

Codi numèric per a la resolució de problemes estructurals aproximant el problema per barres

Carles Molins Duran

25/01/2015

Index

Introducció	4
Cas estàtic	4
Cas dinàmic: modes de vibració	6
Cas dinàmic: Problema amb condicions inicials	12
Desenvolupament d'una geometria pròpia	14
Integradors	16
Error i temps de computació dels diferents mètodes en funció de h	22
Forces aerodinàmiques en funció de la deformació	33
Matriu Tx	34
Matriu de Tf	35
Matriu de pes	36
Resolució del problema	37
Resultats de la simulació	37
Col·lapse	40
Visualització	41

Taula de figures

Figura 1: Geometria i numeració dels nodes de l'ala	4
Figura 2: Distribució dels valors no nuls de la matriu K_{NN}	5
Figura 3: Desplaçaments pel cas estatic	6
Figura 4: Variació de la freqüència natural 1 segons el paràmetre α	7
Figura 5: Temps de càlcul segons paràmetre α	7
Figura 6: Distribució de valors de la matriu MNN	8
Figura 7 Mode 3: tracció-compensió (32539 rad/s)	10
Figura 8 Mode 8: Flexió lateral (680.3 rad/s)	11
Figura 9 Mode 9: Flexió en z (680.3 rad/s)	11
Figura 10 Mode 10: Torsió (903.2 rad/s)	12
Figura 11: Energia mecànica de cada mode de vibració.	13
Figura 12: Energia en funció de la freqüència	14
Figura 13: Model de la costella.	14
Figura 14: Exemple de geometria generada.	15
Figura 15: Distribució d'elements a la matriu de rigidesa de l'ala de geometria pròpia.	15
Figura 16: Energia de cada mode per a l'ala de geometria pròpia.	16
Figura 17 Energies totals respecte el temps de cada mètode	17
Figura 18 Error 1 (energies) respecte el temps de cada mètode	17
Figura 19 Error 2 (analític/integrador) de cada mètode respecte el temps	18
Figura 20 Temps de computació de cada mètode	18
Figura 21 Energia vs temps de Forward-Euler	19
Figura 22 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Forward-Euler	19

Figura 23 Energia vs temps de Backward-Euler	20
Figura 24 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Backward-Euler.....	20
Figura 25 Energia vs temps de RK4	21
Figura 26 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per RK4.....	21
Figura 27 Energia vs temps de Ode45 Matlab	21
Figura 28 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Ode45 Matlab.....	22
Figura 29: Error del mètode forward euler per un escombrat en h de 5e-05 segons a 5e-06 segons.....	23
Figura 30: error del mètode backward euler per un escombrat en h de 5e-05 segons a 5e-06 segons.....	23
Figura 31: error del mètode RK4 per un escombrat en h de 5e-05 segons a 5e-06 segons.	24
Figura 32: error del mètode ODE 45 per un escombrat en h de 5e-05 segons a 5e-06 segons. 25	
Figura 33: error dels diferents mètodes per un escombrat en h de 5e-05 segons a 5e-06 segons.....	26
Figura 34: Temps de computació de cada mètode en funció d'h.	27
Figura 35: Temps de computació dels mètodes explícits per una h entre 5e-07 i 5e-08.	28
Figura 36: Temps de computació dels mètodes explícits per una h entre 5e-08 i 1 e-08	28
Figura 37: 5e-09 a 4.1667e-09.	29
Figura 38: Error del mètode Forward euler per una h entre 5e-07 i 5e-08	30
Figura 39: Error del mètode Forward euler per una h entre 5e-08 i 1 e-08	30
Figura 40: Error del mètode Forward euler per una h entre 1e-08 a 5e-09	31
Figura 41: Error del mètode Forward euler per una h entre 5e-09 a 4.1667e-09	31
Figura 42 Error del mètode RK4 per una h entre 5e-07 i 5e-08.....	32
Figura 43: Error del mètode RK4per una h entre 5e-08 i 1 e-08.....	32
Figura 44. Comparació de perfil simètric perfil amb curvatura	35
Figura 45: Deformació d'un punt de l'extrem de l'ala.	38
Figura 46: Energia d'un punt de l'extrem de l'ala.	38
Figura 47: Energia calculada per un interval de temps major.	39
Figura 48: Deformació calculada per un interval de temps major.....	39
Figura 49: energia per a E=6.5e11.....	40
Figura 50: deformació per a E=6.5e11	40
Figura 51: deformació per a E=6.5e9	41
Figura 52: energia per a E=6.5e9.....	41
Figura 53: Visualització de la deformació de l'ala.....	42

Introducció

En aquest treball es presenta els programes i resultats desenvolupats al llarg de la segona part de l'assignatura Vehicles Aeroespacials. El desenvolupament dels programes es mou al voltant de la resolució de problemes estructurals a partir de l'aproximació de l'estructura a barres, incrementant progressivament la dificultat del problema. En primer lloc es tracta el problema estàtic, desenvolupament d'una funció per a generar ales pròpies, a continuació l'anàlisi de modes, seguidament el problema dinàmic i finalment l'aplicació de integradors numèrics.

Cas estàtic

Els programes desenvolupats resolen estructures formades per barres (elements unidimensionals). L'input al programa és la geometria de l'estructura (coordenades dels punts i matriu de connectivitats), les propietats del material de les barres i les condicions de contorn (nodes fixes i forces externes). Coneguda la rigidesa de les barres, el codi de resolució desenvolupat calcula la matriu de rigidesa local en els eixos globals d'aquestes barres. A continuació assembla la matriu global de rigidesa de tota l'estructura i calcula a partir d'aquesta i les forces donades els desplaçaments dels nodes lliures.

Per a desenvolupar i provar el còdi, es va fer servir la geometria proporcionada a través d'atenea, una aproximació a una ala:

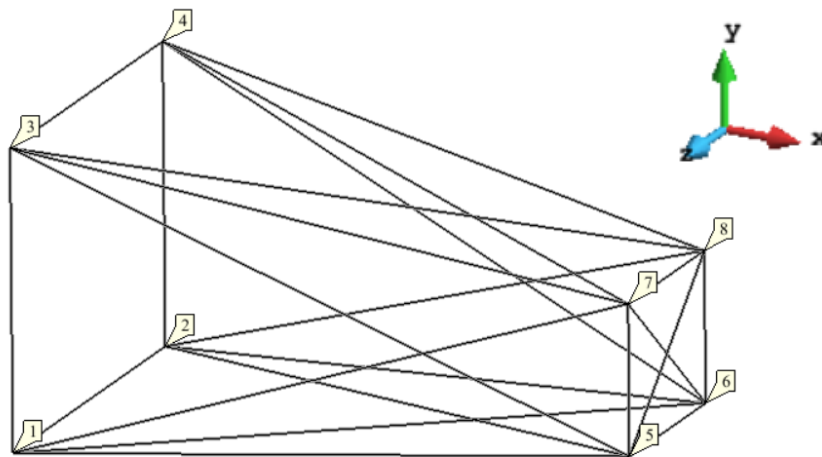


Figura 1: Geometria i numeració dels nodes de l'ala

El problema a resoldre té les següents condicions de contorn:

- Nodes fixats (Dirichlet): 1, 2, 3 i 4 (desplaçaments nuls)
- Nodes amb forces aplicades (Neumann):
 - Nodes 5 i 6: forces aplicades nul·les en totes direccions
 - Nodes 7 i 8: $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Aquest problema té 8 nodes i 3 graus de llibertat per node, per tant, 24 graus de llibertat en total. Al estar els 4 nodes de l'encastament fixats en totes tres direccions, 12 graus de llibertat estan fixats. Éssent el problema a resoldre del tipus:

$$\bar{F} = \bar{K} \cdot \bar{u}$$

Siguent \bar{u} el vector desplaçaments, \bar{F} el vector forces externes i \bar{K} la matriu de rigidesa. Si fixem els nodes:

$$\begin{bmatrix} F_D \\ F_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{DD} & K_{DN} \\ K_{ND} & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_d \\ u_n \end{bmatrix}$$

On F_D són les forces desconegudes, F_N les forces conegudes, u_d els desplaçaments coneguts i u_n els desplaçaments incògnita.

Per tant, la matriu de rigidesa K_G és de 24x24, però la que es necessita invertir pel càlcul és la K_{NN} que és de 12x12.

Analitzem ara la matriu K_G . Es pot dir que és semidefinida positiva, ja que tots els seus valors propis són nuls (7) o positius; és una matriu singular, no té inversa, i necessita condicions de contorn per resoldre el problema, i per últim, és una matriu simètrica.

La K_{NN} també és definida positiva i tots els seus valors són positius i diferents de zero, per tant, invertible i simètrica. Perquè sigui eficient, tots els valors no nuls d'aquesta matriu haurien d'estar situats el més a prop possible a la diagonal, a continuació es mostra una imatge de la repartició d'aquests valors. I com es pot veure, té més valors fora de la diagonal que els esperats.

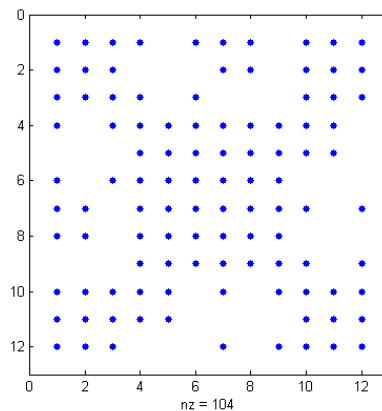


Figura 2: Distribució dels valors no nuls de la matriu K_{NN}

Utilitzant el programa desenvolupat, anomenat *P7_est* podem resoldre el problema, obtenint els següents desplaçaments de Neumann:

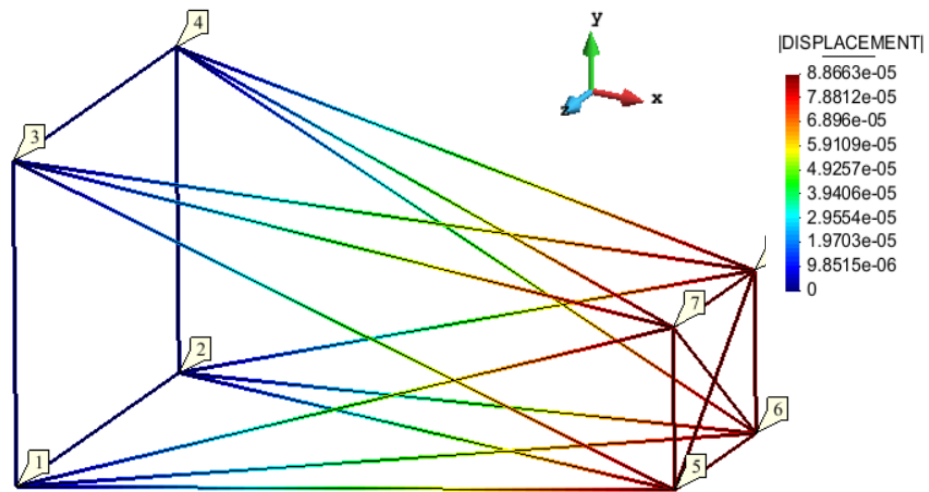


Figura 3: Desplaçaments pel cas estatic.

També obtenim les forces incògnita (les reaccions):

Node 1: $F_1 = [2,2159 \quad 0,5033 \quad -0,3662]$

Node 2: $F_2 = [2,2159 \quad 0,5033 \quad 0,3662]$

Node 3: $F_3 = [-2,2159 \quad 0,4967 \quad 0,3703]$

Node 4: $F_4 = [-2,2159 \quad 0,4967 \quad -0,3703]$

Els resultats es pot concloure que son coherents fent sumatori de forces i de moments, que haurien de ser iguals a zero, ja que estem en el cas estàtic.

Cas dinàmic: modes de vibració

El següent pas a realitzar era passar a un cas dinàmic, i per fer-ho calia en primer lloc implementar la matriu de masses. Aquesta s'implementa de forma semblant a la matriu de rigidesa, rotant la matriu local de les barres de eixos locals a globals i ensamblant la matriu de masses global. El pas següent és trobar les freqüències naturals, que definiran els moviments possibles de l'estructura i ens permetran trobar la solució un cop posem condicions inicials.

El problema queda de la forma:

$$\bar{\bar{M}} \cdot \ddot{\bar{x}} + \bar{\bar{K}} \cdot \bar{x} = \bar{F}$$

Si analitzem el sistema lliure (sense forces), podem trobar els valors i vectors propis del problema, corresponents a les freqüències naturals de vibració i als modes de vibració.

En primer lloc cal però definir la matriu de masses local en funció del paràmetre alfa. Tal i com es pot veure a la figura següent, per un mateix mode, la freqüència natural que s'obté per un $\alpha = 1$ i $\alpha = 0$ és molt diferent, per això, a partir d'ara es decideix fer els càlculs amb una matriu de masses completament *consistent* ($\alpha = 0$), ja que és la més precisa.

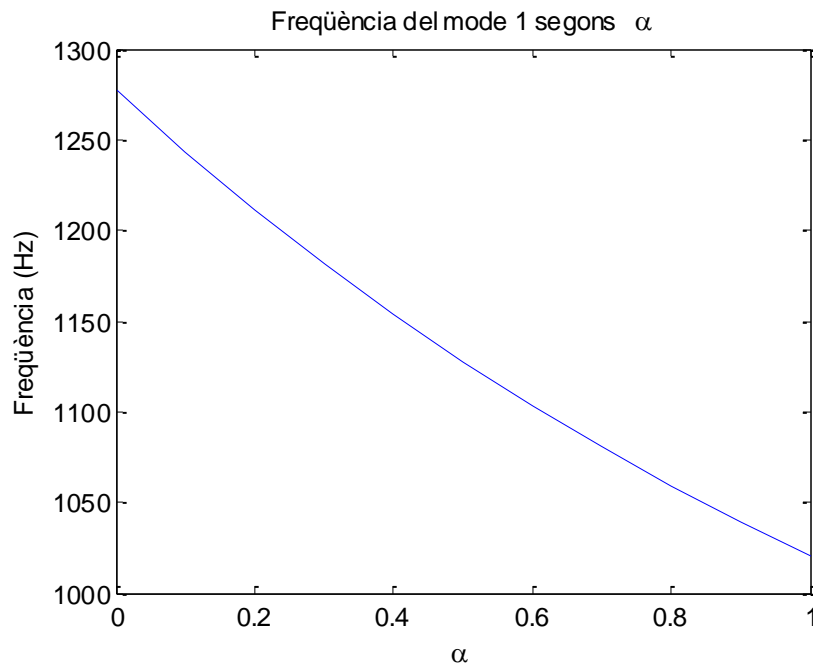


Figura 4: Variació de la freqüència natural 1 segons el paràmetre α

En la següent gràfica, es pot comprovar com per matriu *lumped* triga molt menys que per matriu *consistent* a fer els càlculs.

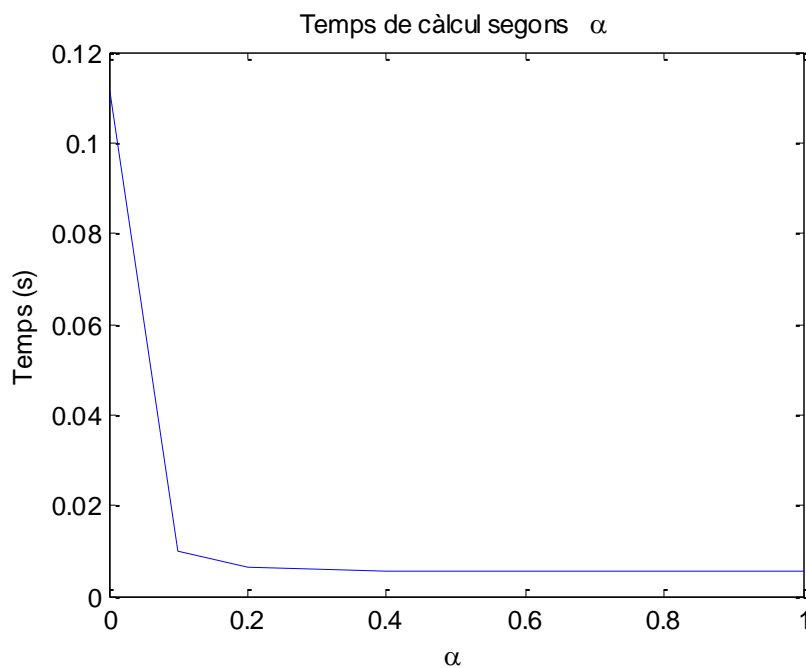


Figura 5: Temps de càlcul segons paràmetre α

Tant la M_G com la M_{NN} tenen tots els seus valors positius, ja que al ser una matriu de masses no pot tenir cap de negatiu. S'observa que ambdues matrius són definides positives, invertibles i simètriques. Tot i que òptimament la matriu hauria de ser pròxim a matriu banda, en aquest cas no ho és.

