



Università degli Studi di Milano-Bicocca  
Laboratorio di Fisica 1

---

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

# OSCILLAZIONI SMORZATE E FORZATE

3 Aprile 2023

Gruppo di lavoro n. 3:

Arnoldi Marta, m.arnoldi9@campus.unimib.it

Matricola 898938

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it

Matricola 897462

Docente:

Prof. Marta Calvi

Anno Accademico 2022-2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Obiettivi</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cenni teorici</b>	<b>2</b>
2.1	oscillazioni libere . . . . .	2
2.2	oscillazioni smorzate . . . . .	2
2.3	oscillazioni forzate . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Apparato sperimentale e strumenti di misura</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Raccolta dati</b>	<b>4</b>
4.1	PARTE A: Oscillazioni libere . . . . .	4
4.2	PARTE B: Oscillazioni smorzate . . . . .	4
4.3	PARTE C: Oscillazioni forzate . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Analisi Dati</b>	<b>5</b>
5.1	PARTE A: oscillazioni libere . . . . .	5
5.2	PARTE B: oscillazioni smorzate . . . . .	5
5.3	PARTE C: oscillazioni forzate (risonanza) . . . . .	6
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>7</b>
6.1	Accordo $\omega_0$ . . . . .	7
6.2	Accordo $\gamma$ . . . . .	8
6.3	Risonanza . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Appendice</b>	<b>8</b>

# 1 Obiettivi

L'obiettivo dell'esperienza è lo studio delle oscillazioni libere, smorzate e forzate di un pendolo. Si vuole inoltre studiare il fenomeno della risonanza misurando l'ampiezza in funzione della frequenza forzante ( $A(\omega)$ ).

## 2 Cenni teorici

### 2.1 oscillazioni libere

Nelle oscillazioni libere sul pendolo non agiscono forze d'attrito, il pendolo è libero di oscillare sull'asse centrale sviluppando un momento elastico  $M_{el} = -C\theta$ . L'equazione dell'oscillazione è data dalla soluzione di:

$$I\alpha = -C\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo,  $C$  la costante elastica,  $I$  l'inerzia,  $\omega_0$  la pulsazione propria e vale la relazione  $\omega_0^2 = C/I$ . Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$\theta(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

$A_0$  è l'ampiezza dell'oscillazione

### 2.2 oscillazioni smorzate

Sul sistema agisce una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità:  $F_a = bv$ . Riscrivendo l'equazione sommando il momento della forza di attrito ( $rF_a$ ) al momento elastico si ottiene:

$$I\alpha = -C\theta - rbv \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} + rb \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0 \quad (3)$$

chiamiamo coefficiente di smorzamento  $\gamma = \frac{rb}{2I}$ , riscriviamo allora l'equazione come:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (4)$$

nel caso di smorzamento debole con  $\gamma^2 < \omega_0^2$  otteniamo:

$$\theta(t) = A(t) \sin(\omega t + \phi) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad (5)$$

NOTA:  $\omega$  è minore di  $\omega_0$  a causa dello smorzamento, infatti:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (6)$$

## 2.3 oscillazioni forzate

Nelle oscillazioni forzate sul sistema agisce una forza esterna  $F = F_0 \sin(\omega_f t)$  il cui momento vale  $M(t) = rF(t)$ . Definendo  $M_0 = rF_0/I$  possiamo riscrivere l'equazione differenziale come:

