OSCILLAZIONI SMORZATE E FORZATE

Questo esperimento permette di studiare le oscillazioni armoniche di un pendolo e le oscillazioni smorzate e smorzate-forzate. Studiando il variare dell'ampiezza dell'oscillazione in funzione della frequenza della forzante si evidenzia il fenomeno della risonanza.

DESCRIZIONE DELL'APPARATO

Un disco di alluminio è imperniato su una puleggia sulla quale scorre un filo. Le due estremità del filo sono legate a due molle. Una di esse è fissata alla base del pendolo. L'altra è fissata al braccio di un oscillatore elettromeccanico. Il disco può ruotare liberamente, oppure sotto l'azione forzante dell'oscillatore.
La frequenza dell'oscillatore elettromeccanico può essere variata, cresce all'aumentare della tensione con cui viene alimentato (0-12 V).
In prossimità del disco è posto un piccolo magnete che può essere avvicinato al disco fino quasi a toccarlo, il suo effetto è di frenare il moto del disco con una forza di attrito proporzionale alla velocità angolare del disco stesso, dovuta all'insorgere di correnti di Foucault. L'effetto frenante è maggiore quanto più si avvicina il magnete al disco.
La puleggia e il disco sono imperniati su un sensore di moto rotatorio, che misura la posizione angolare del disco in funzione del tempo, e trasferisce i dati al PC.
In questo modo è possibile misurare l'oscillazione del disco in funzione del tempo (periodo e ampiezza del moto).
Il periodo di rotazione del braccio dell'oscillatore meccanico è misurato da un secondo sensore: una fotocella, anch'essa acquisita dal PC.
Il software a disposizione permette di visualizzare i dati raccolti, interpolarli tramite funzioni definite dall'utente ecc.

INTRODUZIONE ALLE OSCILLAZIONI SMORZATE E FORZATE

In assenza di attriti, se ruotiamo il disco di una angolo θ rispetto l'asse centrale, il sistema sviluppa un momento elastico $M_{el} = -C\,\theta$, dove C è la costante elastica del sistema, dovuta alle due molle. Il disco lasciato libero si mette allora ad oscillare secondo l'equazione:

$$I\,\alpha = M_{el}$$

$$I\; d^2\theta/\,dt^2 = -C\,\theta$$

cioè:

$$d^2\theta/\,dt^2 + \omega_0^2\,\theta = 0$$

dove I è il momento di inerzia del sistema rispetto l'asse di rotazione, α è l'accelerazione angolare e ω è la pulsazione: $\omega_0^2 = C / I$.
Il sistema descrive un' **oscillazione armonica** con posizione angolare:

$$\boldsymbol{\theta(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)}$$

con **pulsazione ω_0** e periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Se oltre alla forza elastica agisce anche una **forza di attrito di tipo viscoso,** proporzionale alla velocità, del tipo $F_a = - b\, v$, il modulo del momento della forza rispetto l'asse di rotazione del disco vale $M_a = r F_a = - r\, b\, v$, con r raggio della puleggia. La legge del moto si scrive ora:

$$I\alpha = M_{el} + M_a$$

$$I\, d^2\theta / dt^2 = - C\theta - r\, b\, d\theta / dt$$

Chiamiamo **coefficiente di smorzamento $\gamma = r\, b\, /\, 2I$,** l'equazione del moto diventa:

$$d^2\theta / dt^2 + 2\gamma\, d\theta / dt + \omega_0^2\, \theta = 0$$

Questa è l'equazione differenziale dell'**oscillatore armonico smorzato**, è una equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea. La soluzione, nel caso di smorzamento debole ($\gamma^2 < \omega_0^2$), come nel nostro apparato, è del tipo:

$$\boldsymbol{\theta(t) = A(t) \sin(\omega t + \phi) = A_0\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)}$$

con A_0 e ϕ determinate in base alle condizioni iniziali.
Il disco, in caso di smorzamento debole, compie oscillazioni di pulsazione inferiore a quella propria: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ e di pseudo-periodo maggiore $T = 2\pi / \omega > T_0$.