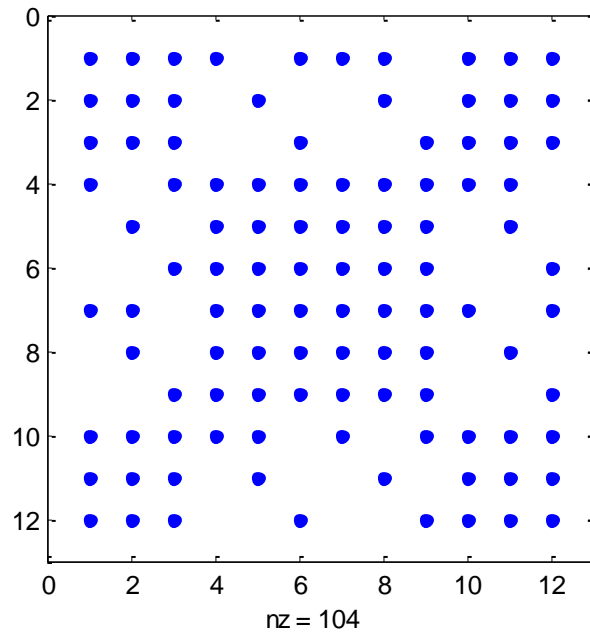


Figura 6: Distribució de valors de la matriu M_{NN}

A continuació es presenta els post-procés dels modes de vibració com :

$$x(t) = X_k \sin \omega_k t$$

Per la realització d'aquest post-procés, es va implementar l'arxiu de Matlab *P7_din*. Les freqüències obtingudes i els modes de vibració es mostren a la taula següent:

Taula 1 Freqüències naturals i modes de vibració

Freqüències ($\cdot 10^3$) rad/s	8.0290	5.1861	3.2539	3.4512	6.1971	6.0951	6.0951	0.6803	0.6803	0.9032	3.5021	3.5021
Graus de llibertat												
5x	0.0050	-0.0202	0.5000	-0.4996	0.0000	-0.0124	0.0031	0.0138	0.0077	0.0000	0.7066	-0.0541
5y	-0.3535	0.3533	0.0041	-0.0147	0.3536	0.3514	-0.4322	-0.1150	0.4387	0.3536	-0.0055	0.0178
5z	0.3535	-0.3533	-0.0041	0.0147	0.3536	-0.3514	-0.2564	-0.4845	0.2327	0.3536	0.0055	0.0170
6x	0.0050	0.0202	0.5000	0.4996	0.0000	-0.0000	-0.0120	-0.0227	0.0254	0.0000	-0.0000	-0.7046
6y	-0.3535	-0.3533	0.0041	0.0147	0.3536	-0.3556	0.4292	-0.1222	0.4421	-0.3536	-0.0175	0.0069
6z	-0.3535	-0.3533	0.0041	0.0147	-0.3536	0.3556	0.2512	-0.4862	0.2392	0.3536	0.0175	0.0042
7x	0.0050	0.0202	0.5000	0.4996	-0.0000	0.0000	0.0120	0.0227	-0.0254	0.0000	0.0000	0.7046
7y	0.3535	0.3533	-0.0041	-0.0147	-0.3536	-0.3556	0.4292	-0.1222	0.4421	0.3536	-0.0175	0.0069
7z	0.3535	0.3533	-0.0041	-0.0147	0.3536	0.3556	0.2512	-0.4862	0.2392	-0.3536	0.0175	0.0042
8x	0.0050	-0.0202	0.5000	-0.4996	-0.0000	0.0124	-0.0031	-0.0138	-0.0077	-0.0000	-0.7066	0.0541
8y	0.3535	-0.3533	-0.0041	0.0147	-0.3536	0.3514	-0.4322	-0.1150	0.4387	-0.3536	-0.0055	0.0178
8z	-0.3535	0.3533	0.0041	-0.0147	-0.3536	-0.3514	-0.2564	-0.4845	0.2327	-0.3536	0.0055	0.0170

A continuació es mostra el post-procés visualitzat en GiD:

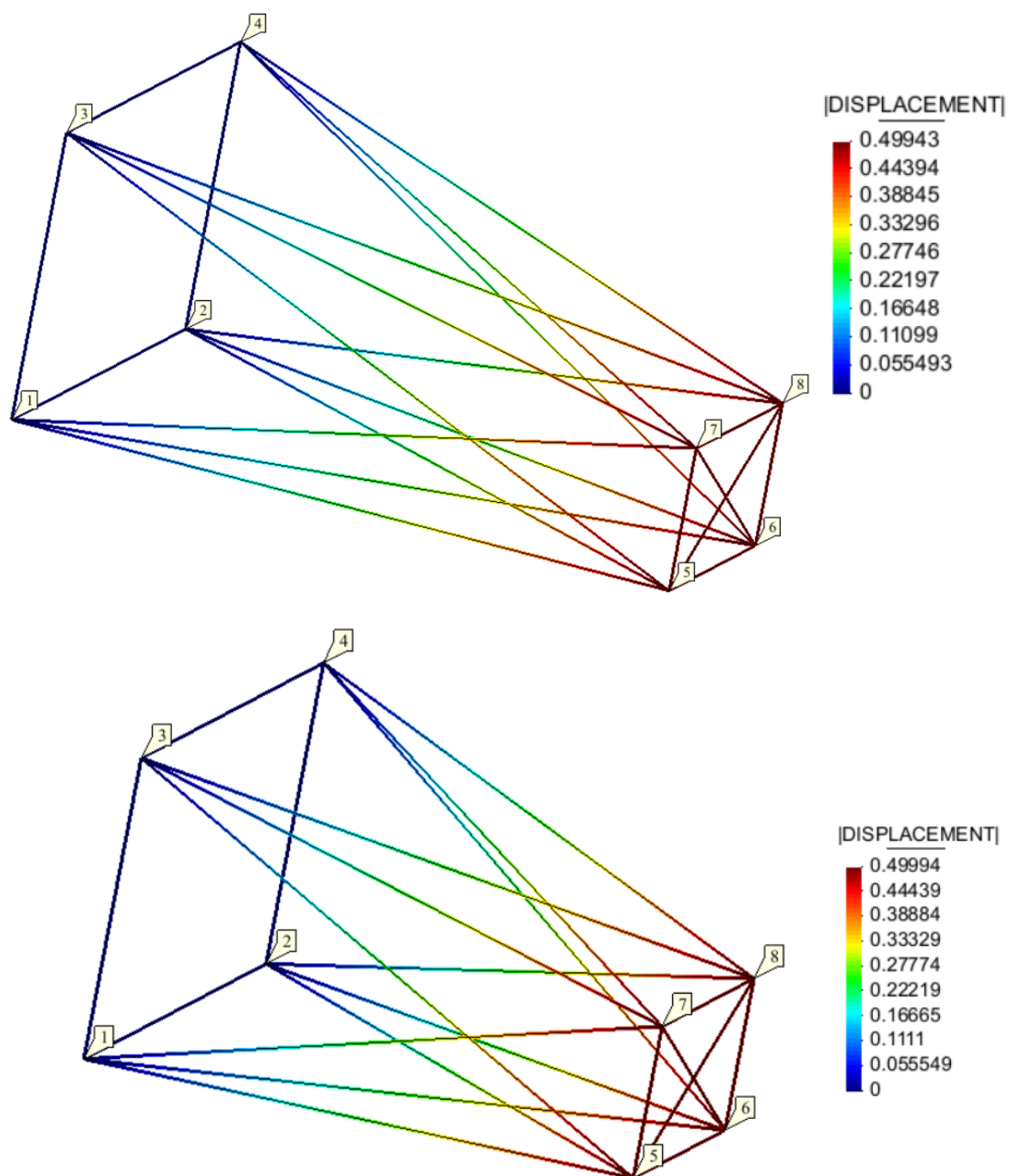


Figura 7 Mode 3: tracció-compensió (32539 rad/s)

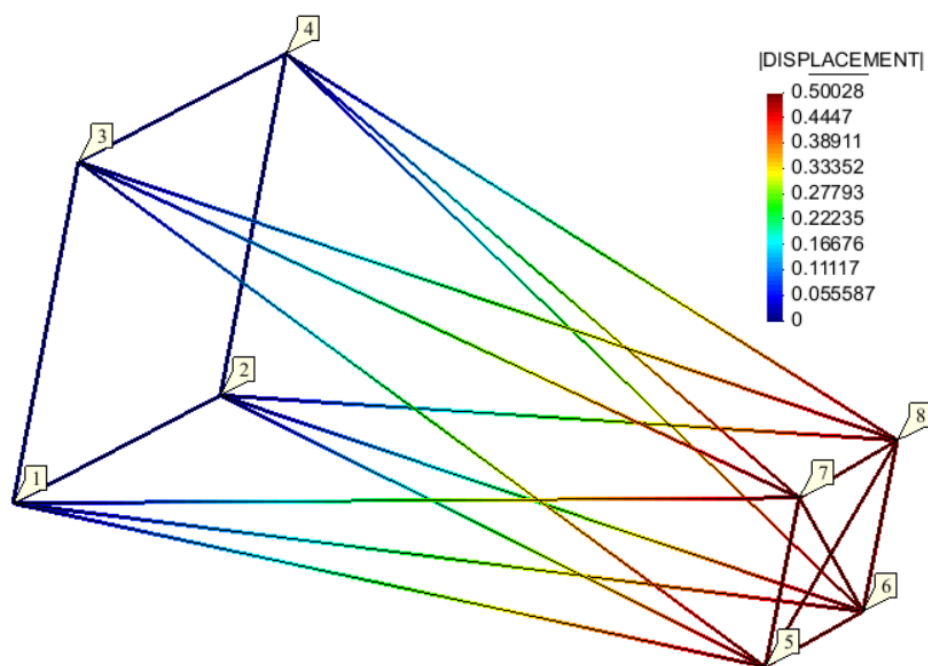


Figura 8 Mode 8: Flexió lateral (680.3 rad/s)

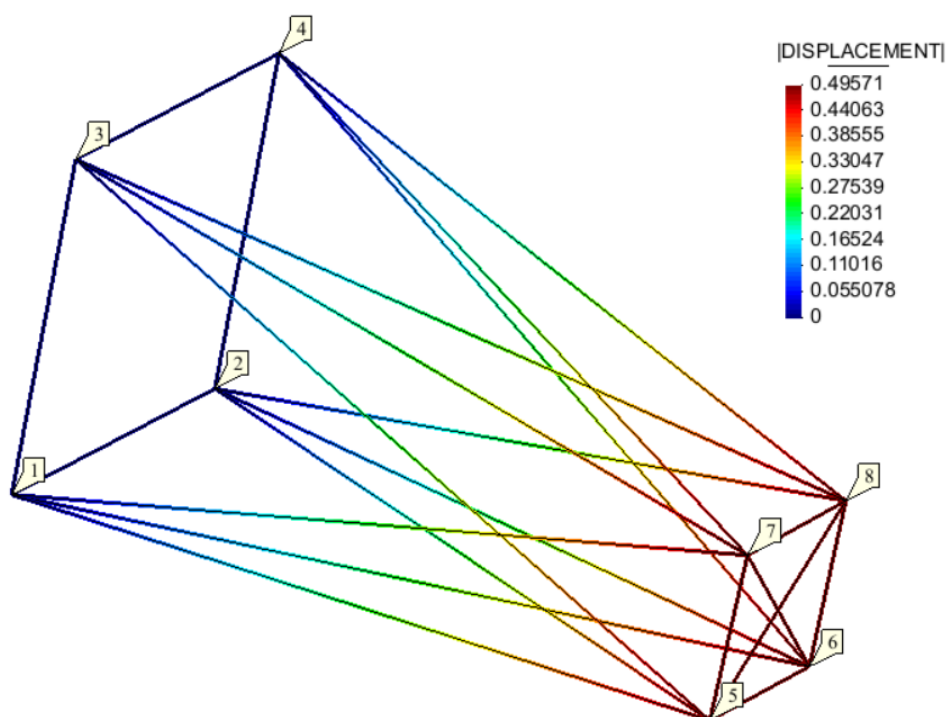


Figura 9 Mode 9: Flexió en z (680.3 rad/s)

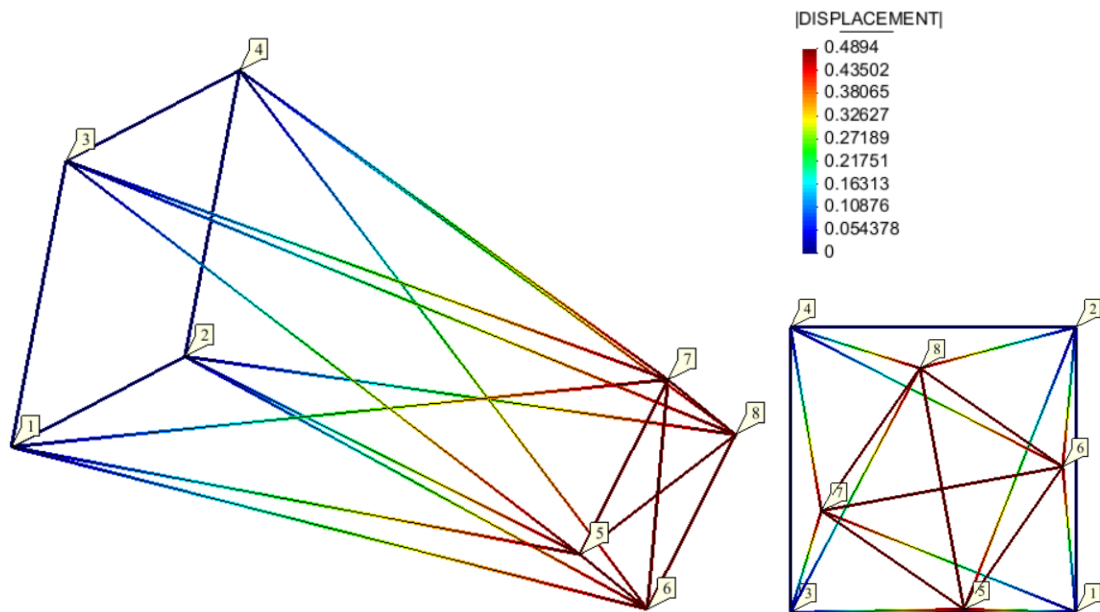


Figura 10 Mode 10: Torsió (903.2 rad/s)

Com es pot veure, les deformacions més característiques es donen pels modes de vibració de freqüència més baixa.

Cas dinàmic: Problema amb condicions inicials

Un cop s'ha trobat els modes de vibració de l'estructura es pot passar a la resolució de problemes dinàmics amb condicions inicials. Per a fer-ho, cal calcular el pes de cada mode de vibració, que serà funció de les condicions inicials que es tinguin i el moviment resultant serà un sumatori d'aquests pesos multiplicant a cosinus i sinus a la freqüència pròpia corresponent.

Per provar el solver, es va posar de condicions inicials una velocitat a l'extrem de l'ala uniforme en la direcció y de 0.5m/s.

Per poder visualitzar quin mode és el que té més predominança, es pot calcular l'energia mecànica de cada mode:

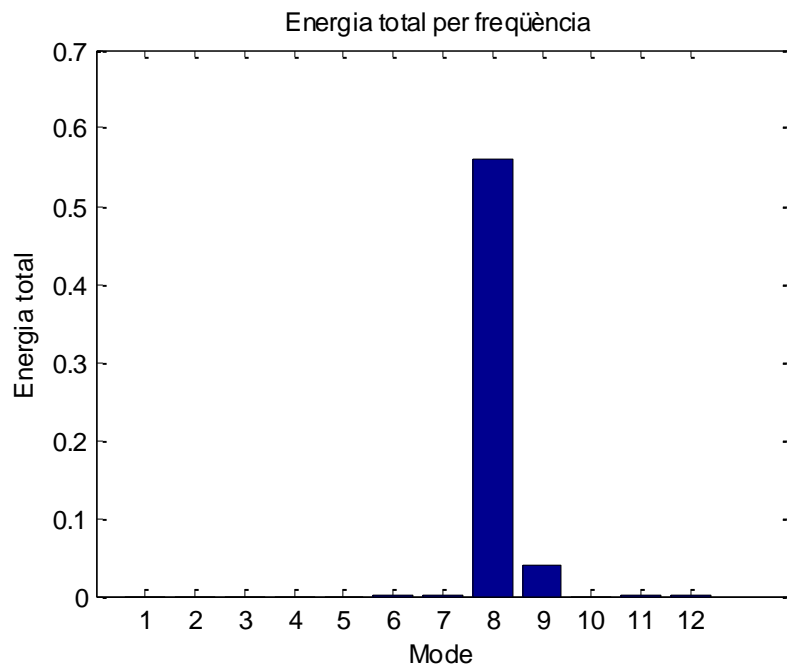


Figura 11: Energia mecànica de cada mode de vibració.