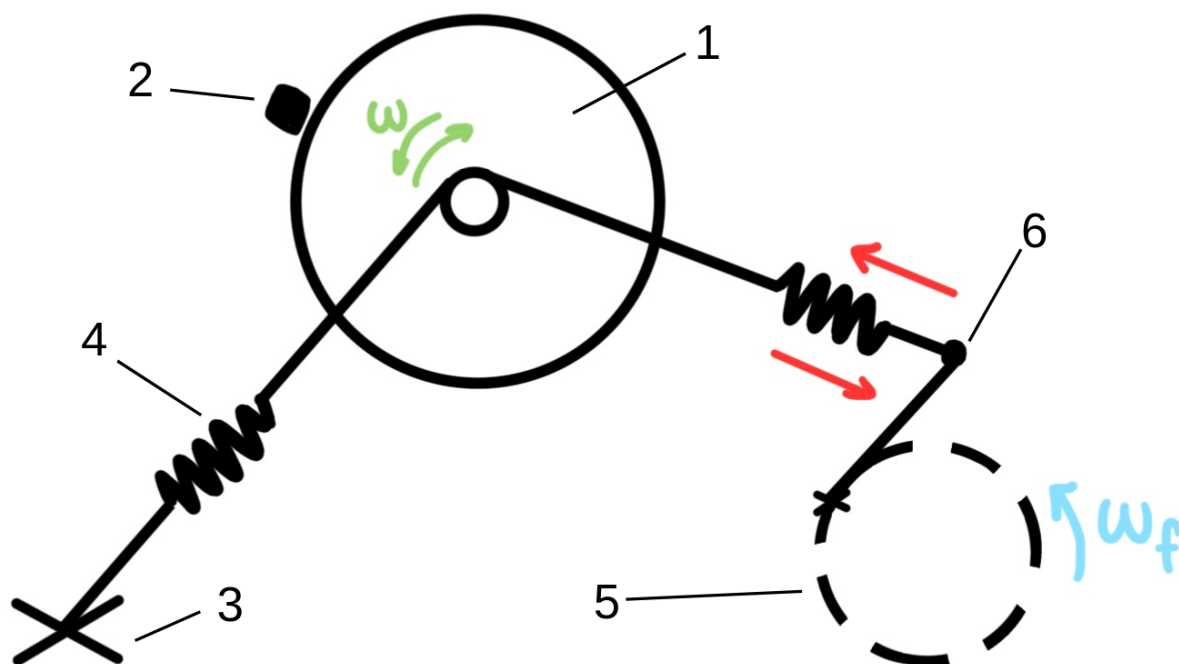
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = M_0 \sin(\omega_f t) \quad (7)$$

La soluzione dell'equazione implica che l'ampiezza è costante nel tempo ma varia in funzione della frequenza della forzante; dato che  $\omega = \omega_f$  otteniamo:

$$\theta(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi) \quad A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad \tan(\phi) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (8)$$

## 3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

L'apparato è costituito da un disco impernato libero di ruotare (1), collegato a uno strumento che ne misura l'angolo. Un filo è avvolto attorno al disco e collegato agli estremi a delle molle (4): una vincolata (3) e l'altra ancorata a un sistema per l'oscillazione forzata (5).



**Figura 1:** Apparato sperimentale

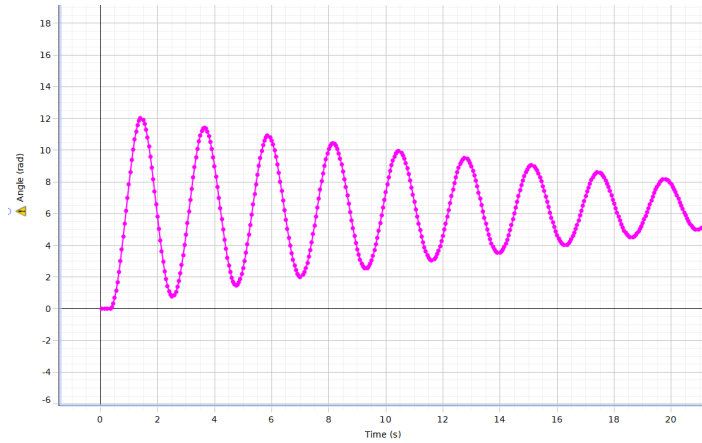
Attraverso un magnete (2) è possibile controllare la smorzatura del disco. Tramite un generatore di tensione è possibile variare la frequenza delle oscillazioni della forzante. Il sistema forzante genera una pulsazione facendone compiere all'ancoraggio un'orbita circolare, il filo passante per il punto (6) trasferisce l'oscillazione alle molle.

## 4 Raccolta dati

### 4.1 PARTE A: Oscillazioni libere

Si vuole la frequenza propria delle molle  $\omega_0$ . Il disco, senza attriti e forzanti, viene fatto oscillare. In accordo con l'equazione 2 il grafico  $\theta(t)$  è una senoide, interpolando si ricava il valore di  $\omega_0$ .

Ripetute 10 misurazioni.



