



Università degli Studi di Milano-Bicocca
Laboratorio di Fisica 2

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

Circuiti 3

Aprile 2024

Gruppo di lavoro n. 18:

Brambilla Luca, l.brambilla75@campus.unimib.it
Matricola 897853

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it
Matricola 897462

Di Lernia Sara, s.dilernia1@campus.unimib.it
Matricola 898437

Anno Accademico 2023-2024

Indice

1	Obiettivi	2
2	Cenni teorici	2
2.1	Circuito RC	2
2.2	Circuito RL	3
2.3	Circuito RLC	3
3	Apparato sperimentale e strumenti di misura	4
4	Raccolta e Analisi dati	5
4.1	Circuito RC	5
4.1.1	Note sulle incertezze	6
4.2	Circuito RL	6
4.3	Circuito RLC	8
4.3.1	Note	8
4.3.2	Raccolta e analisi dati	8
5	Conclusioni:	9
5.1	Circuito RC	9
5.2	Circuito RL	9
5.3	Circuito RLC	9
5.4	Confronto di L e C	10
5.5	Appendice	10

1 Obiettivi

Caratterizzare il comportamento di circuiti RC, RL, RCL collegati ad un generatore di tensione sinusoidale misurando, mediante un oscilloscopio, tensione e fase ai capi dei componenti e variando la frequenza dell'onda

2 Cenni teorici

Al fine di caratterizzare la relazione V-I dei componenti R, L, C con generatore di tensione sinusoidale definiamo una grandezza detta *impedenza* (Z). Quest'ultima è un valore che rappresenta la caduta di potenziale sul componente espressa in forma complessa. Il rapporto tra la tensione d'ingresso nel componente (V_{in}) e la tensione di output (V_{out}) è detta *funzione di trasferimento* $H(\omega)$. In funzione della pulsazione è quindi possibile esprimere $V_{out} = H(\omega)V_{in}$ che descrive come il circuito moduli il segnale di input.

I circuiti presi in considerazione possono comportarsi da:

- **filtro passa basso:** aperto per frequenze alte, corto per frequenze basse
- **filtro passa alto:** aperto per frequenze basse, corto per frequenze alte
- **filtro passa banda:** è la combinazione dei precedenti centrato in una frequenza detta di *risonanza*
- **filtro taglia banda:** ha comportamento inverso rispetto al filtro passa banda

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad Z_L = i\omega L \quad Z_R = R \quad (1)$$

La formula $\nu_{\text{taglio}} = \frac{1}{2\pi\tau}$ ci permette di calcolare la frequenza di taglio (ν_{taglio}) di un filtro, dove τ è la costante di tempo del filtro. Questa frequenza rappresenta il punto in cui il filtro inizia a attenuare o a intensificare il segnale, come rappresentato dal flesso nel grafico ampiezza/frequenza.

2.1 Circuito RC

Definendo per i circuiti RC: $V_C = Z_C I$ e $V_R = Z_R I$, ricaviamo i valori $V_C(\omega)$ e $V_R(\omega)$

$$V_C(\omega) = \frac{V_g Z_C}{Z_{\text{tot}}} = V_g \frac{1}{1 + i\omega RC} \quad (2) \quad V_R(\omega) = \frac{V_g Z_R}{Z_{\text{tot}}} = V_g \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad (3)$$

da cui ricaviamo $|H_C(\omega)|$, $|H_R(\omega)|$, $\Phi_C(\omega)$ e $\Phi_R(\omega)$:

$$|H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \Phi_C(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad (4)$$

$$|H_R(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \Phi_R(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC) \quad (5)$$

Analizzando $|H(\omega)|$, si può dire che il condensatore si comporterà da filtro passa basso, mentre la resistenza da filtro passa alto.

2.2 Circuito RL

Definendo per i circuiti RL: $V_L = Z_L I$ (con $Z_L = R_L + i\omega L$) e $V_R = Z_R I$, e ricaviamo il valore $V_L(\omega)$ e $V_R(\omega)$:

$$V_L(\omega) = \frac{V_g Z_L}{Z_{tot}} = V_g \frac{i\omega L}{R + R_L + i\omega L} \quad V_C(\omega) = \frac{V_g Z_C}{Z_{tot}} = \frac{V_g}{1 + i\omega C(R + R_L)} \quad (6) \quad (7)$$

da cui ricaviamo $|H_L(\omega)|$, $|H_R(\omega)|$, $\Phi_L(\omega)$ e $\Phi_R(\omega)$:

$$|H_L(\omega)| = \sqrt{\frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{(R + R_L)^2 + \omega^2 L^2}} \quad \Phi_L(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_L}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R + R_L}\right) \quad (8)$$

$$|H_R(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \Phi_R(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R + R_L}\right) \quad (9)$$

Analizzando $|H(\omega)|$, possiamo prevedere che l'induttanza si comporterà da filtro passa alto, mentre la resistenza si comporterà da filtro passa basso.

