Black and Scholes e rendita con minimo garantito

Carmine Minichini: 0000892441,
Andrea Gasperini: 0000884140,
Alessandro Barbarini: 0000886743

05 giugno 2020

1 INTRODUZIONE

Le Opzioni sono strumenti finanziari appartenenti alla famiglia dei derivati, che sono creati sulla base del valore del sottostante il quale, può essere per esempio, un titolo azionario. Un'opzione garantisce il diritto di comprare o vendere uno specifico asset ad un certo prezzo ad una data prefissata.

Di regola, un'opzione per comprare un asset ad un prezzo specifico si chiama opzione call. In questo caso, chi compra l'opzione (il buyer) possiede il diritto di acquistare l'asset, mentre chi vende l'opzione ha l'obbligo di vendere l'asset. Un'opzione per vendere un asset ad un prezzo specifico viene invece chiamata opzione put. Questo tipo di opzione concede il diritto di vendere un asset a chi l'acquista mentre chi la vende ha l'obbligo di comprare l'asset sottostante.

Il prezzo specifico, comunemente detto prezzo d'esercizio, viene chiamato tecnicamente strike price. Questo è il prezzo al quale il buyer dell'opzione può comprare o vendere l'asset sottostante.

Distinguiamo le opzioni europee che possono essere esercitate solo alla data di scadenza del contratto, dalle opzioni americane che invece possono essere esercitate in qualunque momento fino alla data di scadenza. In questo elaborato ci occuperemo esclusivamente di opzioni di tipo europeo.

L'obiettivo dell'elaborato è quello di illustrare la teoria alla base del modello di Black and Scholes e attraverso questa valutare il prezzo di opzioni europee (call e put) al variare della volatilità implicita e della time-to-maturity.

Saranno inoltre effettuati approfondimenti su volatilità implicita e sulle caratteristiche contrattuali delle opzioni dell'indice S&P 500 (SPX chain).

Andremo quindi successivamente a calcolare il rischio di portafoglio attraverso Expected Shortfall e Value at Risk considerando molteplici metodi per compararne l'efficacia. Nel nostro caso specifico andremo a costruire un portafoglio a copertura di un fondo con minimo garantito.

2 MODELLO BLACK AND SCHOLES

L'equazione di Black and Scholes è stata per la prima volta originata nel 1973, l'intuizione alla base del modello è che un titolo derivato può essere implicitamente prezzato se il sottostante è scambiato sul mercato.

Le ipotesi alla base del modello sono:

- Il prezzo del sottostante segue un moto browniano geometrico (processo di Wiener):
$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$
- Non sono ammesse opportunità di arbitraggio;
- Non sussistono costi di transazione né frizioni di altro tipo nel mercato;
- L'azione sottostante nel nostro caso non paga dividendi;
- Il tasso risk free e la volatilità sono costanti nel tempo.

Il modello di Black and Scholes permette di definire e valutare un opzione a partire dalla conoscenza di sei variabili fondamentali che sono:
S = Valore dell'attività sottostante;
K = prezzo "strike" dell'opzione;
T = scadenza dell'opzione;
r = tasso d'interesse privo di rischio corrispondente alla vita dell'opzione;
σ = volatilità del sottostante.

Dati questi valori, Black and Scholes dimostrano che, in presenza di un processo stocastico Browniano di tipo geometrico, si ottiene il seguente risultato per il valore dell'opzione call europea:

$$
\begin{aligned}
c_{BMS} &= e^{-r_f(T-t)}[S_t e^{r_f(T-t)} N(d_1) - KN(d_2)] \\
&= S_t N(d_1) - e^{-r_f(T-t)} KN(d_2)
\end{aligned}
$$

$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K})+(T-t)(r_f+\frac{\sigma^2}{2})}{(\sigma\sqrt{T-t})}$

dove $N(d_1) = \Phi(d_1)$ mentre $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