$\bar{\omega}_0$	2.620 rad/s
$\sigma_{\omega_0}$	0.012 rad/s
$\sigma_{\bar{\omega}_0}$	0.004 rad/s

**Tabella 1:** misurazioni parte A

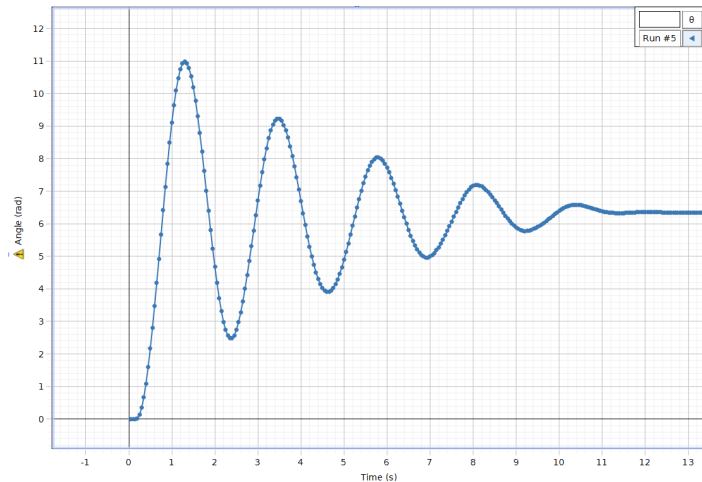
**Figura 2:** Onda sinusoidale non smorzata

La senoide rappresentata non è ideale, infatti è soggetta a un lieve smorzamento dovuto all'attrito delle parti meccaniche; lo assumiamo trascurabile.

### 4.2 PARTE B: Oscillazioni smorzate

Con un magnete sottoponiamo il disco a una forza d'attrito. Il pendolo viene fatto oscillare (come nella PARTE A), questa volta dal grafico  $\theta(t)$  si ottiene una senoide smorzata come previsto dall'equazione 5. Attraverso l'interpolazione misuriamo  $\gamma, \omega$ .

Ripetute 10 misurazioni.



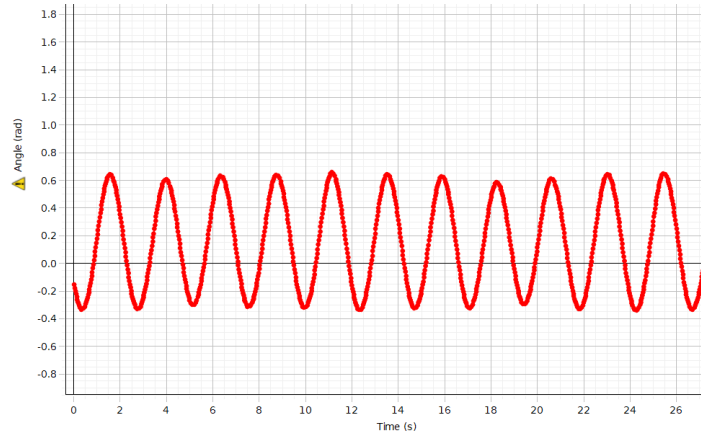
	$\omega$	$\gamma$
media	2.571	0.164
dev std	0.037	0.007
err std	0.012	0.002

**Tabella 2:** misurazioni parte B

**Figura 3:** Onda sinusoidale smorzata

### 4.3 PARTE C: Oscillazioni forzate

Azionando l'oscillatore della forzante si varia la frequenza e, interpolando il valore dell'onda sinusoidale ottenuta, si prende nota dell'ampiezza dell'oscillazione  $A$  e della frequenza  $\omega$ . Ripetute 16 misurazioni.



$\omega$  da 1.61 a 3.55 rad/s  
 $A$  da 2.90 a 11.90 cm

**Tabella 3:** misurazioni parte C

**Figura 4:** Onda sinusoidale forzata

## 5 Analisi Dati

### 5.1 PARTE A: oscillazioni libere

I valori di  $\sigma_{\omega_0}$  forniti da *capstone* risultano essere sperimentalmente una sottostima del valore vero, infatti variando l'intervallo di dati selezionati per l'interpolazione notiamo che  $\sigma_{\omega_0}$  varia di circa 0.1rad/s. Assumiamo questo valore come  $\sigma_{strumento}$ .

