Grundlagen der Elektrotechnik

(Eine Zusammenfassung für Studenten der Richtung Informatik)

Auf den folgenden Seiten finden Sie eine Zusammenfassung der Gesetze und Rechenmethoden der Netzwerk-und Feldberechnung, die als Grundlage in den technisch orientierten Fächer des Informatikstudium erforderlich sind. Deshalb sollten Sie Ihre Kenntnisse durch schrittweises Durcharbeiten der einzelnen Kapitel prüfen und müssen bei Unklarheiten die bekannten Lehrbücher der Elektrotechnik zu Rate ziehen.
In Kapitel 1 finden Sie einige elementare Hinweise. Das Kapitel 3 zeigt Ihnen die Lösungsstrategien für die Schaltungsberechnung. In Kapitel 4 ist die Berechnung von Schaltvorgängen bei Vorhandensein von R, C und L dargelegt (Schaltvorgänge bei R und C sind sind die Grundlage für die Untersuchung der Schaltgeschwindigkeit der Elektronik).
Kapitel 5 und 6 beschäftigen sich mit der Feldberechnung, die für das Verständnis von unerwünschten Verkopplungen in elektronischen Systemen notwendig ist.
Einige Übungsaufgaben (Kapitel 7) dienen der Kontrolle der Fertigkeiten. Sie sollten ohne Hilfsmittel gelöst werden.

1 Allgemeines zum Umgang mit physikalischen Größen

Das SI-Einheitensystem

Da alle elektrischen Größen zu den physikalischen Größen gehören, sollen einleitend einige Hinweise zum Umgang mit diesen Größen gegeben werden.
Das Rechnen mit physikalisch– technischen Größen wird durch das internationale Einheitensystem geregelt, das 1960 in Paris von der „10. Generalkonferenz für Maße und Gewichte“ für die Mitgliedsstaaten der Meterkonvention als verbindliche Grundlage beschlossen wurde. Es wird als Internationales Einheitensystem bezeichnet und seine Abkürzung ist in allen Sprachen **SI**.

Physikalische Größen sind meßbare Merkmale von Objekten, Vorgängen und Zuständen. Sie sind deshalb **qualitativ** eindeutig charakterisiert und **quantitativ** bestimmt. Deshalb besteht eine Größe immer aus dem Produkt von Zahlenwert und Einheit. (m = 15 kg). Will man von einer Größe nur die Einheit angeben, setzt man die Größe in eckige Klammern.
Beispiel: [T] = K bedeutet, daß die Einheit der Temperatur das Kelvin ist.

Man beachte, daß die oben genannte Festlegung auch für reine Zählgrößen, die durch Abzählen (und nicht durch das Messen) einer Anzahl gleicher Objekte gebildet werden, gilt. Dabei stehen immer vereinbarte Einheiten wie Umdrehungen, Teilchen, Stück, Schwingungen usw. dahinter.

Grundeinheiten

Länge	l	(m)	Temperatur	T	(K)
Masse	m	(kg)	Stoffmenge	n	(mol)
Zeit	t	(s)	Lichtstärke	I_v	(cd)
Stromstärke	I	(A)			

Von den 7 Grundgrößen des SI ist die elektrische Stromstärke die einzige elektrische Größe.
Alle anderen elektrischen Größen wie Ladung Q, elektrische Spannung U, elektrische Feldstärke E, elektrischer Widerstand R, Kapazität C usw. sind abgeleitete Größen, die sich mit Gleichungen auf die Basis- oder abgeleiteten Größen zurückführen lassen.

Zehnerpotenzen

Für die bessere Darstellung des oftmals breiten Wertevorrats der Größen benutzt man sinnvollerweise die üblichen **Vorsätze** vor dem Zahlenwert. In der Elektrotechnik genügen im allgemeinen die Vorsätze

1 Tera	(1 T)	$= 10^{12}$	1 milli	(1 m)	$= 10^{-3}$
1 Giga	(1 G)	$= 10^{9}$	1 mikro	(1 µ)	$= 10^{-6}$
1 Mega	(1 M)	$= 10^{6}$	1 nano	(1 n)	$= 10^{-9}$
1 Kilo	(1 k)	$= 10^{3}$	1 piko	(1 p)	$= 10^{-12}$

Bsp.: 1 kΩ $= 10^3$ Ω = 1000 Ω

So liegen beispielsweise die Werte von Widerständen in elektronischen Schaltungen im kΩ- Bereich und Kapazitäten haben so kleine Werte, daß sie mit pF, nF oder µF darstellbar sind. Man nutzt diese Vorsätze, um nicht einen Zahlenwert mit vielen Nullen oder Nullen nach dem Komma zu haben.
(Schlecht: R = 1500000 Ω; richtig: R = 1,5 MΩ oder C = 100 µF anstelle C = 0,0001 F)

Genauigkeit

An dieser Stelle sei auch noch darauf hingewiesen, daß der Informationsgehalt der Zahlenwerte physikalischer Größen prinzipiell der realen Genauigkeit der Größe anzupassen ist. Dies erfolgt durch die Wahl der Stellenzahl für den Zahlenwert.
Alle elektrischen Größen haben üblicherweise eine Unsicherheit von einigen Prozent, erst mit Präzisionsmessungen erreicht man Fehler von 10^{-4} bis 10^{-6}. Es gibt eine Ausnahme bei der Darstellung bzw. Messung der Frequenz f. Sie ist ohne weiteres mit Fehlern von nur 10^{-7} bis 10^{-10} meßbar.
Erhält man also nach einer Berechnung z.B. I= 0,0058479 A, wird deshalb I = 5,8 mA angegeben!

Gleichungen

- Naturgesetze (von der Natur bestimmt)
- Definitionsgleichungen (vom Mensch festgelegt)

Die meisten Gleichungen werden als Größengleichungen beschrieben:

$U = I \cdot R$ Bsp.: $40V = 10\Omega \cdot 4A$

Diese Größengleichungen kann man in

a) Dimensionsgleichung (auch Einheitengleichung) und
b) Zugeschnittene Größengleichung zerlegen.

a) [Spannung] = [Strom] · [Widerstand] $1\ V = 1\ A \cdot 1\ \Omega$

b) $U/V = I/A \cdot R/\Omega$ $40 = 4 \cdot 10$

Physikalische Größen können konstant oder Zeitfunktionen sein. Um sie unterscheiden zu können, verwendet man für Zeitfunktionen kleine Buchstaben und für Gleichgrößen Großbuchstaben.

2 Elektrische Größen und Erscheinungen

2.1 Die elektrische Ladung

Definition
Formelzeichen : **Q**
Einheit : **1C (Coulomb) = 1As (Amperesekunde)**

negative Ladung: positive Ladung:

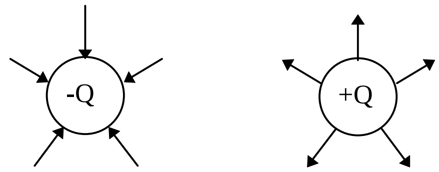


Abbildung 1

Negative Ladungsträger: Elektronen und Ionen
Positive Ladungsträger: Ionen

Von ruhenden Ladungen gehen elektrische Feldlinien aus. Die positive Ladung ist die Quelle der Feldlinien, die negative Ladung die Senke. Jede Feldlinie beginnt auf einer Ladung und endet auf der gleich großen entgegengesetzten Ladung. Die räumliche Verteilung der Ladungen bestimmt die Struktur des Feldes. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß der Feldstärke.

