



Università degli Studi di Milano-Bicocca
Laboratorio di Fisica 1

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

OSCILLAZIONI SMORZATE E FORZATE

3 Aprile 2023

Gruppo di lavoro n. 3:

Arnoldi Marta, m.arnoldi9@campus.unimib.it

Matricola 898938

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it

Matricola 897462

Docente:

Prof. Marta Calvi

Anno Accademico 2022-2023

Indice

1	Obiettivi	2
2	Cenni teorici	2
2.1	oscillazioni libere	2
2.2	oscillazioni smorzate	2
2.3	oscillazioni forzate	3
3	Apparato sperimentale e strumenti di misura	3
4	Raccolta dati	4
4.1	PARTE A: Oscillazioni libere	4
4.2	PARTE B: Oscillazioni smorzate	4
4.3	PARTE C: Oscillazioni forzate	5
5	Analisi Dati	5
5.1	PARTE A: oscillazioni libere	5
5.2	PARTE B: oscillazioni smorzate	5
5.3	PARTE C: oscillazioni forzate (risonanza)	6
6	CONCLUSIONI	7
6.1	Accordo ω_0	7
6.2	Accordo γ	8
6.3	Risonanza	8
7	Appendice	8

1 Obiettivi

L'obiettivo dell'esperienza è lo studio delle oscillazioni armoniche, smorzate e forzate di un pendolo. Si vuole inoltre studiare il fenomeno della risonanza misurando l'ampiezza in funzione della frequenza forzante ($A(\omega)$).

2 Cenni teorici

2.1 oscillazioni libere

Nelle oscillazioni libere sul pendolo non agiscono forze d'attrito, il pendolo è libero di oscillare sull'asse centrale sviluppando un momento elastico $M_{el} = -C\theta$. L'equazione dell'oscillazione è data dalla soluzione di:

$$I\alpha = -C\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (1)$$

dove θ è l'angolo, C la costante elastica, I l'inerzia, ω_0 la **pulsazione propria** e vale la relazione $\omega_0^2 = C/I$. Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$\theta(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

A_0 è l'ampiezza dell'oscillazione

2.2 oscillazioni smorzate

Sul sistema agisce una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità: $F_a = bv$. Riscrivendo l'equazione sommando il momento della forza di attrito (rF_a) al momento elastico si ottiene:

$$I\alpha = -C\theta - rbv \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + rb \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0 \quad (3)$$

chiamiamo coefficiente di smorzamento $\gamma = \frac{rb}{2I}$, riscriviamo allora l'equazione come:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (4)$$

nel caso di smorzamento debole con $\gamma^2 < \omega_0^2$ otteniamo:

$$\theta(t) = A(t) \sin(\omega t + \phi) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad (5)$$

NOTA: ω è minore di ω_0 a causa dello smorzamento, infatti:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (6)$$

2.3 oscillazioni forzate

Nelle oscillazioni forzate sul sistema agisce una forza esterna sinusoidale $F = F_0 \sin(\omega_f t)$ il cui momento vale $M(t) = rF(t)$. Definendo $M_0 = rF_0/I$ possiamo riscrivere l'equazione differenziale come:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = M_0 \sin(\omega_f t) \quad (7)$$

La soluzione dell'equazione implica che l'ampiezza è costante nel tempo ma varia in funzione della frequenza della forzante; dato che $\omega = \omega_f$ otteniamo:

$$\theta(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi) \quad A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan(\phi) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (8)$$

3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

L'apparato è costituito da un disco impernato libero di ruotare (1), collegato a uno strumento che ne misura l'angolo. Un filo è avvolto attorno al disco e collegato agli estremi a delle molle (4): una vincolata (3) e l'altra ancorata a un sistema per l'oscillazione forzata (5).

