



Università degli Studi di Milano-Bicocca  
Laboratorio di Fisica 2

---

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Relazione di laboratorio

## Circuiti 1

28-29 Marzo 2024

Gruppo di lavoro n. 18:

Brambilla Luca, l.brambilla75@campus.unimib.it  
Matricola 897853

Carminati Giovanni, g.carminati17@campus.unimib.it  
Matricola 897462

Di Lernia Sara, s.dilernia1@campus.unimib.it  
Matricola 898437

Anno Accademico 2023-2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Obiettivi</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cenni teorici</b>	<b>2</b>
2.1	Circuito RC . . . . .	2
2.2	Circuito RL . . . . .	2
2.3	Circuito RLC . . . . .	3
2.4	Approfondimento: Rettificatore di tensione . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Apparato sperimentale e strumenti di misura</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Raccolta e Analisi dati</b>	<b>5</b>
4.1	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RC . . . . .	5
4.2	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RL . . . . .	6
4.3	Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RLC . . . . .	7
4.3.1	Regime sottosmorzato . . . . .	7
4.3.2	Regime sovrasmorzato . . . . .	8
4.3.3	Regime critico . . . . .	9
4.4	Approfondimento: partitore di tensione . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Appendice</b>	<b>11</b>

# 1 Obiettivi

- Studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi di una resistenza in circuiti RC (resistenza-capacità) e circuiti RL (resistenza-induttanza) sollecitati da un generatore a onda quadra.
- Studiare l'andamento della differenza di potenziale ai capi di una resistenza in circuiti RLC (resistenza-capacità-induttanza) sollecitati da un generatore a onda quadra, in regime sottosmorzato, sovrasmorzato e critico.
- Osservare la forma d'onda della differenza di potenziale in un circuito con ponte di Graetz, sollecitato ad onda sinusoidale.

# 2 Cenni teorici

## 2.1 Circuito RC

Il circuito RC è composto da una resistenza R e un condensatore C in serie. La caduta di potenziale nel circuito sarà la somma delle cadute di potenziale su questi componenti.

$$V_g = V_R + V_C = RI + V_C \quad \text{usando} \quad I = C\dot{V}_C \Rightarrow V_G = RC\dot{V}_C + V_C \quad (1)$$

L'equazione si presenta come una differenziale di I ordine. Definiamo  $\tau = RC$ . Ponendo le condizioni iniziali e le condizioni di periodicità  $I(0) = -I(\frac{T}{2})$ , ricaviamo  $V_R(t)$ ,  $V_C(t)$ ,  $I(t)$ .

$$V_R(t) = \frac{2V_g}{(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad V_C(t) = V_g \left( 1 - \frac{2e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \quad I(t) = \frac{2V_g}{R(1 + e^{-\frac{T}{2\tau}})} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

## 2.2 Circuito RL

Il circuito RL è composto da una resistenza R e un induttore L in serie. La caduta di potenziale nel circuito sarà la somma delle cadute di potenziale su queste componenti.

$$V_g = V_R + V_L = RI + L\dot{I} \quad (5)$$

L'equazione si presenta come una differenziale di I ordine. Definiamo  $\tau = \frac{L}{R}$ . Ponendo le condizioni iniziali e le condizioni di periodicità  $I(0) = -I(\frac{T}{2})$ , ricaviamo  $I(t)$ , quindi  $V_R(t)$ ,  $V_L(t)$ ,  $I(t)$ .

$$V_R(t) = R \frac{V_g}{R + R_L} \left( 1 - \frac{2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) \quad (6) \quad V_L(t) = L\dot{I} = 2V_g \frac{2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \quad (7)$$

## 2.3 Circuito RLC

Il circuito RLC è composto da una resistenza  $R$ , un induttore  $L$  e un condensatore  $C$ . La caduta di potenziale totale nel circuito ( $V_g$ ) sarà la somma delle cadute di potenziale su queste componenti.

$$V_g = V_R + V_L + V_C = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \quad (8)$$

Derivando una volta, si ottiene un'equazione differenziale di II ordine: quella di un oscillatore smorzato.

