Università degli Studi di Milano-Bicocca
Laboratorio di Fisica 1

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

PENDOLO DI KATER

13 Marzo 2023

Gruppo di lavoro n. 3:
Arnoldi Marta, m.arnoldi9@campus.unimib.it
Matricola 898938

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it
Matricola 897462

Docente:
Prof. Marta Calvi

Anno Accademico 2022-2023

Indice

1 Obiettivi

L'obiettivo di questo esperimento è quello di misurare l'accelerazione di gravità g. Questo può essere fatto mediante diverse modalità, quelle qui messe in atto sono: le oscillazioni di un pendolo fisico (il pendolo di Kater) e la caduta libera di palline di acciaio.

2 Cenni teorici

2.1 Pendolo di Kater

Il pendolo di Kater è un pendolo fisico, ovvero un pendolo che oscilla sospeso in due diversi punti (detti coltelli) non coincidenti con il suo baricentro. Il periodo del pendolo che oscilla sospeso nel punto 1 (per $\theta \simeq \sin\theta$) è dato da:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgh_1}} \tag{1}$$

Con l_1 lunghezza ridotta del pendolo, I_1 momento di inerzia del pendolo (rispetto al coltello 1), m massa del pendolo, h_1 distanza tra il coltello 1 e il baricentro.
Calcoliamo il momento di inerzia I_1 applicando il teorema di Steiner all'inerzia dell'asta calcolato nel centro di massa:

$$I_1 = I_{asta} + mh_1^2 \tag{2}$$

Analogamente valgono le equazioni 1 e 2 per il pendolo sospenso nel coltello 2.

Nel caso in cui $T_1 = T_2$ le lunghezze ridotte dei pendoli coincidono ($l_1 = l_2$).
Vale allora la relazione:

$$D = h_1 + h_2 \quad \boldsymbol{T^* = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}} \tag{3}$$

(D è la distanza tra i due coltelli e nel nostro caso vale 99.4cm)

2.2 Caduta libera

Un corpo che cade sotto l'azione della forza peso si muove con accelerazione uniforme, pari all'accelerazione di gravità g.
Il moto uniformemente accelerato è descritto dalla legge oraria:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

Nel nostro caso ponendo come verso positivo la direzione dell'accelerazione di gravità e lasciando cadere la sfera da ferma ($v_0 = 0$) otteniamo la relazione:

$$\mathbf{h \propto t^2 \quad h = \frac{1}{2}gt^2} \tag{5}$$

Da cui misurando direttamente h e t ricaviamo il valore di g.

3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

3.1 Pendolo di Kater

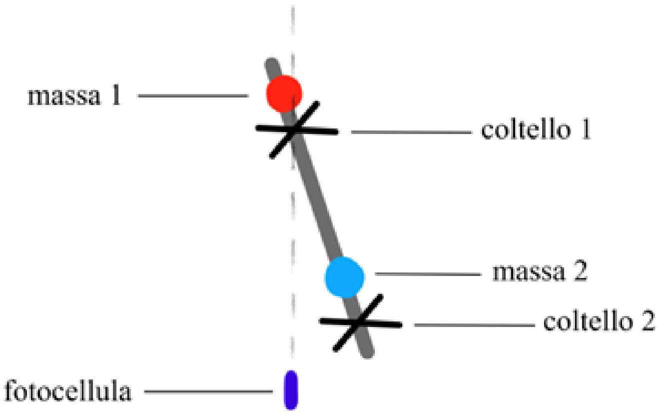

Figura 1: Pendolo di Kater

Il pendolo oscilla sull'asse del punto di sospensione, la posizione della $massa1$ viene mantenuta invariata mentre la $massa2$ viene "aggiustata" a ogni misurazione.
Il pendolo viene poi ruotato e vincolato ad oscillase su un secondo punto di oscillazione posto all'estremmità opposta dell'asta. Una fotocellula misura il periodo di oscillazione del pendolo T.

