



Università degli Studi di Milano-Bicocca
Laboratorio di Fisica 2

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

Circuiti 2

28-29 Marzo 2024

Gruppo di lavoro n. 18:

Brambilla Luca, l.brambilla75@campus.unimib.it
Matricola 897853

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it
Matricola 897462

Di Lernia Sara, s.dilernia1@campus.unimib.it
Matricola 898437

Anno Accademico 2023-2024

Indice

1	Obiettivi	2
2	Cenni teorici	2
2.1	Circuito RC	2
2.2	Circuito RL	2
2.3	Circuito RLC	3
2.4	Approfondimento: Rettificatore di tensione	3
3	Apparato sperimentale e strumenti di misura	4
4	Raccolta e Analisi dati	5
4.1	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RC	5
4.2	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RL	6
4.3	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RLC	7
4.3.1	Regime sottosmorzato	7
4.3.2	Regime sovrasmorzato	8
4.3.3	Regime critico	8
4.4	Approfondimento: partitore di tensione	9
5	Conclusioni	10
6	Appendice	10

1 Obiettivi

- Studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi di una resistenza nel circuito RC (resistenza-capacità) e circuito RL (resistenza-induttanza) sollecitati da un generatore ad onda quadra.
- Studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi di una resistenza nel circuito RLC (resistenza-capacità-induttanza) sollecitati da un generatore ad onda quadra, in regime sottosmorzato, sovrasmorzato e critico.
- Osservare la forma d'onda della differenza di potenziale in un circuito con ponte di Graetz, sollecitato ad onda sinusoidale.

2 Cenni teorici

2.1 Circuito RC

Il circuito RC è composto da una resistenza R e un condensatore C in serie. La caduta di potenziale nel circuito sarà la somma delle cadute di potenziale su questi componenti.

$$V_g = V_R + V_C = RI + V_C \quad \text{usando} \quad I = C\dot{V}_C \Rightarrow V_G = RC\dot{V}_C + V_C \quad (1)$$

L'equazione si presenta come una differenziale di I ordine. Definiamo $\tau = RC$. Ponendo le condizioni iniziali e le condizioni di periodicità $I(0) = -I(\frac{T}{2})$ e si ricavano così $V_R(t), V_C(t), I(t)$.

$$V_R(t) = \frac{2V_g}{(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad V_C(t) = V_g \left(1 - \frac{2e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \quad I(t) = \frac{2V_g}{R(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

2.2 Circuito RL

Il circuito RL è composto da una resistenza R e un induttore L in serie. La caduta di potenziale nel circuito sarà la somma delle cadute di potenziale su queste componenti.

$$V_g = V_R + V_L = RI + L\dot{I} \quad (5)$$

L'equazione si presenta come una differenziale di I ordine. Definiamo $\tau = \frac{L}{R}$. Ponendo le condizioni iniziali e le condizioni di periodicità $I(0) = -I(\frac{T}{2})$, ricaviamo I(t), quindi $V_R(t), V_L(t)$.

$$V_R(t) = R \frac{V_g}{R + R_L} \left(1 - \frac{2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \quad V_L(t) = L\dot{I} = 2V_g \frac{2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad (6) \quad (7)$$

2.3 Circuito RLC

Il circuito RLC è composto da una resistenza R , un induttore L e un condensatore C disposti in serie. La caduta di potenziale totale nel circuito (V_g) sarà la somma delle cadute di potenziale su queste componenti.

$$V_g = V_R + V_L + V_C = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \quad (8)$$

Derivando una volta, si ottiene l'equazione differenziale di un oscillatore smorzato.

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (9)$$

Per praticità di conto si definiscono i termini:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \sigma_{\omega^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{L^2 \cdot C} \cdot \sigma_L\right)^2 + \left(-\frac{1}{L \cdot C^2} \cdot \sigma_C\right)^2} \quad (10)$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad \sigma_{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{1}{2L} \cdot \sigma_R\right)^2 + \left(-\frac{R}{2L^2} \cdot \sigma_L\right)^2} \quad (11)$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad \sigma_{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \cdot \sigma_{\omega}\right)^2 + \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \cdot \sigma_{\gamma}\right)^2} \quad (12)$$

La forma delle soluzioni dell'equazione 9 dipende da γ^2 e ω^2 .:

$$\textbf{Regime sottosmorzato: } \gamma^2 < \omega^2 \quad V_R(t) = V_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\beta t) \quad (13)$$

$$\textbf{Regime critico: } \gamma^2 = \omega^2 \quad V_R(t) = V_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t} \quad (14)$$

$$\textbf{Regime sovrasmorzato: } \gamma^2 > \omega^2 \quad V_R(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (15)$$

Nel caso sottosmorzato, è possibile vedere delle oscillazioni sempre più piccole attorno allo zero, mentre nel caso sovrasmorzato sarà visibile un unico picco che tende a zero. Il caso critico è quello limite tra i due precedenti.