Das Elektron
Betrachten wir die positiven und negativen Ladungen, so stellen wir fest, daß die Elektronen als negative Ladungen die kleinsten Ladungsträger sind. Eine positive Ladung stellt sich als Atom mit fehlenden (Außen-) Elektronen dar.
Elementarladung (Ladung eines Elektrons): $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Masse eines Elektrons: $m_e = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg

Elektrische Leiter und Nichtleiter
Die Leitfähigkeit wird durch das Vorhandensein von beweglichen Ladungen bestimmt.
Alle festen, flüssigen und gasförmigen Stoffe sind in Abhängigkeit von der Existenz frei beweglicher Ladungsträger in ihnen in Leiter, Halbleiter und Nichtleiter einteilbar.
Leitwerte χ (in $(\Omega\ \mathrm{m})^{-1}$):
Glas $10^{-10}...10^{-15}$ GaAs 10^{-3}
Si 10^{-2},(dotiert 10^{-1}) Eisen 10^{7} .
Bei den guten Isolatoren wie Glas, Keramik und Siliziumdioxid liegt das Leitband 10 eV über dem Valenzband
Bei den Halbleitern liegen diese beiden Bänder 1 bis 2 eV auseinander, bei den Metallen überlappen sie sich.

2.2 Der elektrische Strom

Definition
Formelzeichen : **I**
Einheit : **1A (Ampere)** (Grundeinheit)

$$\boxed{i = \frac{dQ}{dt} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{Q}{t}}$$

Der Strom gibt an, wie viele Ladungen pro Zeiteinheit durch einen Leiter fließen. Der Großbuchstabe steht für einen konstanten Strom oder Effektivwert (bei Wechselstrom), der Kleinbuchstabe steht für einen Momentanwert.
Geschwindigkeit eines Elektrons im Leiter : $V_{Elektron} < 1$ mm/s
Geschwindigkeit eines Elektrons im Elektronenstrahl: $V_{Strahl} \approx 70000$ km/s
Geschwindigkeit des elektrischen Zustandes : $V_{Information} \approx 3 \cdot 10^5$ km/s = c

Freie Ladungen können nicht erzeugt werden, sie entstehen durch Ladungstrennung. Sich bewegende Ladungen sind zusätzlich zum elektrischen Feld von einem Magnetfeld umgeben.

Kennzeichen und Nachweis des elektrischen Stromes:
- Wärmewirkung
- Magnetfeld
- Stofftransport in Elektrolyte

Strommesser

Die Messung des elektrischen Stromes erfolgt mit Hilfe von Strommessern (Amperemeter). Sie werden in Reihe in den Strompfad geschalten. Strommesser sollen einen möglichst geringen elektrischen Widerstand besitzen, um die Meßergebnisse nicht zu verfälschen.

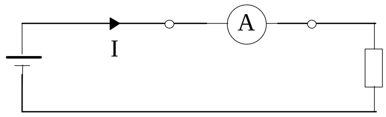


Abbildung 2

Stromrichtung

Die physikalische Stromrichtung unterscheidet sich von der technischen Stromrichtung im Vorzeichen und gibt die Flußrichtung der negativen Ladungen (Elektronen) an.

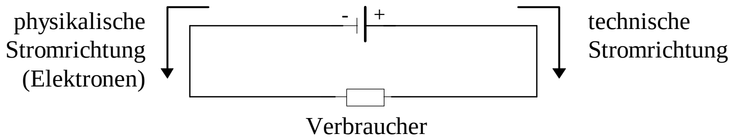


Abbildung 3

Stromdichte

Formelzeichen : **S**
Einheit : **$1A/m^2$ (Ampere pro Quadratmeter)**

$$S = \frac{dI}{dA_\perp} \qquad A_\perp \text{ steht senkrecht zum Strom.}$$

Die Stromdichte gibt an, wieviel Strom durch eine bestimmte Querschnittsfläche fließt.
- Im unverzweigten Stromkreis ist die Stromstärke überall gleich
- Im geschlossenem Stromkreis können keine Ladungsträger hinzukommen, noch verschwinden.

Knotenpunktsatz

Sämtliche auf den Knoten mündenden Leitungen sind Teilstücke von geschlossenen Kreisen, in denen der Strom ein in sich geschlossenes Band bildet. Also kann im Knoten kein Elektronenüberschuß oder -mangel auftreten.

$$\boxed{\sum I_{hin} = \sum I_{weg} \text{ oder } \sum I = 0}$$

(1. Kirchhoffscher Satz oder Knotensatz)

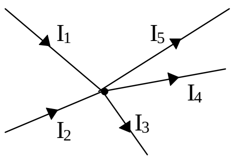


Abbildung 4

In diesem Falle: $I_1+I_2=I_3+I_4+I_5$.

2.3 Die elektrische Spannung

Definition

Formelzeichen : **U**
Einheit : **1V (Volt)**

$$U = \frac{W_{AB}}{Q} \qquad 1V = 1\frac{kg\ m^2}{As^3}$$

Das Vorzeichen von W_{AB} (Energie) bestimmt, ob es sich um eine Spannungsquelle oder einen Spannungsabfall handelt. Auch hier bedeutet ein Großbuchstabe eine konstante Spannung bzw. Effektivwert und ein Kleinbuchstabe einen Momentanwert.

Stromkreis

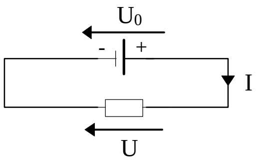


Abbildung 5

Definition:
1. Urspannung U_0 (Spannungsquelle, Ursache)
2. Spannungsabfall U (Wirkung)

Die Ladungsträger erhalten durch die Spannungsqelle Energie und geben diese in Spannungsabfallstrecken des Kreises ab. (Abb. 5 genau durchdenken!)

Urspannungen:
1. Chemische Wirkung (Ionen vom Elektrolyt an Elektroden, Batterie)
2. Wärmewirkung (Thermoelement)
3. Magnetfeld (Dynamo)
4. Fotowirkung (Solarzelle)
5. Influenz (Bandgenerator)
6. Piezoelektrizität (Ladungsverschiebung durch Druck auf einen Kristall)

Spannungsmesser

Das Messen der Spannung erfolgt mit Spannungsmessern (Voltmeter). Spannungsmesser werden parallel zum Meßobjekt angeschlossen. Um die Spannung nicht zu verfälschen, sollten Spannungsmesser einen möglichst hohen Innenwiderstand besitzen.