Nella quale $\Phi(d_1)$ è la distribuzione di probabilità cumulata di una variabile casuale normale standardizzata.
L'impiego della put-call parity, per azioni senza dividendi, ci permette di ottenere partendo dal prezzo della call il corrispondente prezzo di una put:

$$
\begin{aligned}
p_{BSM} &= c_{BSM} + Ke^{-r_f(T-t)} - S_t \\
&= S_t N(d_1) - Ke^{-r_f(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r_f(T-t)} - S_t \\
&= S_t[N(d_1) - 1] - Ke^{-r_f(T-t)}[N(d_2) - 1] \\
&= e^{-r_f(T-t)}\{K[1 - N(d_2)] - S_t e^{r_f(T-t)}[1 - N(d_1)]\} \\
&= e^{-r_f(T-t)} KN(-d_2) - S_t N(-d_1)
\end{aligned}
$$

Tale relazione stabilisce che la differenza tra il prezzo di una opzione call ed il prezzo di una opzione put è uguale alla differenza tra il prezzo attuale del sottostante ed il valore attuale dello strike price delle opzioni.

3 LE GRECHE

Le greche sono dei valori statistici espressi in percentuale, che forniscono all'investitore dati importanti per poter impostare al meglio le strategie di investimento e di fatto misurano la reattività di un'opzione al variare dei principali fattori che influenzano il prezzo.

In particolare, approfondiremo la greca delta e la greca rho delle opzioni put di tipo europeo.

Il delta di un'opzione put indica la sensibilità del valore dell'opzione a piccole variazioni del prezzo del sottostante ed è rappresentato come segue:

$$\Delta = \frac{\delta p}{\delta S} = N(d_1) - 1 < 0$$

In questo particolare caso abbiamo considerato il delta di una singola put, nel caso più generale considerando un portafoglio di opzioni, il delta del portafoglio è la somma dei delta delle singole opzioni. Il fatto che il delta sia negativo ci mostra come il prezzo di una put aumenta al diminuire del valore del sottostante.

Una diversa dimensione del rischio dovuta al possesso delle opzioni put è data dalla greca Rho che rappresenta la sensibilità del valore dell'opzione rispetto al tasso di interesse usato nel modello di Black and Scholes:

$$\rho = \frac{\delta p}{\delta r_f} = -K(T-t)e^{-r_f(T-t)}N(d_2) < 0$$

Variazioni di tassi d'interesse positive comportano una riduzione del prezzo dell'opzione put.

4 VOLATILITA' IMPLICITA

Diversamente da quanto previsto dal modello di Black and Scholes che suppone volatilità costante, è possibile osservare nei mercati volatilità diversa al variare di moneyness e time to maturity.

La volatilità stimata dal prezzo dell'opzione si dice volatilità implicita, ovvero che esprime un'approssimazione del livello di rischio incorporato nei prezzi delle opzioni quotate.

Per calcolare la volatilità implicita si calcola quel valore di σ che, sostituito nella formula di Black and Scholes, ci dà il valore di mercato dell'opzione. Questo valore risulta essere una buona stima della volatilità effettiva.

Se $c_t(\sigma, r_f, S, K, T)$ è il prezzo teorico (che risulta dalla formula di Black and Scholes) dell'opzione al tempo t, e $\hat{c}_t$ è il prezzo reale dell'opzione osservato sul mercato, allora risolvendo l'equazione $c_t(\sigma, r_f, S, K, T) = \hat{c}_t$ nell'incognita σ otterremo la volatilità implicita.

Si riscontra che la volatilità implicita per un certo titolo sottostante, in genere, presenta valori diversificati per scadenze diverse e, all'interno della stessa scadenza, per prezzi d'esercizio diversi.

Il primo di questi effetti viene indicato come struttura temporale della volatilità implicita, mentre il secondo viene chiamato effetto Smile, o Skew, quando la curva della volatilità implicita rispetto ai prezzi d'esercizio è asimmetrica.

Per quanto riguarda l'effetto temporale possiamo affermare che su scadenze brevi la volatilità è generalmente elevata, mentre scadenze lunghe sono spesso accompagnate da una minore volatilità, questo implica che la struttura temporale della volatilità è decrescente.

Il fenomeno della non costanza della volatilità implicita è noto come Volatility Smile, a seconda del prezzo del sottostante lo smile può essere indicato con la forma di un sorriso, o di un sogghigno. La volatility smile può essere pensata come una misura di correttezza della formula di Black and Scholes, se il modello prevedesse correttamente il prezzo dell'opzione allora il grafico della volatilità implicita sarebbe relativamente piatto.

