EST-24107: Simulación

Profesor: Alfredo Garbuno Iñigo — Otoño, 2022 — Introducción.
Objetivo: Que veremos.
Lectura recomendada: Capítulo 1 de [2]. Capítulo 1-4 de [1]

1. INTRODUCCIÓN

2. NOTACIÓN

Denotamos por x una `variable aleatoria` y por $\mathbb{P}(\cdot)$ una `función de distribución`. Escribimos $x \sim \mathbb{P}$ para denotar que la variable aleatoria x tiene distribución $\mathbb{P}(\cdot)$. Denotamos por $\mathbb{E}[\cdot]$ el `valor esperado` del argumento con respecto a la distribución que estamos considerando. Durante el curso seremos explícitos en la variable aleatoria y usaremos

$$\mathbb{E}_x[\cdot] = \int_{\mathcal{X}} \cdot \, \pi(x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{1}$$

o bien, haremos énfasis en la distribución por medio de lo siguiente

$$\mathbb{E}_\pi[\cdot] = \int_{\mathcal{X}} \cdot \, \pi(x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{2}$$

de acuerdo al contexto.

Nota que en las ecuaciones anteriores estamos considerando el término $\pi(\cdot)$ como la `función de densidad` de la `función de probabilidad` $\mathbb{P}(\cdot)$.

Nos será útil la siguiente notación para evaluar valores esperados

$$\pi(f) = \mathbb{E}_\pi[f(x)] = \int_{\mathcal{X}} f(x) \, \pi(x) \, \mathrm{d}x \,, \tag{3}$$

pues será el objetivo general para los métodos que estudiaremos en el curso.

3. REPASO DE PROBABILIDAD

Consideraremos como requisitos el contenido de Cálculo de Probabilidades II y Álgebra Lineal (o equivalentes). En particular lo que requerimos como base es lo siguiente.

3.0.1. ***Definición [Espacio de Probabilidad]:*** Un espacio de probabilidad está definido por la terna $(\Omega, \mathcal{X}, \pi)$:

1. El espacio muestral, Ω (elementos).
2. El espacio de eventos medibles, $\mathcal{X}$ (subconjuntos).
3. La medida de probabilidad, $\mathbb{P} : \mathcal{X} \to [0, 1]$.

3.0.2. ***Definición [Variable aleatoria]:*** Una variable aleatoria es una función $X : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que las pre-imágenes bajo X son eventos medibles. Es decir,

$$\{w \in \mathcal{X} : X(w) \leq x\} \in \mathcal{X} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

3.0.3. ***Definición [Función de acumulación]:*** Para toda variable aleatoria X tenemos una función de acumulación $\mathbb{P}_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}\big(\{w \in \mathcal{X} : X(w) \leq x\}\big) \,. \tag{5}$$

Esto usualmente lo escribimos como $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}$.

3.0.4. ***Definición [Función de densidad]:*** Una variable aleatoria es continua si su función de acumulación es `absolutamente continua` y puede ser expresada por medio de

$$\mathbb{P}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \pi(s)\, \mathrm{d}s \,, \tag{6}$$

donde la anti-derivada $\pi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ se llama la `función de densidad` de la variable aleatoria X.

Las propiedades generales de las distribuciones de probabilidad se pueden especificar por medio de su centralidad (localización), su dispersión, su rango de valores, su simetría y el comportamiento de valores extremos.

En general esto lo podemos extraer de los momentos

$$\mathbb{E}(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \, \pi(x)\, \mathrm{d}x \,, \tag{7}$$

o los momentos centrales. Por ejemplo: media y varianza.

Definición [Valores Esperados]: El valor esperado de una distribución

Uno de los resultados que espero recuerden bien de sus cursos anteriores es el de la Ley de los Grandes Números. La cual podemos enunciar como:

> **Teorema [Ley de los Grandes Números]**: Sea $X_1, X_2, \ldots$ una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) y sea $\bar{X}_n$ el promedio de un subconjunto de n ellas. Si denotamos por θ el valor promedio de X_i dentro de esa colección, entonces tenemos que
>
> $$\bar{X}_n \to \theta \quad \text{(casi seguramente)} \,. \tag{8}$$

REFERENCIAS

[1] R. C. Smith. *Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications*, volume 12. SIAM, 2013. 1

[2] T. Sullivan. *Introduction to Uncertainty Quantification*, volume 63 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer International Publishing, 2015. 1