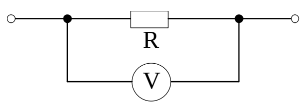


Abbildung 6

Maschensatz

Ladungsträger besitzen an jeder Stelle eine bestimmte Energie. Diese Energie wird durch das Potential ausgedrückt. Die Differenz zwischen zwei Potentialen ist die Spannung. Wenn man von einem Punkt (mit einem bestimmten Potential) ausgehend auf einen geschlossenen Weg (einer Masche) alle Spannungen addiert, muß die Gesamtspannung Null betragen, damit man am Ausgangspunkt wieder das gleiche Potential erhält. Dabei ist es unerheblich, ob in die Masche zusätzliche Ströme hinein oder herausfließen.

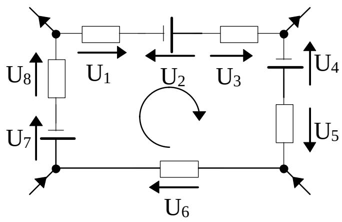


Abbildung 7

$$\boxed{\sum U = 0}$$

Hier: $U_1 – U_2 + U_3 – U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 = 0V$.
(2. Kirchhoffscher Satz oder Maschensatz)

Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle

Das Symbol der idealen Spannungsquelle hat keinen Widerstand und liefert unabhängig vom angetriebenen Strom die konstante Spannung U_0. Die reale Spannungsquelle hat aber einen **Innenwiderstand R_i**. Er bewirkt, daß bei Belastung der Spannungsquelle die Klemmenspannung absinkt. Außerdem bestimmt er den maximal entnehmbaren Strom, den Kurzschlußstrom.

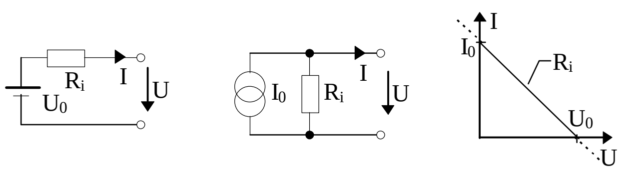


Abbildung 8

Anstelle der Spannungsquelle kann auch das Stromquellenersatzschaltbild angegeben werden. Es besteht aus der Parallelschaltung einer idealen Stromquelle I_0 (liefert den konstanten Strom I_0 und ist hochohmig) mit einem Innenwiderstand.

Die Innenwiderstände beider Schaltungen haben die selben Werte. Die **Leerlaufspannung U_0** existiert nur dann an den Klemmen der Schaltung, wenn kein Strom fließt. Umgekehrt fließt der **Kurzschlußstrom I_0** bei Kurzschluß der Klemmen, dann ist die Ausgangsspannung 0V.
Zwischen beiden Schaltungen gilt der Zusammenhang: $\mathbf{U_0=I_0 \cdot R_i}$.
Es existieren 3 markante Punkte, in denen die Spannungsquelle arbeiten kann:

1. **Leerlauf**: Es fließt kein Strom. An den Klemmen liegt die **Leerlaufspannung U_0** an. Der Quelle wird keine Leistung entnommen. Für Berechnungen genügt die Bedingung $R_i << R_a$ für die Annahme Leerlauf!
2. **Kurzschluß**: Der Lastwiderstand ist Null. Es fließt der **Kurzschlußstrom I_0** (maximaler Stromfluß). Die Klemmenspannung ist Null, es wird die Leistung $P = U_0^2 / R_i$ im Innenwiderstand der Quelle (!) umgesetzt.
3. **Anpassung**: Der Lastwiderstand ist gleich dem Innenwiderstand. Die Spannung über dem Lastwiderstand ist genau halb so groß wie die Leerlaufspannung. Die in R_a umgesetzte Leistung ist maximal.

2.4 Der elektrische Widerstand

<u>Definition</u>

Formelzeichen : **R**
Einheit : **1Ω (Ohm)**

$$R = \frac{U}{I} \qquad 1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Leiter: Metalle, Legierungen, Elektrolyte
Nichtleiter: Dielektrika, Vakuum, Gase, Flüssigkeiten (ohne Ionen), feste Körper (Nichtmetalle)
Halbleiter: Leitfähigkeit durch Dotierung

<u>Ohmsches Gesetz</u>

Wenn der Quotient aus U und I konstant, d.h. unabhängig vom absoluten Wert der Spannung ist, handelt es sich um einen Ohmschen Widerstand. Man spricht auch von einem linearen Widerstand. Lineare Widerstände sind solche aus Metallen und Legierungen. Sie sind berechenbar mit der Bemessungsgleichung

$$R = \frac{U}{I} = const$$

Kennlinie linearer Bauelemente Kennlinie eines nichtlinearen Bauelementes

Abbildung 9

<u>Berechnung lineare Widerstände</u>

zylindrische oder rechteckige Widerstände kann man mit folgender Formel berechnen: $R = \rho \frac{l}{A}$ Allgemein gilt: $R = \rho \int \frac{dl}{A}$
ρ ist der spezifische Widerstand (Einheit Ωm).
Der Widerstand ist im allgemeinen linear abhängig von der Temperatur: $\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$
α ist der lineare Ausdehnungskoeffizient.

<u>Leitwert</u>

Formelzeichen : **G**
Einheit : **1S (Siemens)**

$$G = \frac{1}{R} \qquad 1S = \frac{1A}{1V} = \frac{1}{1\Omega}$$

Der Leitwert ist das Reziproke zum Widerstand und gibt an, wie gut ein Material leitet.

<u>differentieller Widerstand, Kleinsignalwiderstand</u>

Formelzeichen : **r**
Einheit : **1Ω (Ohm)**

$$r = \frac{dU}{dI} \qquad 1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Am nebenstehenden Beispiel wurde für eine Diode der differentielle Widerstand r und der Gleichstromwiderstand R für einen Punkt eingezeichnet. Beide Werte sind abhängig von der Spannung über der Diode. Während der Gleichstromwiderstand das Verhältnis zwischen Spannung und Strom ausdrückt, gibt der differentielle Widerstand den Anstieg der U–I–Kurve an.
Bei linearen Widerständen gilt immer r = R.

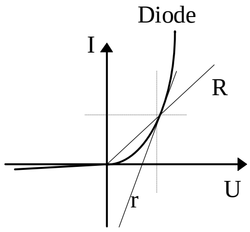


Abbildung 10

Reihenschaltung von Widerständen

$U_{ges} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ (Maschensatz)

$$\frac{U_{ges}}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \ldots + \frac{U_n}{I}$$ (I ist konstant.)

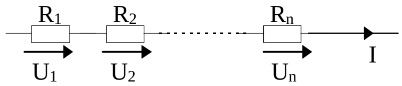


Abbildung 11

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt:

$$\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \quad \text{oder} \quad R_{ges} = \sum R_i}$$

Bei der Reihenschaltung ist der Gesamtwiderstand stets größer als der größte Einzelwiderstand.

Parallelschaltung von Widerständen

$I_{ges} = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ (Knotensatz)

$$\frac{I_{ges}}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \ldots + \frac{In}{U}$$ (U ist konstant.)

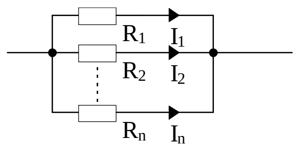


Abbildung 12

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt:

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_{ges}} = \sum \frac{1}{R_i}}$$

$$\boxed{G_{ges} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n \quad \text{oder} \quad G_{ges} = \sum G_i}$$

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

Kurzschreibweise: $R_{ges}=R_1 \parallel R_2$.
Allgemein: $R_{ges}=R_1 \parallel R_2 \parallel \ldots \parallel R_n$.

