
Implémentation du papier *Dynamic Robust Portfolio Selection with Copulas*

Carmen Cristea, Alisa Chekalina, Nguyen Thao Nhi VO,
Lia GASPARIN-GRANGER

Contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Données | 2 |
| 2.1 | Données utilisées | 2 |
| 2.2 | Construction des portefeuilles bivariés | 2 |
| 3 | Méthodologie | 3 |
| 3.1 | Prétraitement des données financières | 3 |
| 3.2 | Modélisation de la volatilité par GARCH(1,1) | 3 |
| 3.3 | Copules et estimation de la dépendance | 4 |
| 3.4 | Dépendance dynamique avec le modèle DCC | 4 |
| 3.5 | Simulation des pertes par Monte Carlo | 4 |
| 3.6 | Optimisation du portefeuille via WCVaR | 4 |
| 3.7 | Évaluation des stratégies | 5 |
| 4 | Résultats | 5 |

1 Introduction

Dans le cadre de notre projet, nous avons reproduit sous forme de code applicatif l'article Dynamic Robust Portfolio Selection with Copulas (Han, Li, Xia, 2017). Ce papier propose une approche innovante de l'optimisation de portefeuille en combinant des modèles de copules dynamiques (notamment DCC-copulas et copula-GARCH) avec des techniques de robustesse autour du Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Notre travail a consisté à implémenter intégralement cette méthodologie en Python, en simulant des portefeuilles bivariés, en estimant dynamiquement la dépendance entre actifs via des copules, et en résolvant des problèmes d'optimisation sous incertitude via la formulation Worst-Case CVaR (WCVaR). L'objectif était de comparer différentes stratégies (robustes, dynamiques, statiques et non-robustes) en termes de performance in-sample et out-of-sample, et d'évaluer la capacité des modèles dynamiques à mieux gérer les risques extrêmes tout en assurant une stabilité des rendements.

2 Données

2.1 Données utilisées

Pour tester et illustrer les méthodes du papier, nous avons travaillé sur un portefeuille composé de cinq actifs financiers cotés sur le marché chinois. Il s'agit des séries de prix suivantes, issues de l'historique boursier :

- Baoshan Iron Steel
- Beijing Tongrentang
- China Shenhua Energy (SH)
- Huaneng Power International
- SAIC Motor Corp

Ces actions couvrent plusieurs secteurs clés de l'économie chinoise : l'industrie lourde, l'énergie, la pharmacie traditionnelle, la production électrique et l'automobile. Nous utilisons les prix journaliers pour calculer les rendements logarithmiques, qui servent de base à l'estimation des dépendances, à la simulation des rendements futurs, et à l'optimisation des portefeuilles sous contrainte de risque.

2.2 Construction des portefeuilles bivariés

Dans le cadre de notre analyse, nous avons construit cinq portefeuilles bivariés, chacun constitué de deux actifs parmi les cinq retenus. Le choix de ces paires vise à représenter différentes combinaisons sectorielles et à observer l'effet de la dépendance dynamique dans divers contextes économiques. Les portefeuilles étudiés sont les suivants :

- Portefeuille 1 : China Shenhua Energy et Baoshan Iron & Steel. Association d'un producteur d'énergie fossile et d'un acteur majeur de la sidérurgie.

- Portefeuille 2 : Beijing Tongrentang et Huaneng Power International. Combinaison d'une entreprise pharmaceutique traditionnelle et d'un producteur d'électricité.
- Portefeuille 3 : SAIC Motor Corp et China Shenhua Energy. Portefeuille croisant un constructeur automobile et le secteur de l'énergie fossile.
- Portefeuille 4 : Baoshan Iron & Steel et Huaneng Power International. Deux secteurs industriels fondamentaux : métallurgie et production électrique.
- Portefeuille 5 : Beijing Tongrentang et SAIC Motor Corp. Association d'une entreprise pharmaceutique et d'un constructeur automobile.

Chacune de ces paires a été modélisée à l'aide de copules dynamiques (DCC-Copula, Copula-GARCH) et comparée à des approches statiques ou non-robustes. L'objectif est d'évaluer l'intérêt d'une modélisation de la dépendance temporelle dans le cadre de la gestion robuste des risques extrêmes, notamment à travers le critère du Worst-Case Conditional Value-at-Risk (WCVaR).