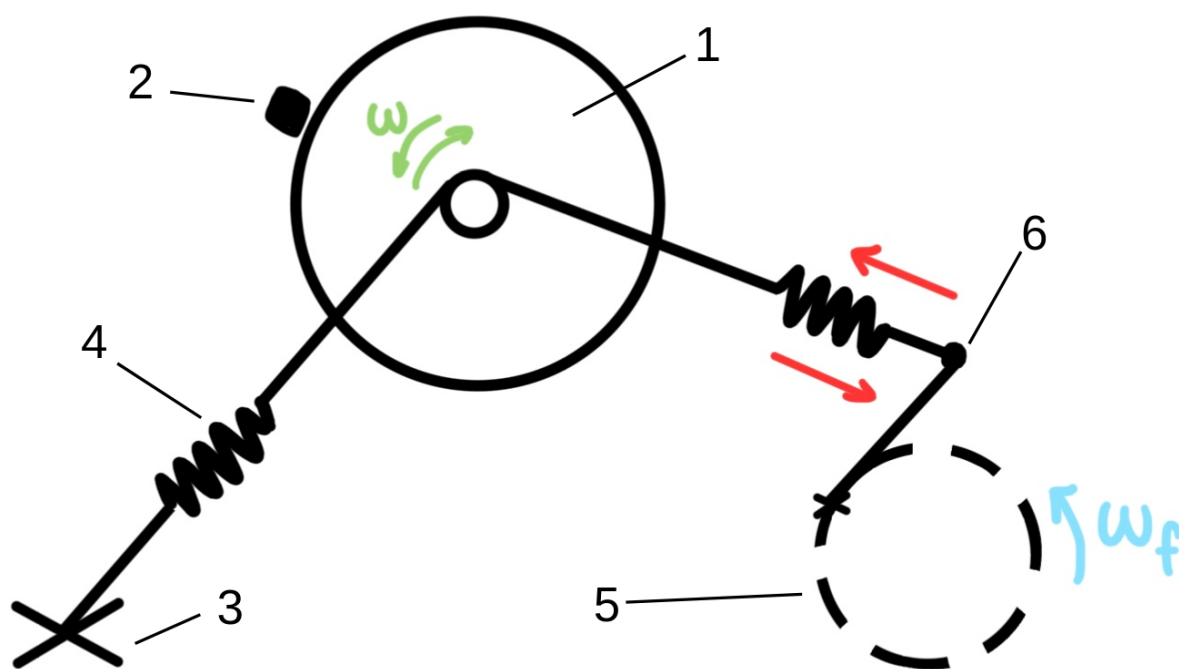


Figura 1: Apparato sperimentale

Attraverso un magnete (2) è possibile controllare la smorzatura del disco. Tramite un generatore di tensione è possibile variare la frequenza delle oscillazioni della forzante. Il sistema forzante genera una pulsazione ruotando l'ancoraggio in un'orbita circolare, il filo passante per il punto (6) trasferisce l'oscillazione alle molle.

4 Raccolta dati

4.1 PARTE A: Oscillazioni libere

Si vuole la frequenza propria delle molle ω_0 . Il disco, senza attriti e forzanti, viene fatto oscillare. In accordo con l'equazione 2 il grafico $\theta(t)$ è una senoide, interpolando si ricava il valore di ω_0 .

Ripetute 10 misurazioni.

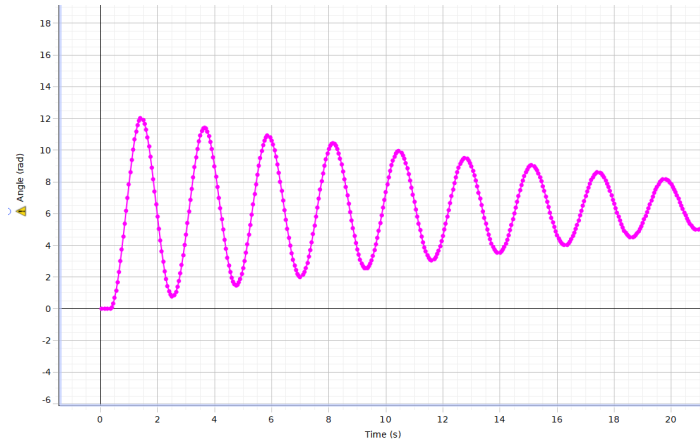


Figura 2: Onda sinusoidale non smorzata

$\bar{\omega}_0$	2.620 rad/s
σ_{ω_0}	0.012 rad/s
$\sigma_{\bar{\omega}_0}$	0.004 rad/s

Tabella 1: misurazioni parte A

Lo smorzamento dovuto all'attrito delle parti meccaniche lo assumiamo come trascurabile rispetto all'attrito dovuto al magnete nella PARTE B.