Mode	Freqüència (Hz)
1	1277
2	825
3	517
4	549
5	986
6	970
7	970
8	108
9	108
10	143
11	557
12	557

Es pot observar que té clara predominança el mode 8 (108Hz). Es pot observar també en la gràfica següent:

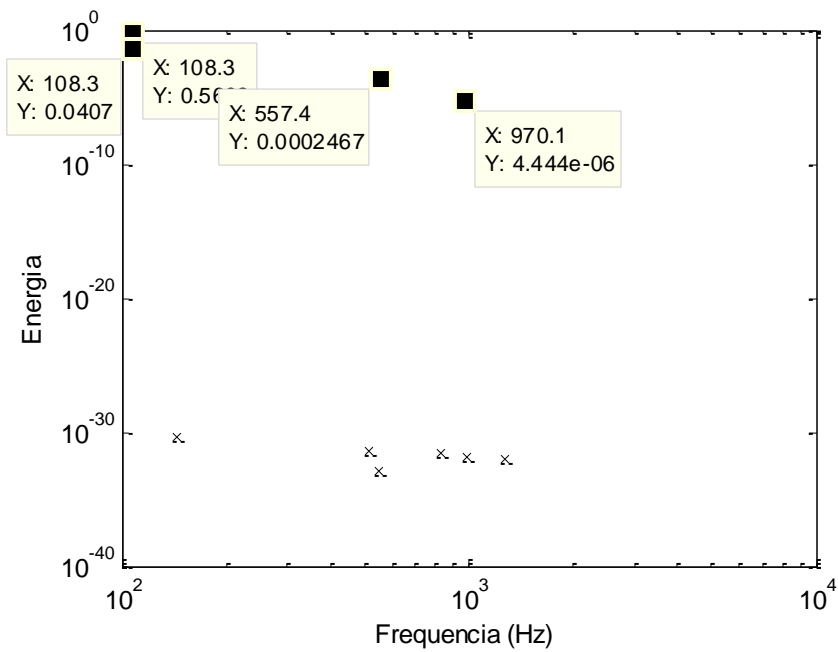


Figura 12: Energia en funció de la freqüència.

Desenvolupament d'una geometria pròpia

Per complementar l'estudi, a més a més de l'ala d'atenea, es va desenvolupar una geometria pròpia.

La geometria està basada en costelles de 9 elements i 6 punts de perfil simètric. Una funció de matlab permet generar tantes costelles com siguin necessàries per formar una ala rectangular.

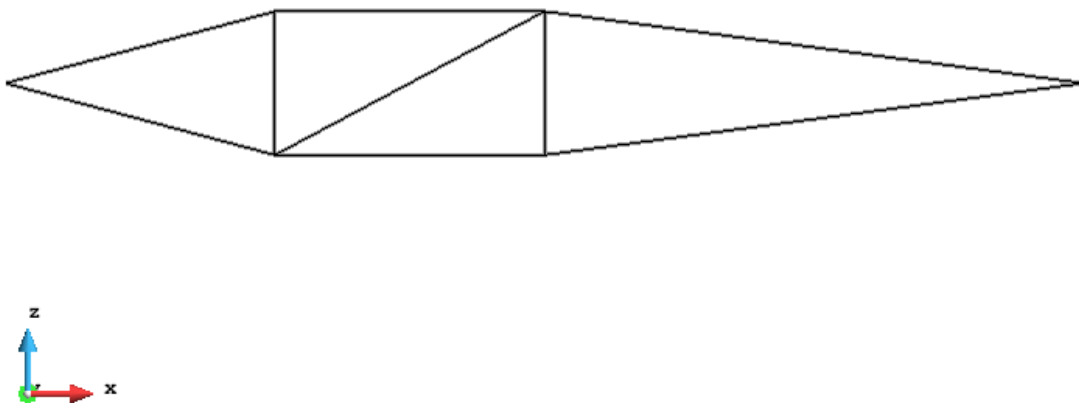


Figura 13: Model de la costella.

Per un exemple de geometria s'ha fet una anàlisi del comportament d'aquesta. L'exemple té 6 costelles, 5 metres de semiala, 1.5 de corda i 20 d'espessor.

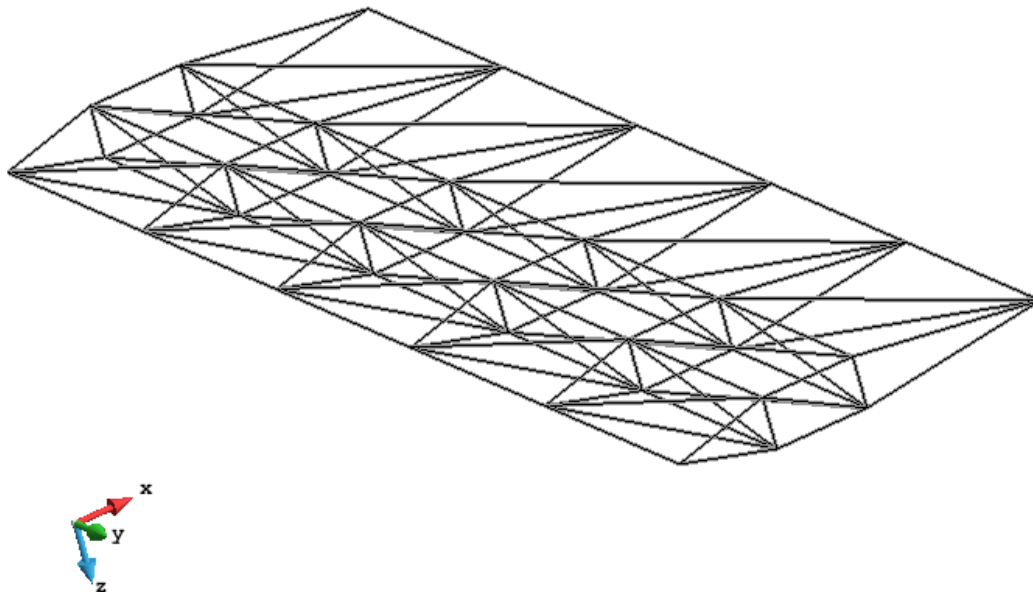


Figura 14: Exemple de geometria generada.

Com es pot observar en la figura següent la matriu KNN té els nodes bastant centrats en la seva diagonal.

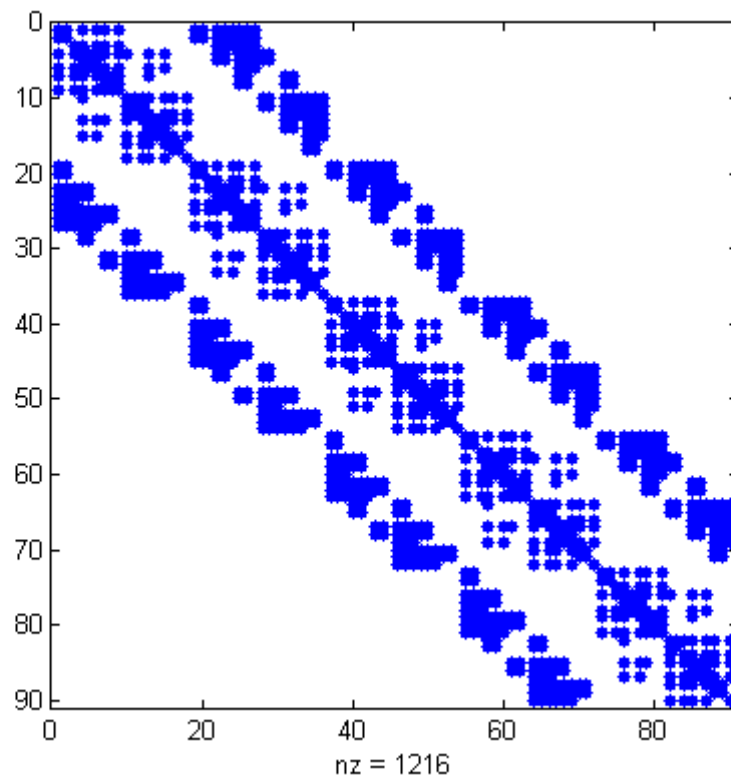


Figura 15: Distribució d'elements a la matriu de rigidesa de l'ala de geometria pròpia.

Per una velocitat inicial vertical en els nodes de l'extrem s'ha observat la següent distribució dels modes. La tendència entre l'energia dels modes activats i la seva freqüència és bastant clara

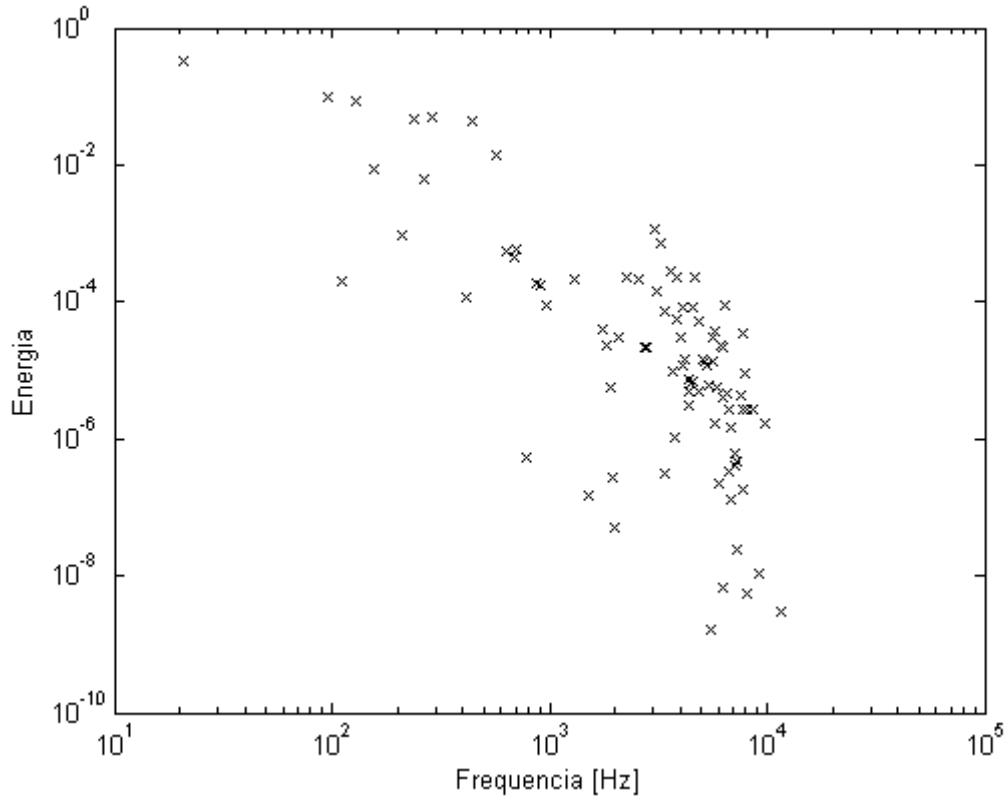


Figura 16: Energia de cada mode per a l'ala de geometria pròpia.

Integradors

A continuació es desenvolupen una sèrie de integradors temporals per resoldre el problema. El fet que el problema tingui solució analítica ens permet contrastar el resultat d'aquests amb els resultats analítics, podent així comparar els diferents integradors. El temps entre steps ha sigut de $h = 5 \cdot 10^{-6} s$ per un temps de simulació 0.05s.

Per mesurar l'error dels diferents mètodes s'ha fet servir l'error percentual en energies (error 1) i l'error comparant l'analític amb l'integrador (error 2).

$$Error1 = \frac{|E(1) - E|}{E(1)}$$

$$Error2 = \frac{\|x_{analitic} - x_{integrador}\|}{\|x_{analitic}\|}$$

A continuació es presenten els gràfics on apareixen les energies totals de cada mètode, incloent l'energia obtinguda per analític, així com els dos errors comentats anteriorment per cada mètode. Es pot observar com el millor mètode és l'Ode45, ja que és el que s'aproxima millor a l'analític i és el que té un error més baix, de l'ordre de 10^{-7} . En el gràfic de l'error 2 es pot veure com s'aproxima molt bé a l'analític i serà el que es farà servir per càlculs futurs per resoldre problemes dinàmics amb forces externes. Com que no s'aprecien gaire bé si els mètodes dissipen o generen energia, es comentaran en gràfics separats més endavant.

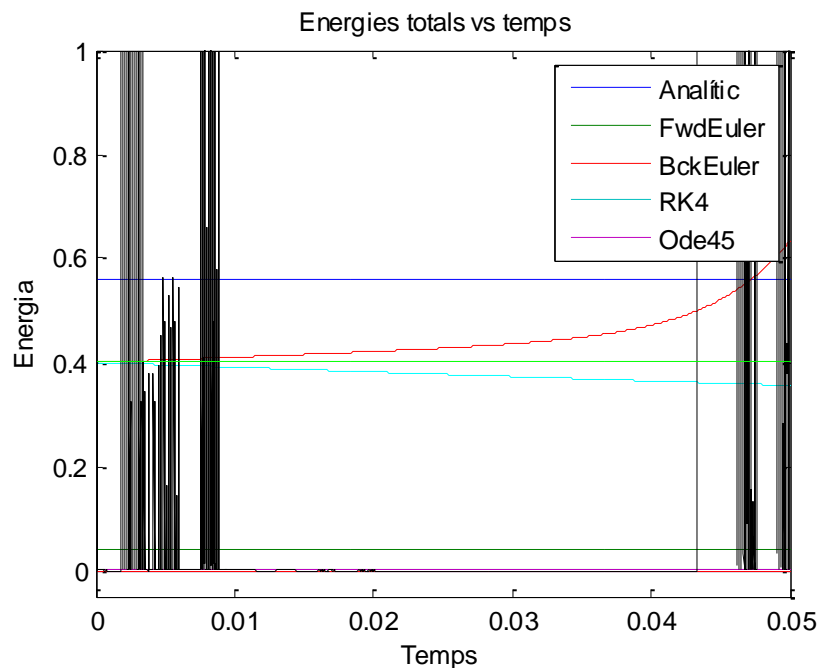


Figura 17 Energies totals respecte el temps de cada mètode

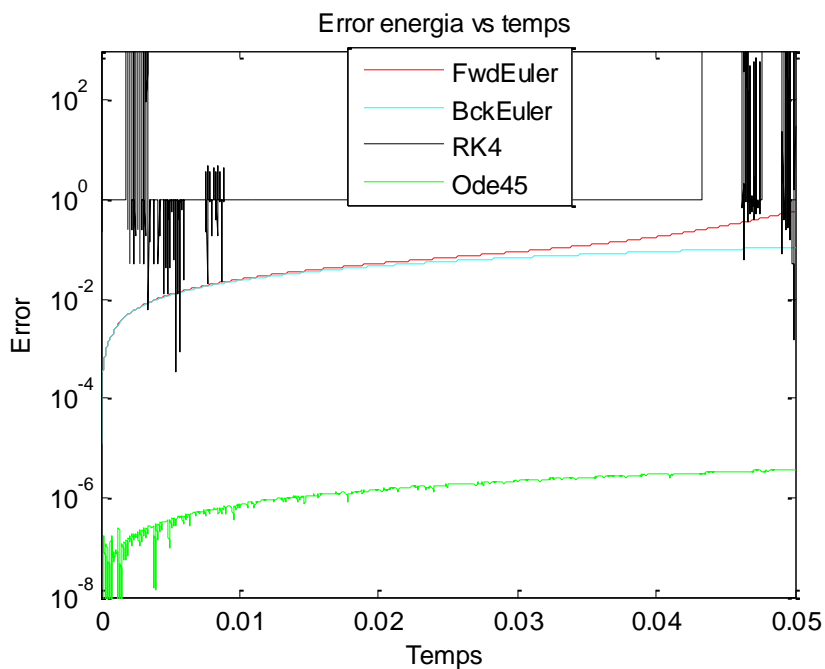


Figura 18 Error 1 (energies) respecte el temps de cada mètode

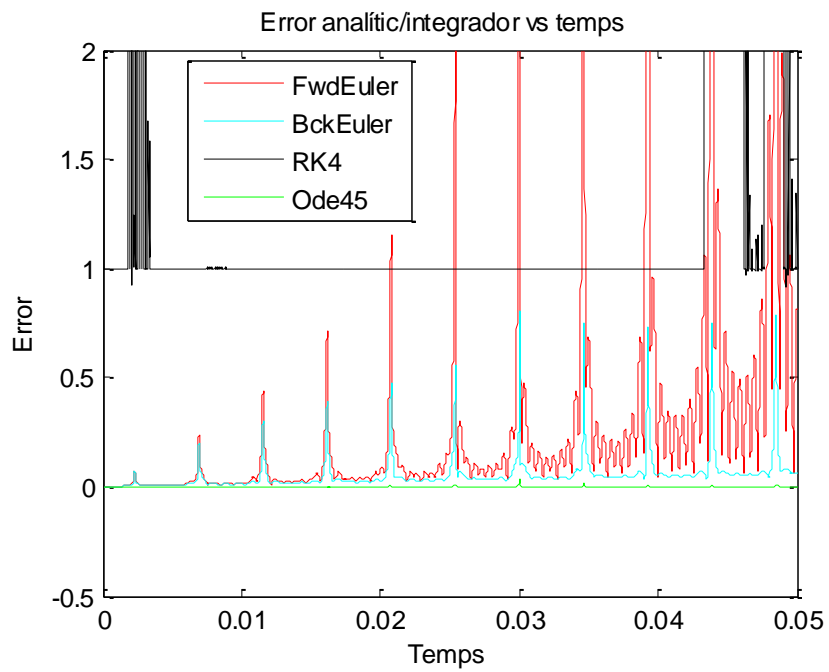


Figura 19 Error 2 (analític/integrador) de cada mètode respecte el temps

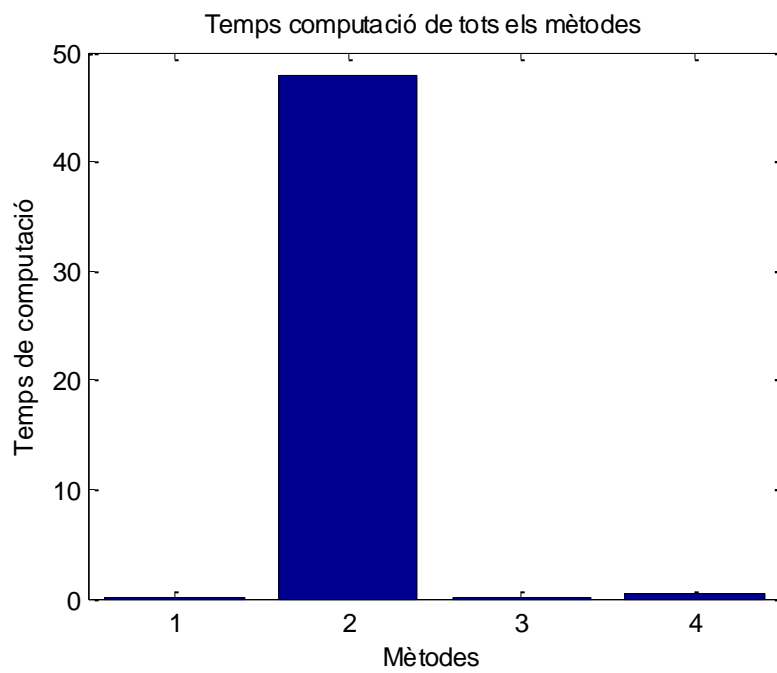


Figura 20 Temps de computació de cada mètode

Taula 2 Mètodes i temps de computació

	Mètode	Temps (s)
1	Forward-Euler	0.0598
2	Backward-Euler	47.9340
3	Runge-Kutta 4	0.1591
4	Ode45 Matlab	0.3716

De la taula anterior es desprèn que els mètodes explícits són els que menys triguen, són el Forward-Euler i el Runge-Kutta 4, el segon triga una mica més ja que ha de fer més operacions, però ambdós tenen errors no acceptables degut a que divergeixen o presenten errors volàtils. El Backward-Euler és el més lent de tots amb diferència i l'Ode45 és prou ràpid per ser un implícit i molt bo respecte a errors.

