

Estudi de la freqüència i la velocitat de flameig d'una placa plana birecolzada.

1) Trobar el desplaçament de les molles en funció de l'alçada del centre de gravetat de la placa (h) i de l'angle d'atac (α).

Com que la massa és homogènia al llarg de tota la placa, el CG es troba a una distància b del caire d'atac.

$$Y_{K1} = h + b \cdot \sin(\alpha)$$

$$Y_{K2} = h - b \cdot \sin(\alpha)$$

Si l'angle d'atac és petit:

$$Y_{K1} = h + b \cdot \alpha$$

$$Y_{K2} = h - b \cdot \alpha$$

2) Trobar la distància vertical del perfil en funció de l'alçada (h), l'angle d'atac (α) i la distància al caire d'atac (x).

$$Z_P = f(h, \alpha, x)$$

$$Z_P = h + b \cdot \alpha - \alpha \cdot x = h + \alpha(b - x)$$

3) Escriure les equacions dinàmiques mitjançant la mecànica Lagrangiana.

$$\text{Lagrange: } \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) + \frac{\delta U}{\delta q_i} = Q_q$$

On T és l'energia cinètica; U l'energia potencial i Q_q les forces generalitzades. Les variables q_i seran les variables independents del sistema. En aquest cas tenim dos graus de llibertat i les variables seran α i h .

Energia potencial:

$$U = \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot Y_{K1}^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot Y_{K2}^2 + m \cdot g \cdot h$$

Considerant que les variacions en alçada seran molt petites i per tant els efectes de la rigidesa estructural seran molt més grans que els de l'energia potencial, podem menysprear l'últim terme, per tant:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot Y_{K1}^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot Y_{K2}^2 = \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot (h + b \cdot \alpha)^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot (h - b \cdot \alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot (h^2 + b^2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot b \cdot h \cdot \alpha) + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot (h^2 + b^2 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot b \cdot h \cdot \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cdot [h^2 \cdot (K_1 + K_2) + b^2 \cdot \alpha^2 \cdot (K_1 + K_2) + 2 \cdot h \cdot b \cdot \alpha \cdot (K_1 - K_2)] \end{aligned}$$

$$\frac{\delta U}{\delta h} = h \cdot (K_1 + K_2) + \alpha \cdot b \cdot (K_1 - K_2)$$

$$\frac{\delta U}{\delta \alpha} = \alpha \cdot b^2 \cdot (K_1 + K_2) + h \cdot b \cdot (K_1 - K_2)$$

Energia cinètica:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2 \cdot b} dT = \int_0^{2 \cdot b} 22 \cdot \pi \cdot \rho_{\infty} \cdot b^2 \cdot \left(\dot{h} + \dot{\alpha} \cdot (b - x) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2 \cdot b} \\ &\quad \cdot \int_0^{2 \cdot b} (\dot{h}^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot b^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot x^2 - 2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot b \cdot x + 2 \cdot \dot{h} \cdot \dot{\alpha} \cdot b - 2 \cdot \dot{h} \cdot \dot{\alpha} \cdot x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2 \cdot b} \cdot \left(2 \cdot \dot{h}^2 \cdot b + \frac{8}{3} \dot{\alpha}^2 \cdot b^3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \dot{h}^2 \cdot m + \frac{1}{6} \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot b^2 \cdot m \end{aligned}$$

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{h}} = \dot{h} \cdot m$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{h}} \right) = \ddot{h} \cdot m$$

$$\frac{\delta T}{\delta \dot{\alpha}} = \frac{1}{3} \cdot \dot{\alpha} \cdot b^2 \cdot m$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{\alpha}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \ddot{\alpha} \cdot b^2 \cdot m$$

Forces generalitzades:

$$Q_h = -L(t)$$

$$Q_{\alpha} = M_{\alpha}(t)$$

Equacions del sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{h} \cdot m + h \cdot (K_1 + K_2) + \alpha \cdot b \cdot (K_1 - K_2) &= -L(t) \\ \frac{1}{3} \cdot \ddot{\alpha} \cdot b^2 \cdot m + \alpha \cdot b^2 \cdot (K_1 + K_2) + h \cdot b \cdot (K_1 - K_2) &= M_{\alpha}(t) \end{aligned}$$

4) Escriure les equacions de forma matricial

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & b \cdot (K_1 - K_2) \\ b \cdot (K_1 - K_2) & b^2 \cdot (K_1 + K_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(t) \\ M_{\alpha}(t) \end{bmatrix}$$

5) Escriure el problema de forma adimensional i en funció de les freqüències naturals del sistema.

Adimensionalització:

$$\hat{h} = \frac{1}{\omega^2 \cdot b} \cdot \ddot{h}$$

$$\hat{h} = \frac{h}{b}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = \alpha$$

$$\hat{F} = \frac{1}{m \cdot \omega^2 \cdot b} \cdot F$$

$$\hat{M} = \frac{1}{m \cdot \omega^2 \cdot b^2} \cdot M$$

On ω és la freqüència del sistema.

El sistema queda:

$$\begin{bmatrix} m \cdot b \cdot \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot m \cdot b^2 \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \cdot (K_1 + K_2) & b^2 \cdot (K_1 - K_2) \\ b \cdot (K_1 - K_2) & b^2 \cdot (K_1 + K_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} \\ = [m \cdot \omega^2 \cdot b \quad m \cdot \omega^2 \cdot b^2] \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \widehat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

Dividint entre m i b :

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot b \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(K_1 + K_2)}{m} & b \cdot \frac{(K_1 - K_2)}{m} \\ \frac{(K_1 - K_2)}{m} & b \cdot \frac{(K_1 + K_2)}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = [\omega^2 \quad \omega^2 \cdot b] \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \widehat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

I podem dividir totes les columnes de la dreta entre b un altre cop per obtenir:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(K_1 + K_2)}{m} & \frac{(K_1 - K_2)}{m} \\ \frac{(K_1 - K_2)}{m} & \frac{(K_1 + K_2)}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \widehat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

Definint les freqüències naturals com:

$$\omega_h^2 = \frac{K_1 + K_2}{m} \quad \omega_\alpha^2 = \frac{K_2 - K_1}{m}$$

Obtenim:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \cdot \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & -\omega_\alpha^2 \\ -\omega_\alpha^2 & \omega_h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \widehat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

Finalment, traient ω_h^2 i dividint entre ω^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \widehat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

6) Assajar la solució $h(t) = \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ $\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$

