

Exercícios de Eq. Linear n Homogênea

(a) $y'' + 3y' + 2y = 6$.

eq. auxiliar $\rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \rightarrow \Delta = 1$$

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow r_1 = -2$$
$$\quad \quad \quad \rightarrow r_2 = -1$$

$$y_p = \begin{cases} y_p = A \\ y_p' = 0 \\ y_p'' = 0 \end{cases}$$

Logo: $y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-1x}$

Substituindo: $0^2 + 0 \cdot 3 + 2A = 6 \rightarrow 2A = 6 \rightarrow A = 3$

$$y_p = 3$$

Solução geral: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-1x} + 3$

(b) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$.

eq. auxiliar: $r^2 - 10r + 25 = 0$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 \rightarrow \Delta = 0 \quad r = \frac{10}{2} = 5$$

$$y_c = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

$$y_p = \begin{cases} y_p = ax + b \\ y_p' = a \\ y_p'' = 0 \end{cases}$$

Substituindo:

$$0 - 10(ax + b) + 25a = 30x + 3$$

$$-10ax - 10b + 25a = 30x + 3 \quad (-10a + 25a)x + (-10b + 25a) = 30x + 3$$

$$\begin{cases} -10a + 25a = 30 \\ -10b + 25a = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -10a = 30 \rightarrow a = -3 \\ -10b + 25a = 3 \rightarrow -10b + 25(-3) = 3 \end{cases}$$

$$a = 2 \quad b = 10$$

$$b = -7,8$$

$$y_p = -3x - 7,8$$

Solução geral: $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} - 3x - 7,8$

(c) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$.

eq. auxiliar: $\frac{1}{4}r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \leadsto \Delta = 0$

$r = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \leadsto r = -2$

$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c & \text{Substituindo: } \frac{1}{4}(2a) + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 - 2x \\ y_p' = 2ax + b & 2x^2 + (2a + b)x + (\frac{2}{4}a + b + c) = x^2 - 2x \\ y_p'' = 2a \end{cases}$$

Comparando:
$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -2 \leadsto b = -4 \\ \frac{2}{4}a + b + c = 0 \leadsto \frac{2}{4} - 4 + c = 0 \leadsto c = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$y_p = x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

Solução geral: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$

(d) $y'' + 3y' = -48x^2 e^{3x}$.

eq. auxiliar: $r^2 + 3r = 0$

$r(r+3) = 0 \leadsto r = 0$

$r+3=0 \leadsto r = -3$

$y_c = c_1 + c_2 e^{-3x}$

$$\begin{cases} y_p = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) \\ y_p' = e^{3x}[(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C)] \\ y_p'' = e^{3x}[3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C] \end{cases}$$