4.2 PARTE B: Oscillazioni smorzate

Con un magnete sottoponiamo il disco a una forza d'attrito. Il pendolo viene fatto oscillare (come nella PARTE A), questa volta dal grafico $\theta(t)$ si ottiene una senoide smorzata come previsto dall'equazione 5. Attraverso l'interpolazione misuriamo γ, ω .

Ripetute 10 misurazioni.

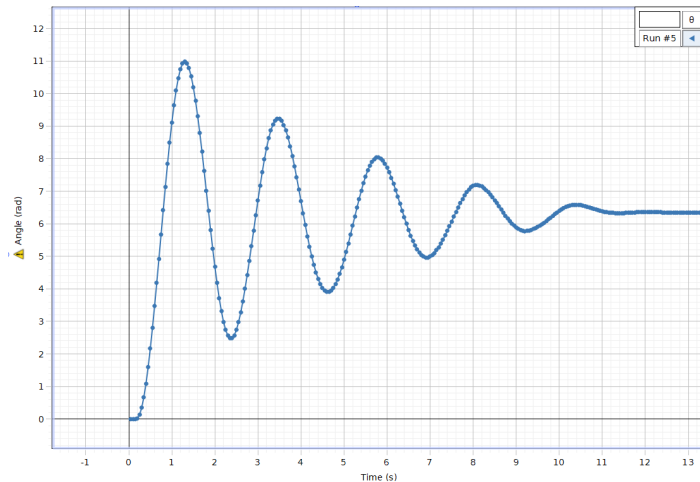


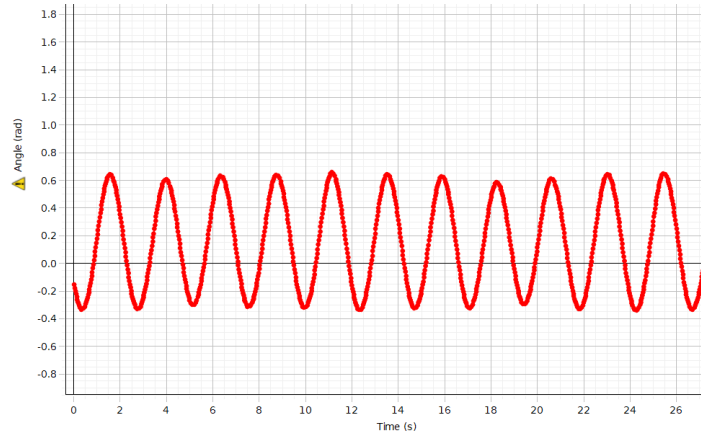
Figura 3: Onda sinusoidale smorzata

	ω	γ
media	2.571	0.164
dev std	0.037	0.007
err std	0.012	0.002

Tabella 2: misurazioni parte B

4.3 PARTE C: Oscillazioni forzate

Azionando l'oscillatore della forzante si varia la frequenza e, interpolando il valore dell'onda sinusoidale ottenuta, si prende nota dell'ampiezza dell'oscillazione A e della frequenza ω . Ripetute 16 misurazioni.



ω da 1.61 a 3.55 rad/s
 A da 2.90 a 11.90 cm

Tabella 3: misurazioni parte C

Figura 4: Onda sinusoidale forzata

5 Analisi Dati

5.1 PARTE A: oscillazioni libere

I valori di σ_{ω_0} forniti da *capstone* risultano essere sperimentalmente una sottostima del valore vero, infatti variando l'intervallo di dati selezionati per l'interpolazione notiamo che σ_{ω_0} varia di circa 0.1. Assumiamo quindi $\sigma_{strumento} = 0.1$.