Primer en plantejem les derivades:

$$h(t) = \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\dot{h}(t) = i \cdot \omega \cdot \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\dot{\alpha}(t) = i \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\ddot{h}(t) = -\omega^2 \cdot \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -\omega^2 \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Si ara adimensionalitzem les variables:

$$\hat{h}(t) = \frac{\bar{h}}{b} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{\bar{h}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\hat{\alpha}(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{\bar{\alpha}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\hat{\dot{h}}(t) = \frac{i \cdot \omega \cdot \bar{h}}{b \cdot \omega} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = i \cdot \hat{\bar{h}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\hat{\dot{\alpha}}(t) = \frac{i \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}}{\omega} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = i \cdot \hat{\bar{\alpha}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\hat{\ddot{h}}(t) = -\frac{\omega^2 \cdot \bar{h}}{\omega^2 \cdot b} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\hat{\bar{h}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

$$\hat{\ddot{\alpha}}(t) = -\frac{\omega^2 \cdot \bar{\alpha}}{\omega^2} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = -\hat{\bar{\alpha}} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Substituïnt-ho en el sistema:

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\bar{h}} \\ \hat{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\bar{h}} \\ \hat{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \hat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix}$$

Traient factor comú $\begin{bmatrix} \hat{\bar{h}} \\ \hat{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}$ i dividint entre $e^{i \cdot \omega \cdot t}$:

$$\left(-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\bar{h}} \\ \hat{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{L}(t) \\ \hat{M}_\alpha(t) \end{bmatrix} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$$

7) Escriure les forces i moments aerodinàmics en funció de h i α suposant $a=0$ i obtenir els coeficients C_{Lh} $C_{L\alpha}$ C_{Mh} $C_{M\alpha}$.

Si $a=0$, sustentació i moment queden:

$$L = \Pi \cdot \rho_\infty \cdot b^2 \cdot [\dot{h} + U_\infty \cdot \dot{\alpha}] + 2 \cdot \Pi \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty \cdot b \cdot C(k) \cdot \left[\dot{h} + U_\infty \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \dot{\alpha} \right]$$

$$M_\alpha = \Pi \cdot \rho_\infty \cdot b^2 \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cdot U_\infty \cdot b \cdot \dot{\alpha} - \frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot \ddot{\alpha} \right] + U_\infty \cdot C(k) \cdot \left[\dot{h} + U_\infty \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \dot{\alpha} \right] \right\}$$

Substituint per la solució $h(t) = \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ $\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$, la sustentació queda:

$$L = \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot b^2 \cdot \left[-\omega^2 \cdot \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + i \cdot \omega \cdot U_{\infty} \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right] + 2 \cdot \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty} \cdot b \cdot C(k) \cdot \left[i \cdot \omega \cdot b \cdot \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + U_{\infty} \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot b \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right]$$

Manipulant l'equació per agrupar en termes de h i alfa:

$$L = \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[-\Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot b^2 \cdot \omega^2 + i \cdot 2 \cdot \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty} \cdot b \cdot \omega \cdot C(k) \right] + \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[2 \cdot \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b \cdot C(k) + i \cdot \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty} \cdot \omega \cdot b^2 (1 + C(k)) \right]$$

Ara, forçant que quedi en la forma $L = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \bar{A} \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$:

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 b \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[-2 \Pi \cdot \frac{\omega^2 \cdot b^2}{U_{\infty}^2} + i \cdot 4 \Pi \cdot \frac{\omega \cdot b}{U_{\infty}} \quad 4 \Pi \cdot C(k) + i \cdot 2 \Pi \cdot \frac{\omega \cdot b}{U_{\infty}} \cdot (1 + C(k)) \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Substituint $k = \frac{\omega \cdot b}{U_{\infty}}$:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[-2 \cdot \Pi \cdot k^2 + i \cdot 4 \cdot \Pi \cdot k \quad 4 \cdot \Pi \cdot C(k) + i \cdot 2 \cdot \Pi \cdot k \cdot (1 + C(k)) \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

Pel que fa al moment substituint la solució $h(t) = \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ $\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$:

$$M_{\alpha} = \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot b^2 \cdot \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cdot i \cdot U_{\infty} \cdot b \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot \omega^2 \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right] + U_{\infty} \cdot C(k) \cdot \left[i \cdot \omega \cdot b \cdot \bar{h} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + U_{\infty} \cdot \bar{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot b \cdot \omega \cdot \bar{\alpha} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \right] \right\}$$

Agrupant per h i alfa:

$$M_{\alpha} = \Pi \cdot \rho_{\infty} \cdot b^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left\{ \bar{h} \cdot \left[i \cdot \omega \cdot b \cdot U_{\infty} \cdot C(k) \right] + \bar{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot b^2 \cdot \omega^2 + U_{\infty}^2 \cdot C(k) + \frac{1}{2} \cdot i \cdot U_{\infty} \cdot b \cdot \omega \cdot (C(k) - 1) \right] \right\}$$

Forçant que quedi en la forma $M_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \bar{A} \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ i substituint $k = \frac{\omega \cdot b}{U_{\infty}}$:

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b^2 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[i \cdot \Pi \cdot k \cdot C(k) \quad \frac{\Pi}{4} \cdot k^2 + \Pi \cdot C(k) + i \cdot \Pi \cdot k \cdot (C(k) - 1) \right] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

I així obtenim els coeficients aerodinàmics:

$$C_{Lh} = -2 \cdot \Pi \cdot k^2 + i \cdot 4 \cdot \Pi \cdot k$$

$$C_{L\alpha} = 4 \cdot \Pi \cdot C(k) + i \cdot 2 \cdot \Pi \cdot k \cdot (1 + C(k))$$

$$C_{Mh} = i \cdot \Pi \cdot k \cdot C(k)$$

$$C_{M\alpha} = \frac{\Pi}{4} \cdot k^2 + \Pi \cdot C(k) + i \cdot \Pi \cdot k \cdot (C(k) - 1)$$

8) Escriure les forces aerodinàmiques com a $\hat{F} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q(k) \cdot \bar{X} \cdot e^{i\omega t}$ on $Q(k) =$

$$\begin{bmatrix} -C_{Lh} & -C_{L\alpha} \\ C_{Mh} & C_{M\alpha} \end{bmatrix}.$$