NOTA: per i circuiti RL e RLC è stata tenuta in considerazione anche R_L nel calcolo dell'impedenza dovuta a L. Per ottenere i moduli e le fasi per un circuito reale, è sufficiente porre $R_L = 0$.

2.3 Circuito RLC

Definendo per i circuiti RLC: V_R , V_C e V_L come per i circuiti precedenti, si ottiene:

$$V_R(\omega) = V_g \frac{R}{R + R_L + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad V_C(\omega) = V_g \frac{1}{i\omega C(R + R_L) - \omega^2 CL} \quad (10) \quad (11)$$

$$V_L(\omega) = V_g \frac{i\omega L}{i\omega C(R + R_L) - \omega^2 CL} \quad (12)$$

da cui ricaviamo le rispettive funzioni $|H(\omega)|$ e $\Phi(\omega)$ per ogni componente del circuito:

$$|H_R(\omega)| = \frac{i\omega CR}{(R + R_L)\omega C i + 1 - \omega^2 LC} \quad \Phi_R(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega C(R + R_L)}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (13)$$

$$|H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2(R + R_L)}} \quad \Phi_C(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega C(R + R_L)}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (14)$$

$$|H_L(\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 C^2 R_L^2 + \omega^4 L^2 C^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 (R + R_L)^2}} \quad \Phi_L(\omega) = -\arctan\left(\frac{R_L}{\omega L}\right) - \arctan\left(\frac{\omega C(R + R_L)}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (15)$$

Analizzando $|H(\omega)|$, possiamo prevedere che la resistenza si comporterà da filtro passa banda.

3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

I circuiti sono stati costruiti su una breadboard, con l'ausilio di fili, resistenze, condensatori e induttori in dotazione.

È stato usato un generatore di tensione, capace di produrre un segnale di forma variabile. In particolare, per questa esperienza di laboratorio, è stato prodotto un segnale sinusoidale.

Un oscilloscopio, ossia uno strumento in grado di leggere e visualizzare una forma d'onda variabile nel tempo, è stato utilizzato per campionare la forma d'onda attraverso la funzione "measure", che forniva i valori di ampiezza delle onde V_g , V_R e dell'onda $V_Z = V_g - V_R$, con $Z = \frac{1}{i\omega C}$ o $Z = i\omega L$ a seconda del circuito in analisi, attraverso la funzione math. Sono stati utilizzati i due cursori dell'oscilloscopio per studiare l'onda quando i dati forniti dalla funzione "measure" dell'oscilloscopio non potevano essere considerati affidabili, in particolare per le misure delle fasi con valori prossimi ai valori asintotici attesi.

4 Raccolta e Analisi dati

Incertezze utilizzate:

- $\sigma_{V_g} = 0.04$ sensibilità dell'oscilloscopio
- σ_{V_R} sensibilità dell'oscilloscopio (diversa per ogni punto, dato che la precisione aumenta cambiando scala)
- $\sigma_{V_C}, \sigma_{V_R}, \sigma_{V_L}$ misurati sperimentalmente per ogni valore (variabili tra $0.01V$ e $0.08V$)
- $\sigma_R = 1\%$ incertezza indicata dal costruttore
- $\sigma_T = 1\mu s$ sensibilità di lettura "orizzontale" dell'oscilloscopio; trascurato in quanto molto piccolo

4.1 Circuito RC

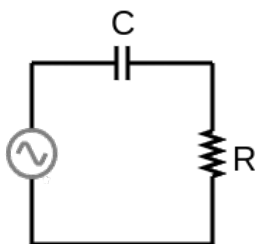
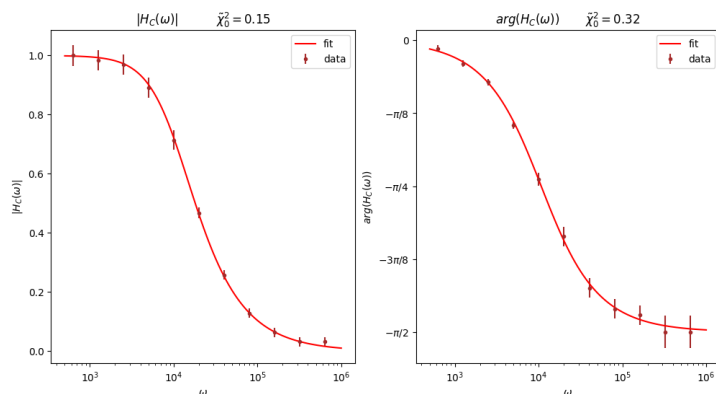