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (9)$$

Per praticità di conto si definiscono i termini:

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \sigma_{\omega^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{L^2 \cdot C} \cdot \sigma_L\right)^2 + \left(-\frac{1}{L \cdot C^2} \cdot \sigma_C\right)^2} \quad (10)$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad \sigma_{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{1}{2L} \cdot \sigma_R\right)^2 + \left(-\frac{R}{2L^2} \cdot \sigma_L\right)^2} \quad (11)$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad \sigma_{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \cdot \sigma_{\omega^2}\right)^2 + \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \cdot \sigma_{\gamma}\right)^2} \quad (12)$$

La forma delle soluzioni dell'equazione 9 dipende da  $\gamma^2$  e  $\omega^2$  .:

$$\textbf{Regime sottosmorzato: } \gamma^2 < \omega^2 \quad V_R = V_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\beta t) \quad (13)$$

$$\textbf{Regime critico: } \gamma^2 = \omega^2 \quad V_R = V_0 \cdot t \cdot e^{-\gamma t} \quad (14)$$

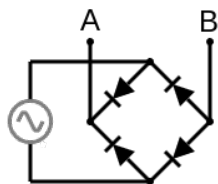
$$\textbf{Regime sovrasmorzato: } \gamma^2 > \omega^2 \quad V_R = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (15)$$

Nel caso sottosmorzato, è possibile vedere delle oscillazioni sempre più piccole attorno allo zero, mentre nel caso sovrasmorzato sarà visibile un unico picco che tende a zero. Il caso critico è quello limite tra i due precedenti.

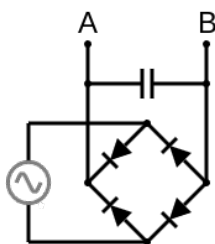
## 2.4 Approfondimento: Rettificatore di tensione

I rettificatori di tensione rappresentano una classe di circuiti progettati per convertire l'ingresso di corrente alternata in uscita di corrente continua. Questa conversione è resa possibile sfruttando le caratteristiche unidirezionali dei diodi, i quali consentono il flusso di corrente solo quando polarizzati correttamente.

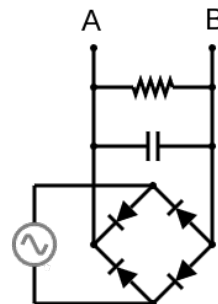
Come rettificatore è stato studiato il ponte di Graetz: questo circuito è costituito da quattro diodi disposti come in Figura 1 collegati a un generatore di corrente alternata. Grazie a un condensatore disposto come in Figura 2 l'output ai capi AB è una differenza potenziale costante. In Figura 3 viene aggiunto una resistenza al fine di simulare il carico di un circuito alimentato dalla tensione in AB.



**Figura 1:** Ponte di Gaertz



**Figura 2:** Ponte di Gaertz con condensatore



**Figura 3:** Ponte di Gaertz con condensatore e carico

### 3 Apparato sperimentale e strumenti di misura

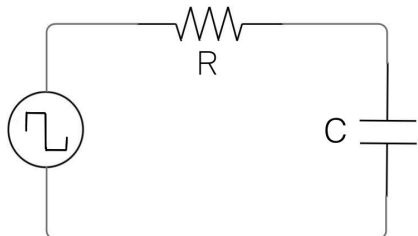
I circuiti sono stati costruiti su una breadboard, con l'ausilio di fili, resistenze, condensatori e induttori in dotazione.

E' stato usato un generatore di tensione, capace di produrre un segnale di forma variabile. In particolare, per questa esperienza di laboratorio, è stato prodotto un segnale ad onda quadra.

Un oscilloscopio, ossia uno strumento in grado di leggere e visualizzare una forma d'onda variabile nel tempo, è stato utilizzato per campionare la forma d'onda attraverso i due cursori dello strumento.