En primer lloc cal adimensionalitzar la sustentació:

$$\hat{L} = \frac{1}{m \cdot \omega^2 \cdot b} \cdot L = \frac{\rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b}{2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot b} \cdot [-C_{Lh} \quad -C_{L\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Manipulant el coeficient:

$$\frac{\rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b}{2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot b} = \frac{\rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b}{2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot b} \cdot \frac{\Pi}{\Pi} \cdot \frac{b}{b} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2}$$

Per tant:

$$\hat{L} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot [-C_{Lh} \quad -C_{L\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Fent el mateix amb el moment aerodinàmic:

$$\frac{\hat{M}}{e^{i \cdot \omega \cdot t}} = \frac{1}{m \cdot \omega^2 \cdot b^2} \cdot M = \frac{\rho_{\infty} \cdot U_{\infty}^2 \cdot b^2}{2 \cdot m \cdot \omega^2 \cdot b^2} \cdot [-C_{Lh} \quad -C_{L\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot [-C_{Mh} \quad -C_{M\alpha}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Per tant:

$$\begin{bmatrix} \hat{L} \\ \hat{M} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot \begin{bmatrix} -C_{Lh} & -C_{L\alpha} \\ C_{Mh} & C_{M\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

9) Reescriure el problema com $(K^{-1} \cdot A(k) - \tau \cdot I)$ amb $\tau = \frac{\omega_h^2}{\omega^2}$.

Anomenant:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 \\ -\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega_h}\right)^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -C_{Lh} & -C_{L\alpha} \\ C_{Mh} & C_{M\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\tau = \frac{\omega_h^2}{\omega^2}$$

I el problema queda:

$$(-M + \tau \cdot K) \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix}$$

Passant tots els termes a l'esquerra:

$$\left(M - \tau \cdot K + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right) \cdot \begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

Com que no volem la resposta trivial $\left(\begin{bmatrix} \hat{h} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, hem de forçar que determinant del terme $\left(M - \tau \cdot K + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right)$ sigui zero. Ens interessarà aïllar τ per trobar els valors propis del problema:

$$\left| K^{-1} \left(M + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right) - \tau \cdot I \right| = 0$$

10) Escriure les equacions que resolen el problema com $F(k, \tau) = 0$.

Del determinant obtindrem el polinomi característic amb una part real i una imaginària. Les equacions per resoldre el sistema sortiran de igualar a zero tant la part imaginària com la real del polinomi, per tant:

$$\begin{aligned} \text{real} \left(\left| K^{-1} \left(M + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right) - \tau \cdot I \right| \right) &= 0 \\ \text{img} \left(\left| K^{-1} \left(M + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right) - \tau \cdot I \right| \right) &= 0 \end{aligned}$$

11) Implementació al Matlab de diferents mètodes iteratius per solucionar el problema.

Els mètodes implementats són el mètode de Newton Raphson, mètode del residu-gradient, el mètode secant i un mètode que utilitza informació pròpia del problema i es basa en el càlcul dels valors propis de la matriu A.

$$A = K^{-1} \left(M + \frac{1}{2 \cdot \Pi \cdot \mu \cdot k^2} \cdot Q \right)$$

Agafant com a dades inicials:

$$K1 = K2 = 1 \text{ Nm/m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

$$\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 22$$

Els valors de k i τ on convergeix el problema són:

$$k = 0.3555$$

$$\tau = 0.5571$$

De manera que la velocitat de flameig i la freqüència a la que ho faria per les condicions físiques de les dades són:

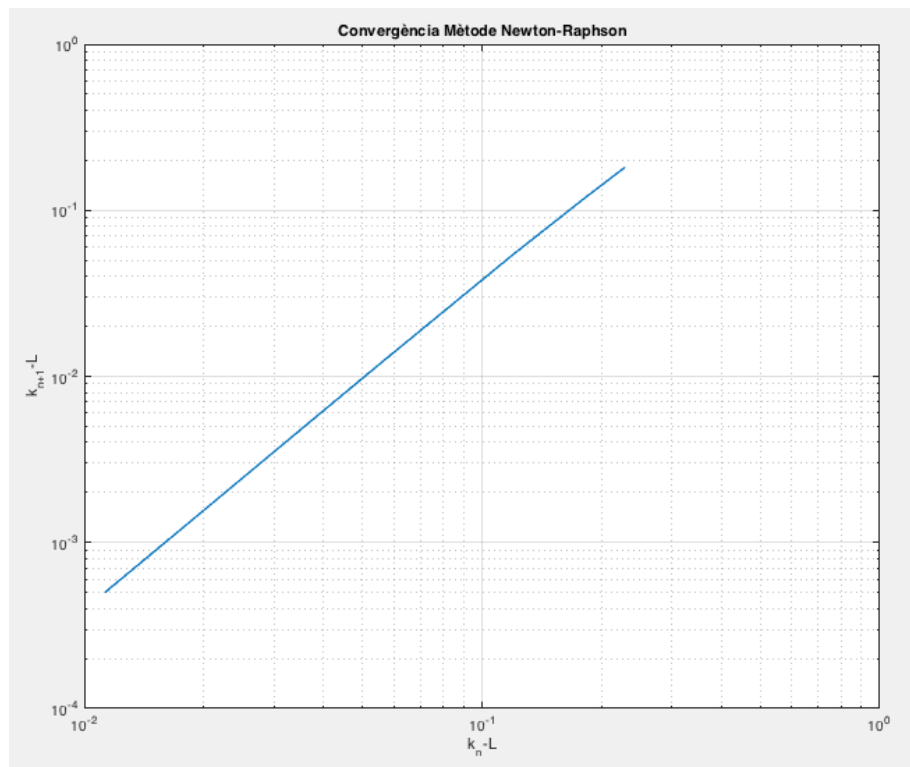
$$U_{\infty} = 0.5794 \text{ m/s}$$

$$\omega = 0.2059 \text{ Hz}$$

El temps de càlcul com que pot variar d'ordinador a ordinador es valora com la relació entre el mètode més lent i el que s'avalua.