Inoltre l'ampiezza delle oscillazioni non è più una costante, ma varia in funzione del tempo **A(t) diminuisce** esponenzialmente.
Dopo un tempo pari a un pseudo-periodo l'ampiezza si riduce di un fattore $e^{-\gamma T}$ infatti $\theta(t+T) / \theta(t) = e^{-\gamma T}$

Se vogliamo rendere l'oscillazione persistente, realizzando un sistema che oscilli con frequenza e ampiezza costanti nel tempo, anche in presenza di attrito viscoso, dobbiamo applicare al sistema una **forza esterna sinusoidale**

$$\mathbf{F(t) = F_0 \sin(\omega_f t)}$$

La pulsazione ω_f della forzante può essere in generale diversa dalla pulsazione propria del pendolo ω_0. La forza agisce sul disco con un momento rispetto l'asse di rotazione di modulo $M_f(t) = r F(t) = r F_0 \sin(\omega_f t)$, pertanto l'equazione del moto diventa ora

$$I\,\alpha = M_{el} + M_a + M_f$$

$$I\, d^2\theta/ dt^2 = -C\theta - r\, b\, d\theta/ dt + F_0\, r \sin(\omega_f t)$$

$$d^2\theta/ dt^2 + 2\gamma\; d\theta/ dt + \omega_0^2\, \theta = M_0 \sin(\omega_f t)$$

con $M_0 = F_0\, r / I$. L'equazione dell'**oscillatore smorzato e forzato** non è omogenea. La soluzione generale è somma di una parte **transitoria**, che si smorza in un tempo che dipende dal coefficiente γ, e di una parte di oscillazione permanente di pulsazione uguale a quella della forza esterna $\omega = \omega_f$:

$$\boldsymbol{\theta(t)=A(\omega) \sin(\omega t + \phi)}$$

L' **ampiezza dell'oscillazione è ora costante nel tempo,** ma il suo valore dipende da quello della pulsazione della forza esterna, è data da:

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

La fase è data da $$tg\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Osserviamo che:

- ad una sollecitazione sinusoidale l'oscillatore risponde con uno spostamento angolare sinusoidale: la pulsazione non è quella propria (ω_0) bensì è uguale a quella impressa dall'esterno (ω_f).
- La risposta dell'oscillatore non è la stessa per qualunque valore della pulsazione della forzante ma ampiezza e fase dipendono dal valore di ω_f.

- Quando $\omega = \omega_0$ l'ampiezza è $A(\omega_0) = \dfrac{M_0}{2\gamma\omega_0}$
- Per ω che si avvicina ad ω_0 con $\omega<\omega_0$ la fase $\phi = -\pi/2$, per $\omega>\omega_0$ $\phi = +\pi/2$.
- L'ampiezza è massima per $\omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$ e vale:

  $$A(\omega_M) = \frac{M_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

  La presenza di un picco molto pronunciato dell'ampiezza nelle vicinanze di ω_0 indica la condizione di risonanza.
  Il massimo esiste solo se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, altrimenti $A(\omega)$ ha un andamento monotono decrescente.

- La funzione non è simmetrica rispetto il massimo: per $\omega\to 0$ l'ampiezza tende al valore M_0/ω_0^2 mentre per $\omega \to \infty$ l'ampiezze tende a zero.

- Per $\gamma \to 0$: $\omega_M \to \omega_0$ e $A_M \to \infty$: questa è propriamente la **condizione di risonanza.**

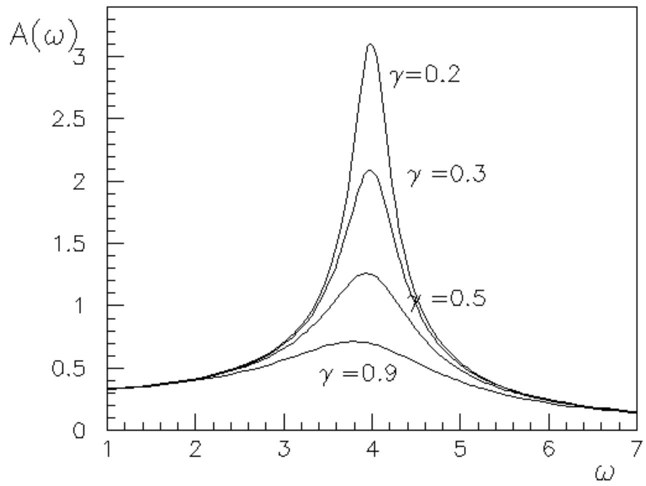

Figura 1.
A(ω) perω=4, M_0=5 e diversi valori di γ.

SVOLGIMENTO DELL'ESPERIENZA

1. Oscillazioni libere

Si pone il disco in oscillazione tirando la cordicella, mantenendo il magnete il più lontano possibile dal disco, e l'oscillatore elettromeccanico spento. Si raccolgono i dati del sensore di moto rotatorio in un grafico della posizione angolare del disco in funzione del tempo. Si interpola la funzione ricavando la pulsazione e quindi il periodo ($T= 2\pi/\omega$) delle oscillazioni libere.

In realtà si osserverà che il sistema ha comunque un poco di attrito, le oscillazioni risultano pertanto leggermente smorzate, e la pulsazione misurata non fornisce direttamente il valore di ω_0, ma sarà già in questo caso leggermente minore.