L'effetto smile si spiega osservando che la distribuzione dei rendimenti del titolo sottostante si discosta dalla distribuzione normale, seguendo piuttosto una distribuzione con code spesse.

5 CARATTERISTICHE CONTRATTUALI SPX CHAIN

Lo Standard & Poor's 500 Index è un indice di 500 titoli azionari di un'ampia gamma di settori. Gli stock che lo compongono sono pesati secondo il valore di mercato totale delle loro azioni in circolazione. Il prezzo strike in the money, at the money e out of the money sono prefissati e gli intervalli tra i diversi strike price sono di norma 5 punti. Questo tipo di opzioni hanno scadenza fino a dodici mesi (breve termine), inoltre è possibile scambiare opzioni SPX LEAPS con scadenza da 12 a 60 mesi dalla data di emissione.

Le opzioni europee SPX possono essere esercitate solamente il terzo venerdì del mese in cui è prevista la scadenza del contratto, mentre, l'ultimo giorno disponibile per scambiare opzioni SPX, è generalmente il giorno precedente alla data in cui viene calcolato il valore di liquidazione del titolo (generalmente il giovedì).

L'ammontare dell'opzione esercitata è pari alla differenza tra il valore di liquidazione e il prezzo di esercizio dell'opzione moltiplicato per cento, dove il valore di liquidazione è calcolato utilizzando il prezzo di apertura nel mercato primario alla data di scadenza.

Le put o le call con scadenza fino a nove mesi devono essere pagate per intero.

6 RISULTATI

Alla data $t = 01/05/2020$ il grafico del prezzo delle call per la moneyness $(\frac{K}{S_t})$ da 70 a 130 ci mostra un valore inferiore delle Call per scadenze più brevi come è possibile osservare dalla Figura 1.

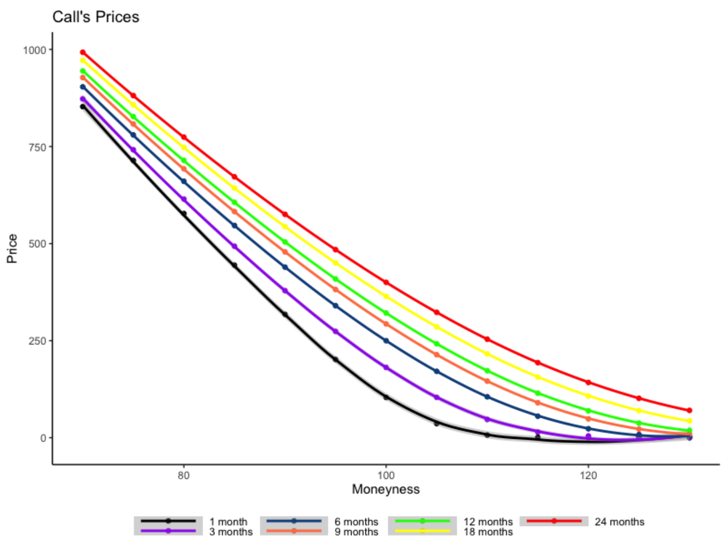

Figura 1: *Valore delle opzioni call europee al variare della moneyness e della time to maturity il 01/05/2020*

Per quanto riguarda il prezzo delle put possiamo osservare anche in questo caso come il valore di tali opzioni europee al variare della moneyness sia inferiore per time to maturity più brevi.

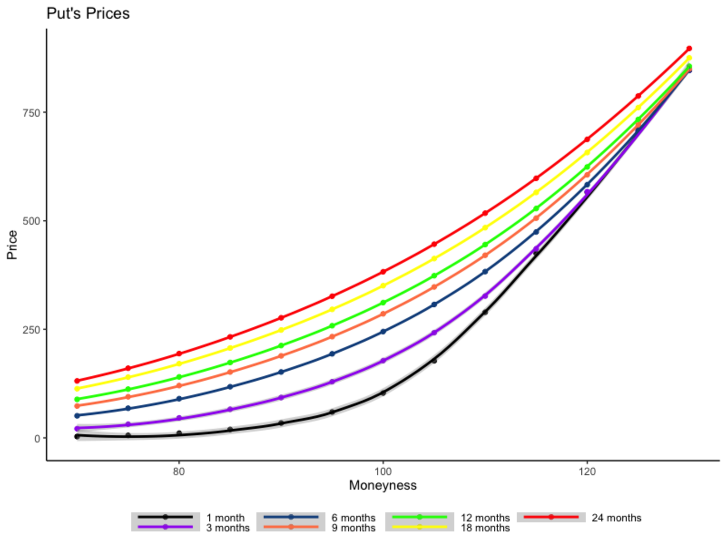

Figura 2: *Valore delle opzioni put europee al variare della moneyness e della time to maturity il 01/05/2020*