1. Mètode de Newton-Raphson

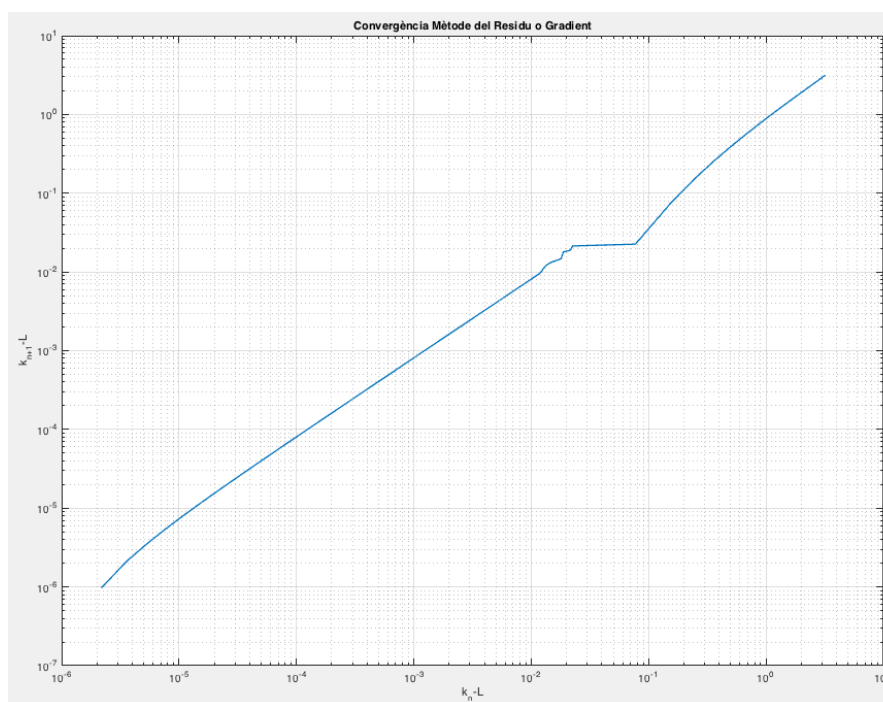
El mètode de Newton Raphson té un ordre de convergència de **1.963** (pràcticament quadràtic, ordre convergència ≈ 2) i un ratio de convergència de **16.69** de manera que el gràfic loglog del mètode queda:



El temps de computació és **8.46 vegades més lent** que el mètode del residu.

2. Mètode del residu-gradient

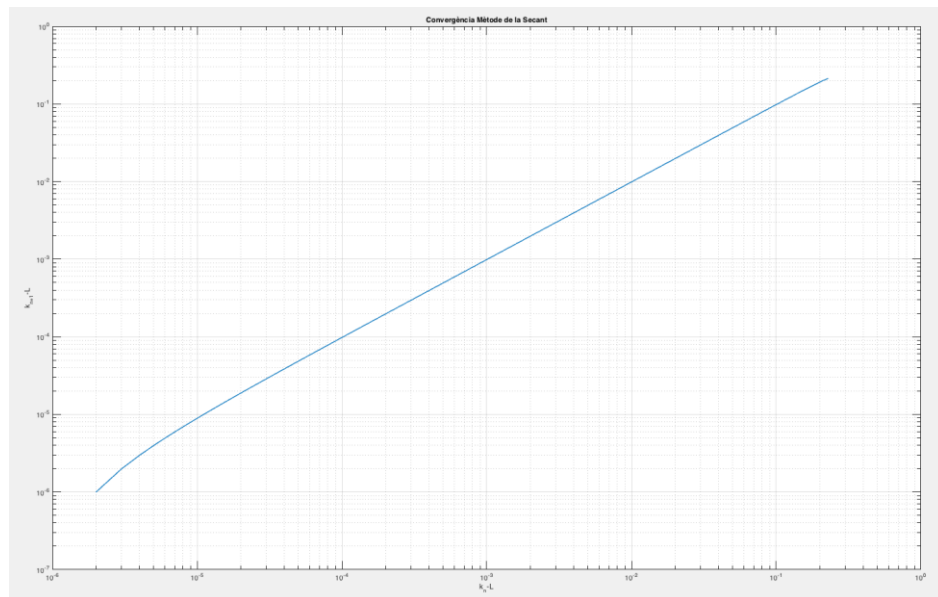
El mètode del residu o mètode del gradient té un ordre de convergència de **1.0148** (es pot considerar lineal) i un ratio de convergència de **0.757394** de manera que el gràfic loglog del mètode queda:



El temps de computació és el més ràpid dels mètodes avaluats. **0.0384 segons** en aquest cas.

2. Mètode secant

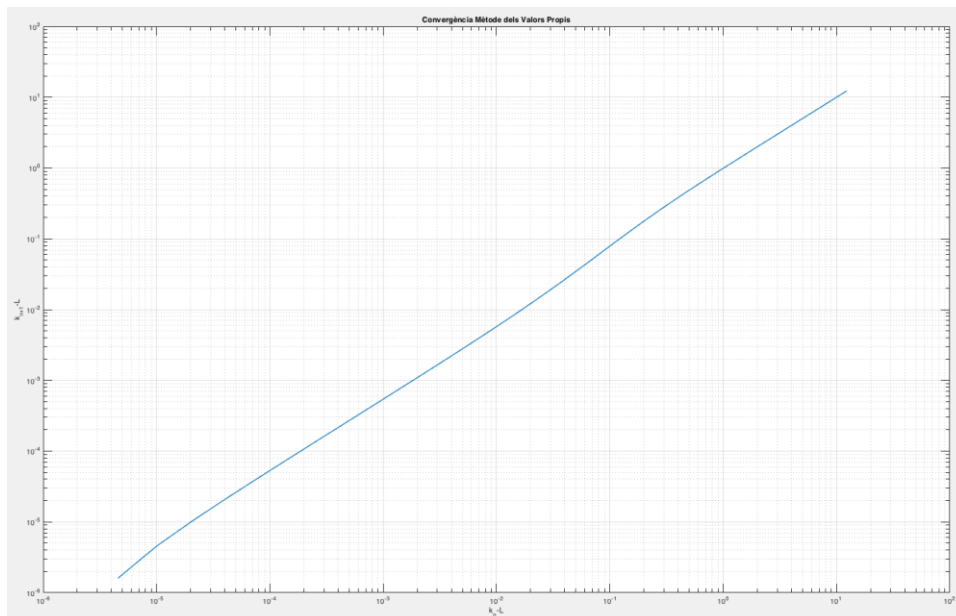
El mètode secant té un ordre de convergència de **1.0089** (es pot considerar lineal) i un ratio de convergència de **1.093825** de manera que el gràfic loglog del mètode queda:



El temps de computació és **6.65 vegades més lent** que el mètode del residu.

