

MISURA DI MOMENTI DI INERZIA E PENDOLO DI TORSIONE

INTRODUZIONE

L'equazione del moto di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse

$$M = I \alpha \quad (1)$$

esprime l'uguaglianza tra il modulo del momento M delle forze esterne rispetto l'asse e il prodotto del momento di inerzia I del corpo per l'accelerazione angolare $\alpha = d\omega/dt$, dove ω è la velocità angolare $\omega = d\theta/dt$.

Si consideri un corpo sospeso ad un filo passante per il suo centro di massa. Se il corpo viene fatto ruotare attorno all'asse, il filo subisce una torsione ed eserciterà sul corpo un momento di richiamo che tende a riportare il corpo nella sua posizione di equilibrio. Se la reazione del filo è di tipo elastico, l'angolo di rotazione θ risulta proporzionale al momento di richiamo:

$$M_{el} = - C \theta \quad (2)$$

(in analogia a quanto succede nel caso della trazione da parte di una forza elastica, dove l'allungamento Δl è proporzionale al modulo della forza: $F = - k \Delta l$).

La costante di proporzionalità C è detta costante di torsione del filo ed è legata ai parametri geometrici del filo tramite la relazione:

$$C = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \quad (3)$$

dove r e l sono rispettivamente il raggio e la lunghezza del filo, e G è il modulo di rigidità o di scorrimento, che è un valore tipico del materiale di cui il filo è costituito.

Se il corpo viene lasciato libero di ruotare esso si mette ad oscillare, sotto l'azione del momento elastico. Da (1) e (2) si ha infatti:

$$- C \theta = I \alpha = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

dove I è il momento di inerzia di corpo rispetto l'asse di rotazione coincidente col filo. L'equazione si può riscrivere come:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\theta = 0$$

che descrive una **oscillazione armonica** di ampiezza $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$, pulsazione $\omega^2 = C / I$ e periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \quad (4)$$

Esiste cioè una **relazione precisa tra periodo delle oscillazioni armoniche, costante elastica e momento di inerzia rispetto l'asse di oscillazione**.

Pertanto noto il momento di inerzia (in base ad esempio alla geometria del corpo) se si misura il periodo dell'oscillazione si può ricavare il valore della costante elastica del filo. Viceversa, nota la costante elastica del filo, dalla misura del periodo di oscillazione si può ricavare il momento di inerzia di un oggetto di forma qualunque.

Misura di Momenti di Inerzia

Scopo di questa prima parte è la misura del momento di inerzia di vari corpi. Si farà il confronto fra una misura di tipo dinamico, ottenuta dall'oscillazione del pendolo, ed il valore del momento di inerzia calcolato a partire dalle caratteristiche geometriche del corpo.

Si dispone di diversi corpi:

- a) una sbarra cilindrica omogenea, con due masse uguali, scorrevoli su di essa, poste equidistanti dall'asse di rotazione;
- b) un disco;
- c) un anello.

Per rotazioni nella configurazione prevista dall'apparato in uso, il loro momento di inerzia vale rispettivamente

a) $\frac{1}{12} m L^2 + 2 (\mu D^2)$

con m e L massa e lunghezza della sbarra, μ massa scorrevole, D distanza della massa scorrevole (del suo centro di massa) dall'asse di rotazione;

b) $\frac{1}{2} m R^2$

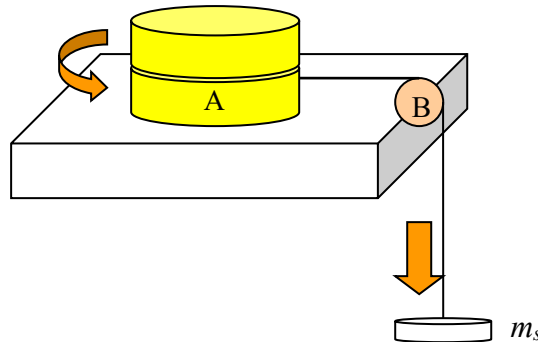
con m e R massa e raggio del disco;

$$c) \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

con m massa dell'anello, R_1 e R_2 raggio interno ed esterno dell'anello.

Per misurare in modo dinamico i momenti di inerzia dei vari corpi si utilizza la (1): si misura l'accelerazione angolare α con cui ruotano attorno al loro asse sotto l'azione del momento di una forza nota.