3.2 Caduta libera

Un supporto fissa la sfera ad un altezza h. Azionando un interruttore la sfera viene fatta cadere, l'urto con la pedana sottostante arresta il cronometro.

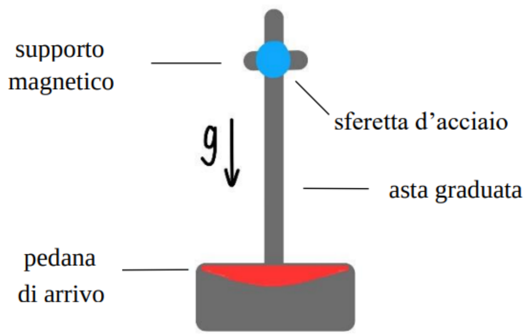

Figura 2: Caduta libera

4 Raccolta dati

4.1 Pendolo di Kater

Abbiamo fissato la posizione della $massa1$ e compiuto diverse misurazioni del periodo variando la posizione della $massa2$. Il procedimento è stato ripetuto sospendendo l'asta sul secondo coltello.

4.1.1 Misurazioni di T lungo tutta l'asta

Abbiamo valutato il valore del periodo per tutta la lunghezza dell'asta, con misure distanziate 5cm.

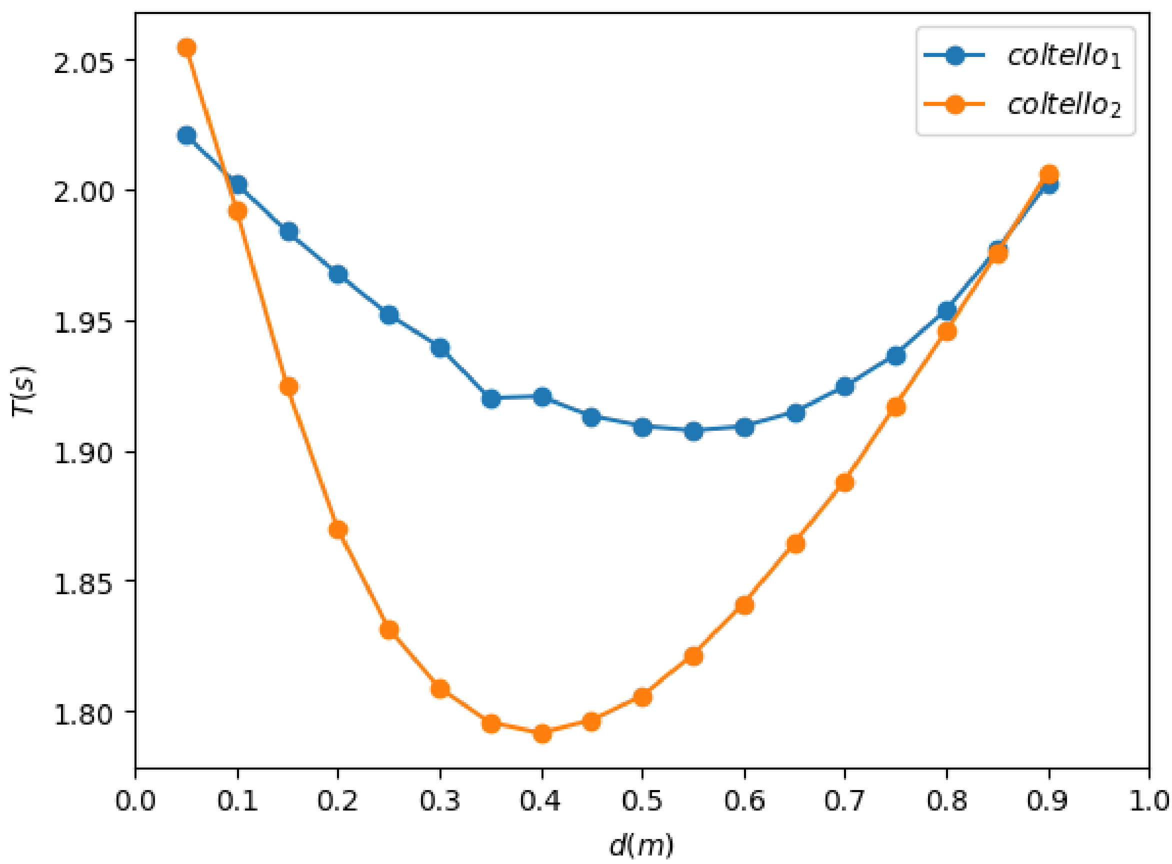

Figura 3: $T(d)$, compiute misurazioni per 18 lunghezze

Dove d indica la distanza della $massa2$ dal $coltello1$.
I due punti di intersezione delle parabole indicano le posizioni di $massa2$ per le quali $T_1 = T_2 = T^*$.

Link CSV valori di T lungo l'asta

4.1.2 Misurazioni fitte di T

Dopo aver scelto arbitrariamente un punto di intersezione delle due parabole (nel nostro caso l'intersezione nell'intorno di $d = 0.1m$) abbiamo infittito le misure del periodo per entrambi i coltelli.
Con il metodo sperimentale precedentemente descritto abbiamo variato la distanza da 7 a 11 cm intervallando di 0.5cm.
Per ogni posizione la misurazione del periodo è stata ripetuta 4 volte.