Il delta di una opzione Call come detto in precedenza viene calcolato come la derivata del prezzo della call rispetto alle variazioni del sottostante. Se l'opzione è in the money il delta risulta essere più elevato per scadenze brevi e vicino all'unità, all'aumentare della moneyness possiamo osservare un andamento decrescente, e un valore più elevato per time to maturity maggiori.

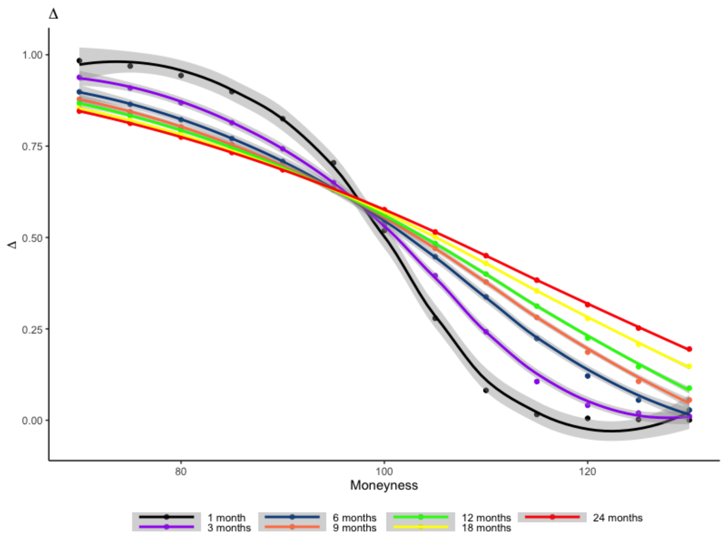

Figura 3: *Delta delle opzioni call europee al 01/05/2020*

L'altra greca presa in considerazione è il vega della call che ricordiamo viene calcolata come la derivata del prezzo della call rispetto alla volatilità:

$$Vega = \frac{\delta c}{\delta \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1) > 0$$

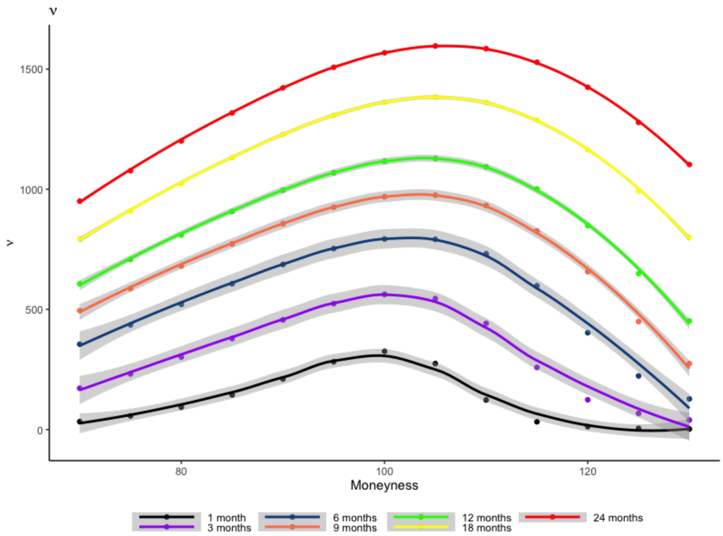

Figura 4: *Vega delle opzioni call europee al 01/05/2020*

La volatilità implicita al variare della scadenza e della moneyness come ci si aspettava non risulta essere costante, contrariamente da quanto supposto da Black and Scholes, ma mostra la seguente superficie di volatilità:

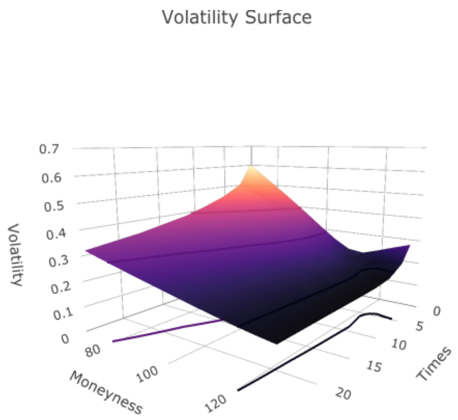

Figura 5: *Superficie di volatilità al 01/05/2020*

Per scadenze brevi è possibile osservare l'effetto smile della volatilità descritto in precedenza.