2.4 Approfondimento: Rettificatore di tensione

I rettificatori di tensione rappresentano una classe di circuiti progettati per convertire l'ingresso in corrente alternata in corrente continua. Questo comportamento è reso possibile sfruttando le caratteristiche unidirezionali dei diodi, i quali consentono il flusso di corrente solo quando polarizzati correttamente.

Come rettificatore è stato studiato il ponte di Graetz: questo circuito è costituito da quattro diodi disposti come in Figura 1 collegati a un generatore di corrente alternata. Grazie a un condensatore disposto come in Figura 2 l'output ai capi AB è una differenza potenziale costante. In Figura 3 viene aggiunto una resistenza al fine di simulare il carico di un circuito alimentato dalla tensione in AB.

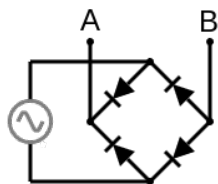


Figura 1: Ponte di Gaertz

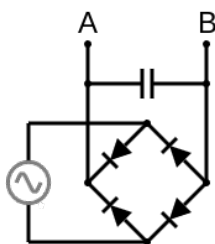


Figura 2: Ponte di Gaertz con condensatore

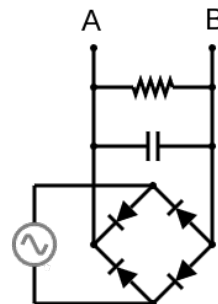


Figura 3: Ponte di Gaertz con condensatore e carico

3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

I circuiti sono stati costruiti su una breadboard, con l'ausilio di fili, resistenze, condensatori e induttori in dotazione.

E' stato usato un generatore di tensione, capace di produrre un segnale di forma variabile. In particolare, per questa esperienza di laboratorio, è stato prodotto un segnale ad onda quadra.

Un oscilloscopio, ossia uno strumento in grado di leggere e visualizzare una forma d'onda variabile nel tempo, è stato utilizzato per campionare la forma d'onda attraverso i due cursori dello strumento.

4 Raccolta e Analisi dati

4.1 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RC

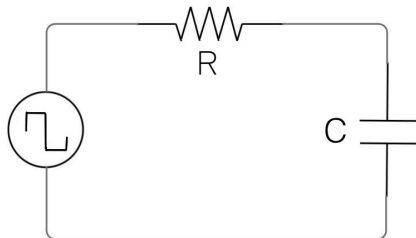
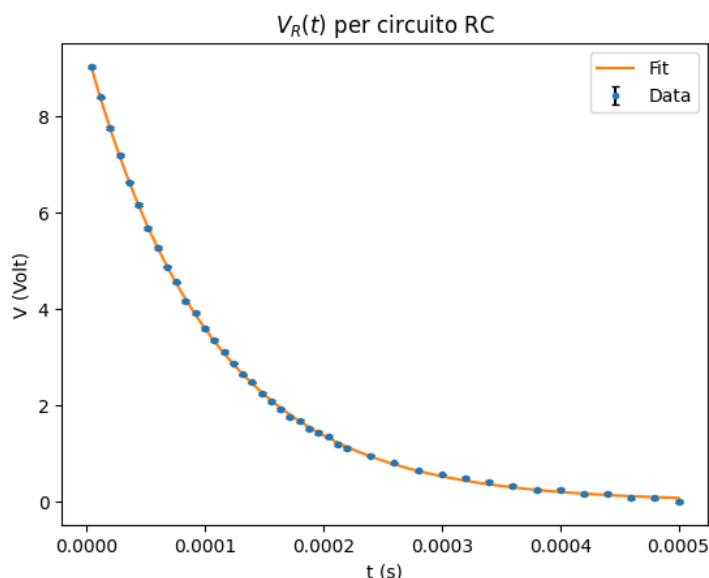