Per ricavare l'incertezza su  $\omega_0$  propaghiamo la deviazione standard con l'errore dovuto alla sensibilità dello strumento e otteniamo  $\sigma_{\omega_0} = 0.12$ .

Procediamo analogamente per  $\gamma$  assumendo l'incertezza sperimentale  $\sigma_{strumento} = 0.001$  e otteniamo  $\sigma_{\gamma} = 0.007$ .

I valori delle incertezze misurati da *capstone* li usiamo invece per i pesi della media:

$$w = \frac{1}{\sigma_{capstone}^2} \quad \bar{\omega}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \omega_{0i}}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\omega_{0i} - \bar{\omega}_0)^2}{N-1}} \quad \sigma_{\omega_0} = \sqrt{(\sigma)^2 + (\sigma_{strumento})^2}$$

I valori di  $\bar{\omega}_0, \bar{\gamma}, \sigma_{\omega_0}$  e  $\sigma_{\gamma}$  sono quelli riportati nella raccolta dati.

### 5.2 PARTE B: oscillazioni smorzate

Per gli errori valgono le considerazioni del punto precedente.

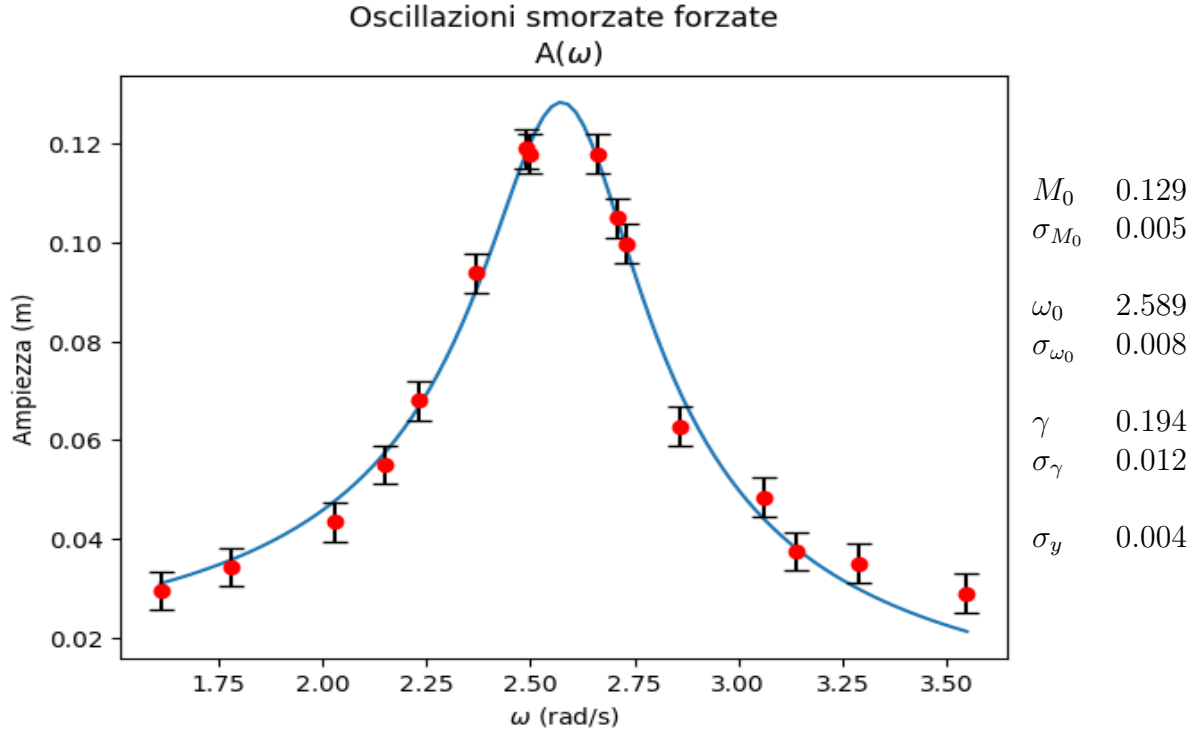
Grazie all'Equazione 6 ricaviamo il valore di  $\omega_0$  come:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2} \quad \sigma_{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \omega}\right)^2 \sigma_{\omega}^2 + \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma_{\gamma}^2} \Rightarrow \sigma_{\omega_0} = \sqrt{\frac{\omega^2 \sigma_{\omega}^2 + \gamma^2 \sigma_{\gamma}^2}{\omega^2 + \gamma^2}}$$