$d(cm)$	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00	9.50	10.00	10.50	11.00
$\bar{T}_1(s)$	2.0557	2.0511	2.0418	2.0305	2.0181	2.0109	2.0049	1.9950	1.9886
$\bar{T}_2(s)$	2.0133	2.0122	2.0112	2.0087	2.0066	2.0038	2.0025	2.0013	1.9995

Tabella 1: Valori medi del periodo di oscillazione del pendolo a distanza d

Link CSV valori di T nell'intorno dell'intersezione delle parabole

4.2 Caduta libera

Per le misurazioni del tempo di caduta (t) ci siamo serviti dell'apparato rappresentato nella Figura 2. Facendo scorrere il supporto magnetico lungo l'asta graduata abbiamo fissato il valore dell'altezza h. Successivamente, grazie a un interruttore, abbiamo sganciato la sfera dal supporto facendola cadere sulla pedana. L'apparato è dotato di un cronometro che misura il tempo di caduta della sfera.
Abbiamo ripetuto 10 misurazioni per 13 diverse altezze:

$h(cm)$	10	15	20	25	30	35	
$\bar{t}(s)$	128.55	156.91	182.27	204.36	224.64	244.00	
	40	45	50	55	60	65	70
	262.36	276.00	292.91	307.09	322.09	335.18	345.64

Tabella 2: Valore t medi di caduta per ogni h

Link CSV valori dei tempi di caduta della sfera

5 Analisi Dati

5.1 Misura di T^*

Per trovare il valore migliore di T^* consideriamo l'intorno dei punti prossimi all'intersezione delle parabole sfruttando la relazione $T \propto \sqrt{h}$:

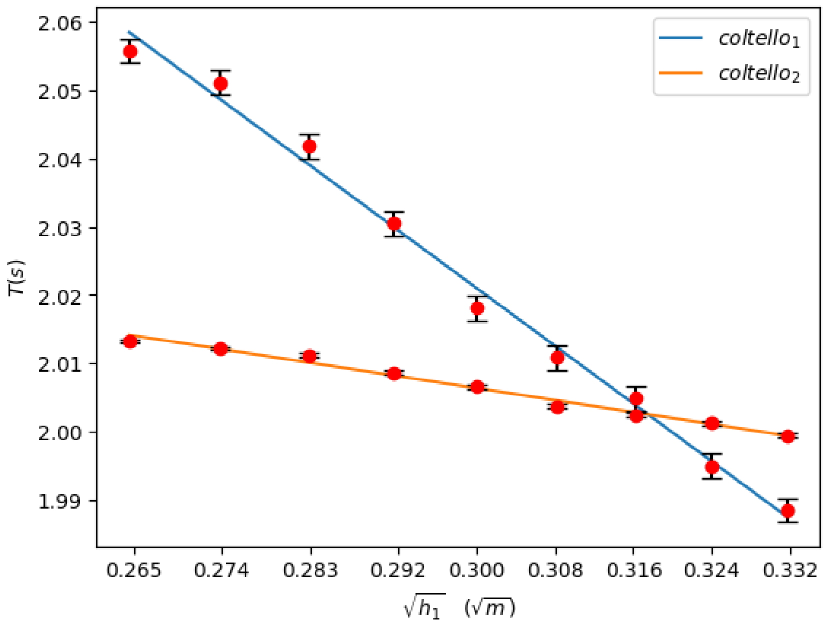

Figura 4: Misure fitte di T nell'intorno dell'intersezione delle parabole

$\mathbf{A + Bx}$	**coltello1**	**coltello2**
A	2.34	2.07
B	-1.06	-0.22
σ_A	0.01	0.01
σ_B	0.04	0.01
$\boldsymbol{\sigma_y}$	**0.00178**	**0.00029**

Tabella 3: interpolazione

L'ordinata del punto di intersezione delle rette è il T^*.
Le incertezze sui valori misurati di T^* sono ottenute con il metodo dei minimi quadrati pesati usando come pesi $w = 1/\sigma^2_{T_{misurato}}$. Per calcolare T^* usiamo l'equazione:

$$T^* = \frac{T_2(x_a)T_1(x_b) - T_1(x_a)T_2(x_b)}{T_1(x_b) - T_2(x_b) - T_1(x_a) + T_2(x_a)} \tag{6}$$

Dove x_a e x_b sono i punti più prossimi all'intersezione.

Per la stima dell'errore σ_{T^*} propaghiamo nel seguente modo:

$$\sigma_{T^*} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2} \tag{7}$$

Dove $a = T_1(x_a)$ $\quad c = T_1(x_b)$ $\quad b = T_2(x_a)$ $\quad d = T_2(x_b)$; per brevità lasciamo i conti espliciti dell'errore in appendice.

Otteniamo $\mathbf{T^* = 2.0026 \pm 0.0019s}$

5.2 Stima di g con Kater

Dall'Equazione 3 e assumendo $D = 0.994m$ ricaviamo il valore di g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}} \Rightarrow \boldsymbol{g = \frac{4\pi^2 D}{T^2}} \qquad \boldsymbol{\sigma_g = |-8\pi^2 D|\frac{\sigma_T}{T^3}} \tag{8}$$

otteniamo: $\boldsymbol{g_{kater} = (9.7849 \pm 0.0186) ms^{-2}}$

5.3 Stima di g con caduta libera

L'asta è graduata a intervalli di 5cm, assumiamo l'incertezza dovuta allo strumento di misura $\boldsymbol{\sigma_{h_{strumento}} = 0.001m}$.

La media degli errori relativi dell'altezza (0.0070) è maggiore rispetto a quella del tempo di caduta (0.0039), nell'interpolazione mettiamo quindi t nelle ascisse e h nelle ordinate.