A continuació passem a veure cada mètode amb detall.

- **Forward-Euler**

Aquest mètode genera energia tot i que el problema analític no en genera. L'error és alt, s'hauria d'afinar la h per a més precisió. Tot i això, el temps de computació és molt baix.

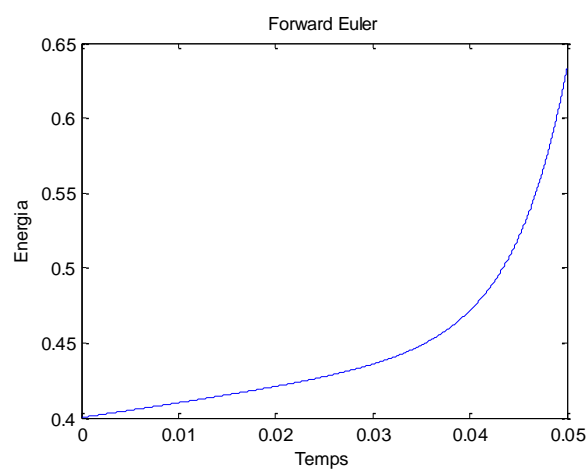


Figura 21 Energia vs temps de Forward-Euler

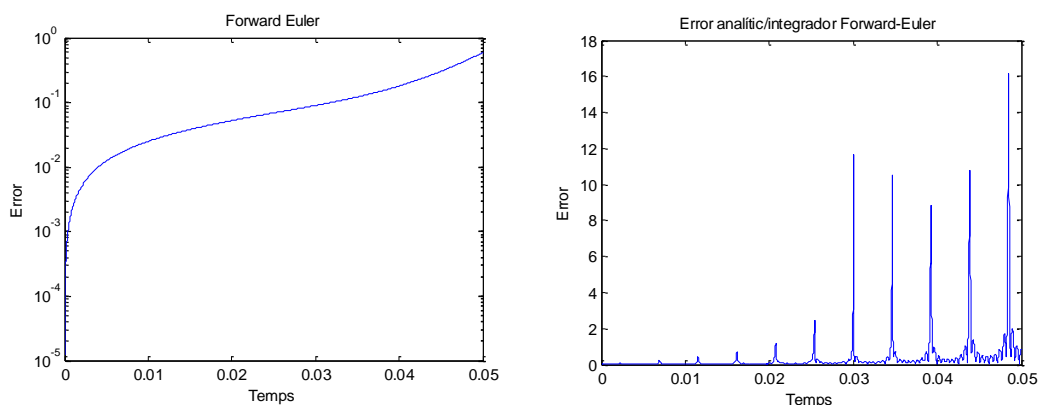


Figura 22 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Forward-Euler

- **Backward-Euler**

Com es pot veure en aquest gràfic, aquest mètode dissipa energia i tampoc hauria, perquè el problema analític manté l'energia constant. L'error tendeix a estabilitzar-se

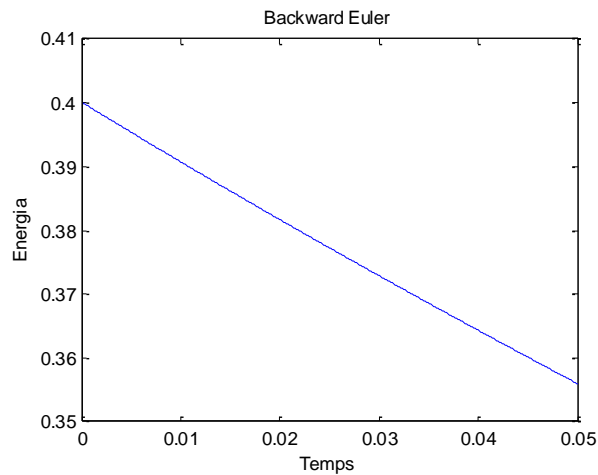


Figura 23 Energia vs temps de Backward-Euler

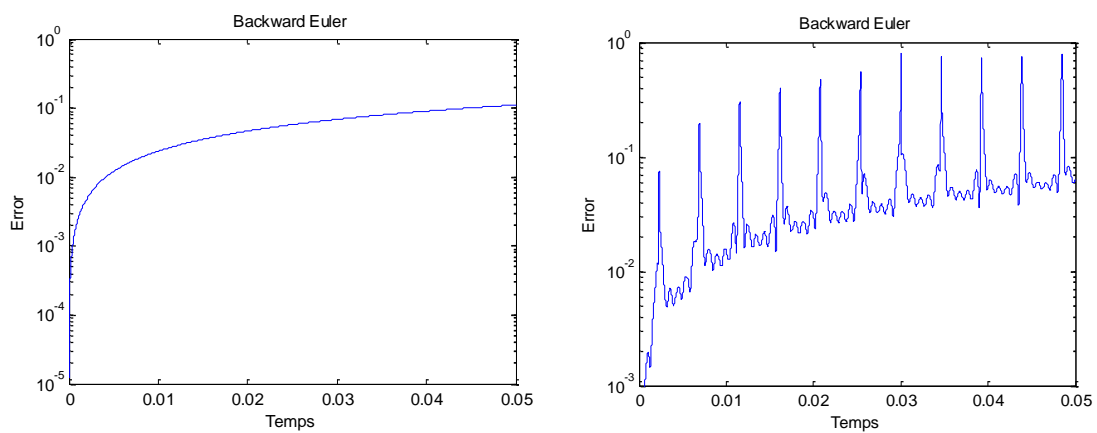


Figura 24 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Backward-Euler

- **Runge-Kutta 4**

Tant les energies com els errors presenten uns resultats molt estranys, potser s'hauria d'escollir una h més petita, però aquests pics no fan pensar que el mètode sigui gaire fiable. L'energia que hauria de ser constant tampoc ho és en aquest cas. L'error presenta uns pic de l'ordre de més de 10^0 . Més endavant es farà un anàlisi de l'error en funció de h amb el qual podrem extreure més conclusions.

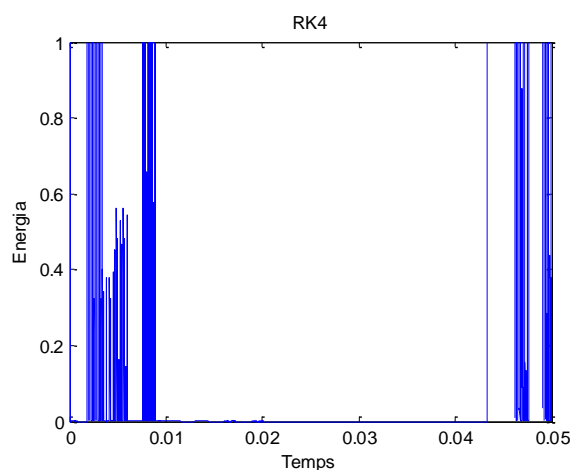


Figura 25 Energia vs temps de RK4

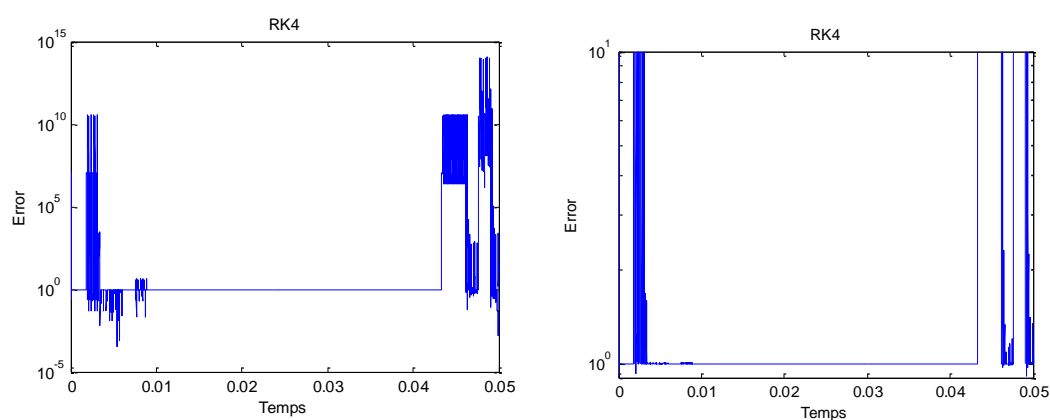


Figura 26 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per RK4

- **Ode45 Matlab**

Aquet integrador és el millor comparat amb els altres, el temps de càlcul és prou ràpid, l'energia total es conserva (simplèctic), igual que el problema analític, i ambdós errors són de l'ordre de 10^{-5} tot i que tenen algunes oscil·lacions.

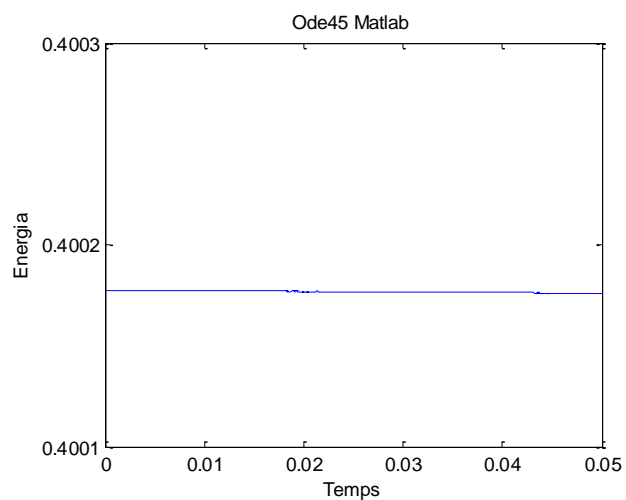


Figura 27 Energia vs temps de Ode45 Matlab

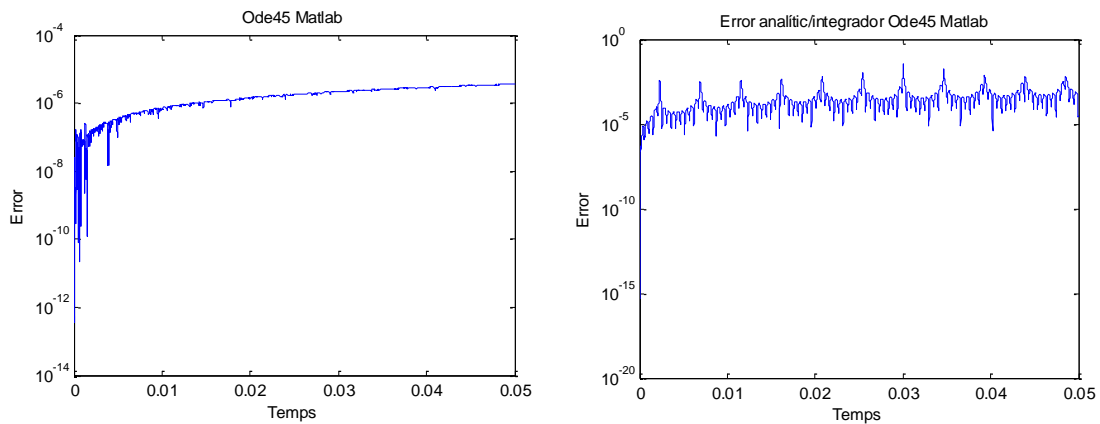


Figura 28 Error 1 i 2 de d'esquerra a dreta per Ode45 Matlab

Finalment, es conclou que l'integrador que més s'apropa a l'anàlític és l'Ode45 i, per tant, és fiable per obtenir resultats de problema dinàmic amb forces externes.

Error i temps de computació dels diferents mètodes en funció de h

A continuació es fa un anàlisi de l'error de cada mètode estudiat en funció de l'interval de temps utilitzat (h), així com del temps de computació necessari per a cada mètode. Per a fer aquest estudi s'ha fet servir la geometria proporcionada per l'assignatura, ja que al ser una geometria més simple que la desenvolupada pel nostre grup es redueix el temps de computació necessari per a fer l'anàlisi i s'ha fet servir l'error basat en l'energia dissipada numèricament. La simulació és de 0.5 segons i es farà un escombrat que va de 10K divisions en el temps a 100K, el qual correspon a una h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

A continuació, es mostra els resultats obtinguts pel mètode Forward Euler:

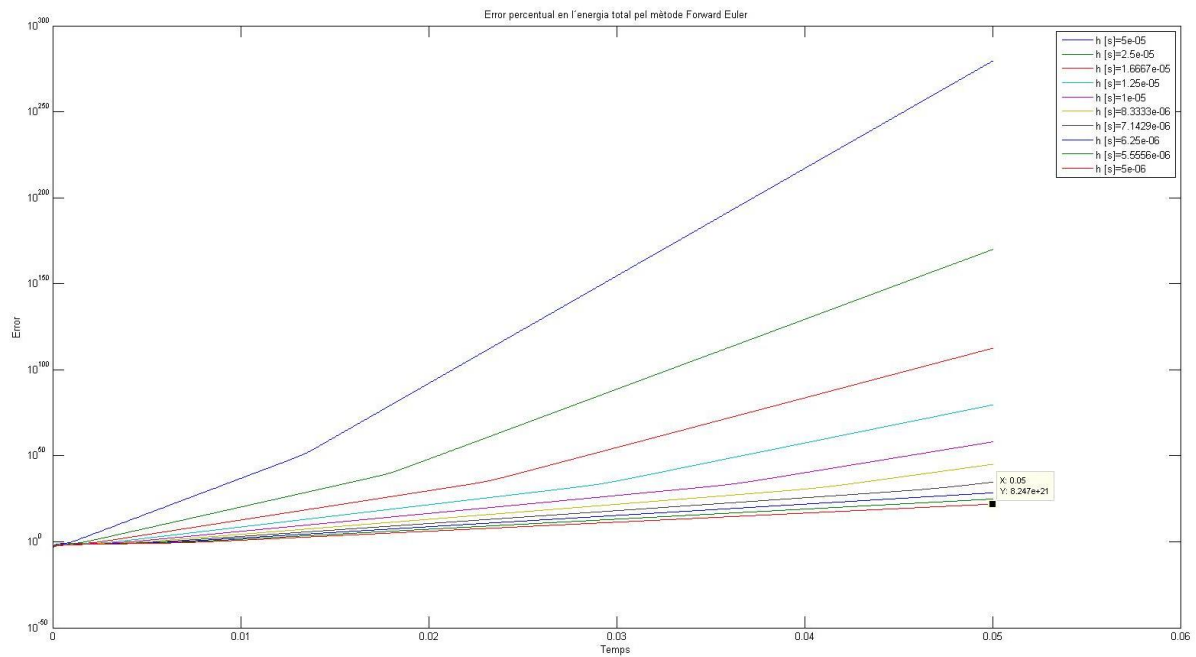


Figura 29: Error del mètode forward euler per un escombrat en h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

Com es pot comprovar, l'error final és molt elevat, però mostra una bona tendència. L'error a $h=5e-06$ segons és encara de l'ordre de 10^{21} , totalment inacceptable, però al ser un mètode explícit, el temps de computació és molt curt, de 0.035 segons aproximadament per a una h de $5e-06$ segons, per tant es pot forçar una h molt més petita per a reduir l'error. Més endavant es mostrarà una gràfica comparativa dels temps de computació de cada mètode, així com un anàlisi amb un interval de temps més curt per als mètodes explícits. Cal remarcar també que cada cop hi ha més error acumulat amb aquest mètode, per tant si es fessin simulacions més llargues, seria d'esperar que aquest anés augmentant amb el temps de simulació.

