TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

1. Übungsblatt für die Woche 08.04. - 14.04.2018

Zahlenfolgen, Monotonie, Beschränktheit

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind durch $\boxed{\mathbf{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.

Ü1 (a) Untersuchen Sie die gegebenen reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$(1)\ x_n = \frac{n-1}{n+1}, \qquad (2)\ x_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1}, \qquad (3)\ x_n = \frac{n}{5} + \frac{5}{n},\ n \geq 1$$

auf Monotonie und Beschränktheit. Was läßt sich bezüglich Konvergenz schließen?

(b) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Was läßt sich dann über das Monotonieverhalten der Folgen

$$(1)\ y_n = \ln(x_n), \qquad (2)\ y_n = \tfrac{1}{x_n}, \qquad (3)\ y_n = \sin(x_n), \qquad (4)\ y_n = 1 - 2x_n$$

aussagen?

(c) Untersuchen Sie die gegebenen reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Konvergieren diese Folgen?

$$(1)\ x_n = \ln\left(\frac{7n+1}{3n-1}\right),\ n \geq 1, \qquad (2)\ x_n = \sqrt{1 - \sin\left(\tfrac{1}{n}\right)},\ n \geq 1.$$

Ü2 (a) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) mit

$$x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}, \quad x_0 = \sqrt{3}$$

durch $\sqrt{2} < x_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und streng monoton wächst.

(b) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Zahlenfolge (y_n) mit

$$y_{n+1} := \frac{1}{3}(y_n^2 + 2), \quad y_0 = \tfrac{7}{5}$$

durch $1 < y_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist und streng monoton fällt.

Ü3 Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad x_0 = 1$$

rekursiv definiert. Dadurch lässt sich der Term $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$ (*unendlicher Kettenbruch*) Schritt für Schritt aufbauen.

Zeigen Sie, dass sich die Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ schreiben lassen.

H4 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Untersuchen Sie die reelle Zahlenfolge (x_n), definiert durch

$$x_n = 1 - \sqrt{\frac{3n+5}{4n+7}}\ ,\ n \geq 0,$$

auf Monotonie. (Tipp: Es empfiehlt sich, zuerst die Folge (y_n) mit $y_n := \frac{3n+5}{4n+7}$ zu betrachten.)

(b) Gegeben ist die rekursive Folge (x_n) mit

$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}, \quad x_0 = \frac{3}{4}\ .$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Folge durch $0 < x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Nutzen Sie dies anschließend, um zu zeigen, dass (x_n) streng monoton fällt.

H5 Es sei (x_n) eine streng monoton fallende Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welches Monotonieverhalten zeigt dann die Folge (b_n) mit

$$b_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\ ?$$

Welche zusätzliche Forderung muss man an die Folge (x_n) stellen, damit die Folge (b_n) konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

H6 Untersuchen Sie die reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit:

(a) $x_n = \frac{n+3}{n+1}$,

(b) $x_n = \sqrt{1 - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)},\ n > 1,$

(c*) $x_n = n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right),\ n > 0.$

Hier hilft geschicktes Umformen mit dem kleinen Trick:

$$y_n = n\left(2 - \sqrt{4 - \frac{1}{n}}\right)\frac{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}}.$$