1 Conteo

Teorema 1.1. *Si un trabajo consiste en k tareas sucesivas, y la tarea i puede ser realizada de n_i maneras, entonces el trabajo puede ser realizado de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ maneras.*

Observación 1.1. *Se puede contar con remplazo o sin remplazo, tomando en cuenta el orden o no.*

Definición 1.2. *Para un entero positivo n, $n!$ denota el producto de los enteros positivos desde 1 hasta n. Es decir:*

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

. Definimos $0! = 1$.

Definición 1.3. *Para enteros no negativos n y r, con $n \geq r$, definimos el simbolo $\binom{n}{r}$ como el numero de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. Este simbolo se lee "r en n" y se calcula como:*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Proposición 1.4. *Supongamos que n y r son enteros no negativos con $n \geq r$ y supongamos que queremos elegir r objetos de un conjunto de n objetos. Podemos hacerlo de las siguientes maneras:*

1. *Ordenados sin reemplazo.*

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

2. *Ordenados con reemplazo.*

$$n^r$$

3. *No ordenados sin reemplazo.*

$$\binom{n}{r}$$

4. *No ordenados con reemplazo.*

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Definición 1.5. *Sea $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ un espacio muestral finito. Decimos que todos los resultados son igualmente probables si*

$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{N}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, N$.

Proposición 1.6. *Si S es un espacio muestral finito con N resultados igualmente probables, entonces para cualquier evento A,*

$$P(A) = \sum_{\{s_i \in A\}} P(\{s_i\}) = \sum_{\{i : s_i \in A\}}^{N} \frac{1}{N} = \frac{|A|}{N}$$

Proposición 1.7. *Sea n un entero no negativo. Entonces:*

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n$ *en particular*
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$
4. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Proposición 1.8. *Sean n y r enteros no negativos con $n \geq r$. Pensemos que queremos saber cuantos vectores $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ de longitud r distintos podemos formar tales que la suma de sus componentes es n. Entonces:*

1. *Si $x_i > 0$, entonces el numero de vectores es $\binom{n+r-1}{r-1}$*
2. *Si $x_i \geq 0$, entonces el numero de vectores es $\binom{n-1}{r-1}$*

Proposición 1.9. *Sean n y k. Si tenemos un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de longitud n donde $x_i \in \{0, 1\}$ entonces el numero de vectores distintos que podemos formar tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \text{ es } \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}$$

Proposición 1.10. 1. *Sean, n, m y r enteros no negativos con $n + m \geq r$, entonces:*

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$

(Considerar dos clases y las formas de elegir r elementos de $n+m$ de las cuales k pertenecen a la primera clase y $r-k$ a la segunda clase)

2.

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

3.
$$\binom{n}{k}k = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(Podemos pensar en un comite en el que se elige primero el comite luego la silla de entre el comite o todo el comite que no esta en la silla y luego la silla o la silla y luego todo el comite restante)

4. *Sean n y r enteros no negativos con $n \geq r$. El número de formas de distribuir n objetos entre r conjuntos tal que cada conjunto reciba al menos un objeto está dado por:*

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}(r-k)^n$$

A esta forma de conteo se le llama principio de inclusion-exclusion.

5. *A la siguiente identidad le llamamos identidad combinatoria de Fermat:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1} \quad n \geq k$$

(¿Cuantos subconjuntos de tamaño k tienen como elemento maximo i?)

6.
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(¿Para comites de tamaño k cuantos comites con silla hay o cuantas elecciones de silla para comietes de cualquier tamaño?)

7.
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = n(n+1)2^{n-2}$$

(¿Cuantos comites tenemos si elegimos un presidente y un secretario -posiblemente el mismo individuo-?)

8. *Para* $n \geq 0$*:*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

9. *Para ileqn:*

$$\sum_{i=j}^{n} \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^n - i$$

10. *Si tenemos* k *lugares y y* m *objetos repetidos* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *con* $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$*, entonces el numero de formas de asignar los* k *lugares a los* m *objetos es:*

$$\frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$