Otteniamo quindi:  $\omega_0 = 2.576 \pm 0.012$  rad/s

### 5.3 PARTE C: oscillazioni forzate (risonanza)

Azioniamo un motore che esercita un'oscillazione costante sulle molle. Il sistema, dopo un certo tempo necessario per la stabilizzazione dell'ampiezza, oscilla alla stessa frequenza della forzante con un'ampiezza che dipende da  $\omega$ . Quando  $\omega = \omega_0$  ci aspettiamo di osservare un picco in accordo con l'Equazione 8. Con un'interpolazione dei valori di  $\omega$  e  $A$  osservati ricaviamo i parametri della curva:



La funzione `scipy.optimize.curve_fit` fornisce inoltre la seguente matrice di covarianza dei valori ricavati dall'interpolazione:

$$\begin{pmatrix} & M_0 & \omega_0 & \gamma \\ M_0 & 1.75 & 0.50 & 3.58 \\ \omega_0 & 0.50 & 3.88 & 0.95 \\ \gamma & 3.58 & 0.95 & 8.74 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

Osserviamo che c'è uno scarto tra il valore di  $\omega_f$  e l' $\omega$  ottenuto dall'interpolazione. Nel grafico trascuriamo le incertezze sull'asse delle X limitandoci a riportare i valori di  $\omega$ . Proviamo ora a quantificare l'errore con il metodo dei minimi quadrati:

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (\omega_i - \omega_{f_i})^2}{N - 1}}$$

Otteniamo  $\sigma_\omega = 0.04$

## 6 CONCLUSIONI

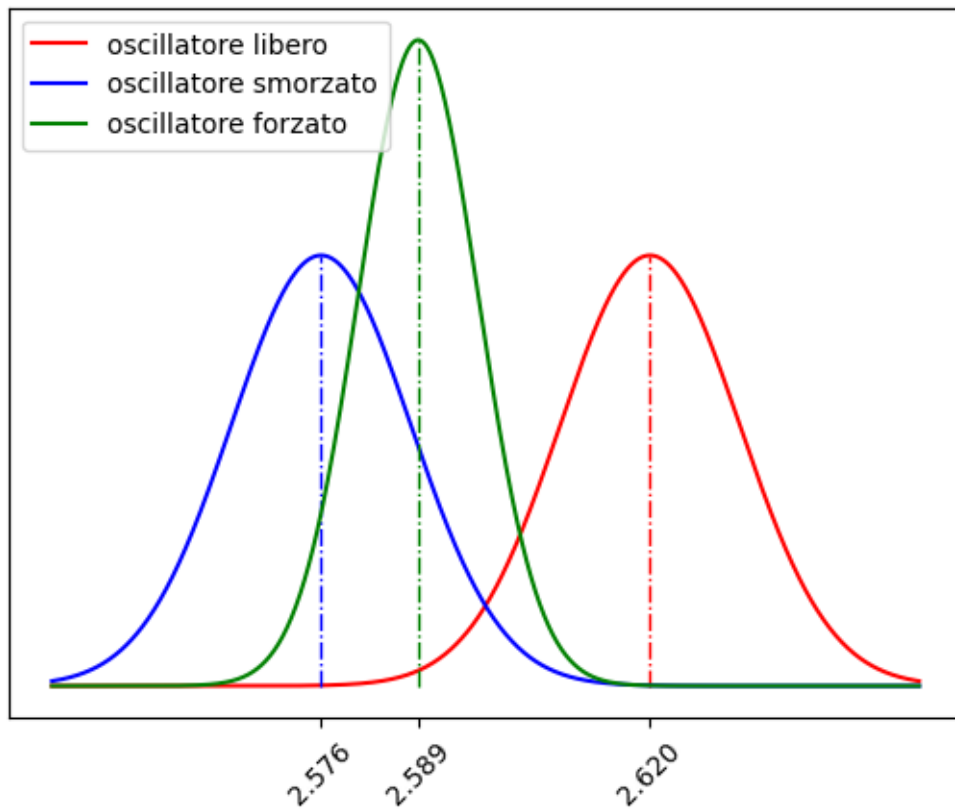
Per ogni metodo sperimentale abbiamo stimato il valore di  $\omega_0$  e  $\gamma$ :