3 Méthodologie

L'objectif de notre projet est de reproduire le cadre proposé par Han, Li et Xia (2017) dans leur article *Dynamic Robust Portfolio Selection with Copulas*. Cette méthode combine une modélisation robuste du risque de perte extrême, via le Conditional Value-at-Risk (CVaR), avec une représentation dynamique de la dépendance entre actifs à l'aide de copules. Nous avons structuré notre méthodologie en sept étapes principales.

3.1 Prétraitement des données financières

Nous utilisons des séries de prix journaliers de cinq actions représentatives du marché chinois. Les prix sont transformés en rendements logarithmiques quotidiens selon :

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Les rendements sont ensuite divisés en deux sous-périodes :

- **In-sample** : calibration des modèles et optimisation initiale (01/01/2015 - 31/12/2020);
- **Out-of-sample** : évaluation des performances sur période future (01/01/2021 - 31/12/2024).

La séparation s'effectue à 70% de la période disponible.

3.2 Modélisation de la volatilité par GARCH(1,1)

Chaque série de rendements est ajustée par un modèle GARCH(1,1) avec distribution t de Student. Ce modèle fournit une volatilité conditionnelle σ_t et des résidus standardisés :

$$z_t = \frac{r_t - \mu}{\sigma_t}$$

Ces résidus sont utilisés pour estimer la dépendance entre actifs, indépendamment des distributions marginales.

3.3 Copules et estimation de la dépendance

La dépendance entre actifs est modélisée à l'aide de copules bivariées. Nous utilisons quatre familles paramétriques :

- Copule **Gaussienne**
- Copule de **Clayton** (dépendance de queue gauche)
- Copule de **Gumbel** (dépendance de queue droite)
- Copule de **Frank** (symétrique)

À partir des corrélations, nous estimons le τ de Kendall, puis le paramètre θ associé à chaque copule.

3.4 Dépendance dynamique avec le modèle DCC

Pour modéliser l'évolution de la dépendance dans le temps, nous utilisons le modèle DCC (Dynamic Conditional Correlation) d'Engle (2002). Il génère une matrice de corrélation dynamique R_t à partir des résidus standardisés :

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)Q + \alpha z_{t-1} z_{t-1}^\top + \beta Q_{t-1}$$

Chaque R_t est convertie en τ_t de Kendall dynamique pour recalibrer les copules au fil du temps.

3.5 Simulation des pertes par Monte Carlo

À partir des paramètres des copules, nous simulons 1 000 scénarios de rendements bivariés via des techniques de Monte Carlo. Chaque simulation génère une perte de portefeuille :

$$L_i = -w^\top R_i$$

avec R_i un vecteur simulé et w les poids du portefeuille.

3.6 Optimisation du portefeuille via WCVaR

Le portefeuille est optimisé selon le critère de *Worst-Case CVaR* :

$$\min_{w \in \mathcal{W}} \max_{c \in \mathcal{C}} \text{CVaR}_\beta(w; c)$$

Cette optimisation est résolue par programmation convexe sous les contraintes suivantes :

- $\sum_i w_i = 1$ (budget total)
- $w_i \in [0, 1]$ (pas de vente à découvert)
- $E[w^\top R] \geq \lambda$ (rendement attendu minimum, optionnel)

Deux cadres sont considérés :

- **Statique** : optimisation effectuée une seule fois
- **Dynamique** : recalibrage mensuel avec fenêtre glissante

3.7 Évaluation des stratégies

Nous comparons quatre stratégies d'optimisation :

- **Nonrobust** : optimisation CVaR classique sans dépendance
- **Scopula** : WCVaR avec copule statique
- **GARCH-Copula** : WCVaR avec dépendance estimée sur résidus GARCH
- **MixCopula (DCC)** : WCVaR avec dépendance dynamique (DCC)

Les performances sont analysées via les rendements cumulés, la stabilité des poids, et des visualisations in-sample et out-of-sample.