Figura 4: Schema di un circuito RC

E' stato posto il circuito nella configurazione come in Figura 4. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 500 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di 996Ω , misurata con un multimetro. La forma d'onda è stata campionata in 42 punti, raccogliendo il valore della tensione $V_R(t)$ e del relativo tempo t . Come incertezza per R è stata considerata quella dichiarata dal costruttore del multimetro (1%) e come σ_V , dato che i valori oscillano di 0.8V, consideriamo il comportamento di una distribuzione uniforme con $\sigma_V = 0.8/\sqrt{12}V$



$$\begin{aligned}\sigma_{V_C} &= 0.08/\sqrt{12} V = 0.023 V \\ \tau &= (10.42 \pm 0.03) \times 10^{-3} s \\ V_G &= 4.70 \pm 0.01 V \\ \tilde{\chi}_0^2 &= 1.45 \\ df &: 40\end{aligned}$$

I dati raccolti sono stati interpolati con l'equazione 2 ricavandone i valori di τ e V_G

Da $\tau = RC$, avendo nota R , ricaviamo il valore di $C = (104.7 \pm 1, 1) \times 10^{-9} F$

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \cdot \sigma_\tau\right)^2 + \left(-\frac{\tau}{R^2} \cdot \sigma_R\right)^2}$$

4.2 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RL

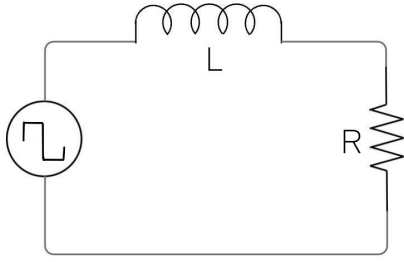
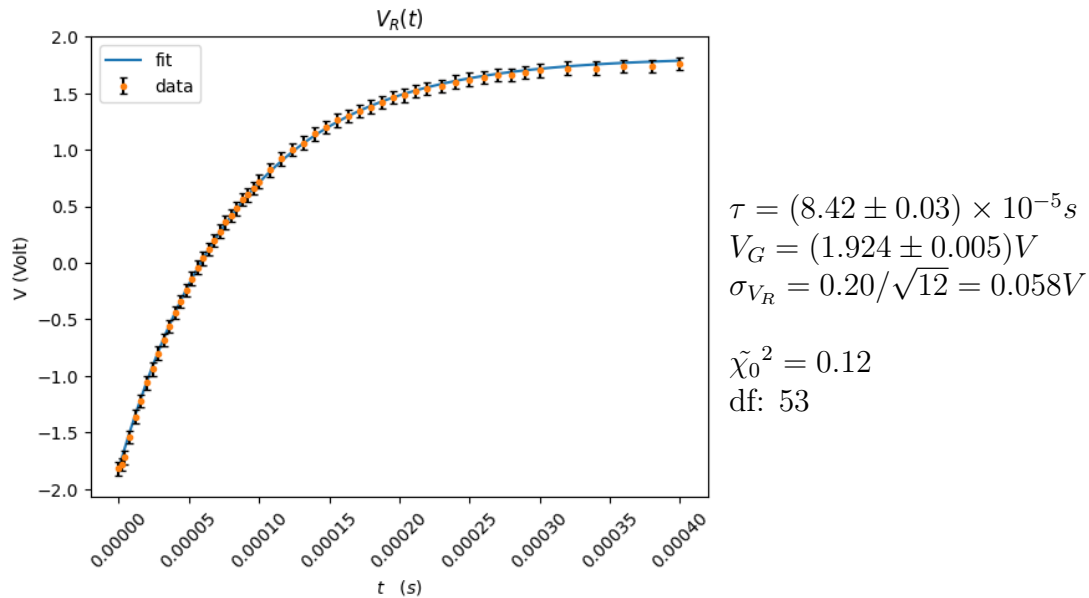


Figura 5: Schema di un circuito RC

È stato configurato il circuito come nella Figura 5. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. Con un multimetro sono stati presi i valori di $R=996\Omega$ e della resistenza interna all'induttanza $R_L=58.5\Omega$. La forma d'onda è stata campionata in 55 punti, misurando il valore della tensione $V_R(t)$. Le considerazioni sulle incertezze sono analoghe al punto precedente, $\sigma_V = 0.2/\sqrt{12}$.