Per ricavare l'incertezza su ω_0 propaghiamo la deviazione standard con l'errore dovuto alla sensibilità dello strumento e otteniamo $\sigma_{\omega_0} = 0.12$.

Procediamo analogamente per γ assumendo l'incertezza sperimentale $\sigma_{strumento} = 0.001$ e otteniamo $\sigma_{\gamma} = 0.007$.

I valori delle incertezze misurati da *capstone* li usiamo invece per i pesi della media:

$$w = \frac{1}{\sigma_{capstone}^2} \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \omega_{0i}}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\omega_{0i} - \bar{\omega}_0)^2}{N-1}} \quad \sigma_{\omega_0} = \sqrt{(\sigma)^2 + (\sigma_{strumento})^2}$$

I valori di $\bar{\omega}_0, \bar{\gamma}, \sigma_{\omega_0}$ e σ_{γ} sono quelli riportati nella raccolta dati.

5.2 PARTE B: oscillazioni smorzate

Per gli errori valgono le considerazioni del punto precedente.

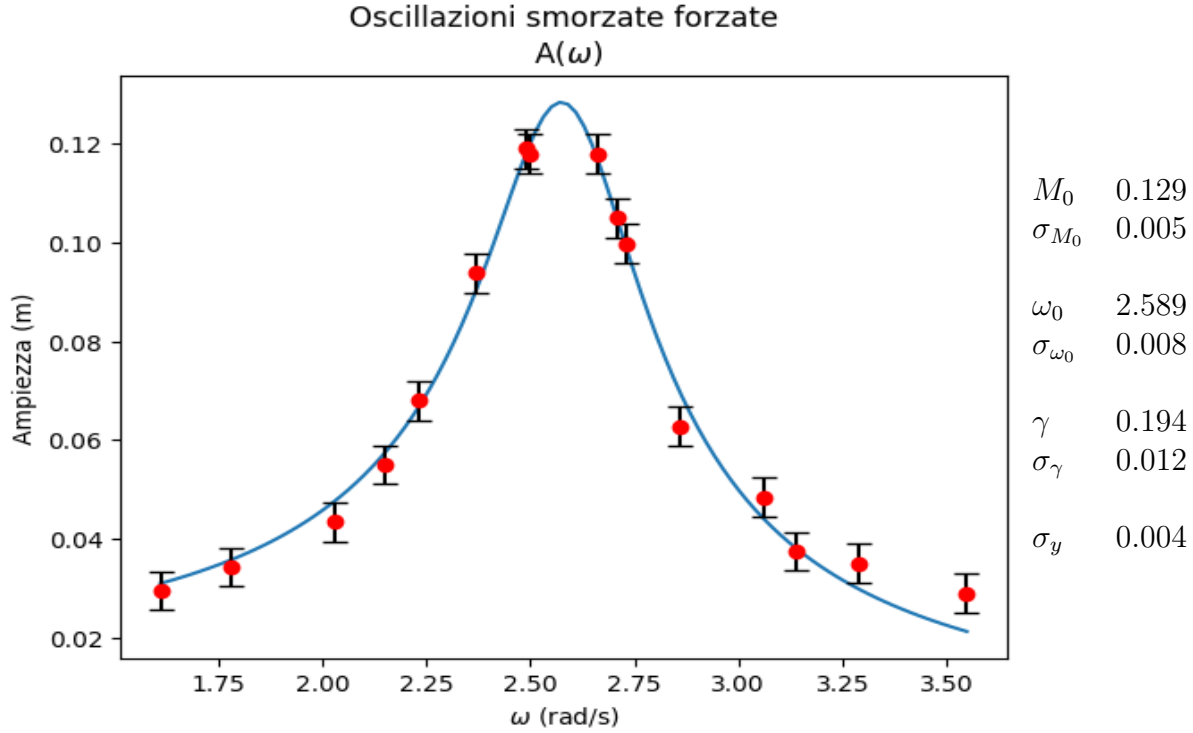
Grazie alla relazione 6 ricaviamo il valore di ω_0 come:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2} \quad \sigma_{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \omega}\right)^2 \sigma_{\omega}^2 + \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma_{\gamma}^2} \Rightarrow \sigma_{\omega_0} = \sqrt{\frac{\omega^2 \sigma_{\omega}^2 + \gamma^2 \sigma_{\gamma}^2}{\omega^2 + \gamma^2}}$$