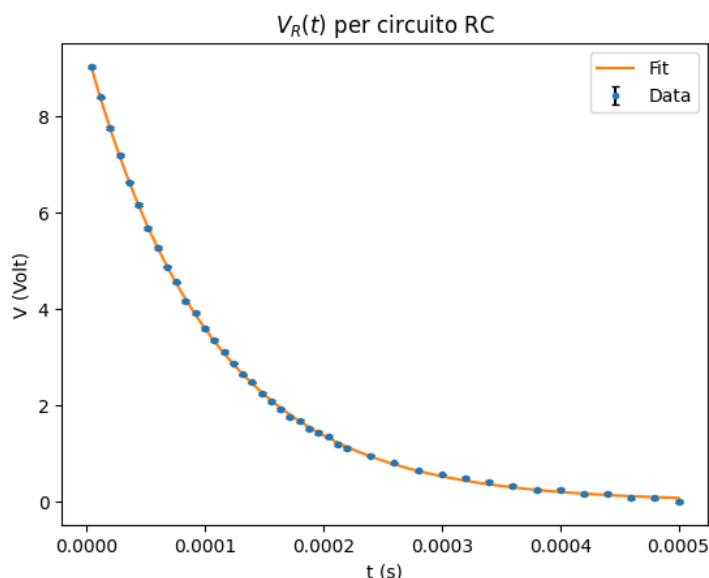
## 4 Raccolta e Analisi dati

### 4.1 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RC



**Figura 4:** Schema di un circuito RC

E' stato posto il circuito nella configurazione come in Figura 4. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 500 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di  $996\Omega$ , misurata con un multimetro. La forma d'onda è stata campionata in 42 punti, raccogliendo il valore della tensione  $V_R(t)$  e del relativo tempo  $t$ . Come incertezza per  $R$  è stata considerata quella dal costruttore del multimetro (1%) e come  $\sigma_V$  dato che i valori oscillano di 0.8V consideriamo il comportamento di una distribuzione uniforme con  $\sigma_V = 0.8/\sqrt{12}V$



$$\begin{aligned}\sigma_{V_C} &= 0.08/\sqrt{12}V = 0.023V \\ \tau &= (10.42 \pm 0.03) \times 10^{-3}s \\ V_G &= 4.70 \pm 0.01V \\ \tilde{\chi}_0^2 &= 1.45 \\ df &: 40\end{aligned}$$

I dati raccolti sono stati interpolati per ricavare i valori di  $\tau$  e  $V_G$  dalla formula 2

Da  $\tau = RC$ , avendo nota  $R$ , ricaviamo il valore di  $C = (104.7 \pm 1, 1) \times 10^{-9}F$

$$\sigma_C = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \cdot \sigma_\tau\right)^2 + \left(-\frac{\tau}{R^2} \cdot \sigma_R\right)^2}$$

## 4.2 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RL

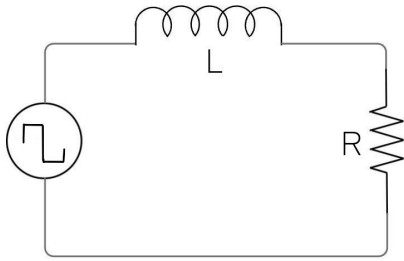
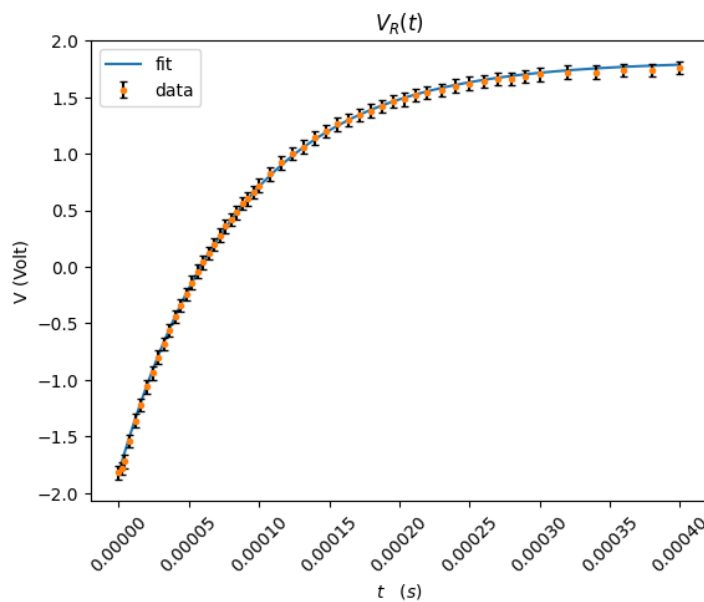