Figura 1: Schema di un circuito RC

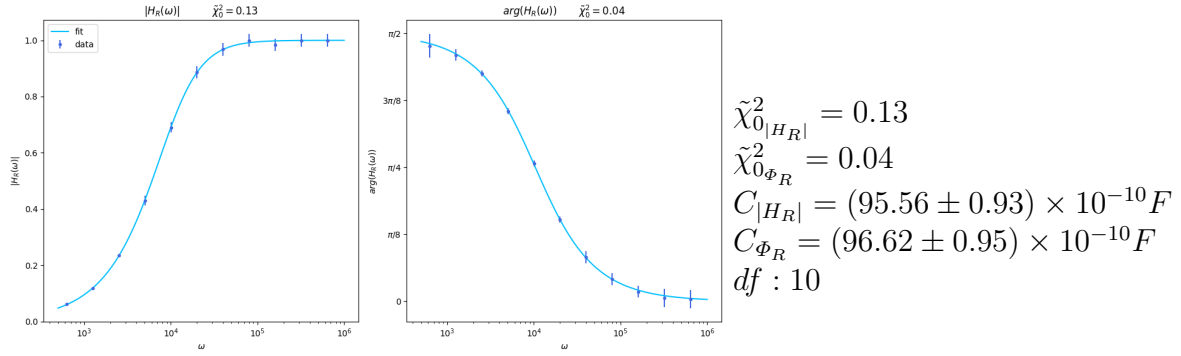
È stato costruito un circuito RC. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale sinusoidale con ampiezza di $2.5V$. La resistenza, nota, ha un valore di $9.95k\Omega$, misurata con un multimetro.

La frequenza è stata fatta variare tra i $100Hz$ e $102.4kHz$. Con le sonde è stato misurato V_g (tensione d'ingresso) e V_R (caduta di tensione su R). Per ogni frequenza, sono stati raccolti i valori di ampiezza massima di V_g , V_R e $V_C = V_g - V_R$, e i valori della fase $\Phi_R(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_R e $\Phi_C(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_C .

Entrambi i set di dati raccolti sono stati interpolati con le equazioni 4, e 5 ($|H_C(\omega)|$, $\phi_C(\omega)$, $|H_R(\omega)|$ e $\phi_R(\omega)$) ricavandone i valori di C.



$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_{0|H_C|}^2 &= 0.15 \\
 \tilde{\chi}_{0\Phi_C}^2 &= 0.32 \\
 C_{|H_C|} &= (96.23 \pm 1.33) \times 10^{-10} F \\
 C_{\Phi_C} &= (93.67 \pm 2.41) \times 10^{-10} F \\
 df &: 10
 \end{aligned}$$



Utilizzando i valori di C ed R (già nota), è stato calcolato τ , da cui è stata ricavata la frequenza di taglio:

$$\tau = RC = 95.49 \times 10^{-3} s \quad \sigma_\tau = \sqrt{(C \times \sigma_R)^2 + (R \times \sigma_C)^2} = 1.09 \times 10^{-3} s$$

$$\nu_{taglio} = \frac{1}{2\pi\tau} = 1.67 kHz \quad \sigma_\nu = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sigma_\tau}{\tau^2} = 0.02 kHz$$

4.1.1 Note sulle incertezze

Come si può notare dai grafici, l'oscilloscopio si è rivelato poco attendibile nella misurazione delle fasi attorno ai 90° . Talvolta è stato fatto uso del cursore per la misurazione della fase, al posto della funzione specifica dello strumento.

Inoltre, ad alte frequenze l'incertezza su σ_t non è più trascurabile. Questo è probabilmente uno dei motivi per cui i dati sono più precisi a basse frequenze.