Speziell für zwei Widerstände gilt:

$$\boxed{R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Definition: $a \| b = \dfrac{a \cdot b}{a + b} = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

(|| hat Vorrang vor + und –)

Der Spannungsteiler

Es ist $U_1 = I \cdot R_1$, $U_2 = I \cdot R_2$ und $U_{ges} = I \cdot (R_1 + R_2)$

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{oder} \quad U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

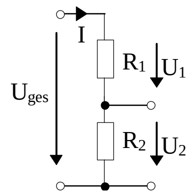


Abbildung 13

Der Stromteiler

$U = I_1 \cdot R_1$ und $U = I_2 \cdot R_2$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{oder} \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

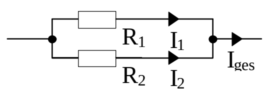


Abbildung 14

Während sich die Spannungen wie die Widerstände verhalten, ist das Stromteilungsverhältnis dem Widerstandsverhältnis umgekehrt proportional!

Stern-Dreieck-Umwandlung

In manchen Schaltungen treten Widerstandskombinationen auf, die mit den bisherigen Mitteln nicht gelöst werden können. Ein Beispiel ist die rechte Schaltung. Wenn $R_1/R_4 \neq R_2/R_5$ ist, so liegt über R_3 eine Spannung an, welche nicht ohne weiteres berechnet werden kann. Bei der Stern-Dreieck-Umwandlung werden drei Widerstände von einer Sternschaltung in eine Dreieckschaltung (oder umgekehrt) umgewandelt:

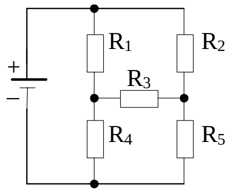


Abbildung 15

Stern➔ Dreieck bzw. Dreieck➔Stern

$$G_1 = \frac{G_{12} \cdot G_{13}}{\sum G} \quad \text{und} \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{\sum R}$$

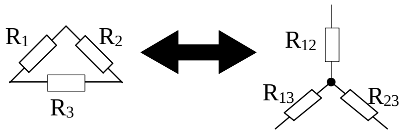


Abbildung 16

Mit den anderen Widerständen verfährt man ebenso.
In der Beispielgleichung kann man z.B. den Stern $R_1R_3R_4$ in ein Dreieck oder das Dreieck $R_1R_2R_3$ in einen Stern umwandeln. Wenn nach dem Strom durch einen Widerstand, der ersetzt wurde, gefragt wird, so muß man zuerst die Spannung an den Endpunkten des Dreiecks oder Sterns berechnen und anschließend an der Originalschaltung mit dem Ohmschen Gesetzes den gefragten Strom ausrechnen.

Die Wheatstonsche Brücke

Die Wheatstonsche Brücke wird zum genauen Bestimmen von Widerstandswerten verwendet. Im abgeglichenen Zustand ist der Strom I gleich Null. Daraus folgt:

$$\frac{R_X}{R_N} = \frac{R_2}{R_1}$$

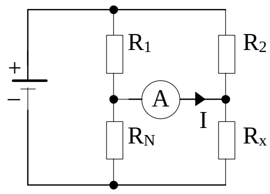


Abbildung 17

2.5 Die elektrische Leistung

Definition

Formelzeichen : **P**
Einheit : **1W (Watt)**

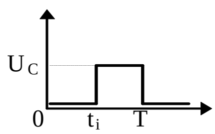
$$P = U \cdot I \qquad 1W = 1VA$$

$P=U\cdot I$ ist entweder die Gleichstromleistung oder wenn U und I die Effektivwerte einer Wechselspannung sind, ist es der Effektivwert der Wechselstromleistung, die aber identisch einer äquivalenten Gleichstromleistung ist. In der Schreibweise $p=u\cdot i$ handelt es sich um den Momentanwert p einer sich ändernden Leistung. Der Mittelwert einer solchen Leistung muß durch Integration über einen bestimmten Zeitraum berechnet werden.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\, dt$$

Beispiel 1: u(t) und i(t) sind Sinusfunktionen. Dann ergibt sich $P = U\cdot I$.
U,I =Effektivwerte. ($\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{eff}$)

Beispiel 2: Leistung bei binären Signalen:



$$P = \frac{1}{T}\int_0^{t_i} 0\, dt + \frac{1}{T}\int_{t_i}^{T} U_C \cdot I_C\, dt = 0 + \frac{1}{T} U_C \cdot I_C (T - t_i)$$

Zeitverlauf

$$= U_C \cdot I_C \frac{T - t_i}{T}$$

3 Netzwerkberechnungen bei Gleichstrom

3.1 Allgemeine Hinweise

Die Zusammenschaltung vieler Schaltelemente zu einem Netzsystem enthält Knoten und Maschen. Zwei benachbarte Knoten sind durch einen oder mehrere Zweige verbunden. Bei der Existenz einer Energiequelle im Netz fließt in jedem Zweig ein Strom. Um einen beliebigen Zweigstrom oder Spannungsabfall in einem Netz mit den Schaltelementen R, L, C mit bekannten Spannungs- und Stromquellen zu berechnen, sind die Grundbeziehungen notwendig und hinreichend. Im allgemeinsten Falle führt die Aufstellung der Gleichungen von einem beliebigen Netz auf Differentialgleichungen (letzteres siehe Kapitel 4: Schaltvorgänge) .

Günstige Varianten der Berechnung bei Vorliegen von Einschränkungen

Es ergeben sich unter den entsprechenden Voraussetzungen folgende Rechenwege:

1. Es sind **nur Gleichspannungen** vorhanden. Dann sind im eingeschwungenen Zustand alle Ströme zeitlich konstant, d.h. alle Differentialquotienten sind Null. Es ergeben sich einfache algebraische Gleichungen.
2. Es sind nur **lineare Schaltelemente** im Netzwerk und die Quellen liefern eine **sinusförmige** Spannung. Durch die Einführung der komplexen Rechnung werden die Differentialgleichung in allgemeine komplexe Gleichung überführt. Diese Rechenmethode findet z.B. in der Energietechnik und Nachrichtentechnik Anwendung. Diese Thematik wird in diesem Skript nicht behandelt.
3. Bei impulsförmiger Spannungsänderung bzw. beim Ein– und Ausschalten von Spannungen an linearen Schaltelementen (nur R und L oder R und C im Kreis) treten Schaltvorgänge (Übergangsvorgänge) auf. Aus dem Ansatz kommt man auf einfache Differentialgleichungen.
4. Im Netzwerk befindet sich **mindestens ein nichtlineares** Bauelement (Diode, Transistor u. a.): Es liegt eine nichtlineare Schaltung vor, die im allgemeinsten Fall mit aufwendigen Verfahren zu berechnen ist.