4. Mètode propi del problema utilitzant els valors propis de la matriu A

El mètode secant té un ordre de convergència de **1.0089** (es pot considerar lineal) i un ratio de convergència de **1.093825** de manera que el gràfic loglog del mètode queda:



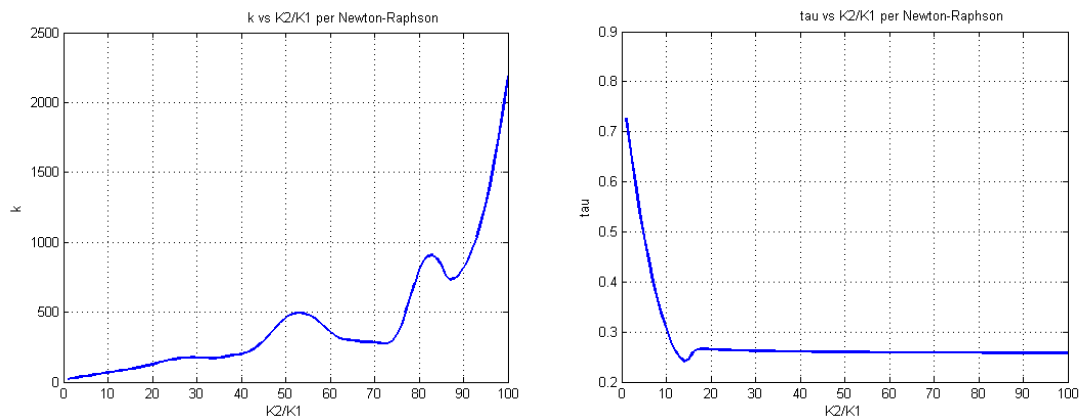
El temps de computació és **41.08 vegades més lent** que el mètode del residu.

12) Ampliacions

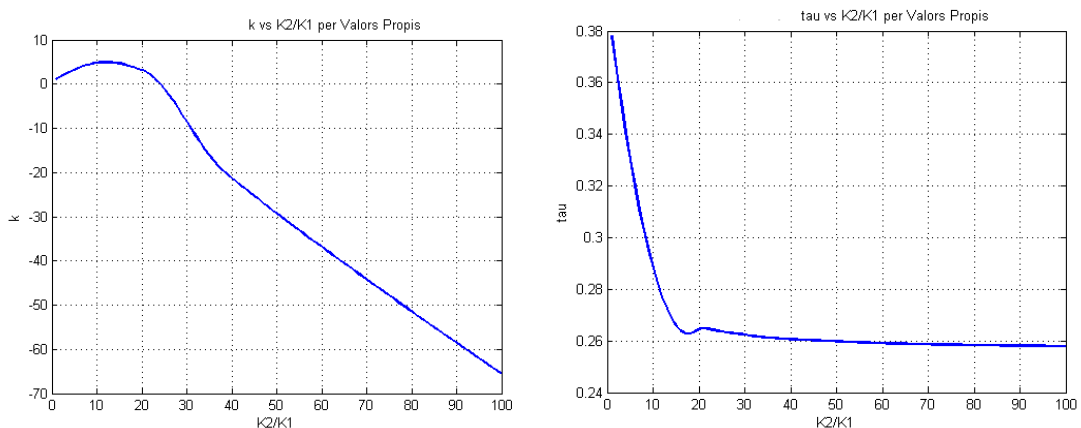
1a Ampliació: Com afecta la relació $K2/K1$ a la solució del problema si és que és solucionable.

En aquesta ampliació s'ha vist que els mètodes de Newton-Raphson (NR) i dels Valors Propis (VP) donen gràfics que es poden interpretar d'una manera lògica.

Primer de tot, veiem que amb NR, a mesura que la relació $K2/K1$ augmenta, la k comença a tendir infinit a partir de $K2/K1=75$ aproximadament. En canvi la τ divergeix cap a infinit per valors de $K2/K1$ més petits que 15 aproximadament, per valors de $K2/K1$ més grans la τ es manté quasi constant.



Pel què fa el mètode de VP, les gràfiques obtingudes són les que es mostren més avall. En el primer gràfic podem veure com la k disminueix d'una manera aproximadament lineal a mesura que el paràmetre $K2/K1$ augmenta, a partir de $K2/K1=22$ aproximadament, el contrari que en el cas de NR que k divergeix cap a l'infinit per la part positiva del gràfic. Pel què fa la τ , aquesta es comporta igual que en el cas de NR.



Pel què fa els altres mètodes, el mètode del residu no convergeix en cap cas excepte el de $K1=K2$ que és l'analitzat a l'apartat 11 i el mètode secant només convergeix per relacions 1 i 2 cosa que indica que aquests dos mètodes són poc robustos.

Comentaris:

Que el paràmetre $K2/K1$ augmenti significa que la rigidesa de la molla 2 del nostre sistema és major que la primera molla. Així doncs:

Pel cas de NR, veiem que a mesura que $K2/K1$ augmenta, la k també ho fa, això significa que la freqüència natural del sistema augmenta o que la velocitat crítica de flameig disminueix, coses molt negatives ja que no volem que la V crítica sigui gaire petita ni que la freqüència natural del sistema sigui gaire gran, ja que en cas de flameig, el sistema arribaria al col·lapse molt ràpid. La τ en canvi es manté constant excepte per valors petits de $K2/K1$, que tendeix a infinit, això significa que per $K2/k1$ petites, la freqüència natural del sistema disminueix, això és positiu ja que en cas de flameig, el sistema oscil·laria a poc a poc i llavors seriem a temps a treure el nostre sistema de la inestabilitat.

Pel què fa el mètode de VP, veiem que la k tendeix a $-\infty$ a mesura que $K2/K1$ augmenta, això no té sentit ja que tal i com està definida la k , els paràmetres que la componen cap d'ells pot ser negatiu. Llavors donem per bons els resultats obtinguts en el cas de NR. Per la τ obtinguda per VP, es pot comentar el mateix que en el cas de NR ja que els gràfics són iguals.