4.2 Circuito RL

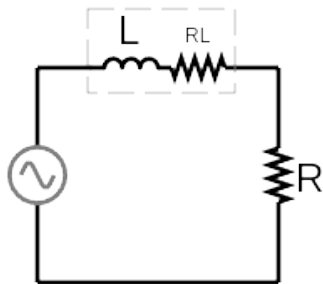
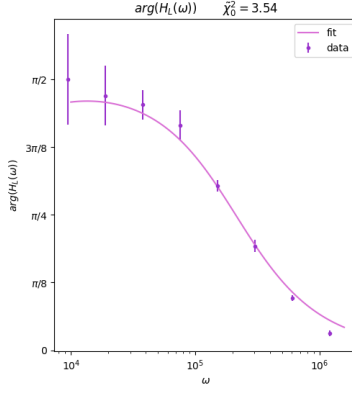
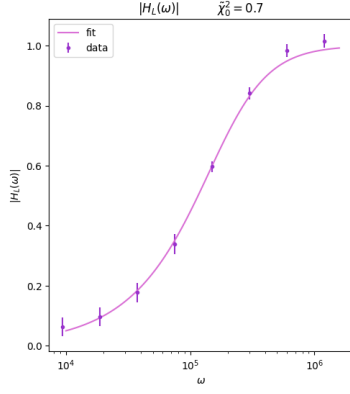


Figura 2: Schema di un circuito RL

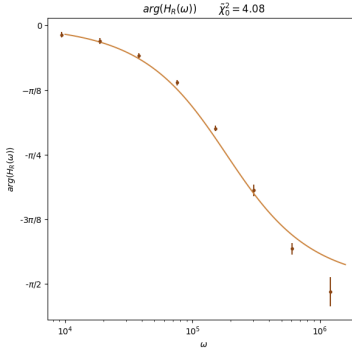
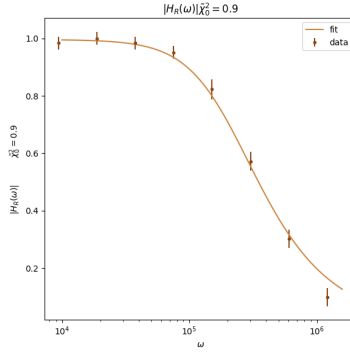
È stato costruito un circuito RL. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale sinusoidale con ampiezza di $2.5V$. È stata utilizzata la stessa resistenza del circuito precedente ($R = 9.95k\Omega$).

Mediante il multimetro palmare, è stata misurata anche la resistenza interna dell'induttanza ($R_L = 40Hr$).

La frequenza è stata fatta variare tra i $1.5kHz$ e $192kHz$. Con le sonde è stato misurato V_g tensione d'ingresso e V_R caduta di tensione su R . Per ogni frequenza, sono stati raccolti i valori di ampiezza massima di V_g , V_R e $V_L = V_g - V_R$, e i valori della fase $\Phi_R(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_R e $\Phi_L(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_C .



$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{0|H_L|}^2 &= 0.70 \\ \tilde{\chi}_{0\Phi_L}^2 &= 3.54 \\ L_{|H_L|} &= (49.86 \pm 1.87) \times 10^{-3} Hr \\ L_{\Phi_L} &= (46.79 \pm 4.64) \times 10^{-3} Hr \\ df &: 7\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{0|H_R|}^2 &= 0.9 \\ \tilde{\chi}_{0\Phi_R}^2 &= 4.08 \\ L_{|H_R|} &= (49.29 \pm 2.77) \times 10^{-3} Hr \\ L_{\Phi_R} &= (54.00 \pm 6.37) \times 10^{-3} Hr \\ df &: 7\end{aligned}$$

I due set di dati raccolti sono stati interpolati con le equazioni 8, e 9 ($|H_L(\omega)|$, $\phi_L(\omega)$, $|H_R(\omega)|$ e $\phi_R(\omega)$) ricavandone i valori di L . Utilizzando i valori di L ed R (già nota), è stato calcolato τ , da cui è stata ricavata la frequenza di taglio:

$$\tau = \frac{L}{R} = 4.99 \times 10^{-6} s$$

$$\sigma_\tau = \sqrt{\left(\frac{L}{R^2}\sigma_R\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\sigma_L\right)^2} = 0.15 \times 10^{-6} s$$

$$\nu_{taglio} = \frac{1}{2\pi\tau} = 31.91 kHz$$

$$\sigma_\nu = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sigma_\tau}{\tau^2} = 0.97 kHz$$

4.3 Circuito RLC

4.3.1 Note

Durante la presa dati, è stato riscontrato un malfunzionamento dell'oscilloscopio che impediva una lettura corretta dell'ampiezza delle onde misurate (V_L e V_C). Per questo motivo, è stata studiata solo la configurazione con le sonde dell'oscilloscopio posizionate in modo da misurare la caduta di potenziale su R .

