Università degli Studi di Padova

Relazione sul:
Calcolo delle sequenze di Leja ed uso per l'interpolazione

Realizzata da:
Carmelo Russello, matricola 2076421;
Mario De Pasquale, matricola 2076433

Corso: Calcolo Numerico

Data: February 1, 2026

1 Introduzione

Il progetto ha come obiettivo lo sviluppo di un metodo per l'interpolazione polinomiale su $[-1, 1]$ basato su punti di Leja approssimati, estratti da una mesh fitta. Verrà calcolata la costante di Lebesgue per analizzare la stabilità del metodo e confrontata l'accuratezza dell'interpolante con quella ottenuta utilizzando nodi equispaziati.

L'interpolante è definito su una base di Chebyshev di primo tipo:

$$V_{ij} = \cos((j-1)\arccos(z_i)), \quad i = 1, \dots, d+1, \quad j = 1, \dots, d+1,$$

e i coefficienti vengono determinati risolvendo il sistema lineare $Vc = f(z)$ tramite l'operatore \ di MATLAB, evitando l'uso di `polyfit`.

2 Calcolo dei punti di Leja

2.1 Algoritmo 1: DLP

L'algoritmo 1 calcola i punti di Leja approssimati iterativamente. Sia x il vettore dei punti della mesh equispaziati in $[-1, 1]$ e d il grado del polinomio interpolante. Il numero di nodi da estrarre è $n = d + 1$.

Il primo nodo è definito come il primo elemento della mesh, $dlp_1 = x_1$. Per ogni nodo successivo dlp_k, con $k = 2, \dots, n$, si calcola la produttoria:

$$\prod_{j=1}^{k-1} |x - dlp_j|,$$

e si seleziona il punto della mesh che massimizza questa produttoria. Il risultato è il vettore dlp contenente i nodi di Leja approssimati.

2.2 Algoritmo 2: DLP2

L'algoritmo 2 calcola i punti di Leja approssimati utilizzando la fattorizzazione LU della matrice di Vandermonde di Chebyshev. Sia x il vettore dei punti della mesh in $[-1, 1]$ e d il grado del polinomio interpolante. Il numero di nodi da estrarre è $n = d + 1$.

La matrice di Vandermonde di Chebyshev V è costruita come:

$$V_{ij} = \cos((j-1)\arccos(x_i)), \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove M è il numero di punti della mesh. Si esegue la fattorizzazione LU con pivoting su V e si estraggono i nodi di Leja approssimati dai pivot della fattorizzazione. Il risultato è il vettore dlp contenente i nodi di Leja approssimati.

3 Calcolo della costante di Lebesgue

La costante di Lebesgue Λ_n per i punti di Leja viene calcolata come:

$$\Lambda_n = \max_{x \in [-1,1]} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|,$$

dove $l_i(x)$ sono i polinomi di Lagrange associati ai punti di Leja.

3.1 Calcolo della costante di Lebesgue

La costante di Lebesgue, indicata con L, misura la stabilità dell'interpolazione polinomiale.

Siano $z_0, \dots, z_n$ i nodi di interpolazione e x un insieme di punti in cui valutare la funzione di Lebesgue. Per ogni nodo z_i, si definisce il polinomio di Lagrange $l_i(x)$ come:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - z_j}{z_i - z_j}.$$

La funzione di Lebesgue $\lambda(x)$ è data dalla somma dei valori assoluti dei polinomi di Lagrange:

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|.$$

La costante di Lebesgue è quindi definita come il massimo della funzione $\lambda(x)$:

$$L = \max \lambda(x).$$

4 MATLAB

Il codice MATLAB sviluppato per questo progetto include le funzioni per calcolare i punti di Leja approssimati, la costante di Lebesgue e l'interpolazione polinomiale. Le funzioni principali sono:

- `dlp`: Funzione che calcola i punti di Leja approssimati iterativamente, massimizzando la produttoria dei valori assoluti delle differenze tra i punti della mesh e i nodi già scelti.
- `dlp2`: Funzione che calcola i punti di Leja approssimati utilizzando la fattorizzazione LU della matrice di Vandermonde di Chebyshev.
- `leb_con`: Funzione che calcola la costante di Lebesgue, definita come il massimo della somma dei valori assoluti dei polinomi di Lagrange associati ai nodi di interpolazione.
- `main_experiment`: Script principale che esegue esperimenti sulle sequenze di Leja, calcola le costanti di Lebesgue, il tempo computazionale e l'errore di interpolazione. Include la generazione di grafici per confrontare nodi di Leja e nodi equispaziati.

5 Sperimentazione

La sezione di sperimentazione descrive il setup matematico utilizzato per analizzare le sequenze di Leja e confrontarle con i nodi equispaziati.

5.1 Setup Matematico

Sia x_{leja} una mesh uniforme in $[-1, 1]$ composta da $M_{leja} = 100000$ punti, utilizzata per estrarre i nodi di Leja. Sia x_{eval} una mesh uniforme in $[-1, 1]$ composta da $M_{eval} = 2001$ punti, utilizzata per valutare la funzione di Lebesgue e l'errore di interpolazione.

I gradi del polinomio considerati sono $d = 1, \ldots, 50$, con $n = d + 1$ nodi per ogni grado. La funzione di test scelta è:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1.3},$$

che presenta una singolarità al di fuori dell'intervallo di interpolazione.

Per ogni grado d, vengono calcolati:

- La costante di Lebesgue Λ_n per i nodi di Leja (Algoritmi `dlp` e `dlp2`).
- La costante di Lebesgue Λ_n per i nodi equispaziati.
- L'errore massimo di interpolazione per i nodi di Leja e i nodi equispaziati.
- Il tempo computazionale richiesto dagli algoritmi `dlp` e `dlp2`.