Considerando un fondo che in $T \in \{t+0.5; t+1; t+1.5; t+2\}$ paga i seguenti payoff $\max(S_T, S_t) = \begin{cases} S_T, se S_T \geq S_t \\ S_t, se S_T < S_t \end{cases}$ abbiamo costruito un portafoglio contenente quattro sottostanti e quattro opzioni put europee valutate alle scadenze considerate, in grado di replicare i quattro flussi.

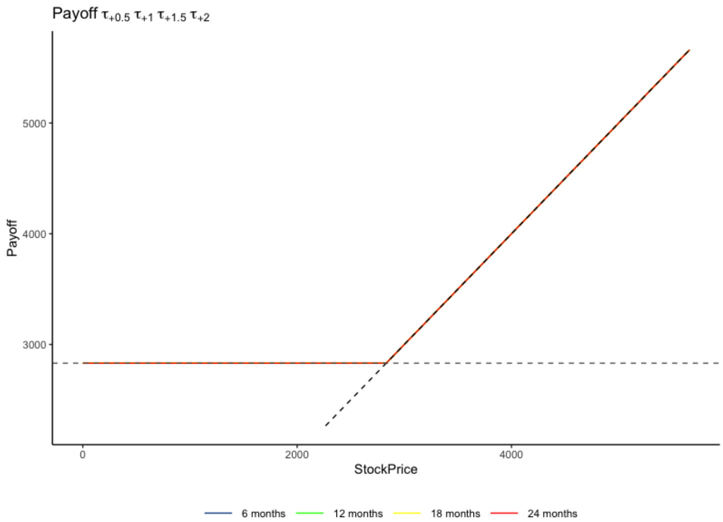

Figura 6: *Payoff del portafoglio a scadenza*

Abbiamo prezzato quindi il portafoglio dal 05/09/2017 all'01/05/2020 osservando il seguente andamento nel tempo:

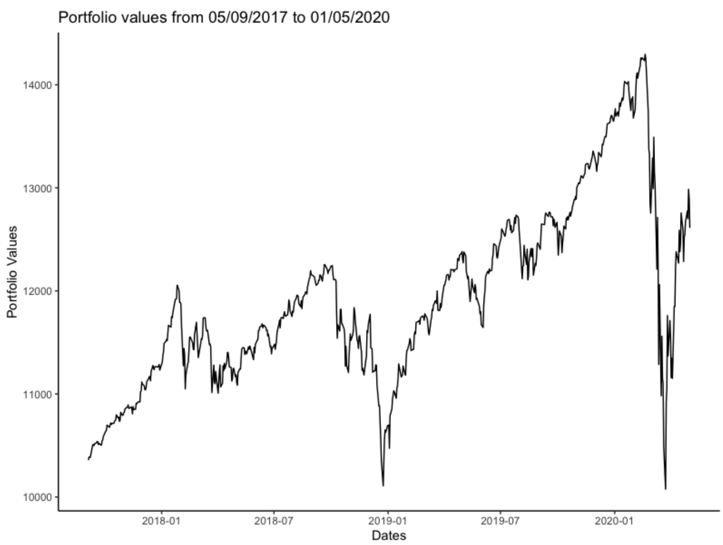

Figura 7: *Valutazione del portafoglio dal 05/09/2017 all'01/05/2020*

Considerati i tre livelli di confidenza, $\alpha = \{0.01, 0.02, 0.05\}$, per il calcolo del VaR (Value at Risk) e dell'ES (Expected Shortfall) sono state utilizzate:

- volatilità implicita a un mese at the money;
- volatilità storica;
- un metodo di simulazione storica.