Abbiamo ritenuto interessante effettuare uno studio anche sulla caduta di potenziale combinata su L e C , nonostante l'impossibilità a separare i due componenti.

Per il fit e la misurazione di L e C , sono state utilizzate le seguenti formule:

$$|H_{CL}(\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R_L^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 (R + R_L)^2}} \quad (16)$$

$$\Phi_{CL}(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega C R_L}{1 - \omega^2 LC}\right) - \arctan\left(\frac{\omega C (R + R_L)}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (17)$$

4.3.2 Raccolta e analisi dati

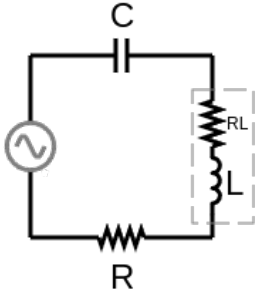
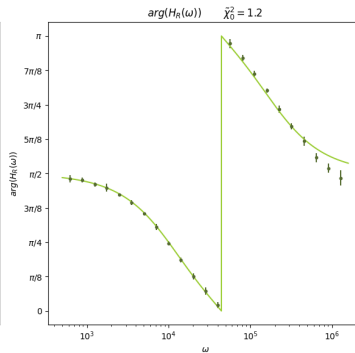
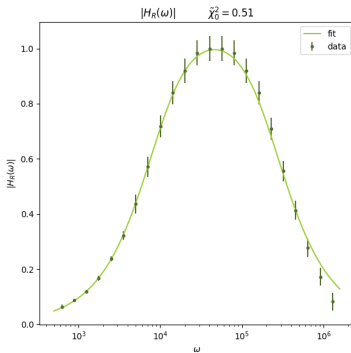


Figura 3: Schema di un circuito RL

È stato costruito un circuito RLC, utilizzando gli stessi componenti (C , R e L) dei circuiti precedenti. Le sonde dell'oscilloscopio sono state posizionate ai lati della resistenza, con l'obiettivo di rilevare in modo diretto la caduta di potenziale su questo componente. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale sinusoidale con ampiezza $2.5V$.

La frequenza è stata fatta variare tra $100Hz$ e $204.8kHz$. Con le sonde è stato misurato V_g (tensione di ingresso) e V_R (caduta di potenziale su R). Per ogni frequenza, sono stati raccolti i valori di ampiezza massima di V_g , V_R e $V_{LC} = V_g - V_R$, e i valori della fase $\Phi_R(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_R e $\Phi_{LC}(\omega)$, ossia la fase tra V_g e V_{LC} .



$$\tilde{\chi}_{0|H_R|}^2 = 0.51$$

$$\tilde{\chi}_{0\Phi_R}^2 = 1.20$$

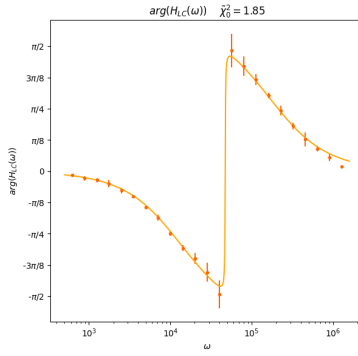
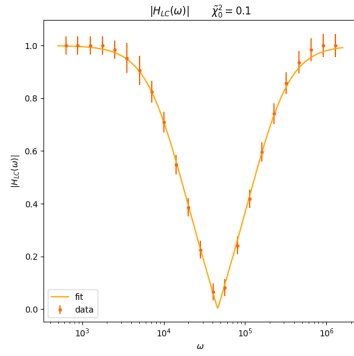
$$L_{|H_R|} = (48.72 \pm 1.50) \times 10^{-3} Hr$$

$$C_{|H_R|} = (97.00 \pm 2.94) \times 10^{-10} F$$

$$L_{\Phi_R} = (53.44 \pm 2.96) \times 10^{-3} Hr$$

$$C_{\Phi_R} = (94.68 \pm 5.20) \times 10^{-10} F$$

$$df : 21$$



$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{0|H_{LC}|}^2 &= 0.10 \\ \tilde{\chi}_{0\Phi_{LC}}^2 &= 1.85 \\ L_{|H_{LC}|} &= (49.97 \pm 0.82) \times 10^{-3} Hr \\ C_{|H_{LC}|} &= (94.35 \pm 1.55) \times 10^{-10} F \\ L_{\Phi_{LC}} &= (49.28 \pm 1.91) \times 10^{-3} Hr \\ C_{\Phi_{LC}} &= (90.63 \pm 3.49) \times 10^{-10} F \\ df &: 21\end{aligned}$$

5 Conclusioni:

5.1 Circuito RC

Come previsto, il circuito si comporta come un filtro passa alto su R e passa basso su C.