Otteniamo quindi: $\omega_0 = 2.576 \pm 0.012$ rad/s

5.3 PARTE C: oscillazioni forzate (risonanza)

Azioniamo un motore che esercita un'oscillazione costante sulle molle. Il sistema, dopo un certo tempo necessario per la stabilizzazione dell'ampiezza, oscilla alla stessa frequenza della forzante con un'ampiezza che dipende da ω . Quando $\omega = \omega_0$ ci aspettiamo di osservare un picco in accordo con la relazione 8. Con un'interpolazione dei valori di ω e A osservati ricaviamo i parametri della curva:



La funzione `scipy.optimize.curve_fit` fornisce inoltre la seguente matrice di covarianza dei valori ricavati dall'interpolazione:

$$\begin{pmatrix} & M_0 & \omega_0 & \gamma \\ M_0 & 1.75 & 0.50 & 3.58 \\ \omega_0 & 0.50 & 3.88 & 0.95 \\ \gamma & 3.58 & 0.95 & 8.74 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

Osserviamo che c'è uno scarto tra il valore di ω_f e l' ω ottenuto dall'interpolazione. Nel grafico trascuriamo le incertezze sull'asse delle X limitandoci a riportare i valori di ω . Proviamo ora a quantificare l'errore con il metodo dei minimi quadrati:

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (\omega_i - \omega_{f_i})^2}{N - 1}}$$

Otteniamo $\sigma_\omega = 0.04$

6 CONCLUSIONI

Per ogni metodo sperimentale abbiamo stimato il valore di ω_0 e γ :

	LIBERE	SMORZATE	FORZATE
ω_0	2.620 ± 0.012	2.576 ± 0.012	2.589 ± 0.008
γ	—	0.164 ± 0.007	0.194 ± 0.012

6.1 Accordo ω_0

Di seguito riportiamo i valori del test di compatibilità degli ω_0 e gli errori relativi:

	t	pvalue	
libere-smorzate	2.59	1.0%	$E_{\%}$ libere: 0.5%
smorzate-forzate	0.9	36.8%	$E_{\%}$ smorzate: 0.5%
libere forzate	2.15	3.1%	$E_{\%}$ forzate: 0.3%

