/s}$ . Quando o comprimento for  $20\text{cm}$  e a largura for  $10\text{cm}$  quão rápido a área do retângulo está aumentando?
- 6 - Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de  $6\text{cm/s}$ . A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for  $16\text{cm}^2$ ?
- 7 - Um tanque cilíndrico com raio de  $5\text{m}$  está sendo cheio com água a uma taxa de  $3\text{m}^3/\text{min}$ . Quão rápido a altura da água está aumentando?
- 8 - O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de  $4\text{mm/s}$ . Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for  $80\text{mm}$ ?
- 9 - Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a  $30\text{km/h}$  e o outro viaja para o oeste a  $72\text{km/h}$ . A qual taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?
- 10 - A altura de um triângulo está aumentando a uma taxa de  $15\text{cm}/\text{min}$  enquanto a área do triângulo está aumentando a uma taxa de  $2\text{cm}^2/\text{min}$ . A que taxa a base do triângulo está variando quando a altura for  $10\text{cm}$  e a área for  $100\text{cm}^2$ ?
- 11 - Uma partícula está se movimentando ao longo de uma hipérbole  $xy = 8$ . Quando atinge o ponto  $(4, 2)$ , a coordenada  $y$  está decrescendo a uma taxa de  $3\text{cm/s}$ . Quão rápido a coordenada  $x$  do ponto está variando nesse momento?
- 12 - Dois lados de um triângulo têm  $4\text{m}$  e  $5\text{m}$ , e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de  $0,06\text{rad/s}$ . Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for  $\pi/3$ .
- 13 - O topo de uma escada desliza, por uma parede vertical a uma taxa de  $0,15\text{m/s}$ . No momento em que a base da escada está a  $3\text{m}$  da parede, ela afasta-se da parede à velocidade de  $0,2\text{m/s}$ . Qual o comprimento da escada?

- 14 - Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de  $1,5\text{m/s}$ . Um holofote localizado no chão a  $6\text{m}$  do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a  $8\text{m}$  do ponto do caminho mais próximo da luz?
- 15 - Um homem começa a andar para o norte a  $1,2\text{m/s}$  a partir de um ponto  $P$ . Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a  $1,6\text{m/s}$  de um ponto  $200\text{m}$  ao leste de  $P$ . A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 minutos após a mulher começar a andar?
- 16 - Está vazando água de um tanque em forma de um cone invertido a uma taxa de  $10.000\text{cm}^3/\text{min}$ . Ao mesmo tempo, a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem  $6\text{m}$  de altura e diâmetro no topo de  $4\text{m}$ . Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de  $20\text{cm}^3/\text{min}$  quando a altura da água for  $2\text{m}$ , encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.

# GABARITO

$$01. -\frac{100}{(101)^2}\text{m/s} \quad 02. \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$03. (a) \frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} \quad b) \frac{ds}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} \quad c) \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$04. a) \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad b) \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$c) \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}b \sin \theta \frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a \sin \theta \frac{db}{dt} + \frac{1}{2}ab \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$05. 140\text{cm}^2/\text{s} \quad 06. 48\text{cm}^2/\text{s} \quad 07. \frac{3}{25\pi}\text{m}/\text{mim} \quad 08. 25.600 \text{ mm}^3/\text{s}. \quad 09. 78\text{km}/\text{h}$$

$$10. -1,6\text{cm}/\text{mim} \quad 11. 6 \text{ cm}/\text{s} \quad 12. 0,3\text{m}^2/\text{s}$$

$$13. 5\text{m}$$

$$14. 0,09 \text{ rad}/\text{mim} \quad 15. \frac{8064}{\sqrt{8334400}} \approx 2,79\text{m}/\text{s} \quad 16. \frac{800.000}{9}\pi + 10.000\text{cm}^3/\text{mim}.$$