Die Berechnung der digitalen Schaltungen in der **Computertechnik** erfolgt nach dem Prinzip:
Für den Zustand Low und für den Zustand High ergeben sich zwei Gleichstromanordnungen, bei denen die nichtlinearen Bauelemente jeweils mit einer einfachen Schalterersatzschaltung verwendet werden.
Der Übergang zwischen beiden ist jeweils ein Schaltvorgang (Low/High und High/Low).

3.2 Verfahren der Netzwerkberechnungen bei Gleichstrom

Zur Berechnung werden die Zweigströme in willkürlicher Richtung als positiv eingeführt. Ein negatives Vorzeichen im Ergebnis sagt dann aus, daß der tatsächliche Strom dem angenommenen entgegen fließt. Der Spannungsabfall über einem passiven Zweipol wird positiv definiert in Richtung des Stromes durch diesen Zweipol.
Der Spannungspfeil einer Quelle wird ebenfalls als Spannungsabfall U_0 von Plus nach Minus positiv definiert, d.h. entgegen der Richtung des angetriebenen Stromes.
Die Umlaufrichtung in einer Masche ist willkürlich, die Spannungsabfälle sind dann vorzeichenbehaftet einzusetzen.
Existieren in einem Netzwerk k **Knoten** (Verbindungen zwischen Elementen), m **Maschen** (geschlossener Umlauf auf mehreren Zweigen) und z **Zweige** (Verbindung zwischen zwei Knoten), dann gibt es z–k+1 unabhängige Maschen und k-1 unabhängige Knoten.
In der nebenstehenden Schaltung existieren 3 Knoten (2 unabhängige), 3 unabhängige Maschen und 5 Zweige.

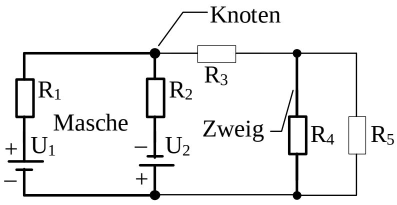


Abbildung 18

Berechnung mittels Kirchhoffscher Gesetze

Alle Zweigströme sind unbekannt. Um sie mit den Kirchhoffschen Gesetzen berechnen zu können, werden so viele Gleichungen benötigt, wie Zweige z vorhanden sind. Es existieren z-k+1 unabhängige Maschen und k-1 unabhängige Knoten, womit man die benötigte Anzahl von Gleichung erhält {(z-k+1)+(k-1) = z}.
In der Beispielschaltung existieren drei Zweige:

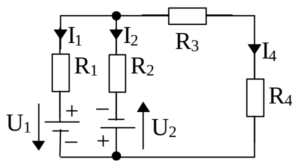


Abbildung 19

$U_1+I_1\cdot R_1-I_2\cdot R_2+U_2 = 0$ (linke Masche, gegen Uhrzeigersinn)
$-U_2+I_2\cdot R_2-I_4\cdot R_3-I_4\cdot R_4 = 0$ (rechte Masche, gegen Uhrzeigersinn)
$I_1+I_2+I_4 = 0$ (Knotensatz)

Aus diesem Gleichungssystem läßt sich jetzt die gesuchte Größe ermitteln.

Knotenspannungsanalyse (Einsparung der Maschengleichungen)

Zuerst muß jede auftretende Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt werden (siehe reale Spannungsquelle). Anschließend wird an jeden unabhängigen Knoten eine Knotenspannung zu einem Bezugsknoten eingeführt.
Bei der Beispielschaltung werden beide Spannungsquellen in Stromquellen umgewandelt. Z.B. ist $R_{1x}=R_1$ und $I_1=U_1/R_1$. An dem einzigen unabhängigen Knoten liegt die Spannung U_{K1}. Für die Beispielschaltung erhält man eine Knotengleichung:

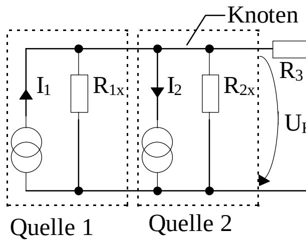


Abbildung 20

$\mathbf{I_1 - U_{K1}/R_{1x} - I_2 + U_{K1}/R_{2x} - U_{K1}/(R_3+R_4) = 0}$.
Über die Knotenspannung U_{K1} ist die gesuchte Größe berechenbar ($I_4=U_{K1}/(R_3+R_4)$).
Wichtig: Sind Spannung oder Strom in einer der Spannungsquellen der Ausgangsschaltung gesucht, müssen die Stromquellen wieder in Spannungsquellen zurückgerechnet werden.

Maschenstromverfahren (Einsparung der Knotengleichungen)

Es werden in das Netzwerk so viele Maschenströme eingeführt, wie es unabhängige Maschen besitzt. Nach Möglichkeit sollten die Maschen so gewählt werden, daß die gesuchten Größen nur in einer Masche vorhanden sind. Anschließend sind die Maschengleichungen aufzustellen und das entstandene Gleichungssystem zu lösen, wobei man die Maschenströme erhält. Aus diesen lassen sich die gesuchten Größen herleiten.
In der Beispielschaltung existieren 2 unabhängige Maschen. Jetzt werden die Maschenströme I_1 und I_2 eingeführt:
Maschengleichungen:
$\mathbf{-U_1+I_1 \cdot R_1+(I_1-I_2) \cdot R_2-U_2 = 0}$ (Masche 1)
$\mathbf{+U_2+(I_2-I_1) \cdot R_2+I_2 \cdot R_3+I_2 \cdot R_4 = 0}$ (Masche 2)
Jetzt kann man die Maschenströme I_1 und I_2 ermitteln. Der gesuchte Strom I_4 entspricht dem Maschenstrom I_2.
Wenn in der Schaltung Stromquellen auftreten, müssen diese in Spannungsquellen umgewandelt werden.

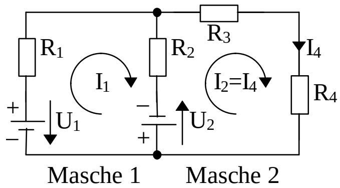


Abbildung 21

Der Grundstromkreis

Der Grundstromkreis besteht aus einer Spannungsquelle (aktiver Zweipol) und einem Lastwiderstand (passiver Zweipol). Die Berechnung des Stromes I und der Klemmenspannung kann sowohl grafisch als auch rechnerisch auf einfachste Weise erfolgen.
Bei der grafischen Lösung werden die Kennlinien vom aktiven und passiven Zweipol in ein Diagramm eingetragen, ihr Schnittpunkt ergibt den Arbeitspunkt.

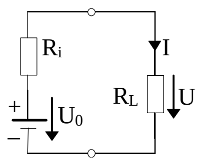


Abbildung 22

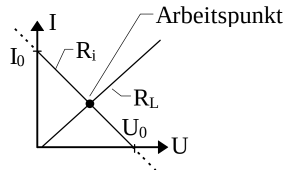


Abbildung 23

Bei der rechnerischen Lösung werden Strom und Spannung mittels Ohmschen Gesetz und Spannungsteilerregel errechnet:
$I = U_0/(R_i+R_L)$ und $U = U_0 R_L/(R_i+R_L)$.