2. Oscillazioni smorzate

Si avvicina il magnete a una distanza compresa tra 3 e 5 mm circa dal disco e, per mantenere un riferimento, si misura col calibro la distanza tra essi. Si pone il disco in oscillazione e dal grafico della posizione angolare in funzione del tempo si misura il periodo delle oscillazioni smorzate. Per ricavare la pulsazione si interpolano i dati con una funzione del tipo:

$$\boldsymbol{\theta(t) = A_0\, e^{-\gamma t} \sin(\omega t+\phi) + \theta_0}$$

dove A_0, γ, ω, ϕ, θ_0 sono 5 parametri liberi da determinare. Dall'interpolazione dei dati si ricavano la pulsazione ω e il valore del parametro di smorzamento γ corrispondente alla posizione del magnete scelta.
SENZA spostare il magnete, si ripetano più volte le misure, cambiando anche l' intervallo temporale considerato per l'interpolazione della funzione, e si calcolino i valori medi di γ e di ω. Dalla relazione: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ si ricava il valore della pulsazione ω_0.
Si confronti con il valore di ω_0 trovato ora con quello ottenuto nelle misure con il magnete distante al massimo dal disco.

3. Oscillazioni smorzate e forzate

Mantenendo il magnete smorzante nella stessa posizione del punto 2), si aziona l'oscillatore elettromeccanico, e si acquisisce anche il sensore a fotocella. Il sensore a fotocella fornisce il periodo di rotazione dell'oscillatore da cui si ricava la pulsazione della forzante ω_f.
Variando la differenza di potenziale applicata all'oscillatore elettromeccanico si può variare la pulsazione della forzante. Ogni volta che si cambia la pulsazione della forzante si deve attendere che il sistema si sia stabilizzato, e l'ampiezza delle oscillazioni sia divenuta costante, prima di raccogliere i dati.
Dai dati raccolti con il sensore di moto rotatorio, dal grafico della posizione angolare del disco in funzione del tempo, si ricava la pulsazione ω delle oscillazioni del disco. Ci si aspetta che il periodo delle oscillazioni sia lo stesso del periodo della forzante, che si ricava dai dati della fotocella.
Oltre alla pulsazione ω, si deve misurare anche **l'ampiezza A dell'oscillazione**, che è prevista variare al variare della pulsazione della forzante.

Si ripetono le misure cambiando la differenza di potenziale applicata all'oscillatore elettromeccanico in modo tale che la pulsazione dell'oscillatore vari in una regione compresa tra circa ω_0 /4 e 2 ω_0.
Si misurino una decina di valori diversi di ω.
Per ciascun valore si raccolgano in una tabella valori di: differenza di potenziale applicata all'oscillatore elettromeccanico, periodo e pulsazione della forzante, pulsazione dell'oscillazione ω , ampiezza dell'oscillazione A.
Si costruisce un grafico con i valori dell'ampiezza A in funzione della pulsazione ω.
Si interpolano i dati nel grafico con una funzione del tipo:

$$A(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

dove M_0, γ, ω_0 sono i 3 parametri ignoti da determinare tramite interpolazione.
Utilizzare il software di Capstone per effettuare l'interpolazione, **scrivendo esplicitamente la funzione A(ω)** come funzione definita dall'utente.

-Si confronti il valore di ω_0 ottenuto in questo modo con quello misurata al punto 1) e con quello ricavata al punto 2).
-Si confronti il valore del parametro di smorzamento γ ricavato da questa interpolazione della curva di risonanza con il valore di γ ottenuto dalle oscillazioni smorzate al punto 2).

Successivamente si sposta il magnete frenante in modo da variare lo smorzamento e si ripetono tutte le misure dei punti 2) e 3).
Si confrontano le curve di risonanza ottenute per diversi valori dello smorzamento.

Osservazione
Nelle oscillazioni forzate e smorzate, se non si è riusciti a interpolare correttamente la curva di risonanza si può considerare la seguente alternativa (sebbene l'interpolazione precedente sia da preferire).
La dipendenza dell'ampiezza delle oscillazioni dalla pulsazione può essere riscritta elevando tutto al quadrato:

$$\frac{M_0^2}{A^2} = \omega^4 + (4\gamma^2 - 2{\omega_0}^2)\omega^2 + {\omega_0}^4$$

se si costruisce un grafico per i valori di $y=1/A^2$ in funzione di $x=\omega^2$ si possono interpolare i dati con una parabola da cui ricavare i valori di M_0, ω_0 e γ.
In questo caso è importante scrivere la funzione interpolante come indicato, in modo da poter ricavare direttamente i valori di M_0, ω_0 e γ, e i rispettivi errori, e **non usare una generica parabola** a tre parametri.