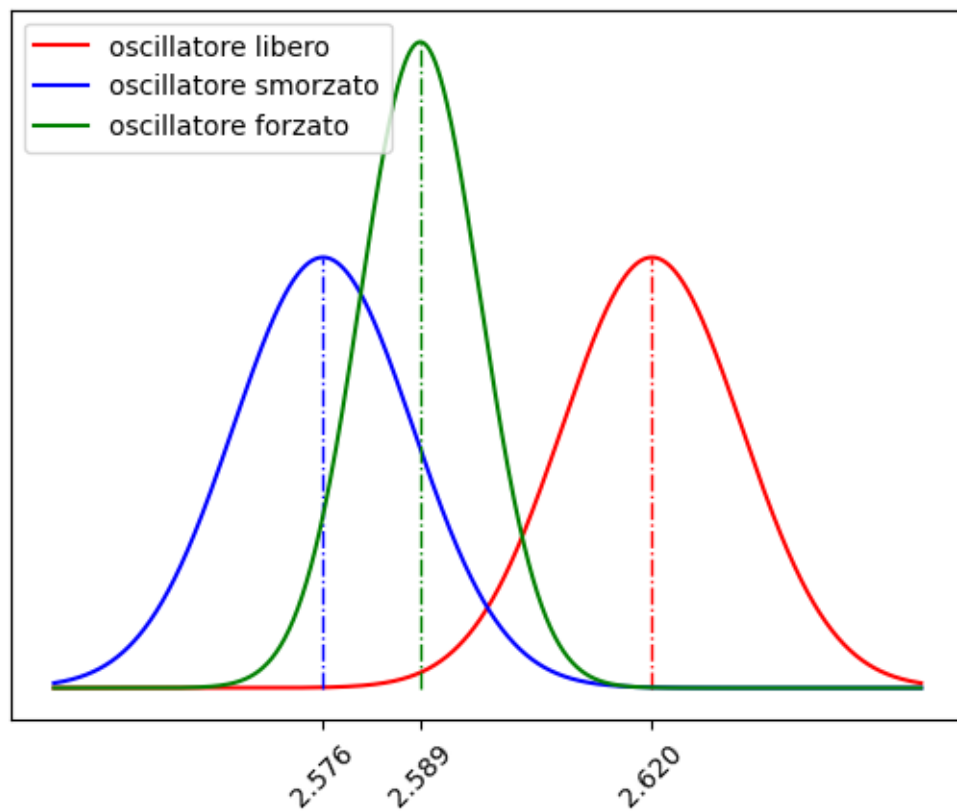


Figura 5: Accordo ω_0

6.2 Accordo γ

L'accordo tra i valori di γ ottenuti dalle oscillazioni smorzate e forzate vale:

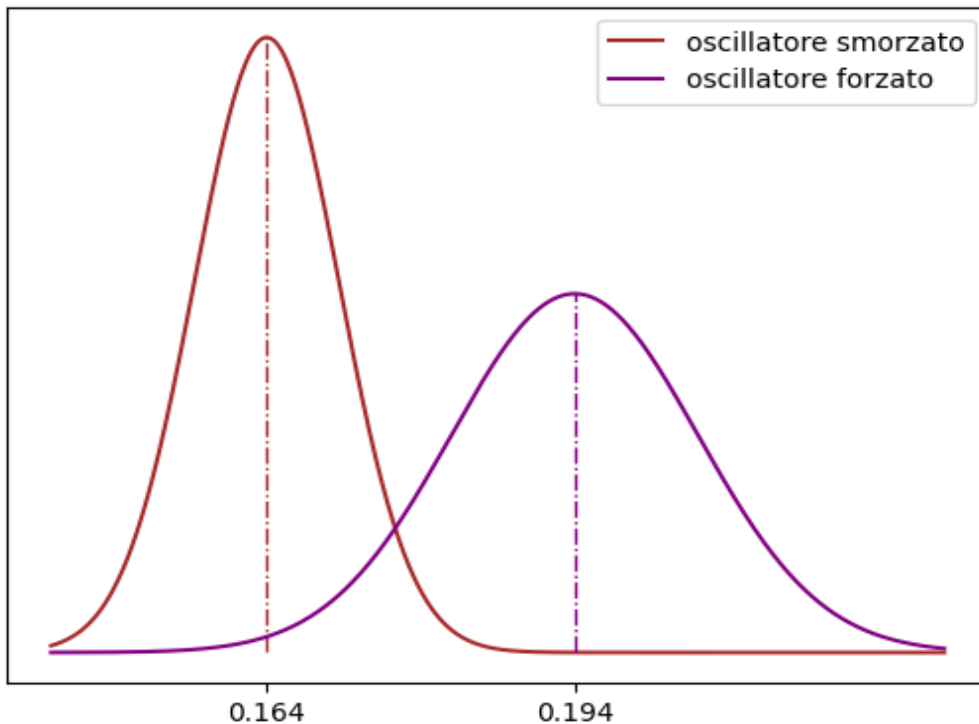


Figura 6: Accordo γ

6.3 Risonanza

Nella parte C, le misurazioni dell'ampiezza in funzione di ω seguono l'andamento previsto dall'equazione 8. Come atteso l'ampiezza è massima quando la frequenza della forzante è uguale alla frequenza di oscillazione propria della molla.

7 Appendice

Link per codice analisi dati e CSV:

https://github.com/HeyJOe03/fisicaRELAZIONI/tree/main/07_OSCILLAZIONI%20FORZATE%20SMORZATE