Zweipoltheorie

Nach Zweipoltheorie wird das Netzwerk an der Stelle in einen aktiven und einen passiven Zweipol getrennt, an der die gesuchte Größe (Strom / Spannung) auftreten. Sowohl der aktive als auch passive Zweipol werden in ihre einfachste Ersatzschaltung umgerechnet. Man erhält man den Grundstromkreis. Die gesuchte Größe kann graphisch oder rechnerisch ermittelt werden.
In der Beispielschaltung wird R_4 als passiver Zweipol verwendet und alles andere durch eine reale Spannungsquelle als aktiven Zweipol ersetzt:

$R_i = R_3 + R_1 || R_2$

$$U_{ers} = \frac{U_1 \cdot R_2 - U_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2}.$$

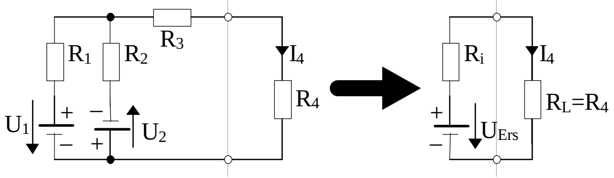


Abbildung 24

Es ist $I_4 = U_{ers}/(R_i+R_4)$.

Überlagerungssatz

Allgemeine Fassung: In linearen Systemen ist es bei der Berechnung gleichgültig, ob man zuerst die Ursachen überlagert und dann die Wirkung berechnet, oder ob man zuerst die Wirkungen von jeder Ursache berechnet und anschließend die Wirkungen überlagert.

Für die Elektrotechnik bedeutet dies, daß man in linearen Schaltungen (nur R, L, C) die gesuchte Größe als vorzeichenbehaftete Summe der für jede Spannungs- oder Stromquelle einzeln berechneten Teilgröße ermitteln kann. (Bis auf eine Quelle sind jeweils alle anderen nicht existent: das Symbol der Spannungsquelle hat 0Ω, der Widerstand des Symbols der Stromquelle geht gegen unendlich, die Innenwiderstände der Quellen verbleiben in der Schaltung).

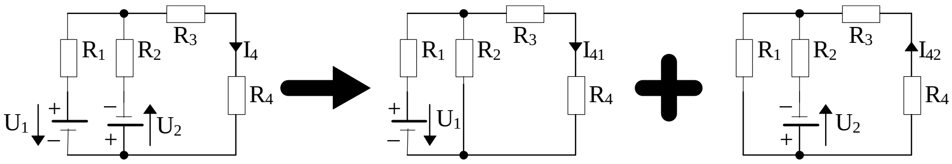


Abbildung 25

In der Beispielschaltung wird zuerst U_2 durch einen Kurzschluß ersetzt und I_{41} berechnet, anschließend U_1 kurzgeschlossen und I_{42} ermittelt. Laut Überlagerungssatz ist $I_4=I_{41}-I_{42}$.

4 Schaltvorgänge

4.1 Der Kondensator

Der Kondensator ist das reale Bauelement, das aus der Parallelschaltung von reiner Kapazität und Verlustwiderstand besteht (dielektrische Verluste). Beim verlustfreien Kondensator geht der Widerstand gegen unendlich. Der Plattenkondensator dient als Modellvorstellung für das homogene elektrische Feld zwischen den Platten.
Kondensatoren dienen frequenzselektiven Maßnahmen und als Speicher elektrischer Energie (in der Stromversorgungstechnik, als Stützkondensatoren bei der Versorgungsspannung von Schaltkreisen und als dynamische Speicherzelle beim Halbleiterspeicher.
In den elektronischen Schaltungen tritt die Kapazität als parasitäre Erscheinung auf, da alle spannungs-führenden Anordnungen eine Geometrie sind, die gegeneinander eine Kapazität haben und demzufolge Ladungen speichern.

Definition

Formelzeichen : **C**
Einheit : **1F (Farad)**

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} \qquad 1F = \frac{1As}{1V}}$$

Die Kapazität gibt an, wieviel Ladung bei einer bestimmten Spannung gespeichert wird.

Elektrische Eigenschaften

Das Klemmenverhalten der Kapazität wird durch folgende Strom- Spannungs- Beziehung beschrieben:

$$\boxed{i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt}$$

Merken Sie sich: Am Kondensator kann die Spannung nicht springen!

4.2 Der Schaltvorgang bei Vorhandensein von R und C

Die eine Impulsspannung liefernde Quelle ist kapazitiv belastet. Die Schaltung kann in nachfolgende Anordnung mit Schalter überführt werden:

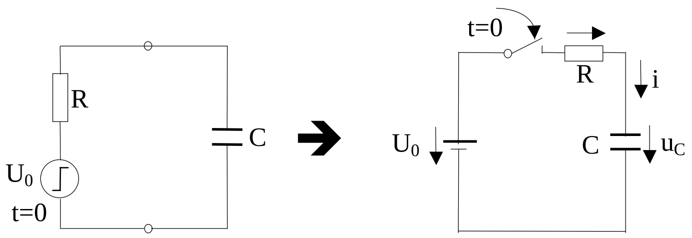


Abbildung 26

t < 0: Schalter lange vor t=0 geöffnet
t = 0: Schalter wird geschlossen
t = +0: $U_C = 0$! Die Kondensatorspannung ist noch Null, da sie nicht springen kann.
Für $t \geq 0$ gilt:

$U_0 = i \cdot R + u_C$ Maschengleichung nach dem Schließen des Schalters

$$= C \cdot R \frac{du_C}{dt} + u_C \qquad \cong \text{inhom. DG 1. Ordnung}$$

Für eine derartige Differentialgleichung ist die Lösung ohne spezielle mathematische Kenntnisse möglich:
Der Lösungsweg besteht aus folgenden Teilschritten:

1. Die Gesamtlösung der DG ist die Lösung der **hom**ogenen DG plus stationärer **End**zustand:
also $u_C(t) = u_{C\,hom} + u_{Cend}$

2. Die homogene DG erhält man, wenn man in der Ausgangsgleichung die verursachende Größe, in diesem Falle also U_0 gleich Null setzt:

$0 = CR\frac{du_c}{dt} + u_c$ also $u_c = -CR\frac{du_c}{dt}$. Man setzt CR=τ . Das ist die Zeitkonstante der Schaltung.

Jetzt erfolgt die Trennung der Variablen: $\frac{duc}{uc} = -\frac{dt}{\tau}$. Diese Gleichung wird auf beiden Seiten integriert.

Man erhält $\ln u_c = -t/\tau + \ln u_{c0}$. Dabei ist $\ln u_{c0}$ eine sinnvollgewählte Integrationskonstante. Schließlich folgt nach der Umstellung zu $\ln u_c - \ln u_{c0} = -t/\tau$ durch exponentieren:

$u_c = U_{c0}\, e^{-t/\tau}$.

Also ist die Lösung der homogenen DG $u_{c\,hom} = u_{c0}\, e^{-t/\tau}$.

3. Die Lösung der inhomogenen DG ist also

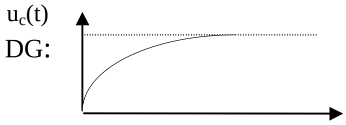
$u_c(t) = u_{c\,hom} + u_{c\,end} = u_{c0}e^{-t/\tau} + u_{c\,end}$.