	LIBERE	SMORZATE	FORZATE
$\omega_0$	$2.620 \pm 0.012$	$2.576 \pm 0.012$	$2.589 \pm 0.008$
$\gamma$	—	$0.164 \pm 0.007$	$0.194 \pm 0.012$

### 6.1 Accordo $\omega_0$

Di seguito riportiamo i valori del test di compatibilità degli  $\omega_0$  e gli errori relativi:

	t	pvalue	
libere-smorzate	2.59	1.0%	$E_{\%}$ libere: 0.5%
smorzate-forzate	0.9	36.8%	$E_{\%}$ smorzate: 0.5%
libere-forzate	2.15	3.1%	$E_{\%}$ forzate: 0.3%



**Figura 5:** Accordo  $\omega_0$



## 6.2 Accordo $\gamma$

L'accordo tra i valori di  $\gamma$  ottenuti dalle oscillazioni smorzate e forzate vale:

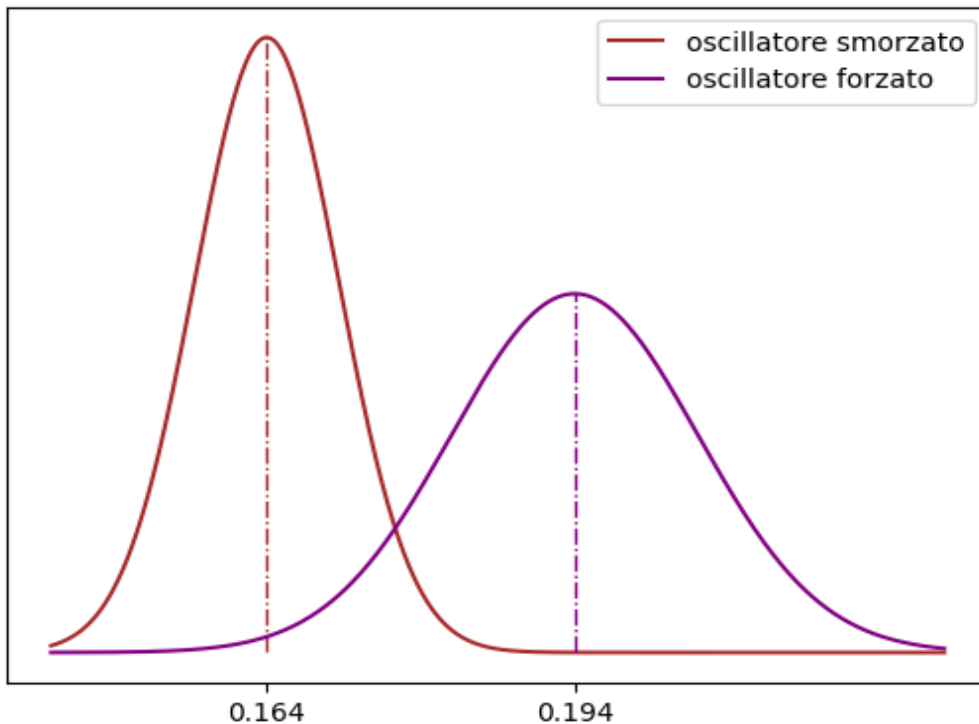


Figura 6: Accordo  $\gamma$

t	2.0
pvalue	4.5%
$E_{\%smorzate}$	4.3%
$E_{\%forzate}$	6.2%

## 6.3 Risonanza

Nella parte C, le misurazioni dell'ampiezza in funzione di  $\omega$  seguono l'andamento previsto dall'equazione 8. Come atteso l'ampiezza è massima quando la frequenza della forzante è uguale alla frequenza di oscillazione propria della molla.

## 7 Appendice

Link per codice analisi dati e CSV:

[https://github.com/HeyJOe03/fisicaRELAZIONI/tree/main/07\\_OSCILLAZIONI%20FORZATE%20SMORZATE](https://github.com/HeyJOe03/fisicaRELAZIONI/tree/main/07_OSCILLAZIONI%20FORZATE%20SMORZATE)