1 Álgebra superior

1.1 Funciones

Teorema 1.1. *Para* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *función, se cumple:*

1. *Si* $A \subseteq Dom(f)$, $A = \emptyset$ *si y solo si* $f[A] = \emptyset$.
2. *Si* $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.
3. *Si* $x \in Dom(f)$, $f[\{x\}] = \{f(x)\}$.
4. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $f[A] \subseteq f[B]$.
5. $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.
6. $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.
7. $f[A - B] \supseteq f[A] - f[B]$.

Teorema 1.2. *Si f y g son funciones*

1. $g \circ f[A] = g[f[A]]$.
2. $(g \circ f)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]]$.

Definición 1.3. $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es invertible si y solo si* f^{-1} *es función.*

Definición 1.4. $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es inyectiva si y solo si* $f(x) = f(y)$ *implica* $x = y$ *para todo* $x, y \in \mathbb{X}$.

Teorema 1.5. *Para* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *Son equivalentes:*

1. f *es inyectiva.*
2. $\exists g : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ *tal que* $g \circ f = id_{\mathbb{Y}}$.
3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *para todo* $A, B \subseteq \mathbb{X}$. *(esta hay que revisarla)*

Definición 1.6. $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es sobreyectiva si y solo si para todo* $y \in \mathbb{Y}$ *existe* $x \in \mathbb{X}$ *tal que* $f(x) = y$.

Teorema 1.7. *Si* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *es función, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. f *es sobreyectiva.*
2. $\forall y \in \mathbb{Y}$, $f[\mathbb{X}] \supseteq y$.
3. $\forall Z, Y$ *conjuntos cualesquiera tales que* $h, k : Z \to \mathbb{Y}$ *si* $h \circ f = k \circ f$ *entonces* $h = k$.
4. $\forall A \subseteq \mathbb{Y}$ *y* $A \neq \emptyset$ *entonces* $f^{-1}[A] \neq \emptyset$.
5. $\forall B \subseteq \mathbb{Y}$ *entonces* $B \subseteq f[f^{-1}[B]]$