A la següent gràfica, es pot observar els resultats per al mètode Backward Euler:

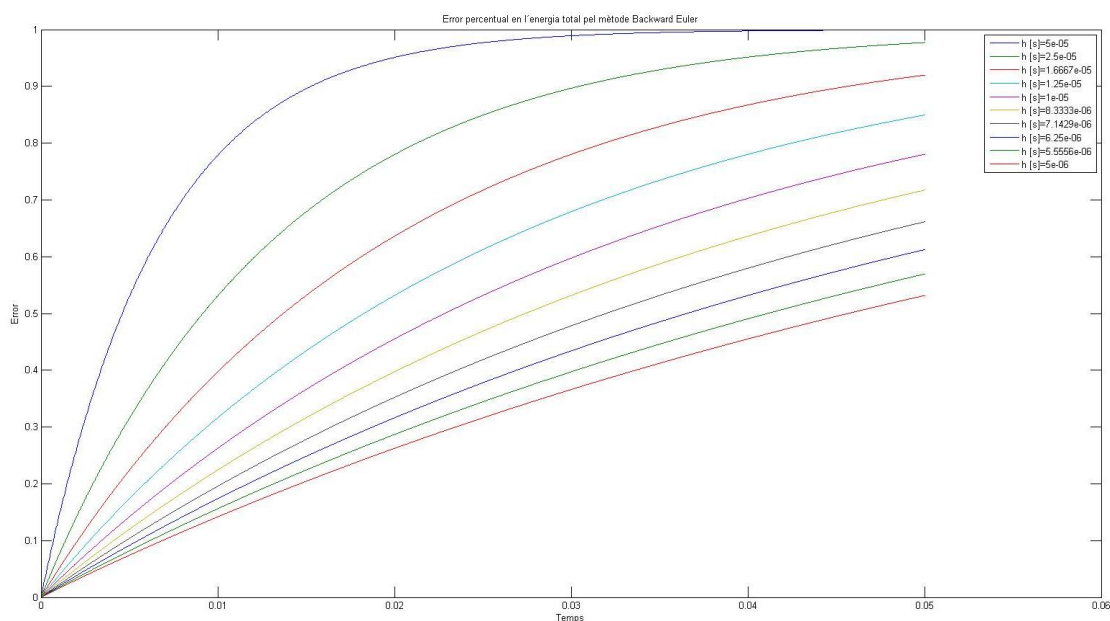


Figura 30: error del mètode backward euler per un escombrat en h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

Per a divisions de temps de $5e-05$, l'error acaba éssent del 100%, però veiem com ràpidament va disminuint a mida que es divideix aquest interval. Per a la h de $5e-05$ l'error és d'un 50%. Es pot veure també com, a diferència del mètode Forward Euler, l'error tendeix a estabilitzar-se enlloc de seguir creixent. També cal mencionar que el temps de computació, tot i ser per la primera divisió de temps només de 3.7 segons, creix ràpidament fins a 42 segons. Això és degut que és un mètode implícit i per tant requereix de solver numèric, el qual el converteix en un mètode molt més lent. Tot i que seria interessant seguir disminuint 'h' per veure per quins valors aquest mètode dona resultats raonables, el temps de computació ho fa prohibitiu per a aquest treball.

A la gràfica de sota podem veure els resultats obtinguts pel mètode RK4:

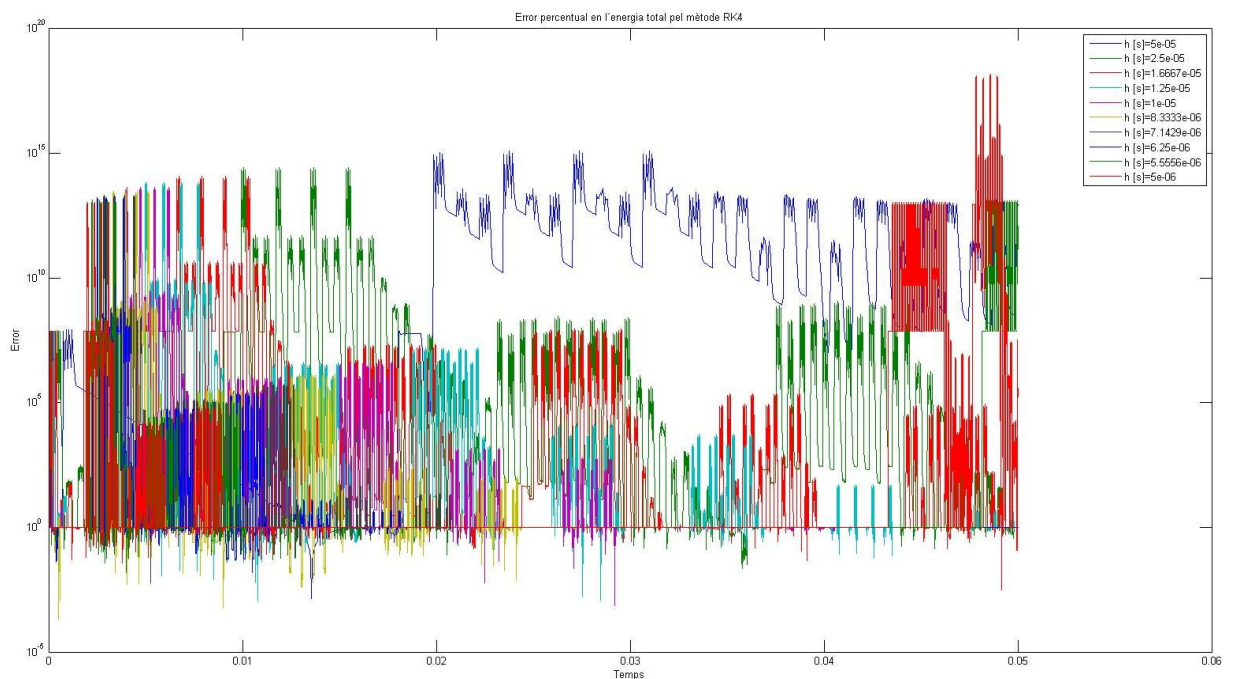


Figura 31: error del mètode RK4 per un escombrat en h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

Com es pot veure l'error és molt volàtil, tal i com havíem vist. Segons l'instant de simulació i la 'h', pot ésser molt alt, mentre que en altres punts pot ser molt baix i assumible (tots aquells punts que estan per sota de 10^0), fins i tot per a divisions de temps grans. D'aquest fet se n'aprofita el mètode ODE45, estimant la h màxima necessària per aconseguir un bon error, optimitzant el temps necessari per a el càlcul i reduint l'error. Aquest mètode, al ser explícit, és ràpid, tot i que no tant com el Forward Euler ja que requereix més operacions. Per a h de $5e-05$ el temps de computació és de 0.017 segons mentre que a $h=5e-06$ segons és de 0.115 segons.

Finalment, mostrem els resultats obtinguts pel mètode ODE45:

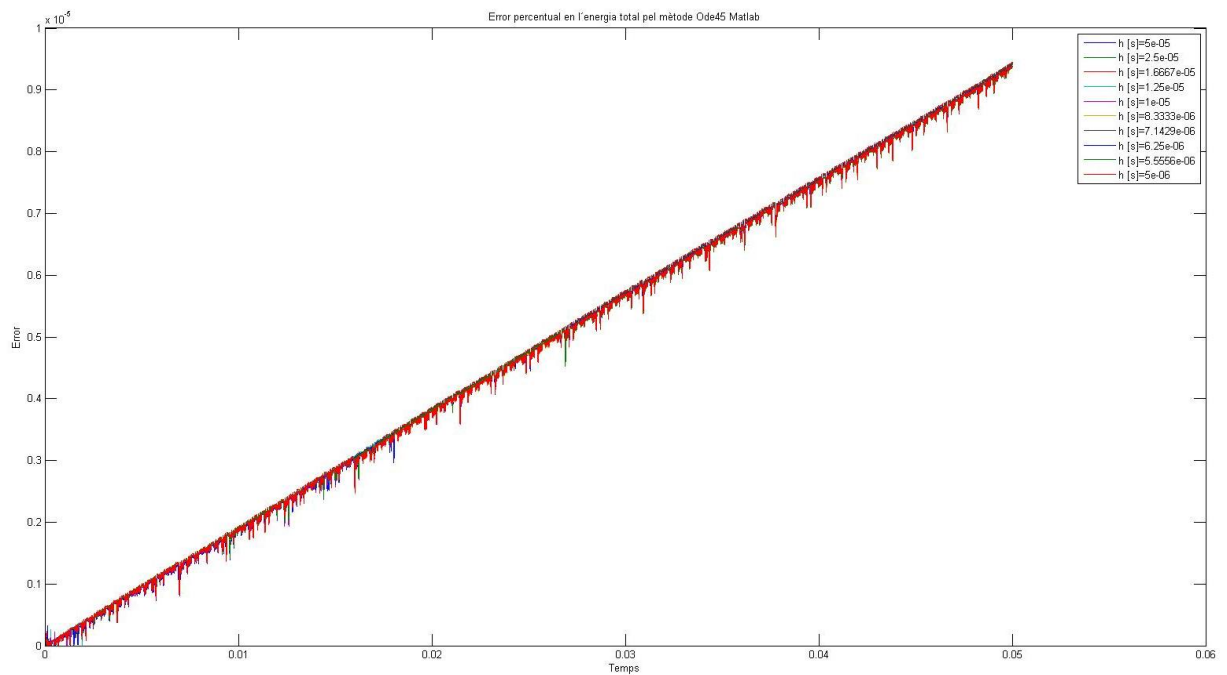


Figura 32: error del mètode ODE 45 per un escombrat en h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

Aquest mètode autocalcula la divisió de temps necessària per a calcular cada instant de temps, per tant no es té cap poder sobre aquest. Com era d'esperar, l'error sempre ha donat el amteix per a cada iteració i el temps de computació s'ha mantingut estable. Amb diferència, és el sistema que millor resultats ha donat, amb un error de l'ordre de magnitud de 10^{-5} . El temps de computació també és acceptable i força estable, éssent el temps màxim de computació de 0.25 segons i el mínim de 0.099 segons.

Finalment es mostra una pàgina amb totes quatre gràfiques per a facilitar-ne la comparació visual.

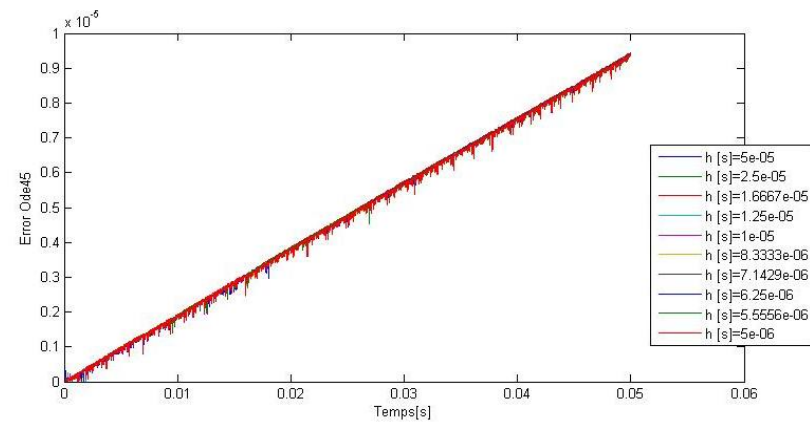
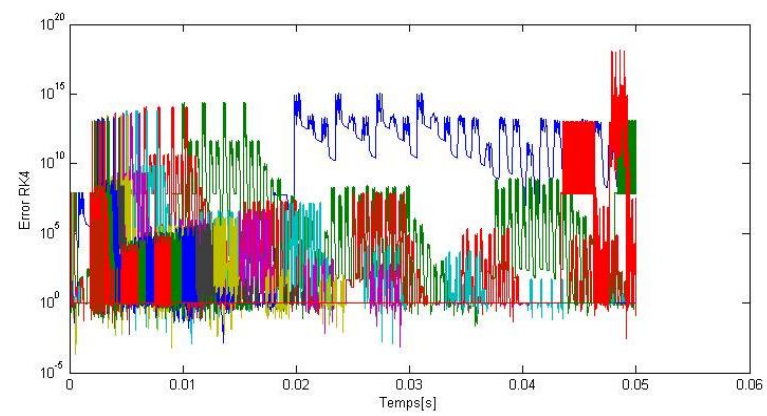
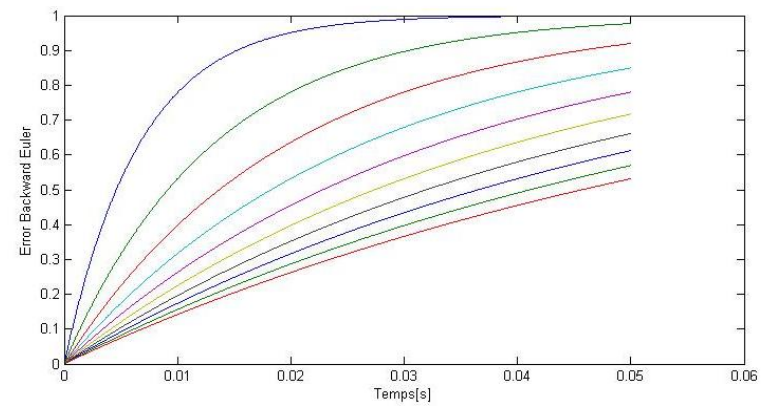
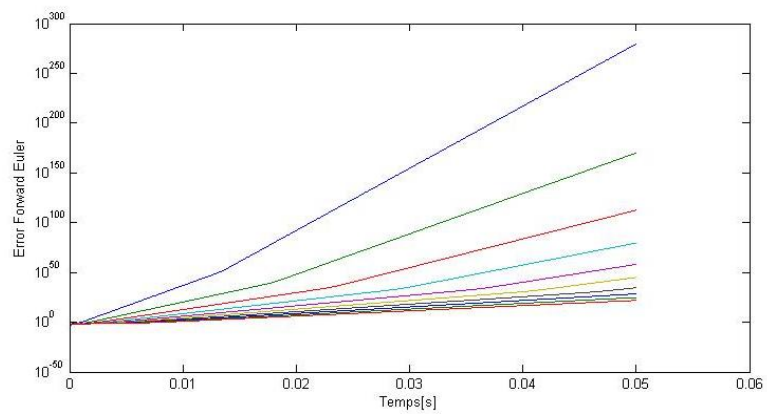


Figura 33: error dels diferents mètodes per un escombrat en h de $5e-05$ segons a $5e-06$ segons.

Ara estudiem el temps de computació per a cada mètode per a cada divisió de temps.

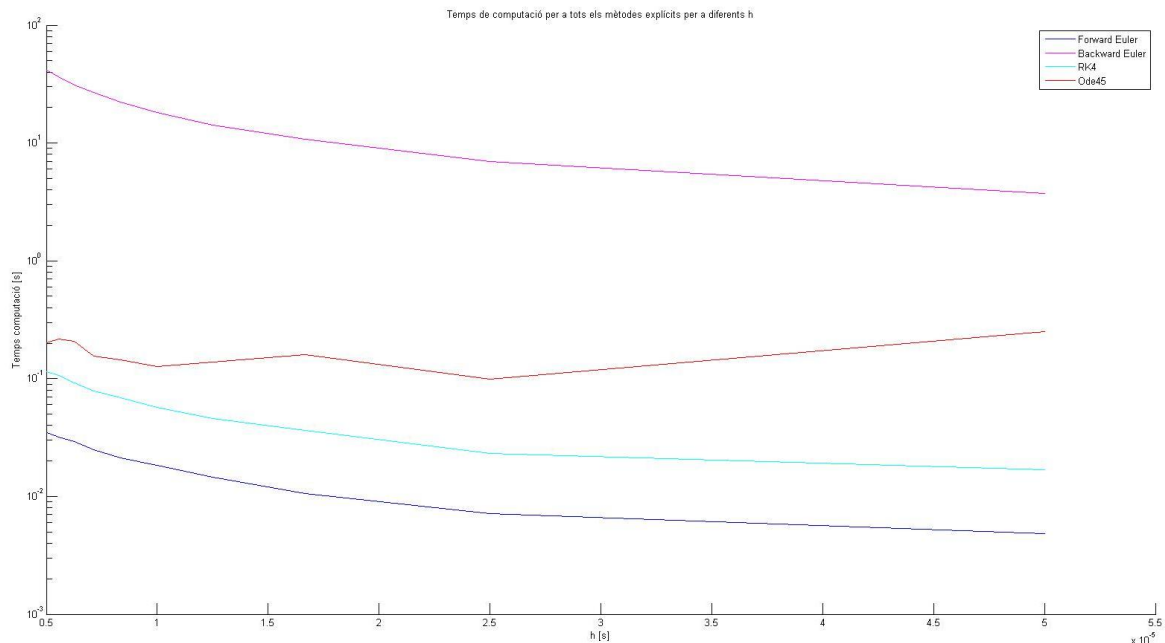


Figura 34: Temps de computació de cada mètode en funció d' h .

Com es pot veure els mètodes més ràpids són els explícits, en concret el Forward Euler, tot i que també els que tenen més error. L'ODE45 els segueix mantenint un temps de computació relativament estable. Finalment, el Backward Euler, al ser un sistema implícit és notablement més lent.