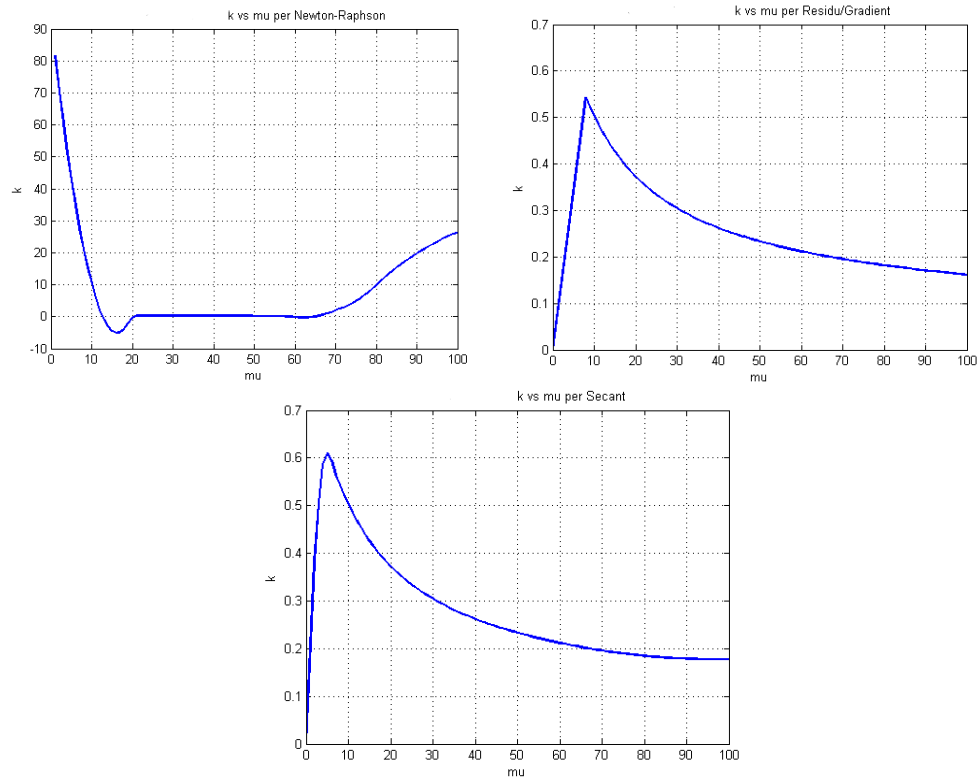
La diferència entre les gràfiques de NR i VP és deguda clarament a la diferència de robustesa de cada mètode, on el NR és molt més robust que el mètode de VP. El fet de que el mètode de secant i el del residu no hagin convergit quasi en cap cas per aquesta ampliació, és un indicatiu de la poca robustesa que tenen aquests dos mètodes.

2a Ampliació: Com afecta la μ a la solució del problema.

Si observem les gràfiques resultants de més avall, podem veure que són bastant diferents. En tots els casos es pot veure com k tendeix a infinit quan μ tendeix a 0. És sorprenent la irregularitat de k en funció de com varia μ en el mètode de Newton Raphson, on veiem que a partir de $\mu=20$, k tendeix a infinit com ja s'ha dit, i per valors més grans, k es manté constant prop de 0 (com el resultat obtingut en aquest problema) i a partir de $\mu=70$ la k comença augmentar.

En relació al mètode secant i del residu en què els resultats són idèntics (com és d'esperar), cal dir que aquests no convergeixen per a μ petites, per valors entre 1 i 7 en el cas del residu i per a $\mu=1$ en el cas del secant. Però veient la tendència dels valors posteriors es pot intuir que la gràfica segueix augmentant i, per tant, tendint a infinit com s'ha comentat en el principi.

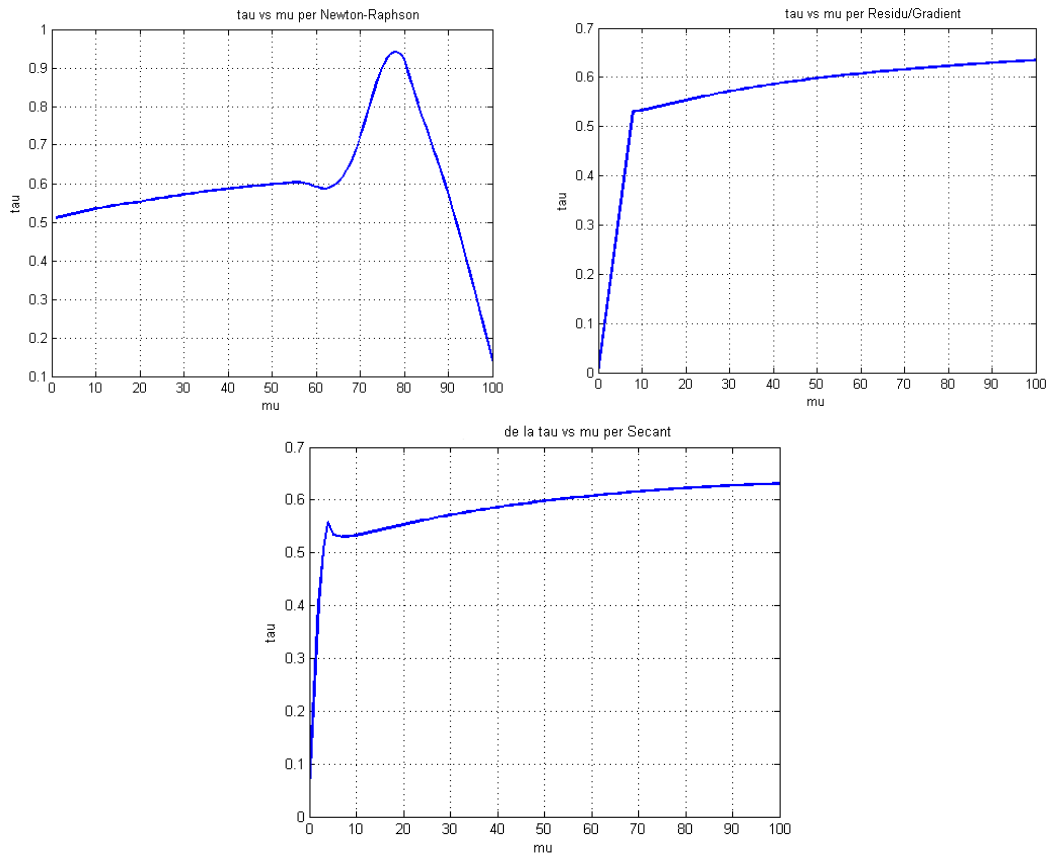
Pel cas del mètode de VP, la gràfica obtinguda no seguia cap tipus de patró ni tenia cap sentit i s'ha decidit eliminar-la d'aquest document.



Pel què fa la tau, si observem les gràfiques resultants de més avall, podem veure que són diferents. En tots els casos es pot veure com k augmenta quan μ augmenta també. Pel mètode de Newton Raphson veiem que a partir de $\mu=65$ la tau augmenta ràpidament i després disminueix ràpidament també fins a ser quasi 0 a partir de $\mu=75$ aproximadament.

