*Satz:*

Jede Folge $(x_n)$ besitzt höchstens einen Grenzwert.

*Beweis:*

Annahme: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ und $a \neq b$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\exists N_a \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N_a \implies |x_n - a| < \varepsilon$$

und

$$\exists N_b \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N_b \implies |x_n - b| < \varepsilon$$

Dann gilt auch:

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N \implies |x_n - a| < \varepsilon \text{ und } |x_n - b| < \varepsilon$$

denn man kann $N := \max\{N_a, N_b\}$ setzen.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Für alle $n \geq N$ gilt dann:

$$|a-b| = |a-x_n+x_n-b| = |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n|+|x_n-b| = |x_n-a|+|x_n-b| < 2\varepsilon$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Damit haben wir gezeigt:

$$0 \neq |a-b| < 2\varepsilon$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Wähle z.B. $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3}$.

Dann gilt:

$$|a-b| < 2 \cdot \frac{|a-b|}{3}$$

und damit $1 < \frac{2}{3}$. Das ist ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass die Annahme falsch ist.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ folgt also $a = b$.

$\square$

*Satz:*

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

*Beweis:*

(1) Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig, fest).

Wir wollen zeigen:

Es gibt eine natürliche Zahl $N$, so dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt:

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n - 0| = |q^n - 0| = q^n < \varepsilon$$

(2) Um ein solches $N$ zu finden, nutzen wir folgenden „Trick“:

Wir notieren $\frac{1}{q}$ in der Form $\frac{1}{q} = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$
(wegen der Voraussetzung $0 < q < 1$ ist das stets möglich).

Nun können wir $\frac{1}{q^n}$ für jede natürliche Zahl $n$ wie folgt darstellen:

$$\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$$

Dabei folgt $(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta$ aus der Bernoulli-Ungleichung.

Es gilt also $q^n \leq \frac{1}{n\delta}$.

(3) Wegen (1) ist eine natürliche Zahl $N$ gesucht, die

$$n \geq N \;\Rightarrow\; q^n < \varepsilon$$

erfüllt. Wegen (2) wissen wir, dass $q^n \leq \frac{1}{n\delta}$ gilt.

Setze $N := \lceil \frac{1}{\varepsilon\delta} \rceil + 1$. Dann erfüllt $N$ die in (1) geforderte Bedingung, denn:

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon\delta} \right\rceil + 1 \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon\delta} \;\Rightarrow\; q^n \leq \frac{1}{n\delta} < \varepsilon$$

Insgesamt gilt also

$$n \geq N \Rightarrow\; q^n < \varepsilon$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

$\square$