4 Résultats

L'analyse des cinq portefeuilles bivariés révèle des performances contrastées entre les différentes stratégies d'optimisation, mettant en lumière à la fois les potentialités et les limites des méthodes robustes basées sur les copules. Ces résultats doivent être interprétés dans le contexte des contraintes méthodologiques qu'on a subies : 1000 scénarios ont été simulés au lieu de 10000 (contraintes de capacités de calcul), ainsi que le choix des données. Notre implémentation utilise des actions individuelles chinoises plutôt que des indices sectoriels du CSI 300, introduisant un niveau de volatilité idiosyncratique et de "bruit" significativement plus élevé que celui traité dans l'étude de référence. La période considérée est également différente, ce qui peut créer des patterns de corrélation différents. Cependant, on peut voir que les méthodes robustes ont une valeur ajoutée importante dans le cas de certains portefeuilles.

Le Portfolio 1 (Energy-Materials) illustre parfaitement l'efficacité des méthodes robustes proposées dans l'article. Les courbes DCC-Copula (rouge) et Copula-GARCH (bleue) dominent clairement la méthode non-robuste (verte) et la copule statique (orange) tout au long de la période out-of-sample. Cette supériorité est particulièrement marquée durant la phase de croissance entre les jours 400 et 600, où les méthodes dynamiques atteignent des rendements cumulatifs d'environ 1.65 contre 1.35 pour la méthode non-robuste. Cette performance s'explique par la forte corrélation entre les secteurs Energy et Materials (0.5625), créant un environnement où les copules dynamiques peuvent efficacement capturer et exploiter les structures de dépendance complexes, particulièrement durant les phases de volatilité élevée visibles entre les jours 100-150 et 500-600.

Le Portfolio 4 (Materials-Utilities) présente également des résultats meilleurs pour les approches robustes, bien que de manière plus modérée. Les méthodes Copula-GARCH et DCC-Copula parviennent à maintenir des performances comparables ou légèrement supérieures à la méthode non-robuste, démontrant leur capacité à gérer efficacement le risque dans des environnements de corrélation intermédiaire. La stabilité relative de ces méthodes, visible par des fluctuations moins erratiques que le benchmark non-robuste, confirme leur valeur ajoutée en termes de gestion des risques extrêmes. Ces deux cas d'étude valident l'hypothèse centrale de l'article selon laquelle l'incorporation de la dynamique des corrélations et l'utilisation de copules sophistiquées améliorent l'optimisation de portefeuille lorsque les conditions de marché engendrent des structures de dépendance complexes.

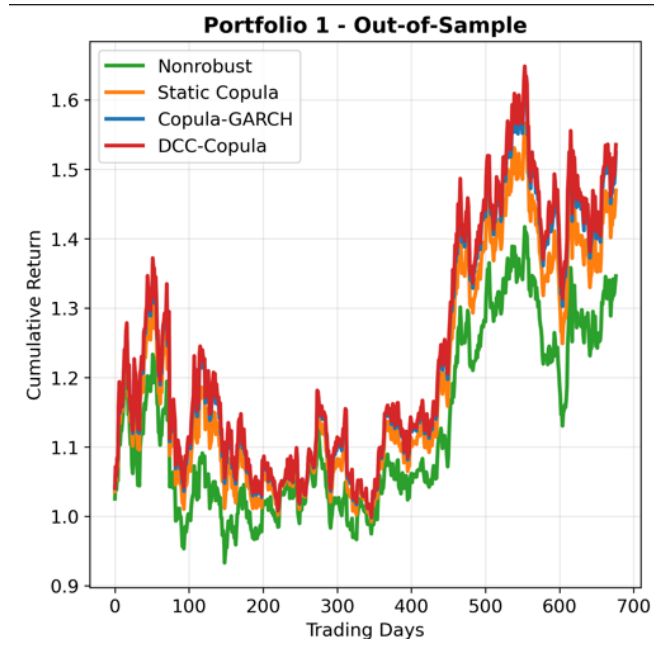


Figure 1: Comparaison des stratégies d'optimisation pour le portefeuille 1 (Energy-Materials) en période out-of-sample