En relació al mètode secant i del residu en què els resultats són quasi idèntics, cal dir que aquests no convergeixen per a μ petites igual que passava amb la k , per valors entre 1 i 7 en el cas del residu i per a $\mu=1$ en el cas del secant. Però veient la tendència dels valors posteriors es pot intuir que la gràfica segueix una tendència aproximadament lineal sense gaire variacions.

Pel cas del mètode de VP, la gràfica obtinguda tampoc seguia cap tipus de patró ni tenia cap sentit i s'ha decidit eliminar-la d'aquest document.



Comentaris:

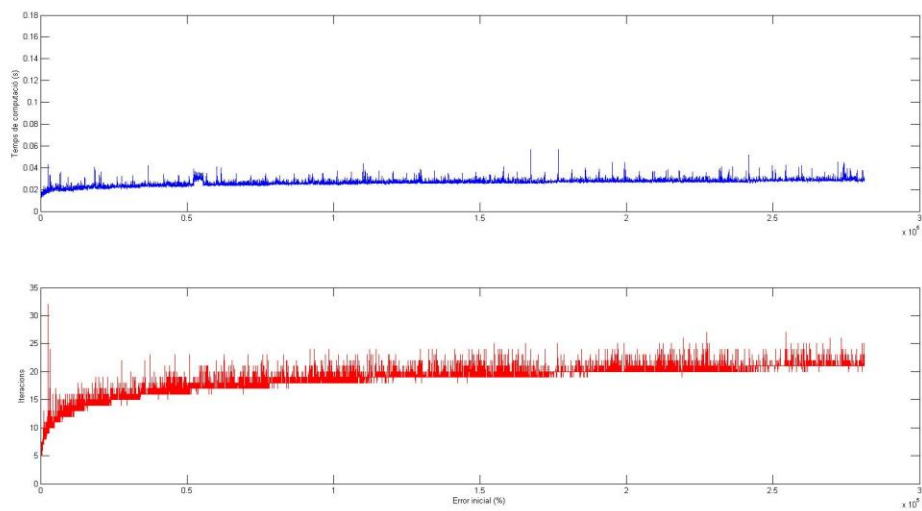
Pels mètodes estudiats per la k , veiem que quan μ es fa petita, la k tendeix a infinit. Això s'interpreta com que quan la massa del sistema disminueix (de la placa), el nostre sistema es més propenç a entrar en flameig, ja que si la k augmenta, significa que la freqüència natural augmenta també o que la velocitat crítica de flameig disminueix, que és una conseqüència negativa ja que ens interessa que aquesta velocitat crítica estigui el més lluny possible del rang de velocitats del nostre problema.

Pel què fa la τ , veiem que la τ disminueix per μ petites, això concorda amb el què hem dit en l'anterior paràgraf, ja que la τ disminueixi implica un augment de la freqüència natural del sistema. Pel què fa per μ grans, els gràfics anteriors mostren discrepància, però degut a l'anàlisi dels mètodes que hem fet posteriorment, creiem que el resultat de NR és el que més s'acosta a la solució correcta degut a la seva gran robustesa. Així doncs segons el resultat obtingut per NR veiem que es produeix un τ màxim aproximadament a $\mu = 76$ (valor de μ molt semblant a la que tenen els avions de transport), així doncs en aquest punt tindriem la freqüència natural mínima del nostre sistema.

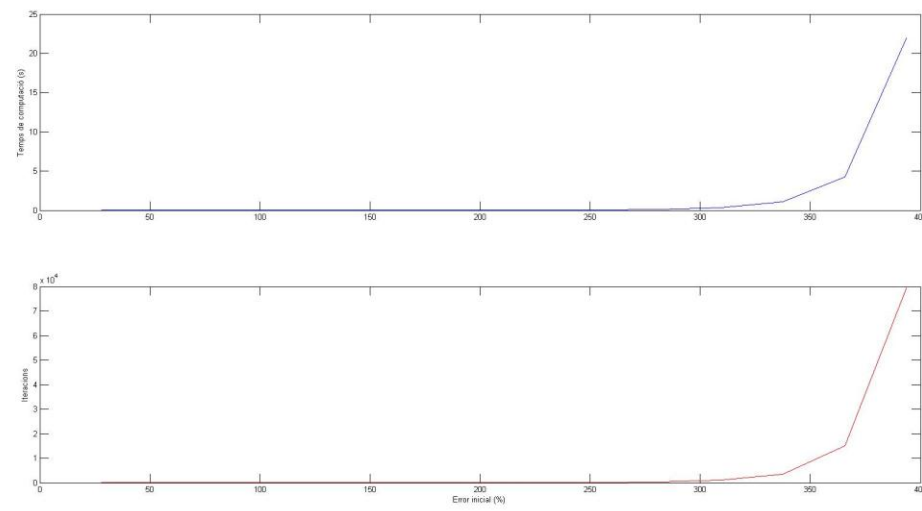
3a Ampliació: Com afecta l'error inicial al temps de computació segons el mètode.

Una vegada sabem en quins valors convergeixen k i τ , es mira de avaluar com afecta el punt d'inici del càlcul al temps de convergència (en cas que convergeixi sempre per a tots quatre mètodes).