Die beiden Unbekannten werden durch die Randbedingungen, die sich aus dem technischen Sachverhalt ergeben, bestimmt:

Bei t=0 ist $u_c(t) = 0$ und für $t \to \infty$ ist $u_c(t) = U_0$. Also werden aus obiger Gleichung zwei Bestimmumgsgleichungen:

1.: t=0: $0 = u_{c\,0} + u_{c\,end}$

2.: $t \to \infty$: $U_0 = 0 + u_{c\,end}$. Damit ist $u_c(t) = U_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ die Lösung der DG:



Die Zeitkonstante τ ist die entscheidende Größe für das Zeitverhalten der Schaltung. Sie kann im Bereich von Sekunden bis Pikosekunden liegen. Im technischen Sinne ist ein Schaltvorgang nach drei bis fünf τ abgeschlossen.

Berechnung des Entladevorganges: Bei t=0 springt U_0 auf Null!

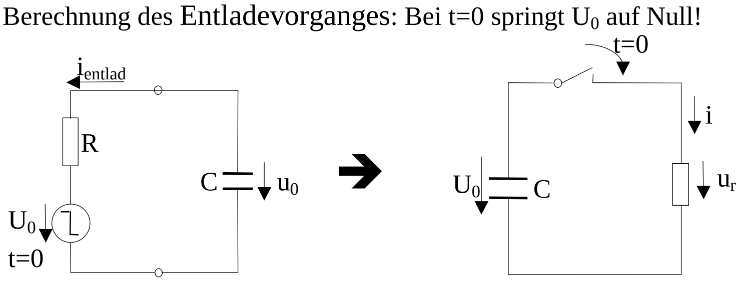


Abbildung 27

t < 0: Kondensator auf U_0 aufgeladen
t = 0: Schalter schließen, es gilt:

$$0 = iR - u_C$$

$$0 = C \cdot R\frac{du_C}{dt} - u_C$$

Da der Kondensator jetzt Energiequelle ist, gilt $i_C = -C\, du/dt$!

Wird eine aufgeladene Kapazität über einen Widerstand entladen, verläuft die Rechnung analog zur obigen Betrachtung des Aufladevorganges, nur wird ist zur Zeit t = 0 die Kondensatorspannung diejenige, auf die er aufgeladen wurde. Über einen Schalter wird zur Entladung der Widerstand R angeschlossen. Der Maschensatz ergibt sofort die einfachere homogene DG.

Lösung: Siehe Lösung des homogenen Teils der DG der Aufladung.

$\underline{\underline{u_C = U_0 \cdot e^{-t/\tau}}}$ Randbedingungen: t = 0: $u_c = U_0$

$t \to \infty$: $u_c = 0$

4.3 Schaltvorgänge an der Induktivität

Definition der Induktivität

Formelzeichen : **L**
Einheit : **1H (Henry)**

$$\boxed{1\mathrm{H} = \frac{1\mathrm{Vs}}{1\mathrm{A}}}$$

Die Spule

Reale Spulen besitzen den Wicklungs- Widerstand in Reihe zur Induktivität.

Elektrische Eigenschaften

$$\boxed{u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{1}{L}\int u \cdot dt}$$

Der Strom ändert sich an der Spule nie sprunghaft.
Die Spannung, die über der Spule liegt, ist proportional zur Stromänderung. Wenn sich der Strom überhaupt nicht oder nur sehr langsam ändert, verhält sich die Spule wie ein Ohmscher Widerstand. Sobald sich der Strom ändert, baut die Spule eine Gegenspannung auf, die der Stromänderung entgegenwirkt.

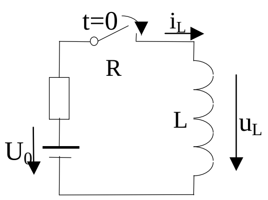


Abbildung 28

Wird zur Zeit t = 0 die Spannung U_0 an eine Spule geschaltet, fließt ab der Zeit t=0 ein Strom, der bis zu seinem Maximalwert U_0/R ansteigt. Um den Verlauf dieses Strom berechnen zu können, wird auch hier eine Maschengleichung aufgestellt:

$$U_0 = i_L . R + u_L \;=\; U_0 = i_L \cdot R + L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Diese wiederum inhomogene Differentialgleichung, jetzt aber für den Strom i_L (!!) wird analog zum Schaltvorgang am Kondensator gelöst:

1. Aufspaltung der Gesamtlösung in die Summe der Lösungen der homogenen DG und des stationären End-zustandes:
$i_L(t) = i_{L\,hom} + i_{L\,end}$.

2. Lösung der homogenen DG:

$0 = i_L R + L di_L/dt = i_L + L/R\, di_L/dt$. Es wird die Zeitkonstante $\tau = L/R$ gesetzt und es werden die Variablen getrennt. Man erhält $-dt/\tau = di_L/i_L$.

Diese Gleichung wird integriert und mit sinnvoller Wahl der Integrationszeitkonstanten erhält man für den Strom $i_{L\,hom} = i_{L\,0}\, e(-\exp t/\tau)$.

Die Gesamtlösung ist wiederum $i_L(t) = i_{L\,hom} + i_{L\,end} = i_{L\,0}\, e^{-t/\tau} + U_0/R$.

3. Zur Bestimmung der Unbekannten werden die Randbedingungen genutzt:
$t = 0$: $i_L(t) = 0$ und
$t \to \infty$: $i_L(t) = i_{L\,end}$.

Also ist $i_L(t) = U_0/R\,(1 - e^{-t/\tau})$. Der Stromverlauf im Stromkreis mit Induktivität entspricht also dem verlauf der Kondensatorspannung.
Die Spannung über L berechnet sich zu $u_L = L\, di/dt = U_0\, e^{-t/\tau}$.

5 Das elektrische Feld

Ursache des elektrischen Feldes ist die Ladung. Die elektrischen Feldlinien beginnen auf einer positiven Ladung und enden auf der gleich großen negativen Ladung. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Feldstärke.

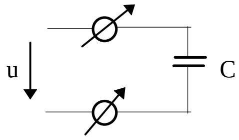
Definition der elektrischen Feldstärke
Formelzeichen : **E**
Einheit : **1V/m (Volt pro Meter)**

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{(homogenes Feld)}$$

Jedes spannungsführende Teil (also auch eine Leitung oder ein Pin o.ä., die Strom führen) besitzt eine Ladung, denn es gilt stets Q = C U bzw. q(t) = u(t) C.
Je nach Geometrie der elektrischen Anordnung, d.h. der spannungsführenden Teile, ist die Struktur des elektrischen Feldes unterschiedlich. Von der positiven Ladung gehen elektrische Feldlinien aus. Wir betrachten hier die zwei möglichen Varianten: das homogene und das inhomogene Feld.

Homogenes elektrisches Feld:
Bekannt ist das homogene Feld zwischen den Platten eines Plattenkondensators. In diesem Fall berechnet sich die elektrische Feldstärke zu E = U/d. Der Plattenabstand ist d. Ein eventuelles Randfeld wird vernachlässigt. Dieses homogene Feld kann man bei allen Anordnungen annehmen, bei denen der Abstand der Elektroden klein gegen ihre Länge und Breite ist. Je höher das ε_r des Dielektrikums zwischen den Platten ist, umso geringer ist das Randfeld.