Figura 5: Schema di un circuito RC

È stato configurato il circuito come nella Figura 5. Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. Con un multimetro sono stati presi i valori di  $R=996\Omega$  e della resistenza interna all'induttanza  $R_L=58.5\Omega$ . La forma d'onda è stata campionata in 55 punti, misurando il valore della tensione  $V_R(t)$ . Le considerazioni sulle incertezze sono analoghe al punto precedente,  $\sigma_V = 0.2/\sqrt{12}$ .



$$\tau = (8.42 \pm 0.03) \times 10^{-5} s$$

$$V_G = (1.924 \pm 0.005) V$$

$$\sigma_{V_R} = 0.20/\sqrt{12}$$

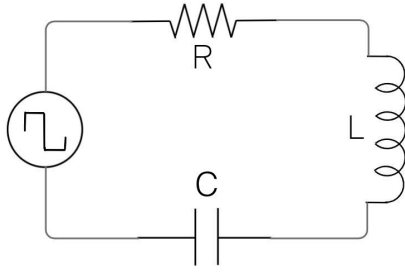
$$\tilde{\chi}_0^2 = 0.12$$

$$\text{df: } 53$$

Dal fit sono stati ricavati i valori di  $\tau = \frac{L}{R+R_L}$  e  $V_g$  mediante l'equazione 6. Invertendo la relazione calcoliamo il valore di  $L = \tau \cdot (R + R_L) = (88.8 \pm 0.9) \times 10^{-3} H$

$$\sigma_L = \sqrt{((R + R_L) \cdot \sigma_\tau)^2 + (\tau \cdot \sigma_R)^2 + (\tau \cdot \sigma_{R_L})^2}$$

### 4.3 Caduta di tensione sulla resistenza nel circuito RLC



**Figura 6:** Circuito RLC

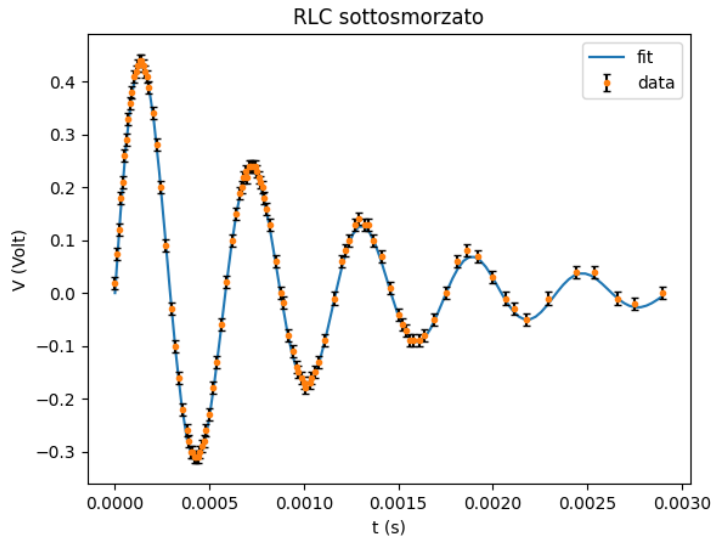
Il sistema posto nella configurazione come in Figura 6 con gli stessi componenti C ed L misurati nei punti precedenti. È stato studiato variandone il valore di R al fine di studiare i casi di regime sovrasmorzato, sottosmorzato, critico.