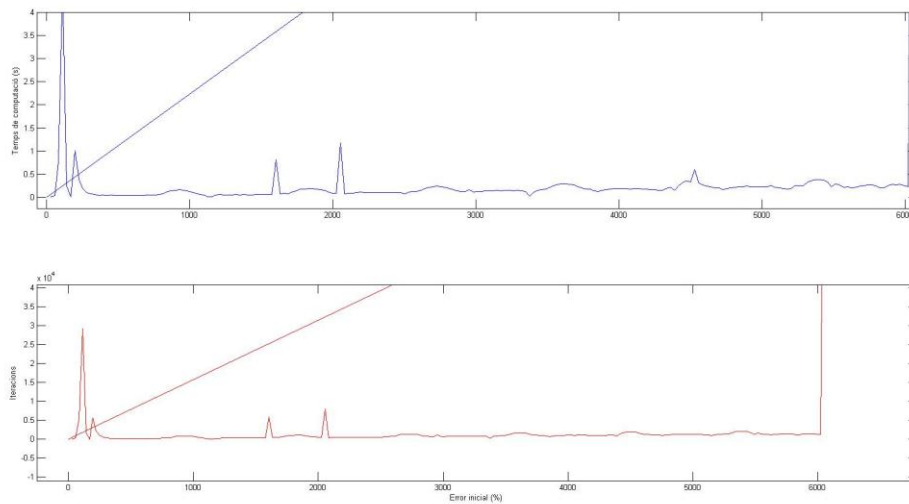
- Newton-Raphson



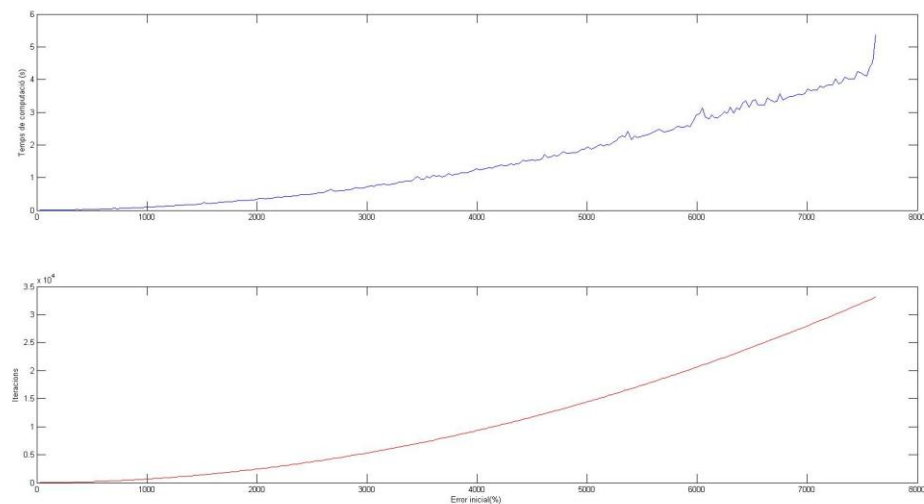
- Residu



- Secant



- Valors Propis



La intenció d'aquest estudi era idear un mètode combinat per a solucionar el problema amb un temps de computació menor. La idea era utilitzar un mètode molt robust per a fer les primeres iteracions, per si l'estimació inicial estava molt lluny del resultat final, per anar canviant de mètode a mida que l'error disminuís aconseguint la convergència el més ràpid possible. Tot i això, els resultats han parlat per si mateixos i s'ha vist que, tot i que si que es podria aconseguir, la millora seria molt marginal.

Com es pot observar en la primera gràfica, el mètode de Newton-Raphson ha resultat ser molt ràpid sigui quin sigui el valor inicial de la iteració, mantenint-se pràcticament constant. S'esperava que aquest mètode comencés a flaquejar a mida que ens allunyàvem del valor de convergència, però per aquest problema ha resultat ésser molt robust.

El mètode del residu ha demostrat un temps de computació molt baix (el més baix) quan s'estava pròxim al valor de convergència, però el temps ha augmentat ràpidament a mida que el valor inicial se n'allunyava convertint-lo en poc útil enfront del mètode de Newton-Raphson.

El mètode de la secant s'ha mostrat molt inestable, divergint si s'iniciava d'iteració amb un valor molt lleugerament superior al de convergència i divergint sobtadament arribat a una certa distància del valor de convergència en el sentit negatiu.

El mètode de valors propis ha tingut un comportament semblant al del residu, augmentant el temps a mida que augmenta la distància de l'inici d'iteració respecte el valor de convergència, tot i que aquest augment ha estat molt més suau. Tot i això, el temps de computació ha estat alt i no competitiu respecte al mètode de Newton-Raphson.

Finalment, i lligant-ho amb la idea del mètode combinat, tot i que si que es podria crear un algoritme que combinés primer Newton-Raphson i a posteriori utilitzar el mètode del residu per les últimes iteracions, la millora en el temps de computació seria molt baixa i en aquest problema es pot afirmar que el mètode de Newton-Raphson és el que ens dona més robustesa i un temps de computació difícilment millorable.

13) Opinió

M'està agradant molt l'assignatura fins ara. Després de 4A de grau, que va ser fa ja dos anys, que feia assignatures "petites" que estaven be, però no requerien d'un gran esforç. Aquesta assignatura està recuperant totes aquelles altres troncsals que ja tenia oblidades i unint-les en una. També, el fet que les estigui recuperant ara que tinc un bagatge molt més gran que quan les vaig fer, fa que n'estigui aprenent més, crec jo.

Pel que fa al treball en concret, ha estat interessant tant des del punt de vista de resoldre el problema com per entrar en mètodes iteratius de resolució. Molts dels mètodes que hem tocat no els coneixia, o be eren una caixa negra que utilitzava en el matlab i, definitivament, mai m'havia plantejat la relació entre ells. Ha estat interessant com a experiència veure com es comportaven dins del marc del problema i estudiar-ne les seves capacitats.

Em sap greu no haver-li pogut dedicar més temps al treball (és indubtable que el nostre grup sempre ha anat per darrere) perquè m'hagués permès aprofundir molt més en tots els temes tractats a l'apartat 12 que per manca de temps només hem estudiat superficialment. Crec que el problema del nostre grup ha estat un cúmul de situacions que s'han donat a la vegada. En primer lloc, la setmana anterior a l'entrega jo tenia l'examen del TOEFL, amb el qual no hi vaig poder dedicar gaire temps. Per altra banda en Marc té moltes coses fora de la universitat (principalment futbol) el qual el converteix en una persona molt passiva (tant en aquest treball com en d'altres): farà la seva feina però bastant a última hora si algú no l'estira. Finalment l'Eloi crec que és una persona molt complidora però que no se sent còmode en la posició de

lideratge, el qual ha fet que la setmana anterior, en la qual jo no podia estar gaire actiu, no aconseguís arrossegar en Marc i al final no van fer tanta feina com per anar després tranquils. El resultat va ser que fins al cap de setmana no vam poder estar tots tres al 100% centrats en el treball, moment en el qual les coses van anar realment be i vam ser molt eficients en el nostre temps i en la forma de repartir-nos tasques i comunicar-nos, però ja era tard com per poder tractar les tasques del apartat 12 amb la profunditat que m'hagués agradat.

Com a punt final, m'agradaria aconseguir amb aquesta assignatura obtenir aquesta visió global que tens dels problemes relacionats amb la enginyeria. Estic acabant la carrera i tinc la sensació de no saber res, per a qualsevol aspecte necessito el recolzament dels apunts que he fet al llarg de la carrera per poder defensar-me. El que hem fet fins ara ja ha suposat haver de repassar molts aspectes que tenia ja oblidats amb lo que ja ha sigut valuós de per si. També espero poder conèixer una mica millor els mètodes numèrics, dels quals realment me adonat que en sé ben poc.