Per poder fer una comparativa justa entre mètodes implícits i explícits, es seguiran fent assajos amb aquests últims fins que s'aconsegueixi un temps de computació semblant al del mètode Backward Euler i veure per als mateixos temps de computació quin mètode té menys error. A continuació es mostren els gràfics de temps de computació versus h segons el mètode. Quan un mètode arribava a un temps de computació equiparable al de Backward Euler, es deixava d'utilitzar.

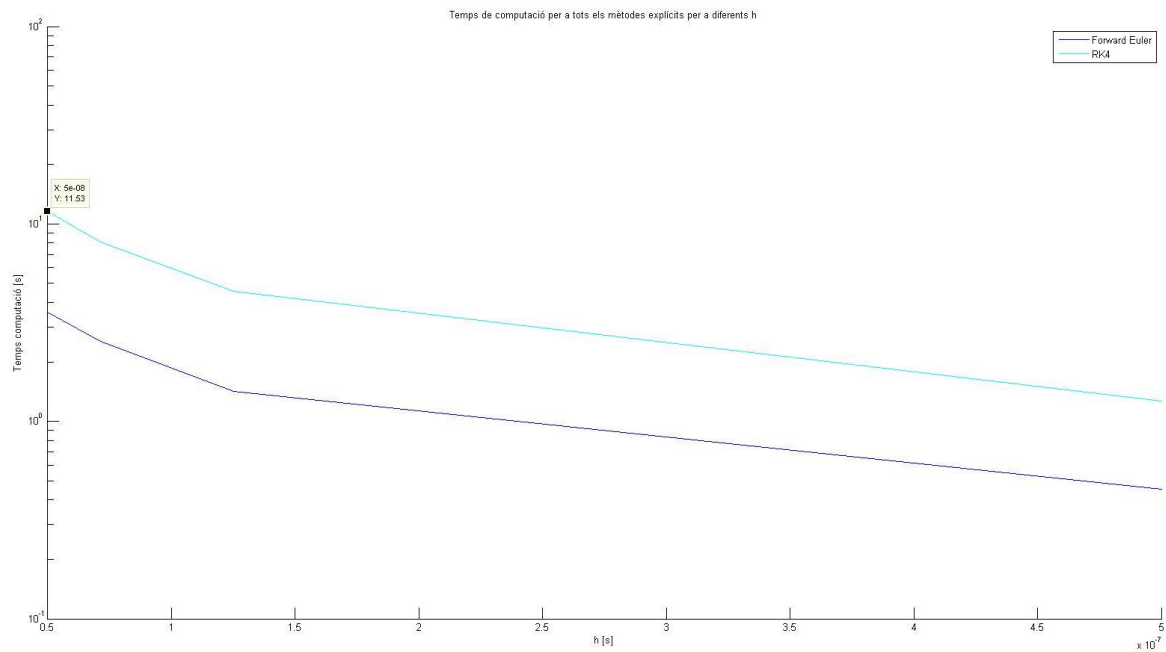


Figura 35: Temps de computació dels mètodes explícits per una h entre 5e-07 i 5e-08.

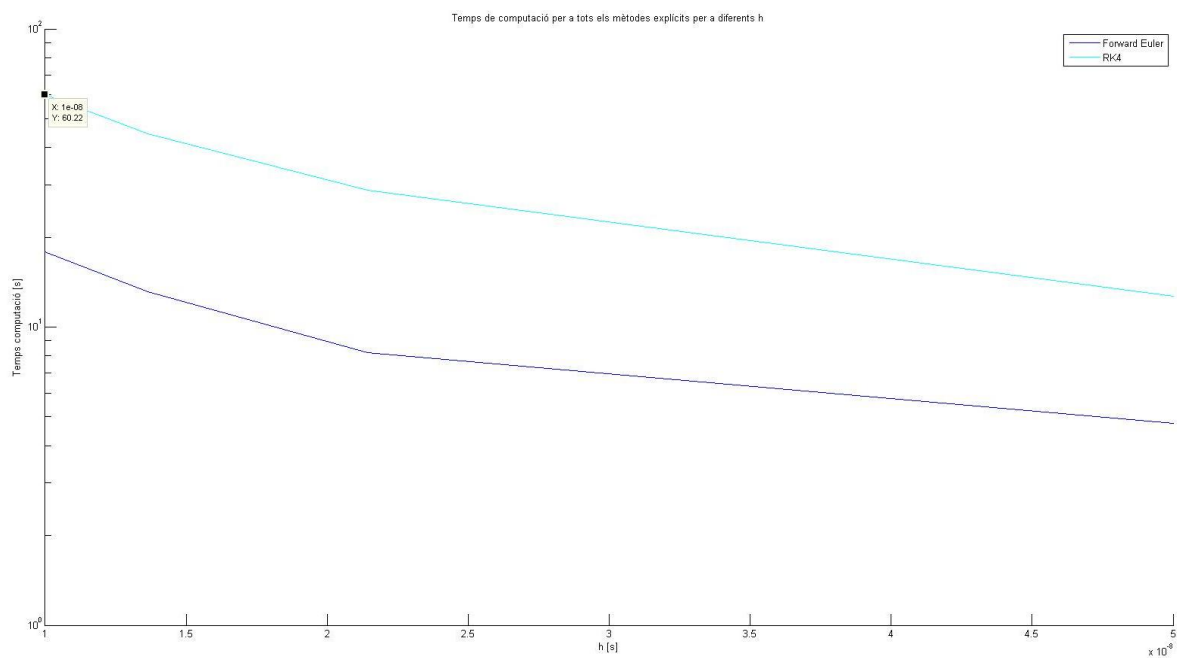


Figura 36: Temps de computació dels mètodes explícits per una h entre 5e-08 i 1 e-08

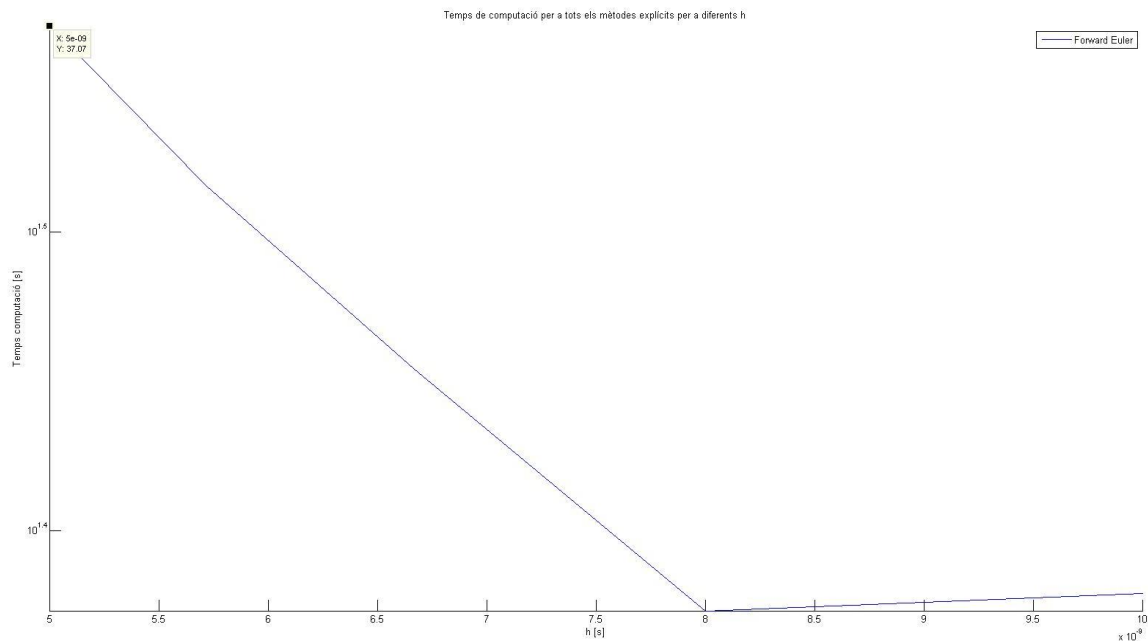


Figura 37: 5e-09 a 4.1667e-09.

Com es pot observar, a partir de 5 milions de divisions en el temps ($h=1\text{-}08$) ja s'ha deixat d'iterar el mètode RK4 perquè ja superava els 60 segons de temps de computació. El valor més pròxim al temps màxim de computació amb el mètode Backward Euler és de 44.5 segons, que es dona per una h de $1.364\text{e-}08$.

Pel que fa al Forward Euler, s'ha pogut seguir reduint la discretització temporal fins a fer 10 milions de divisions temporals ($h=5\text{e-}09$) però el temps de computació encara era lleugerament baix. Es va fer una estimació i es va concloure que possiblement el numero de divisions temporals que donarien un temps de computació pròxim als 45 segons era per 12 milions ($h=4.167\text{e-}09$). Es va assajar la hipòtesis i es va aconseguir precisament un temps de computació de 47.51 segons, molt pròxim al desitjat.

Amb aquestes noves iteracions, a més a més de poder graficar l'error en funció de h per a un rang de h molt més extens per a aquests dos mètodes, podem buscar per temps de computació semblants, quin dels mètodes ens dona més error.

A continuació es mostren les gràfiques d'error pel mètode Forward Euler de 100K a 1 milió de divisions (h entre $5\text{e-}07$ i $5\text{e-}08$), de un milió a 5 milions (h entre $5\text{e-}08$ i $1\text{e-}08$), de 5 milions a 10 milions (h entre $1\text{e-}08$ a $5\text{e-}09$) i de 10 milions a 12 milions (h entre $5\text{e-}09$ a $4.1667\text{e-}09$).