#### 4.3.1 Regime sottosmorzato

Il regime sottosmorzato si ottiene quando  $\gamma^2 < \omega_0^2$ , ovvero quando  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di  $120\Omega$  a cui si sommano i  $58.5\Omega$  provenienti da  $R_L$ , misurate ambedue con un multimetro ( $\sigma_R = 1\%$ ).

La forma d'onda è stata campionata in 109 punti, raccogliendo il valore della tensione  $V(t)$  e del relativo tempo  $t$ .  $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$  Dall'interpolazione mediante l'equazione 13 sono stati stimati i valori  $\gamma, \beta$  e confrontati con i valori attesi.



$$\begin{aligned}\gamma &= (1.05 \pm 0,01) \times 10^3 \\ \beta &= (10.76 \pm 0,01) \times 10^3 \\ V_g &= (5.054 \pm 0.003)V \\ \tilde{\chi}_0^2 &= 0.53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{atteso} &= (1.01 \pm 1.40) \times 10^3 \\ \beta_{atteso} &= (10.32 \pm 0.08) \times 10^3\end{aligned}$$

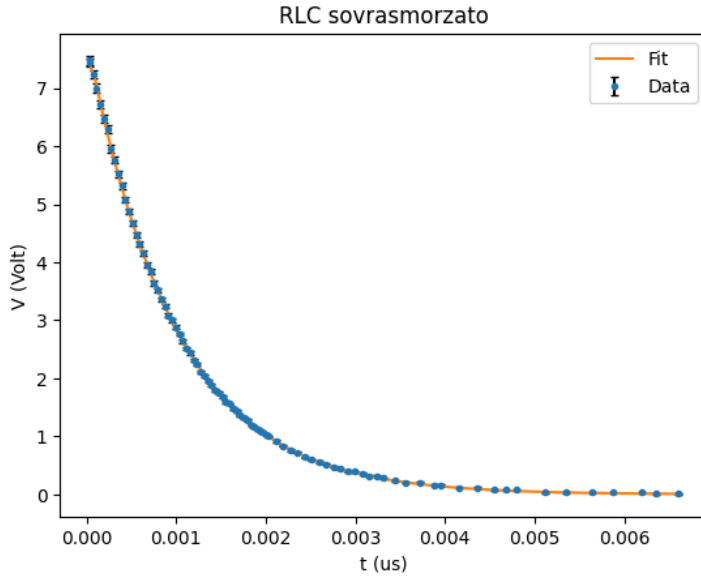
Confrontando i valori ricavati dal fit con i valori attesi dalle equazioni 12,11 si ottiene:  
 $t_\gamma = 2.59$ ,  $t_\beta = 5.64$



### 4.3.2 Regime sovrasmorzato

Il regime sovrasmorzato si ottiene quando  $\gamma^2 > \omega_0^2$ , ovvero quando  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di  $R = 9980\Omega$   $R_L = 58.5\Omega$   $\sigma_R = 1\%$ .

La forma d'onda è stata campionata in 93 punti, raccogliendo il valore della tensione  $V(t)$  e del relativo tempo  $t$ .  $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$



$$\tilde{\chi}_0^2 = 0.8$$

$$\gamma = (56.49 \pm 0.62) \times 10^3$$

$$\beta = (55.56 \pm 0.62) \times 10^3$$

$$\tilde{\chi}_0^2 = 0.8$$

$$\gamma_{atteso} = (56.52 \pm 0.81) \times 10^3$$

$$\beta_{atteso} = (55.56 \pm 0.82) \times 10^3$$

Confrontando i valori ricavati dal fit con i valori attesi dalle equazioni 12,11 si ottiene:  
 $t_\gamma = 0.02$ ,  $t_\beta = 0.06$