I corpi vengono fissati a turno sul perno di una puleggia A posta su un sensore di moto rotatorio, collegato tramite interfaccia al PC. Per mettere in rotazione la puleggia si deve tirare il filo avvolto attorno ad essa, applicando una forza. Si utilizza la forza peso esercitata da masse calibrate sospese all'altro capo del filo. Per fare questo si deve montare sulla base del sensore di moto, lateralmente, una seconda puleggia B, su cui si fa scorrere il filo proveniente dalla puleggia del sensore di moto. All'estremità del filo si lega il supporto di sospensione delle masse calibrate.



Quando si pongono sul supporto una o più masse il sistema si mette in rotazione. Il sensore di moto rotatorio misura la rotazione della puleggia (e dei corpi ad essa solidali) in funzione del tempo, da cui si ricava la velocità angolare ω . Dal grafico di ω in funzione del tempo si può ricavare l'accelerazione α , per derivazione.

Il modulo del momento della forza applicata è calcolabile come

$$M = T r$$

dove T è la tensione del filo ed r è il braccio della forza, cioè il raggio della puleggia A. La tensione del filo può essere ricavata risolvendo l'equazione del moto della massa m_s che cade con accelerazione lineare a

$$F = m_s g - T = m_s a$$

da cui si ricava la tensione $T = m_s g - m_s a$

Poiché $a = \alpha r$ si ha $T = m_s g - m_s \alpha r$

Pertanto $I \alpha = M = T r = m_s g r - m_s \alpha r^2$

da cui si ricava il momento di inerzia

$$I = m_s g r / \alpha - m_s r^2$$

Questa equazione permette di ricavare il momento di inerzia I dalla misura dell'accelerazione α , del raggio r e della massa m_s . La misura di I può essere ripetuta variando la massa sospesa, e quindi variando l'accelerazione angolare. Si può allora ricavare I dall'interpolazione di una retta che rappresenta la relazione ottenuta dalla precedente dividendo entrambi i membri per $m_s g r$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{I}{g r m} + \frac{r}{g}$$

cioè mettendo in grafico $1/\alpha$ in funzione di $1/m$.

Confrontare il momento di inerzia ottenuto dalle misure di accelerazione con il momento di inerzia calcolato a partire dai parametri geometrici del corpo, tenendo in conto le incertezze di misura presenti in entrambi i casi.

Ripetere il procedimento per ciascuno dei corpi a disposizione. L'anello va fissato sopra il disco in modo da misurare il momento di inerzia totale dei due corpi.

Pendolo di torsione

Scopo di questa parte è l'osservazione delle oscillazioni di torsione e la misura della costante di torsione di fili di diversa sezione. Si utilizzano due metodi: il metodo dinamico, per ricavare la costante di torsione dal periodo delle oscillazioni armoniche del pendolo in base all'equazione (4), e il metodo statico, per ricavare la costante di torsione dalla misura dell'angolo di torsione, con il pendolo fermo, in base all'equazione (2).

Si dispone di tre fili di acciaio di sezione diversa. La sezione di ciascun filo può essere misurata con il micrometro (palmer).

Misura dinamica

Si fissi sul perno superiore del sensore di moto la sbarra con le due masse mobili, utilizzata precedentemente, di cui è quindi noto il valore del

momento di inerzia. Si monti nella parte inferiore del sensore di moto il supporto per il filo di torsione. Si fissi l'estremità inferiore del filo di torsione al perno di base.

Si metta manualmente il pendolo in oscillazione e si registri col sensore di moto rotatorio la posizione angolare in funzione del tempo. Si misuri il periodo del moto armonico T dalla distanza tra N massimi successivi (in tal modo si riduce di un fattore N l'errore su T). Si ricavi la costante elastica di torsione dalla relazione (4).

Misura statica

Si riporti il sistema in equilibrio. Si sospenda alla puleggia una massa nota in modo tale da far ruotare il pendolo di qualche decina di gradi e si misuri col sensore l'angolo di cui il pendolo è ruotato (angolo di torsione). Si ricavi la costante di torsione del filo C dall'equazione (2).

Si confronti il valore ottenuto nella misura statica con il valore determinato precedentemente col metodo dinamico.

Si ripeta la determinazione della costante di torsione per i tre fili di sezione diversa e si verifichi la **dipendenza della** costante di torsione del filo **C dal raggio del filo** prevista dell'equazione (3). Se si sono utilizzati fili di lunghezza diversa si faccia attenzione al fatto che nella (3) compare anche la lunghezza del filo.