5.3.1 $\boldsymbol{h \propto t^2}$

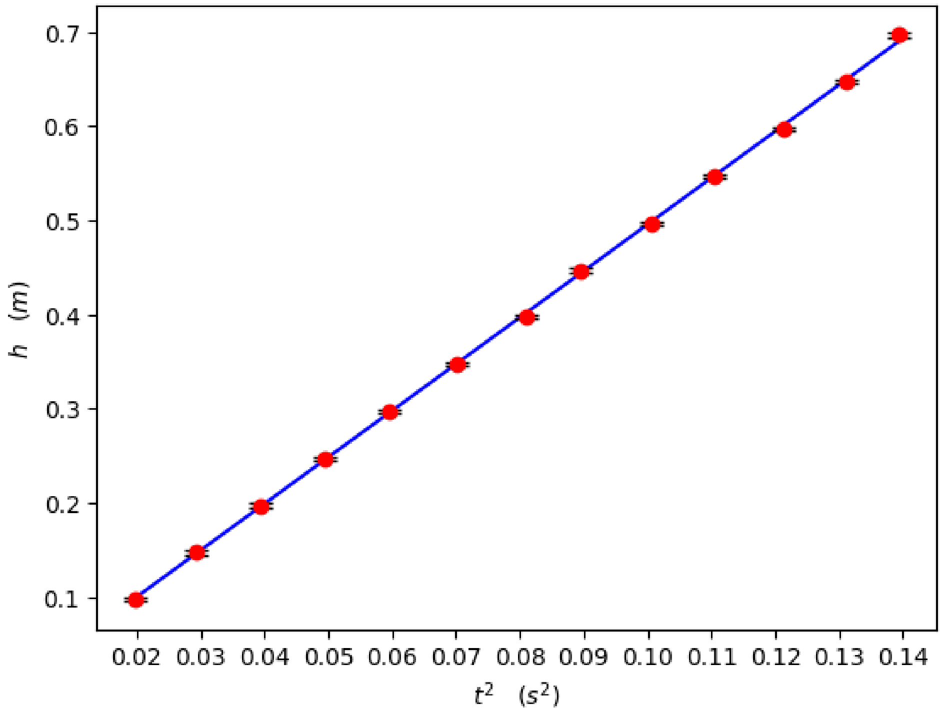

Figura 5: Interpolazione con $h \propto t^2$

A	0.0009
B	4.9470
σ_A	0.0026
σ_B	0.0285
σ_y	0.002
$\tilde{\chi}_0^2$	2.77
df	11
$pvalue$	99.3%

Tabella 4: $h = A + Bt^2$

Ricaviamo il valore di g dall'Equazione 5:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}g \Rightarrow \boldsymbol{g = 2B} \quad \boldsymbol{\sigma_{g_{caduta}} = 2\sigma_B}$$

Otteniamo: $\boldsymbol{g_{caduta} = (9.8942 \pm 0.0577) ms^{-2}}$

5.3.2 $\mathbf{h(t) = h_0 + \frac{1}{2}gt^2}$

Con la funzione *scipy.optimize.curve_fit* interpoliamo la parabola che si ottiene nel grafico $h(t)$

h_0	0.0009
g	9.894
σ_{h_0}	0.0026
σ_g	0.058
σ_y	0.0033

Tabella 5: valori interpolazione parabola

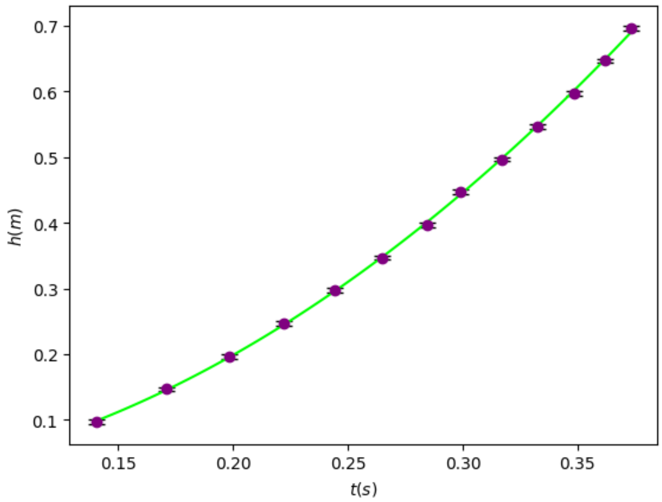

Figura 6: Interpolazione con $h = h_0 + \frac{1}{2}gt^2$

Otteniamo valori g e σ_g in accordo con la relazione precendente.