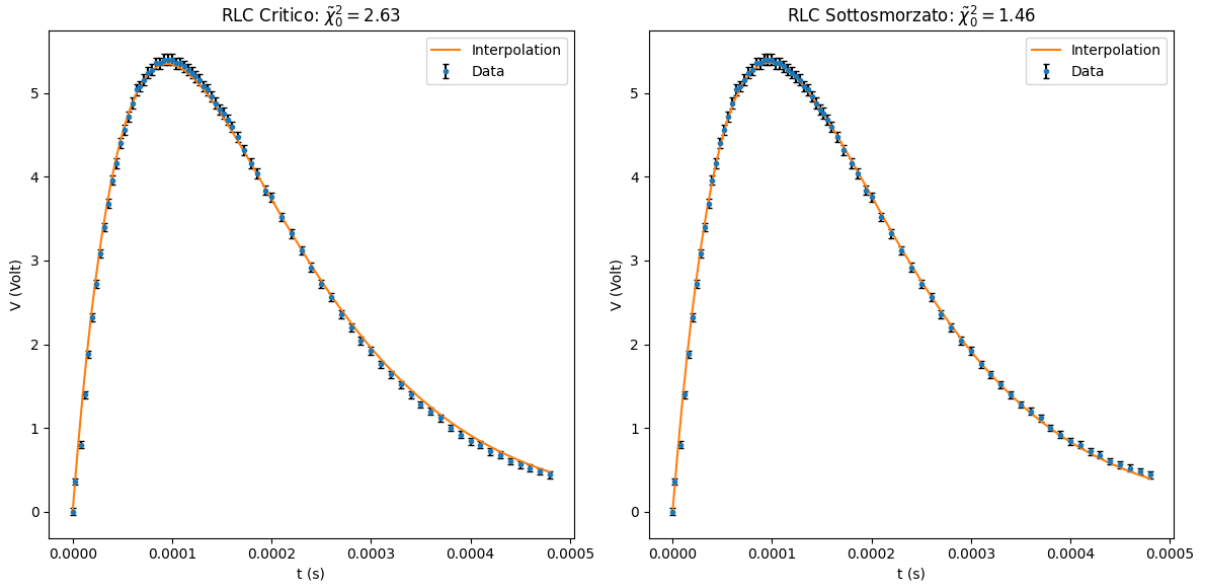
### 4.3.3 Regime critico

Il regime critico si ottiene quando  $\gamma^2 = \omega_0^2$ , ovvero quando  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Con il generatore di funzioni è stato prodotto un segnale ad onda quadra con frequenza di 20 Hz. La resistenza, nota, ha un valore di  $1760\Omega$  a cui si aggiunge  $R_L = 58.5\Omega$ ,  $\sigma_R = 1\%$ .

La forma d'onda è stata campionata in 75 punti, raccogliendo il valore della tensione  $V(t)$  e del relativo tempo  $t$ .  $\sigma_V = 0.04/\sqrt{12}$ .

La resistenza utilizzata,  $1760\Omega$ , è stata scelta perché vicina al valore teorico della resistenza per cui si ha un regime critico, calcolato con i valori di  $L$  e  $C$  ottenuti nei circuiti RC e RL. È stato anche effettuato il fit con il modello del regime sottosmorzato.



**Figura 7:** Fit dei valori raccolti con due modelli diversi: regime critico e sottosmorzato

Confrontando i valori del  $\tilde{\chi}_0^2$  per i due modelli si nota come, per la resistenza utilizzata, il modello a regime sottosmorzato rappresenta meglio il set di dati preso. Anche i t-test per  $\gamma$  e  $\beta$  mostrano la bontà del modello a regime sottosmorzato.

Attesi	Regime sottosmorzato	Regime critico
$\gamma_{\text{atteso}} = (10.24 \pm 0.15) \times 10^3$ $\beta_{\text{atteso}} = (16.48 \pm 10.24) \times 10^2$	$\gamma_s = (9.96 \pm 0.07) \times 10^3$ $\beta_s = (3.13 \pm 0.19) \times 10^3$ $t_\gamma = 1.71$ $t_\beta = 1.42$	$\gamma_c = (10.51 \pm 0.04) \times 10^3$ $t_\gamma = 1.82$

## 4.4 Approfondimento: partitore di tensione

Per mancanza di tempo non è stato possibile costruire l'apparato sperimentale e raccogliere misure. Per verificare il comportamento ideale è stato utilizzato il simulatore circuiti di lushproject.

