TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

3. Übungsblatt für die Woche 22.04. - 28.04.2019

Reihen, Partialsumme, Konvergenzkriterien

Ü13 (a) Die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n}),\ x_0 = c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mit reellem Parameter $c > 0$ ist konvergent. Berechnen Sie den Grenzwert.

(b) Es wird die rekursiv definierte Zahlenfolge

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}(x_n + 1),\ x_0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

betrachtet.

- Die Folge ist durch $x_n < \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt und wächst streng monoton. Berechnen Sie den Grenzwert.
- Ermitteln Sie eine explizite Darstellung $x_n = f(n), n \in \mathbb{N}$.

Ü14 Welche der angegebenen Reihen sind konvergent? Verwenden Sie das Nullfolgenkriterium (Hauptkriterium), bekannte Werte von Reihen oder geeignete Rechenregeln.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + 3^{k+1}}{5^k}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 7(-5)^n}{9^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{\frac{n}{2}} + 1}{3^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n - 1\right)$, (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{k^2} + \frac{\pi\sqrt{42}}{2^k}\right)$.

Ü15 (a) Verwenden Sie geeignete Konvergenzkriterien, um die folgenden Reihen auf Konvergenz zu untersuchen. Bei welchen dieser Reihen können Sie sogar auf absolute Konvergenz schließen?

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k \cdot 4^k}$, (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{7(k-1)!}$, (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\sqrt{k} - 1}$,

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)^2}{2^k}$, (5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(2 - \ln(e^2 - \tfrac{1}{k^2})\right)$, (6) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ auf Konvergenz.

Überlegen Sie sich, ob Ihr Ergebnis allgemein auf Reihen der Form $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ für ein festes $x \in \mathbb{R}$ zutrifft. Sind zusätzliche Forderungen an x nötig? Wenn ja, wie müssten solche Forderungen vermutlich aussehen? Begründen Sie Ihren Vorschlag!

H16 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 7^{k+1} - 2^{k-2}}{8^k}$, indem Sie die Reihe auf geometrische Reihen zurückführen.

(b) Nutzen Sie geeignete Konvergenzkriterien, um die folgenden zwei Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2}\left(4 - \frac{3}{k}\right)^{-k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$.

H17 (a) Untersuchen Sie anhand des Nullfolgenkriteriums (Hauptkriteriums) für die zwei Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n - 1\right)$,

ob sie einen reellen Reihenwert haben können.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen mittels geeigneter Kriterien auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)^2}{2 \cdot 3^k}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k - \sqrt{k}}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (k+1)!}{k^k}$.

Welche dieser Reihen konvergieren absolut?

H18* Am Anfang eines 1 km langen Zaubergummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie 1 m voran. Nachts, wenn sie schläft, dehnt sich das Band gleichmäßig aus, so dass es im Verlaufe der Nacht um 1 km länger wird. Die Schnecke ist unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar.

Schafft es die Schnecke, das Ende des Bandes in endlicher Zeit zu erreichen?