5.4 Compatibilità tra i valori di g ottenuti

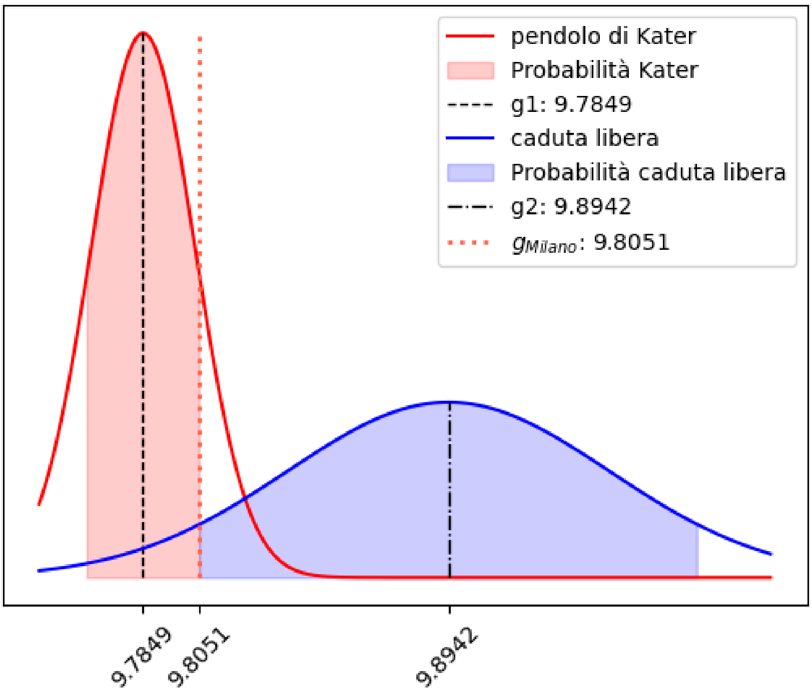

Figura 7: Accordo con valore di g atteso (Milano)

	kater	*caduta*
$E_{\%}$	0.19%	0.58%
$t - test$	1.09	1.54
$pvalue$	28%	12%

Tabella 6: Valori compatibilità

La compatiblità tra i due metodi sperimentali vale $t = 1.08$, $pvalue = 7\%$

6 CONCLUSIONI

I valori misurati di g sono in accordo con il valore atteso a Milano ($g_{Milano} = 9.8051 ms^{-2}$), la compatibilità supera la soglia minima di accettazione del 5%.
Qui sotto riportata la tabella riassuntiva dei valori ottenuti:

	g	σ_g	$E_{\%}$	t-test	p-value
Pendolo di Kater	9.7849	0.0186	0.19%	1.09	28%
Caduta libera	9.8942	0.0577	0.58%	1.54	12%

Tabella 7: Tabella riassuntiva

Osserviamo che il valore ottenuto con il pendolo di Kater è più vicino e più compatibile al g_{Milano} rispetto alla misurazione con la caduta libera.
La compatibilità tra i risultati delle differenti esperienze è del 7%.
Concludiamo con il valore di $\bar{g}$ medio:

$$\bar{g} = \frac{\frac{1}{\sigma^2_{g_k}} g_k + \frac{1}{\sigma^2_{g_{cl}}} g_{cl}}{\frac{1}{\sigma^2_{g_k}} + \frac{1}{\sigma^2_{g_{cl}}}} = 9.7952 \qquad \sigma_g = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2_{g_k}} + \frac{1}{\sigma^2_{g_{cl}}}}} = 0.0177$$

Otteniamo: $\bar{g} = \mathbf{9.7952 \pm 0.0177}\ \boldsymbol{ms^{-2}}$.

7 Appendice

Link per codice python e CSV:

https://github.com/heyJOe03/fisicaRELAZIONI/tree/main/04_KATER

7.1 Propagazione esplicita dell'incertezza su T^*

Rinominiamo per comodità le variabili come nell'Equazione 7 ottenendo:

$$T^* = \frac{bc - ad}{c - d - a + b} \qquad f = bc - ad \qquad g = c - d - a + b$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial a} = \frac{f - dg}{g^2} \qquad \frac{\partial T^*}{\partial b} = \frac{cg - f}{g^2}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial c} = \frac{bg - f}{g^2} \qquad \frac{\partial T^*}{\partial d} = \frac{f - ag}{g^2}$$