Il generatore è stato fissato a una tensione di 5V in corrente alternata (sinusoidale) a una frequenza di 50Hz

- La lettura ai capi AB con il circuito disposto come in Figura 1 mostra una semionda positiva, i diodi agiscono come filtri per la tensione
- aggiungendo un condensatore il valore ai capi di AB si stabilizza poco sotto 5V
- aggiungendo una resistenza il valore della tensione è instabile e mostra delle oscillazioni in fase con il generatore. Si può appiattire l'instabilità aumentando il valore del resistore o la capacità del condensatore

## 5 Conclusioni

- Nel circuito RC, il fit determina  $\tau$ . Il modello è attendibile in quanto  $\tilde{\chi}_0^2 = 1.45$ . Dalla relazione  $\tau = RC$  si può determinare  $C = (104.7 \pm 1,1) \times 10^{-9}F$ , la cui incertezza è legata a  $\sigma_\tau$  e  $\sigma_R$ .  
La scelta di R influenza la stima della capacità perchè deve mantenersi valida la relazione  $RC \ll T$ .

Un metodo alternativo, anche se più approssimativo, per il calcolo di  $\tau$  nel circuito RC è quello che prevede di valutare dal grafico della caduta di potenziale su C il l'intervallo di tempo  $t \approx 5\tau$  necessario perché  $V_C$  passi dal suo valore massimo al suo minimo, e poi dividere per 5.

- Nel circuito RL, il fit determina  $\tau$ . Il modello è attendibile in quanto  $\tilde{\chi}_0^2 = 0.12$ . Il valore di  $R_L$  non è trascurabile. Dalla relazione  $\tau = L/(R + R_L)$  si può determinare  $L = (88.8 \pm 0.9) \times 10^{-3}Hr$ , la cui incertezza è legata a  $\sigma_\tau, \sigma_R$  e  $\sigma_{R_L}$ .  
La scelta di R influenza la stima dell'induttanza perchè deve mantenersi valida la relazione  $\tau \ll T$ .

- Nel circuito RLC a regime sottosmorzato, il valore del  $\tilde{\chi}_0^2 = 0.53$  evidenzia la bontà del fit.  $t_\gamma = 2.59$ ,  $t_\beta = 5.64$  hanno valori troppo elevati per ritenere i valori ottenuti dal fit compatibili con i valori attesi. Una possibile causa potrebbe essere una sottostima degli errori.
- nel circuito RLC a regime sovrasmorzato, il  $\tilde{\chi}_0^2 = 0.80$  permette di ritenere accettabile il modello.  $t_\gamma = 0.02$  e  $t_\beta = 0.06$  mostrano la compatibilità tra i valori attesi.
- Nel circuito RLC a regime critico, confrontando i valori del  $\tilde{\chi}_0^2$  per i due modelli si nota come, per la resistenza utilizzata, il modello a regime sottosmorzato rappresenta meglio il set di dati preso. Anche i t-test per  $\gamma$  e  $\beta$  mostrano la bontà del modello a regime sottosmorzato.

- Confrontando  $R_L$  con le resistenze utilizzate nei circuiti, è possibile notare che il suo valore è significativo, soprattutto nella configurazione del circuito RLC a regime sottosmorzato ( $R$  molto piccola). Utilizzando la funzione di ohmetro del multimetro, è stata misurata la resistenza dell'induttanza ( $R_L = 58.5\Omega$ ) al fine di considerarla nella caduta di potenziale causata da questo elemento del circuito e di ottenere una maggiore precisione.

## 6 Appendice

Link per codice python e CSV:

<https://github.com/CarminatiGiovanni/LaboratorioFisica2/tree/main/20240321circuiti2>