I dati raccolti sono stati interpolati con l'equazione 6 ricavandone i valori di τ e V_G

Da $\tau = \frac{L}{R+R_L}$ si calcola il valore di $L = \tau \cdot (R + R_L) = (88.8 \pm 0.9) \times 10^{-3} H$

$$\sigma_L = \sqrt{((R + R_L) \cdot \sigma_\tau)^2 + (\tau \cdot \sigma_R)^2 + (\tau \cdot \sigma_{R_L})^2}$$

4.3 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RLC

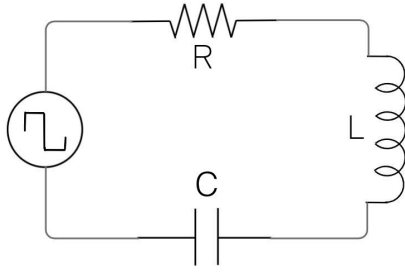


Figura 6: Circuito RLC

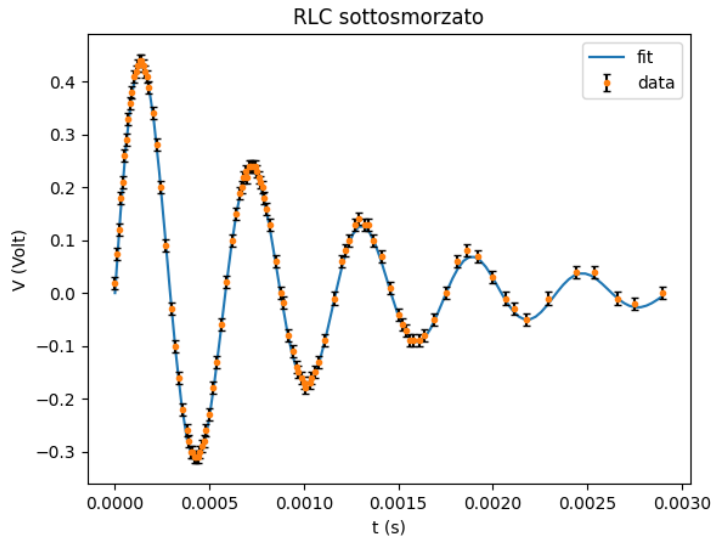
Il sistema posto nella configurazione come in Figura 6 con gli stessi componenti C ed L misurati nei punti precedenti. È stato studiato variandone il valore di R al fine di studiare i casi di regime sovrasmorzato, sottosmorzato, critico.

4.3.1 Regime sottosmorzato

Il regime sottosmorzato si ottiene quando $\gamma^2 < \omega_0^2$, ovvero quando $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di 120Ω a cui si sommano i 58.5Ω provenienti da R_L , misurate ambedue con un multimetro ($\sigma_R = 1\%$).

La forma d'onda è stata campionata in 109 punti, raccogliendo il valore della tensione $V(t)$ e del relativo tempo t . $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$. Dall'interpolazione mediante l'equazione 13 sono stati stimati i valori γ, β e confrontati con i valori attesi.



$$\begin{aligned}\gamma &= (1.05 \pm 0,01) \times 10^3 \\ \beta &= (10.76 \pm 0,01) \times 10^3 \\ V_g &= (5.054 \pm 0.003)V \\ \tilde{\chi}_0^2 &= 0.53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{atteso} &= (1.01 \pm 1.40) \times 10^3 \\ \beta_{atteso} &= (10.32 \pm 0.08) \times 10^3\end{aligned}$$

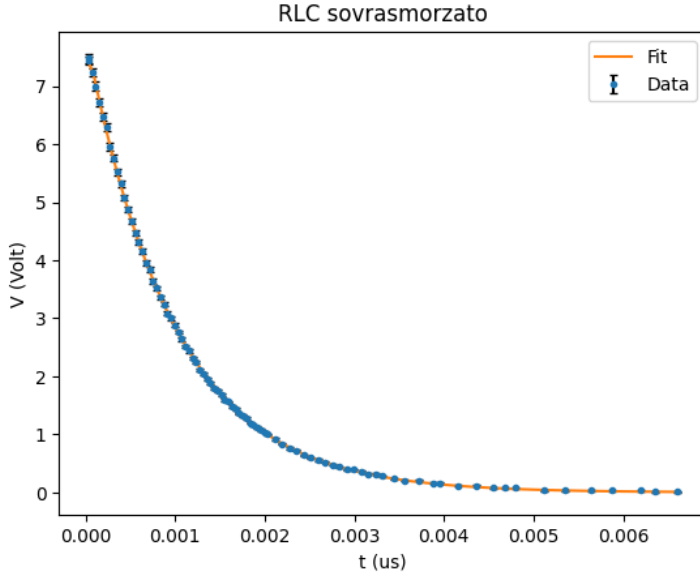
Confrontando i valori ricavati dal fit con i valori attesi dalle equazioni 12,11 si ottiene:

$$t_\gamma = 2.59 \quad t_\beta = 5.64$$

4.3.2 Regime sovrasmorzato

Il regime sovrasmorzato si ottiene quando $\gamma^2 > \omega_0^2$, ovvero quando $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di $R = 9980\Omega$ $R_L = 58.5\Omega$ $\sigma_R = 1\%$.

La forma d'onda è stata campionata in 93 punti, raccogliendo il valore della tensione $V(t)$ e del relativo tempo t . $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$



$$\tilde{\chi}_0^2 = 0.8$$

$$\gamma = (56.49 \pm 0.62) \times 10^3$$

$$\beta = (55.56 \pm 0.62) \times 10^3$$

$$\tilde{\chi}_0^2 = 0.8$$

$$\gamma_{atteso} = (56.52 \pm 0.81) \times 10^3$$

$$\beta_{atteso} = (55.56 \pm 0.82) \times 10^3$$

Confrontando i valori ricavati dal fit con i valori attesi dalle equazioni 12,11 si ottiene:

$$t_\gamma = 0.02 \quad t_\beta = 0.06$$

4.3.3 Regime critico

Il regime critico si ottiene quando $\gamma^2 = \omega_0^2$, ovvero quando $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di 1760Ω a cui si aggiunge $R_L = 58.5\Omega$, $\sigma_R = 1\%$. La forma d'onda è stata campionata in 75 punti, raccogliendo il valore della tensione $V(t)$ e del relativo tempo t . $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$.

La resistenza utilizzata è stata scelta perché vicina al valore teorico della resistenza per cui si ha un regime critico, calcolato con i valori di L e C ottenuti nei circuiti RC e RL. È stato anche effettuato il fit con il modello del regime sottosmorzato.

Confrontando i valori del $\tilde{\chi}_0^2$ per i due modelli si nota come, per la resistenza utilizzata, il modello a regime sottosmorzato rappresenta meglio il set di dati preso. Anche i t-test per γ e β mostrano la bontà del modello a regime sottosmorzato.

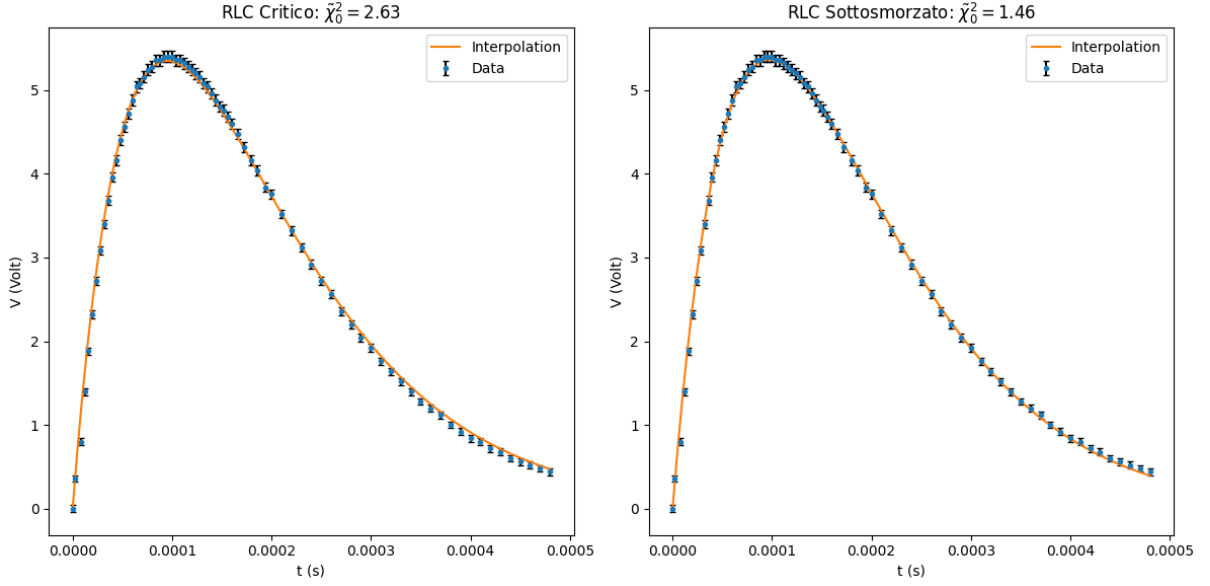


Figura 7: Fit dei valori raccolti con due modelli diversi: regime critico e sottosmorzato