$H(\omega)$	$\tilde{\chi}_0^2$	df	C (nF)	σ_C (nF)
$ H_R(\omega) $	0.13	10	95.6	0.9
$\Phi_R(\omega)$	0.04	10	96.6	0.9
$ H_C(\omega) $	0.15	10	96.2	1.3
$\Phi_C(\omega)$	0.32	10	93.7	2.4

Il valore dei $\tilde{\chi}_0^2$ dimostra un'ottima aderenza dei dati alla legge studiata.

5.2 Circuito RL

Come previsto, il circuito si comporta come un filtro passa basso su R e passa alto su L.

$H(\omega)$	$\tilde{\chi}_0^2$	df	L (mHr)	σ_L (mHr)
$ H_R(\omega) $	0.9	7	49.9	1.9
$\Phi_R(\omega)$	4.1	7	46.8	4.6
$ H_L(\omega) $	0.7	7	49.9	1.9
$\Phi_L(\omega)$	3.5	7	46.8	4.6

Dall'analisi dei grafici e dalla valutazione dei valori di $\tilde{\chi}_0^2$ emerge un accordo soddisfacente per quanto riguarda i moduli delle due funzioni di trasferimento, ma non per gli argomenti. Dalle ipotesi formulate, è emerso che gli ultimi dati sono stati raccolti a frequenze molto alte ($50kHz - 190kHz$). Supponendo $\omega \approx 2 \times 10^6 Hz$ si ottiene $T = \frac{1}{\omega} \approx 5 \times 10^{-6} s = 5\mu s$. Il valore di σ_T ($1\mu s$) non è più trascurabile per $\omega \rightarrow 10^6 Hz$, questo potrebbe aver influito sull'accuratezza dei fit.

5.3 Circuito RLC

Come previsto, il circuito si comporta come un filtro passa banda su R.

Studiando la caduta di potenziale su LC, emerge dai grafici come queste due componenti posizionate in serie si comportino come un filtro elimina banda.

$H(\omega)$	$\tilde{\chi}_0^2$	df	L (mHr)	σ_L (mHr)	C (nF)	σ_C (nF)
$ H_R(\omega) $	0.51	21	48.7	1.5	9.70	2.9
$\Phi_R(\omega)$	1.2	21	53.4	3.0	9.47	5.2
$ H_{LC}(\omega) $	0.1	21	50.0	0.8	9.47	1.5
$\Phi_{LC}(\omega)$	1.85	21	49.3	3.5	9.06	3.5

Il valore dei $\tilde{\chi}_0^2$ dimostra una buona aderenza dei dati alla legge studiata.

Occorre precisare che nonostante l'utilizzo di frequenze alte ($\sim 100kHz$) anche nello studio di questo circuito, il maggior quantitativo di dati raccolti ha probabilmente contribuito al successo dell'esperimento (contrariamente al precedente).

Inoltre, è stata calcolata la frequenza di risonanza del circuito, ovvero la frequenza che minimizza il modulo dell'impedenza e ne annulla la fase:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \nu_{risonanza} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 7.3kHz \quad \sigma_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_L^2}{L^3C} + \frac{\sigma_C^2}{C^3L}} = 0.7kHz$$

5.4 Confronto di L e C

Dopo aver ricavato L e C dai diversi set di dati raccolti, tali valori sono stati confrontati con la loro media ponderata al fine di verificare la loro compatibilità reciproca:

$$< C > = (95.7 \pm 0.5) \times 10^{-10} F \quad < L > = (49.8 \pm 0.6) \times 10^{-3} Hr$$

C				L			
$t_{CRC_{ H }}$	t_{CRC_Φ}	$t_{CRLC_{ H }}$	t_{CRLC_Φ}	$t_{LRL_{ H }}$	t_{LRL_Φ}	$t_{LRLC_{ H }}$	t_{LRLC_Φ}
0.10	0.87	0.36	0.82	0.68	1.18	0.20	0.14

I t-test evidenziano la coerenza tra i valori individuali di C ed L e la loro media ponderata, indicando una consistenza tra le diverse misurazioni.

5.5 Appendice

[Link a tabelle dati e codice](#)