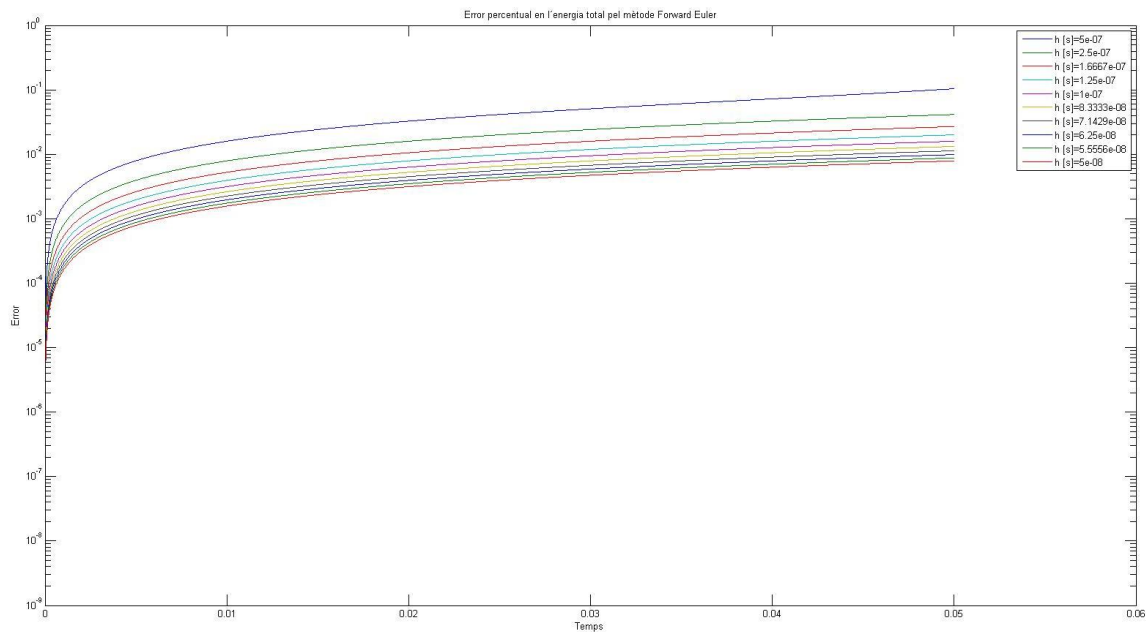


Figura 38: Error del mètode Forward euler per una h entre $5e-07$ i $5e-08$

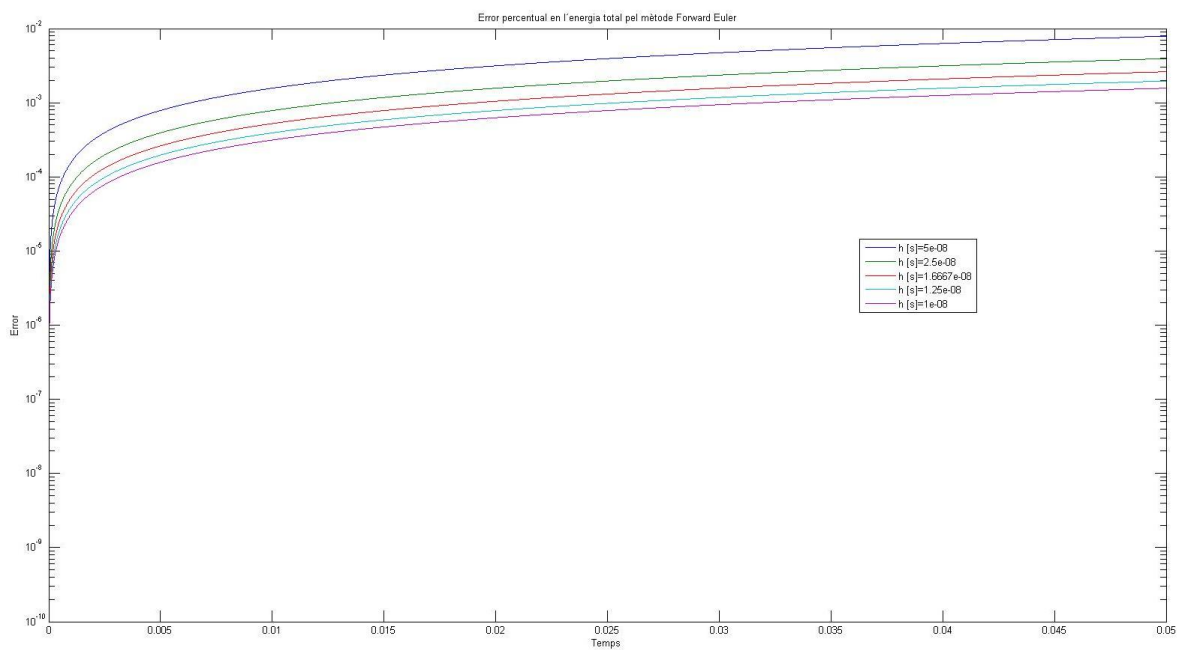


Figura 39: Error del mètode Forward euler per una h entre $5e-08$ i $1e-08$

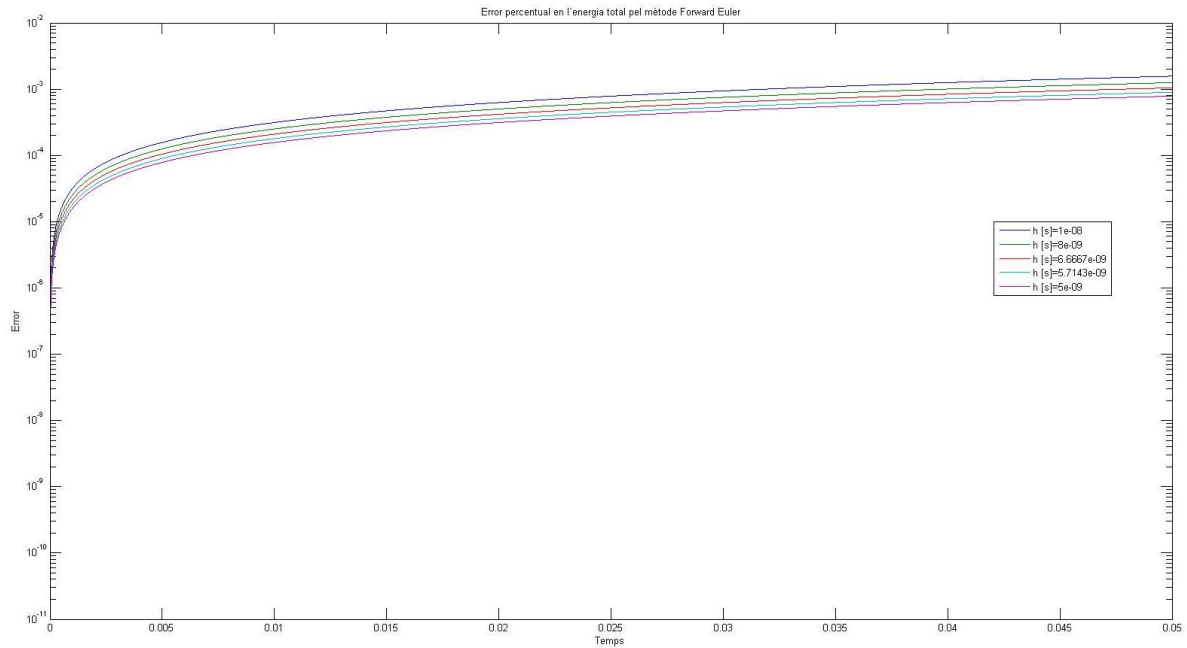


Figura 40: Error del mètode Forward Euler per una h entre $1e-08$ a $5e-09$

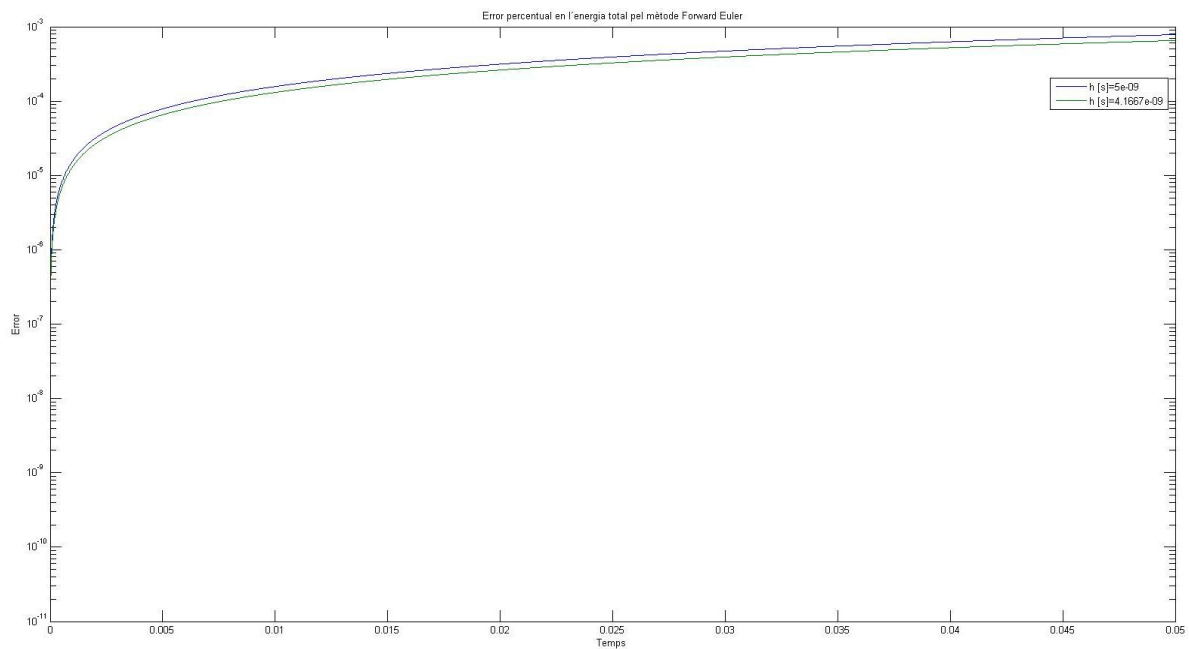


Figura 41: Error del mètode Forward Euler per una h entre $5e-09$ a $4.1667e-09$

Com es pot observar, l'error disminueix dràsticament, i es que al ser un mètode explícit requereix de una discretització del temps molt fina. També s'observa que el comportament de l'error ha canviat per assemblar-se al del backqard Euler: enlloc de divergir, ara tendeix a estabilitzar-se. L'error mínim als 0.5 segons de simulació (que ha estat de $6.446e-04$), com era d'esperar s'ha obtingut per la h mínima ($4.1667e-09$ segons), amb un temps de computació de 47.5 segons.

A continuació es mostren les gràfiques d'error pel mètode RK4 de 100K a 1 milió de divisions (h entre $5e-07$ i $5e-08$) i de un milió a 5 milions (h entre $5e-08$ i $1e-08$):

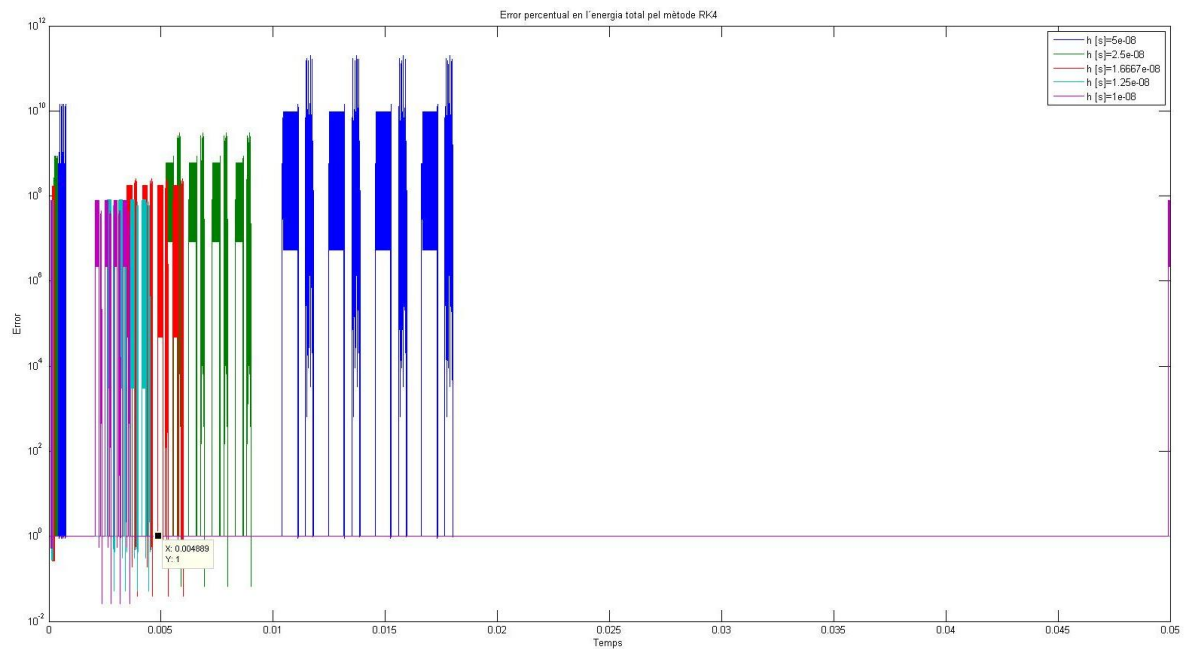


Figura 42 Error del mètode RK4 per una h entre $5e-07$ i $5e-08$

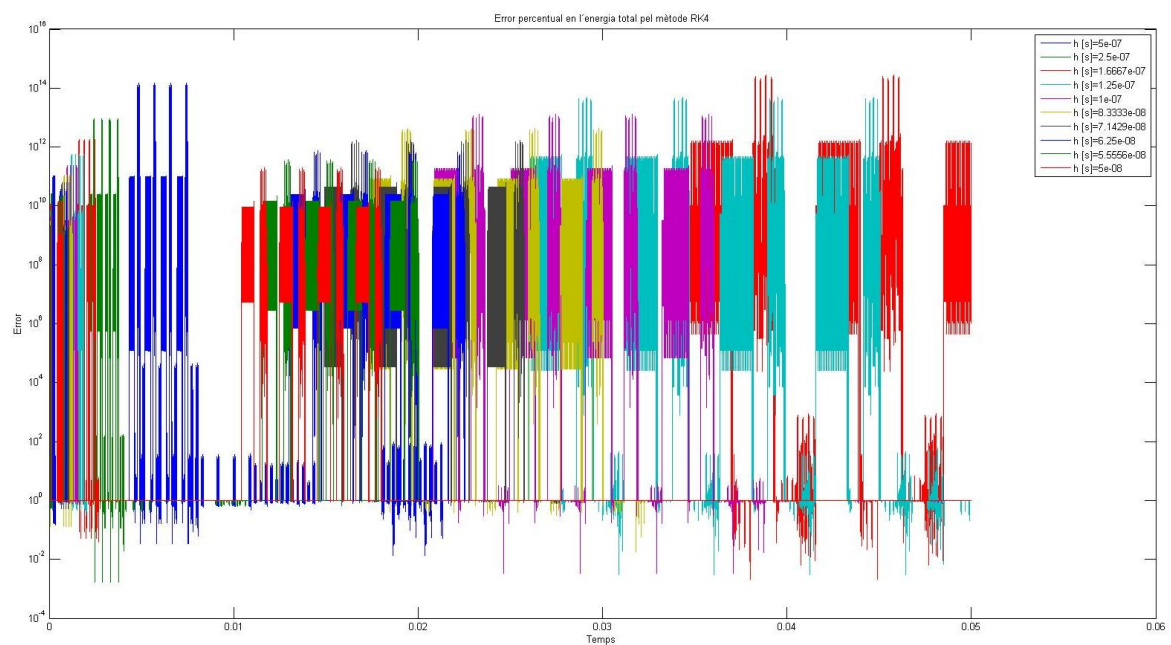


Figura 43: Error del mètode RK4 per una h entre $5e-08$ i $1e-08$

Com es pot veure, el mètode RK4 per més petit que fem h , no ens assegura obtenir resultats millors. Per segons quin instant de simulació, una divisió temporal funcionarà millor que una d'altra. Recordem que per les màximes divisions temporals (ergo mínima h), s'ha dedicat 44.5 segons de computació i tot i això no ens assegura cap resultat. Tot i això, l'ODE45 s'aprofita del fet que no requereix de una h molt baixa en segons quins trams per optimitzar el procés i tindre errors baixos amb temps de computació baixos també.

Finalment queda per establir quin mètode és més eficient, almenys per a aquest cas. Per a un temps de computació d'aproximadament 45 segons, el mètode Backward Euler ha tingut un error als 0.5 segons de simulació del 50%, mentre que el Forward Euler, molt més ràpid, ha permès una h molt més baixa i amb només 5 segons més de computació ha aconseguit un error als 0.5 segons de simulació de 0.0644%. Per tant es pot dir que pel cas que ens ocupa, el mètode Forward Euler ens és més beneficiós de cara a obtenir resultats més acurats en menys temps de computació, si només tenim en compte els mètodes Forward Euler, Backward Euler i RK4.

En última instància, el millor integrador ha estat l'ODE45, amb un error del 0.001% als 0.5 segons de simulació i només 0.13 segons de computació i finalment mencionar que tot i que els resultats del RK4 són força caòtics, aquest mètode és una part fonamental del ODE45 i el que permet aquests errors tan baixos amb aquests temps de computació tan ajustats.

Forces aerodinàmiques en funció de la deformació

Finalment es farà un cas amb forces, no resoluble analíticament.

A partir de les equacions transitòries d'aerodinàmica lineal que es varen veure en la primera part de l'assignatura es calculen les forces aerodinàmiques que actuen en cada punt.

$$L = \pi \rho_{\infty} b^2 [\ddot{h} + U_{\infty} \dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi \rho_{\infty} U_{\infty} b C(k) \left[\dot{h} + U_{\infty} \alpha + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right]$$

$$M_{\alpha} = \pi \rho_{\infty} b^2 \left\{ \left[ba\ddot{h} - U_{\infty} b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right] + 2U_{\infty} \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[\dot{h} + U_{\infty} \alpha + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right] \right\}$$

En la qual podem tenir tots els paràmetres en funció de les geometria ($b=c/2$) i les condicions de vol excepte el paràmetre $C(k)$. Aquest paràmetre depèn de la freqüència reduïda i està acotat entre 0 i 1.

$$\kappa = \frac{\omega c}{U_{\infty}}$$

De manera que s'utilitzarà un valor de ω aproximat i s'ajustarà al tenir els resultats per la freqüència real d'oscil·lació. Calcular-la en cada instat seria molt costós i es perdria la linealitat que es vol aconseguir a l'hora de posar-ho en una matriu.

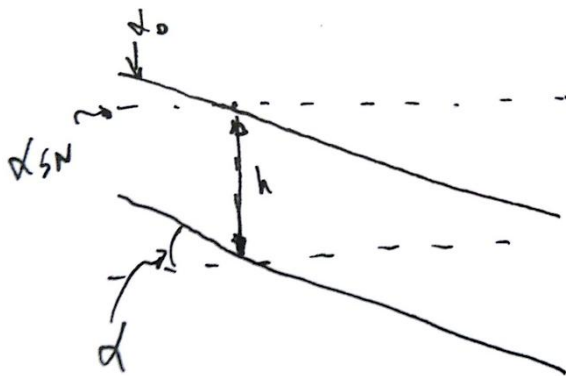
D'aquesta manera les forces es calculen matricialment amb la següent equació:

$$\begin{aligned}[Fa] &= [T_F] [Q''_a][T_X]\ddot{x} + [T_F] [Q'_a][T_X]\dot{x} + [T_F] [Q_a][T_X]x + [T_F] [Q_a]\alpha_0 \\ &= F''_a\ddot{x} + F'_a\dot{x} + F_ax + F_{a0}\end{aligned}$$

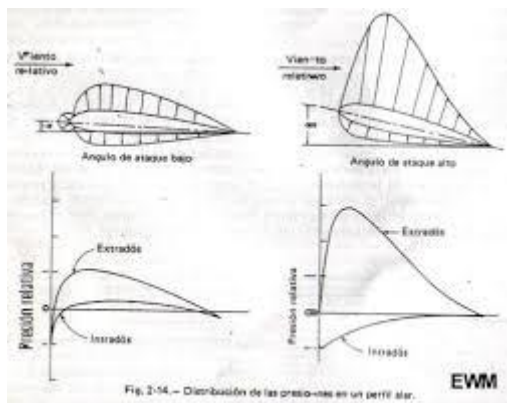
En una conversió algebraica hauria de ser:

$$[T_F] = [T_X]^T$$

Però en aquest cas no és així perquè $[T_X]$ depen del desplaçament d'una manera lineal



I $[T_F]$ ha de distribuir les forces i moments obtinguts sobre el perfil d'una manera realista.



Per això la distribució de desplaçament no coincideix amb la distribució de forces i s'han de generar dues matrius diferents.

Matriu T_x

Per obtenir la altura, l'angle d'atac i les seves derivades a partir del vector de graus de llibertat es tenen en compte els següents criteris.

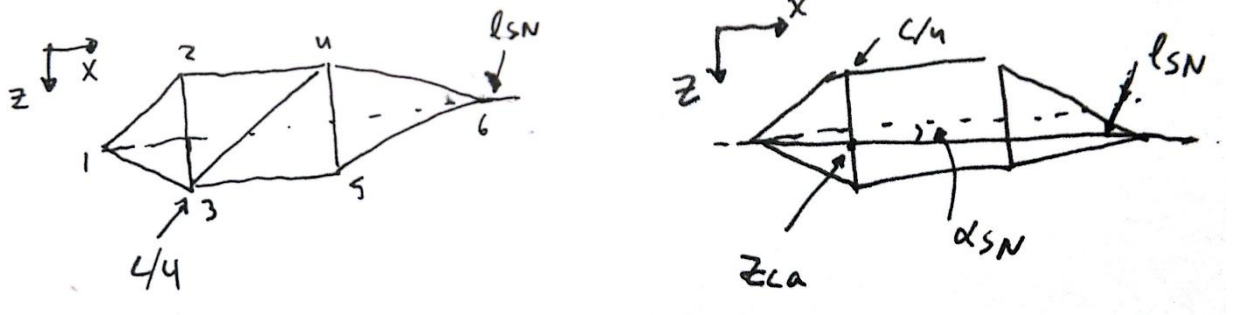


Figura 44. Comparació de perfil simètric perfil amb curvatura

$$h = z_2 k h_2 + z_3 k h_3$$

$$\alpha = \frac{z_1 - h}{c_1} k \alpha_1 + \frac{z_4 - h}{c_4} k \alpha_4 + \frac{z_5 - h}{c_5} k \alpha_5 + \frac{z_6 - h}{c_6} k \alpha_6$$

$$T_X = \begin{bmatrix} 0 & k h_2 & k h_3 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k \alpha_1}{c_1} & \left(-k h_2 \cdot \sum_{i=1,4,5,6} \frac{k \alpha_i}{c_i} \right) & \left(-k h_3 \cdot \sum_{i=1,4,5,6} \frac{k \alpha_i}{c_i} \right) & \frac{k \alpha_4}{c_4} & \frac{k \alpha_5}{c_5} & \frac{k \alpha_6}{c_6} \end{bmatrix}$$

On

Índex	c	Kh	kα
1	-C/4	0	1/3
2	0	$\frac{z_{03} - z_{ca0}}{z_{03} - z_{02}}$	0
3	0	$\frac{z_{ca0} - z_{20}}{z_{03} - z_{02}}$	0
4	C/4	0	1/6
5	C/4	0	1/6
6	3/4·C	0	1/3

Matriu de Tf

Per la transformació de les forces i moment aerodinàmics es fa la següent matriu:

$$T_F = \begin{bmatrix} -kL_1 & -kL_2 & -kL_3 & -kL_4 & -kL_5 & -kL_6 \\ \frac{kM_1}{c_1} & 0 & 0 & \frac{kM_4}{c_4} & \frac{kM_5}{c_5} & \frac{kM_6}{c_6} \end{bmatrix}$$

Es troben els valors de kL i de KM amb les següents condicions:

La força resultant ha de ser la sustentació (es negativa perquè z va cap avall):

$$\sum kL_i = -1$$

No pot tenir moment resultant, ja que tot el moment està inclòs en el coeficients de moment:

$$\sum (kL_i \cdot c_i) = 0$$

A cada secció les forces són iguals per evitar tensions internes:

$$kL_2 = kL_3$$

$$kL_4 = kL_5$$

Per acabar de restringir el problema s'afegeixen algunes relacions que permeten distribuir la sustentació d'una manera coherent:

$$kL_1 = r_1 \cdot kL_2$$

$$kL_5 = kL_6$$

On $r_1 = 0.5$ $r_2 = 3$ per exemple.