Per quanto riguarda i primi due metodi, entrambi parametrici, abbiamo assunto rendimenti log-normali, in modo da poterci calcolare il valore del sottostante e del portafoglio a un giorno e quindi le due misure di rischio.

Nella figura 8 e 9 i valori del VaR e dell'ES sono stati espressi in termini percentuali per avere un termine di confronto più adatto con i valori del delta normal method.

	0.05	**0.02**	**0.01**
$VaR_{\sigma_{1mese}}$	1.57	1.93	2.17
$VaR_{\sigma_{storico}}$	1.16	1.43	1.61
$VaR_{simulazionestorica}$	1.04	1.62	2.11

Figura 8: *VaR del portafoglio a un giorno espresso in termini percentuali*

	0.05	**0.02**	**0.01**
$ES_{\sigma_{1mese}}$	1.94	2.24	2.45
$ES_{\sigma_{storico}}$	1.44	1.67	1.83
$ES_{simulazionestorica}$	1.78	2.50	3.11

Figura 9: *ES del portafoglio a un giorno espresso in termini percentuali*

Possiamo notare come previsto dalla letteratura valori più elevati sia del VaR, sia dell'ES al diminuire di α, inoltre si osserva che i valori dell'ES risultano essere superiori ai valori del VaR a qualsiasi livello di confidenza.
Fin qui abbiamo considerato esclusivamente il rischio di mercato, che ci permette di osservare la rischiosità del portafoglio al variare del sottostante.

Per valutare la sensibilità del portafoglio al rischio di tasso considerando, quali fattori di rischio, i tassi d'interesse alle quattro scadenze, è stato utilizzato il Delta Normal method.
Value at Risk ed Expected Shortfall ai tre livelli di confidenza precedenti, ipotizzando indipendenza tra i tassi d'interesse, risultano essere:

	0.05	**0.02**	**0.01**
VaR	0.019	0.024	0.028
ES	0.024	0.029	0.032

Figura 10: *VaR e ES del portafoglio con metodo delta normal, con covarianze nulle*

Considerando invece dipendenza tra i tassi d'interesse e quindi covarianze non nulle, abbiamo ottenuto i seguenti valori:

	0.05	**0.02**	**0.01**
VaR	0.034	0.042	0.048
ES	0.043	0.049	0.055

Figura 11: *VaR e ES del portafoglio con metodo delta normal, con dipendenza tra i tassi d'interesse*

7 CONCLUSIONI

Dai risultati ottenuti dal calcolo di VaR ed ES possiamo osservare che tra i metodi sviluppati quello che ad un livello di confidenza, $alpha = 0.01$, comporta un minor accantonamento a riserva, per far fronte al rischio, risulta essere il metodo che considera la volatilità stimata sulla serie storica dei prezzi del sottostante.
Occorre comunque sottolineare alcune criticità: i modelli parametrici assumono distribuzione log-normale dei rendimenti molto spesso irrealistica, mentre il metodo di simulazione risente dell'ampiezza del campione. Se troppo grande le osservazioni più recenti avranno un peso trascurabile e le misure di rischio saranno poco reattive al variare delle condizioni di mercato, se troppo piccolo potrebbero risultare escluse dal campione perdite rilevanti e vi è probabilità di sottostimare il rischio.

Nel considerare il metodo delta normal basato sull'espansione di Taylor al primo ordine, notiamo una minore sensibilità del portafoglio al rischio di tasso. Tali valori non risultano essere precisi in quanto viene considerata un'approssimazione al netto dell'errore.
Come ci aspettavamo data la struttura positiva delle covarianze, i valori del Value at Risk e dell'Expected Shortfall in presenza di dipendenza tra tassi d'interesse risultano essere più elevati.

Infine possiamo osservare che avendo un portafoglio composto da quattro sottostanti e quattro put a copertura, il rischio di tasso d'interesse è meno accentuato del rischio di mercato.

8 BIBLIOGRAFIA

- Mercati finanziari: Analisi stocastica delle opzioni, 2001 (Elettra Agliardi, Rossella Agliardi)
- Option, futures, and other derivatives, 2015 (John C. Hull)
- Elements of financial risk management, second edition, 2012 (Peter F. Christoffersen)
- Implied volatility functions: empirical test, 1998 (Bernard Dumas, Jeff Fleming and Rober E. Whaley)