Attesi	Regime sottosmorzato	Regime critico
$\gamma_{\text{atteso}} = (10.24 \pm 0.15) \times 10^3$ $\beta_{\text{atteso}} = (16.48 \pm 10.24) \times 10^2$	$\gamma_s = (9.96 \pm 0.07) \times 10^3$ $\beta_s = (3.13 \pm 0.19) \times 10^3$ $t_\gamma = 1.71$ $t_\beta = 1.42$	$\gamma_c = (10.51 \pm 0.04) \times 10^3$ $t_\gamma = 1.82$

4.4 Approfondimento: partitore di tensione

Per mancanza di tempo non è stato possibile costruire l'apparato sperimentale e raccogliere misure. Per verificare il comportamento ideale è stato utilizzato il simulatore circuitijs di lushproject. Il generatore è stato fissato a una tensione di 5V in corrente alternata (sinusoidale) a una frequenza di 50Hz

- La lettura ai capi AB con il circuito disposto come in Figura 1 mostra una semionda positiva, i diodi agiscono come filtri per la tensione
- aggiungendo un condensatore il valore ai capi di AB si stabilizza poco sotto 5V
- aggiungendo una resistenza il valore della tensione è instabile e mostra delle oscillazioni in fase con il generatore. Si può appiattire l'instabilità aumentando il valore del resistore o la capacità del condensatore

5 Conclusioni

- Nel circuito RC, il fit determina τ . Il modello è attendibile in quanto $\tilde{\chi}_0^2 = 1.45$. Dalla relazione $\tau = RC$ si può determinare $C = (104.7 \pm 1, 1) \times 10^{-9}F$, la cui incertezza è legata a σ_τ e σ_R . La scelta di R influenza la stima della capacità perchè deve mantenersi valida la relazione $RC \ll T$.
- Nel circuito RL, il fit determina τ . Il modello è attendibile in quanto $\tilde{\chi}_0^2 = 0.12$. Il valore di R_L non è trascurabile. Dalla relazione $\tau = L/(R + R_L)$ si può determinare $L = (88.8 \pm 0.9) \times 10^{-3}Hr$, la cui incertezza è legata a σ_τ, σ_R e σ_{R_L} . La scelta di R influenza la stima dell'induttanza perchè deve mantenersi valida la relazione $\tau \ll T$.
- Nel circuito RLC a regime sottosmorzato, il valore del $\tilde{\chi}_0^2 = 0.53$ evidenzia la bontà del fit. $t_\gamma = 2.59$, $t_\beta = 5.64$ hanno valori troppo elevati per ritenere i valori ottenuti dal fit compatibili con i valori attesi. Una possibile causa potrebbe essere una sottostima degli errori.
- nel circuito RLC a regime sovrasmorzato, il $\tilde{\chi}_0^2 = 0.80$ permette di ritenere accettabile il modello. $t_\gamma = 0.02$ e $t_\beta = 0.06$ mostrano la compatibilità tra i valori attesi.
- Nel circuito RLC a regime critico, confrontando i valori del $\tilde{\chi}_0^2$ per i due modelli si nota come, per la resistenza utilizzata, il modello a regime sottosmorzato rappresenta meglio il set di dati preso. Anche i t-test per γ e β mostrano la bontà del modello a regime sottosmorzato.
- Confrontando R_L con le resistenze utilizzate nei circuiti, è possibile notare che il suo valore è significativo, soprattutto nella configurazione del circuito RLC a regime sottosmorzato (R molto piccola). Utilizzando la funzione di ohmetro del multimetro, è stata misurata la resistenza dell'induttanza ($R_L = 58.5\Omega$) al fine di considerarla nella caduta di potenziale causata da questo elemento del circuito e di ottenere una maggiore precisione.

6 Appendice

Link per codice python e CSV:

<https://github.com/CarminatiGiovanni/LaboratorioFisica2/tree/main/20240321circuiti2>