En el cas de els coeficients de repartiment del moment. El moment total ha de ser el mateix que el calculat:

$$\sum kM_i = 1$$

I la força total ha de ser nul·la ja que la sustentació es calcula a part:

$$\sum \frac{kM_i}{c_i} = 0$$

Sabent que en c/4 no es fa moment i que en cada secció les forces són iguals:

$$kM_2 = kM_3 = 0$$

$$kM_4 = kM_5$$

Aquí fa falta una altra restricció:

$$kM_5 = r_3 \cdot kM_6$$

On $r_3 = 3$ per exemple

Matriu de pes

També es podria afegir una matriu de pes per un pes repartit dintre del caixó de torsió. Però per això també s'hauria de tenir en compte la massa en el càlcul de la inèrcia de l'estructura. Això complicaria més el problema per això no ha estat implementat.

La matriu tindria la següent forma.

$$P_{cz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} m_c g$$

On m_c seria la massa repartida en cada costella que només afecta en la força vertical del nodes del caixó, no afecta al caire d'atac ni al de sortida.

Resolució del problema

Les matrius trobades es fan per a cada costella, per resoldre el problema global es troba una matriu global de cada una d'elles.

Aquesta matriu es forma posant en una matriu de zeros les matrius de cada costella en la diagonal.

Una vegada es tenen totes les matrius de les forces el problema diferencial es resol de la següent manera:

$$\ddot{x}M + Kx = F_a''\ddot{x} + F_a'\dot{x} + F_ax + F_{a0}$$

De manera que descomposem el problema en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= (M - F_a'')^{-1}(F_{a0} + (F_a' - K)x_1 + F_a''x_2)\end{aligned}$$

Així es resol l'equació diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (M - F_a'')^{-1}(F_a' - K) & (M - F_a'')^{-1}F_a'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (M - F_a'')^{-1}F_{a0} \end{bmatrix}$$

Per el mètode OD45 ja que és el que funciona millor

Resultats de la simulació

Aplicada la simulació amb les dades següents:

$$U_\infty = 100 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 5^\circ$$

$$E_{\text{alumini}} = 6.5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

$$A = 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\rho_{\text{alumini}} = 6.34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Geometria:

Número costelles=6

Envergadura de la semiala: 5m

Corda: 1.5 m

Espessor: 20 cm

En la gràfica següent es gràfica la deformació d'un punt de l'extrem de l'ala. Es pot observar que es produeix una gran deformació inicial que produeix una oscil·lació que s'acaba esmorteint per arribar a un punt estable de flexió.

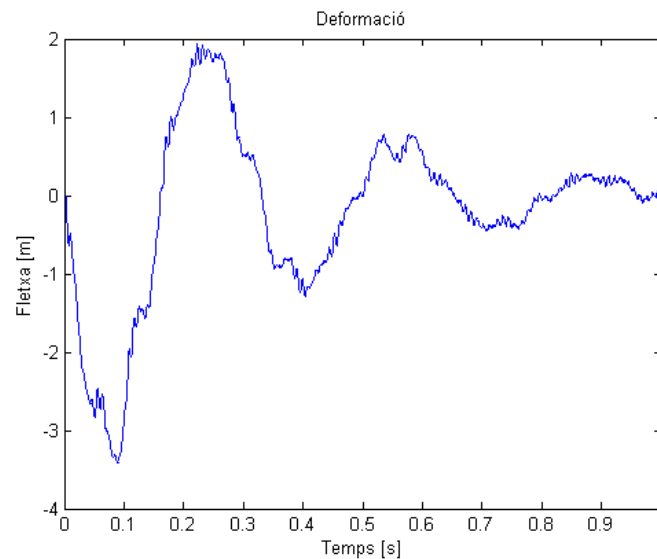


Figura 45: Deformació d'un punt de l'extrem de l'ala.

L'energia també oscil·la fins a establir-se en un punt d'equilibri.

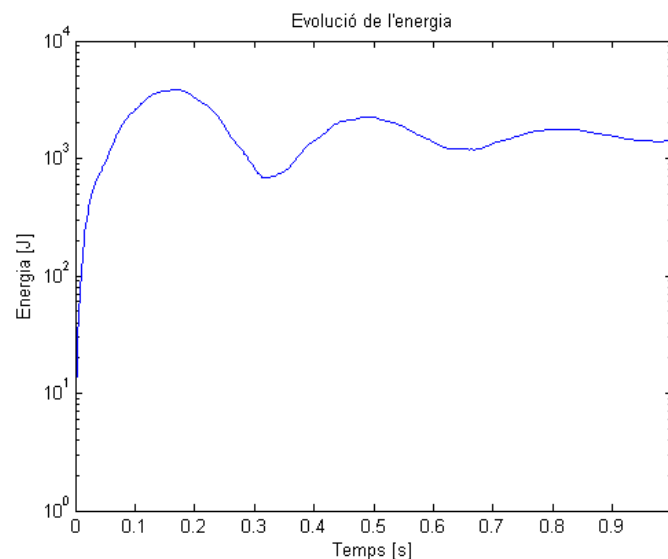


Figura 46: Energia d'un punt de l'extrem de l'ala.

En les gràfiques següents s'ha simulat la deformació i l'energia en un interval major de temps. En les quals es pot observar que l'estructura es desestabilitza a partir dels 4 segons aproximadament. El comportament és estrany, primer s'estabilitza i després d'un temps es desestabilitza i l'estructura col·lapsa.

Aquest fenomen s'ha visualitzat en una animació en GID. Al principi, després d'arribar a la posició d'equilibri, es produeixen petites vibracions. Aquestes petites vibracions provoquen el col·lapse d'un punt que acaba al col·lapse total de l'estructura.

No s'ha pogut conèixer l'origen d'aquest fet, que passa en totes les simulacions, per diferents condicions i paràmetres de l'estructura. Es podria relacionar amb el **flameig** encara que el comportament no és l'esperat en aquest fenomen. També podria ser degut a un error numèric tant per l'acumulació d'error (poc probable perquè és ODE45). O podria ser degut a la forma de les forces aerodinàmiques que són **sempre verticals** per a poder simplificar el problema.

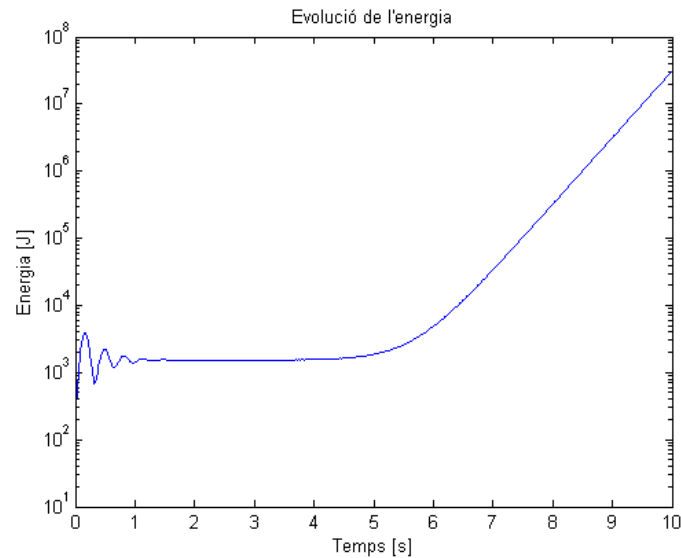


Figura 47: Energia calculada per un interval de temps major.

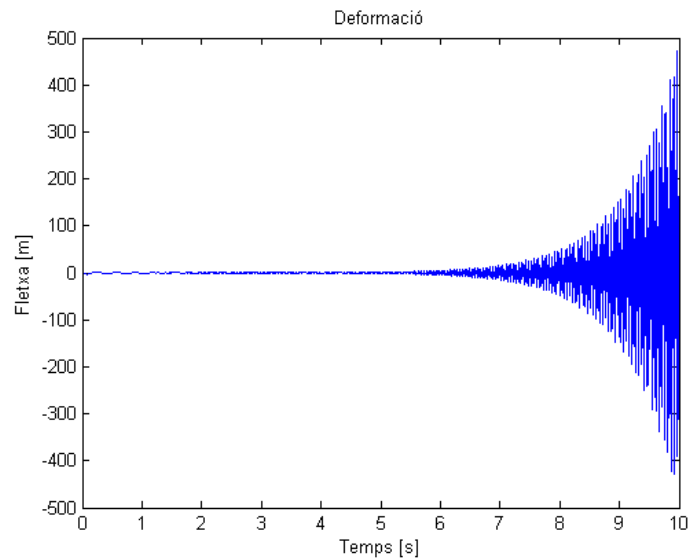


Figura 48: Deformació calculada per un interval de temps major.

Si s'augmenta la rigidesa de l'estructura ($E = 6.5 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$) les deformacions són més petites amb un valor més realista. Amb les deformacions més petites l'energia també és més petita.

A més la freqüència d'oscil·lació fins a estabilitzar-se és major, com és d'esperar segons :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

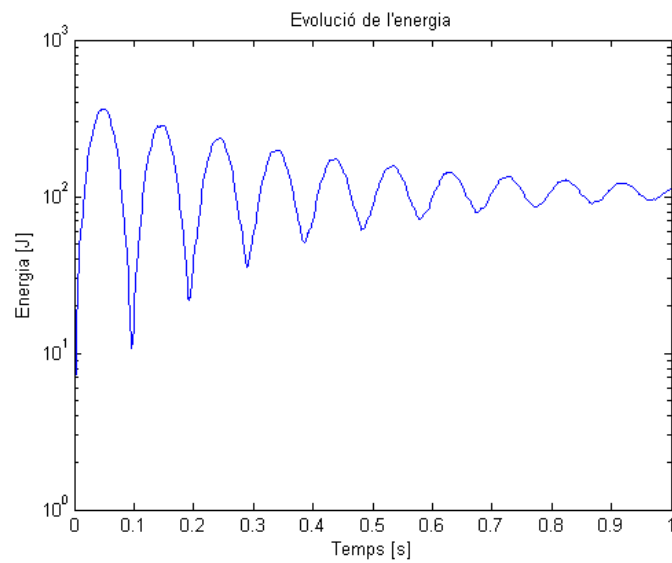


Figura 49: energia per a $E=6.5e11$

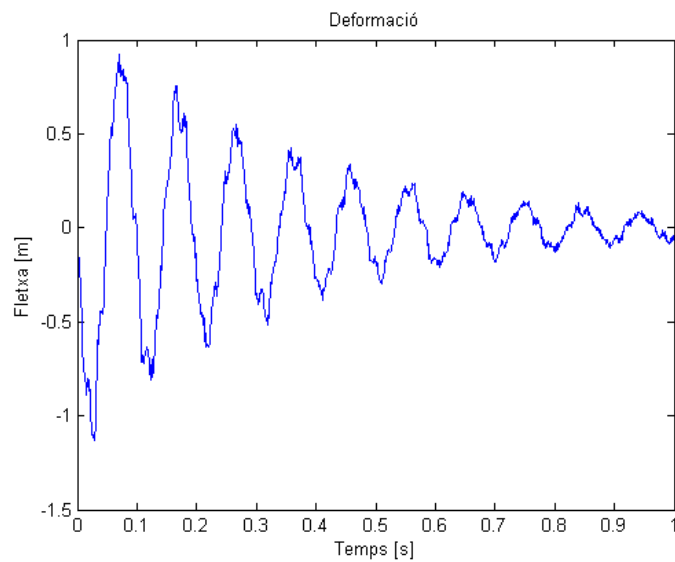


Figura 50: deformació per a $E=6.5e11$

Col·lapse

Per un mòdul elàstic més petit ($E = 6.5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$) l'estructura ja no tendeix a estabilitzar-se de manera que l'ala es deforma en el sentit de la sustentació. En aquest cas l'estructura col·lapsa degut a que la rigidesa a flexió no pot compensar el moment que produeix la sustentació.

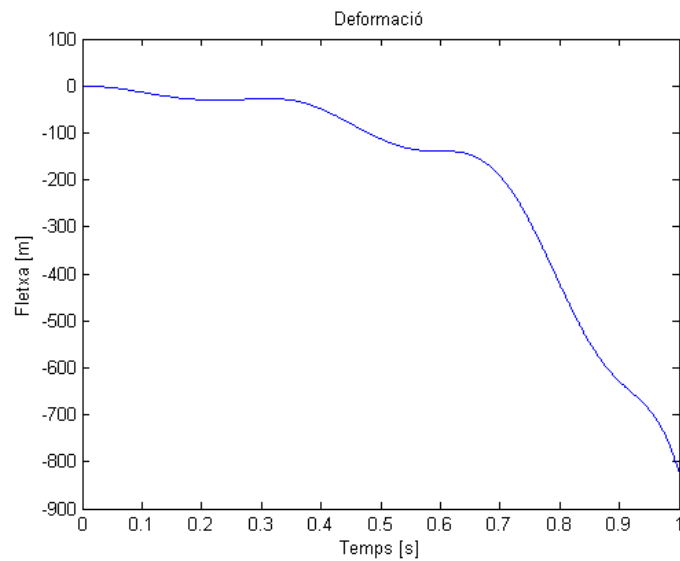


Figura 51: deformació per a $E=6.5e9$

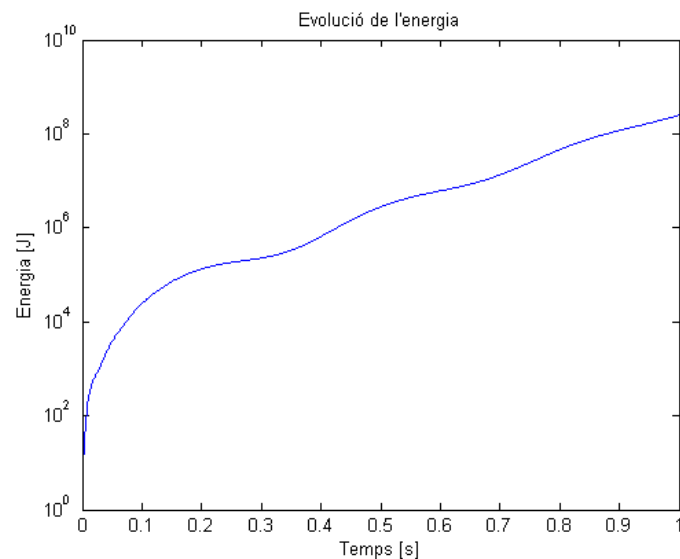


Figura 52: energia per a $E=6.5e9$

No s'ha pogut veure el fenomen de flameig encara que hauria estat interessant. Per al flameig es necessiten unes condicions concretes i és difícil de trobar fent simulacions puntuals. Aquestes simulacions, a més necessiten un temps de simulació elevat.

Visualització

En la següent figura es poden veure les deformacions de l'ala en el moment on arriba a un règim estacionari.

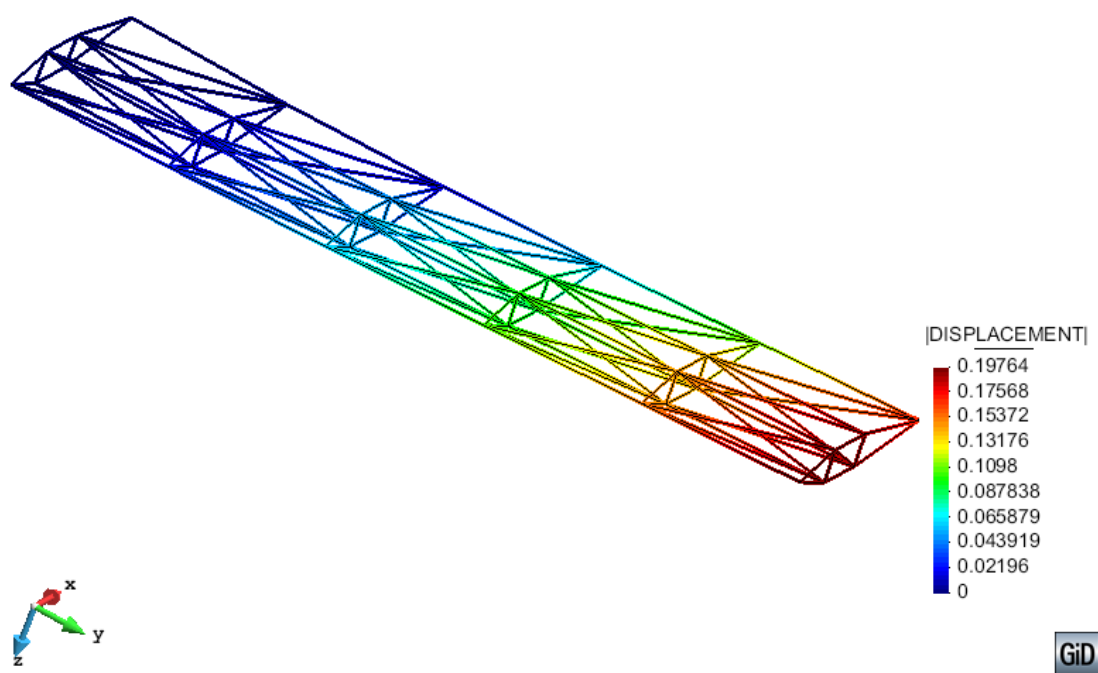


Figura 53: Visualització de la deformació de l'ala.