Unter Verwendung des Plattenkondensators werden nun günstigerweise die weiteren elektrischen Feldgrößen vorgestellt. Modell dazu sei nachfolgende Versuchsanordnung:



Im Kondensator gilt: Q=Ψ, D = Ψ/A und D = εE.

Abbildung 29

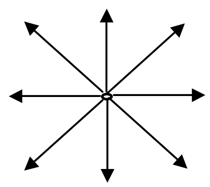
Wird diese Anordnung mit Wechselstrom betrieben, zeigen beide Strommesser den gleichen Strom. Durch den Kondensator können diese Elektronen natürlich nicht fließen, sie werden als Ladung (+Q und -Q) auf den Platten gespeichert, aber durch das Dielektrikum fließt der Verschiebestrom $i_V = d\Psi/dt$. i_V ist eine im Dielektrikum vom Magnetfeld begleitete Stromerscheinung, die nur bei Änderung von U auftritt. Solange auf den oder vom Kondensator ein Leitungsstrom fließt, ändert sich die Ladung auf den Platten. Die elektrische Feldstärke ändert sich ohne Zeitverzögerung im gleichen Maße, denn es gilt E(t) = u(t)/d !
Im stationären Fall ist der Leitungsstrom i_C = Verschiebestrom $i_V = 0$.
Bei Ladungsänderung ist $i_C = dQ/dt = i_V$.
Die elektrische Feldstärke hängt von den Materialeigenschaften ab, die durch die Dielektrizitätskonstante ε gegeben sind ($\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$). Eine von diesen Eigenschaften unabhängige Größe ist die Verschiebungsflußdichte D.
Da D = Ψ /A ist, ist sie , wie bereits der Name sagt, nur von der erzeugenden Ladung und der am Ort der Betrachtung von diesen Feldlinien durchsetzten Fläche abhängig.
In Metallen (im Draht, im Leiterzug, in einem Blech) kann es keine elektrische Feldstärke geben: E = 0. (Jede noch so geringe Feldstärke würde wegen $\rho \rightarrow 0$ einen hohen Strom antreiben). Aus dem gleiche Grund ist am Rand jede Metallfläche eine Äquipotentiallinie. Die elektrischen Feldlinien treten deshalb senkrecht aus!

Befindet sich in dem Feld eine elektrische Ladung, wird gemäß Coulomb`schen Gesetz eine Kraft auf die Ladung ausgeübt. Diese berechnet sich zu F = Q E und wirkt in Richtung der elektrischen Feldlinien.

Inhomogene Felder
In der Regel sind elektrische Felder inhomogen. Für die hier zu behandelnden Probleme genügt eine speziellle Auswahl, die auch methematisch gut beschreibbar ist:
Anordnungen, um die sich inhomogene Felder ausbilden, sind:
Eine geladene Kugel oder eine Punktladung im freien Raum,
ein spannungsführender geradliniger Draht im freien Raum, und darauf aufbauend
zwei sich gegenüberstehende Punktladungen und
zwei parallele Drähte (Hin- und Rückleiter einer Spannung).

Das Feld um einen geradlinigen Leiter nimmt radial nach außen gemäß der Flächenzunahme des um den Leiter gedachten Zylinders ab.

Die Berechnung derartiger Anordnungen geht über diese Betrachtung heraus, da aber die Paralleldrahtleitung und das Koaxialkabel wichtige Leitungstypen in der Computertechnik sind, soll hier das Feld um einen geradlinigen Leiter betrachtet werden.



Dieses Bild der Feldlinien gilt sowohl für einen Querschnitt durch den um den geradlinigen Leiter gedachten Zylinder als auch durch eine um die Punktladung gedachte konzentrische Kugel

Für Anordnungen in der Elektronik wichtige Geometrien sind:
Berechnungsansatz: $E = D/\varepsilon = \Psi/\varepsilon A = Q/\varepsilon A$.

1. Feld um eine Punktladung: $E = Q/4\pi\varepsilon r^2$
2. Feld um eine Linienladung: $E = Q'/2\pi\varepsilon r$ mit dem Ladungsbelag $Q = Q' \cdot l$ (l = Länge der Leitung)
3. Feld im Koaxialkabel: im Inneren wie Linienladung, außerhalb des Außenmantels $E = 0$.
4. Feld im Plattenkondensator: $E = U/d$

Man erkennt, daß das elektrische Feld um so konzentrierter (auf definierten Raum beschränkt) ist, je geringer der Abstand von Hin- und Rückleiter (+Q;-Q) des Signals ist.

Influenz

Bringt man in ein elektrisches Feld einen Leiter, z.B eine Metallkugel, werden auf ihrer Oberfläche aufgrund der Kraftwirkung die freien Elektronen auf der Oberfläche der Kugel entgegen der Feldrichtung solange verschoben, bis im Metall die vorzeichenbehaftete Summe der aus dem Feld des Plattenkondensators und der von den verschobenen Ladungen verursachten Feldstärke Null ist. Diese Ladungstrennung auf der Metalloberfläche wird als Influenz bezeichnet. Die Kugel kann natürlich innen hohl sein. Dann ist auch dieser Innenraum feldfrei. Man spricht dann vom **Faraday'schen Käfig.**
Alle bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf Anordnungen, bei denen der Strom in einem linienhaften Leiter floß und seine Umgebung nichtleitend war. Damit gab es eine klare Trennung zwischen den verursachenden elektrischen Größen Spannung und Strom und den daraus resultierenden Erscheinungen elektrisches Feld und magnetisches Feld. Diese Einschränkung wird im folgenden Abschnitt aufgehoben:

Das Strömungsfeld:

Es muß noch eine Anordnung betrachtet werden, in der der Unterschied zwischen der hohen Leitfähigkeit im Leiter und der guten Isolation im Raum um den Leiter nicht mehr besteht. Es wird also Stromfluß in einem räumlichen Medium mit einer Leitfähigkeit ähnlich dem Halbleitermaterial. Derartige Verhältnisse herrschen in Elektrolyten, Gasentladungsstrecken und in Halbleiterstrukturen. In der Dezimeterwellentechnik gibt es viele Baugruppen in Form von Streifenleitern:

Der nachfolgend dargestellte Quader habe die Länge l, die Höhe h und die Breite b:

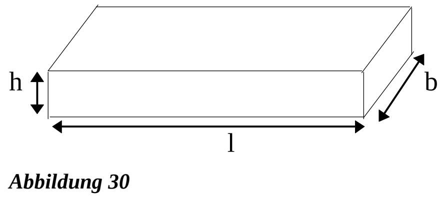


Abbildung 30

Das Material hat die Leitfähigkeit $\chi = 1/\rho$ und die relative Dielektrizitätskonstante ε_r .

Befinden sich an seinen Stirnflächen **flächenhafte** Elektroden mit den Abmessungen b und h, ähnelt die Anordnung dem Plattenkondensator. Bei anliegender Spannung U herrscht die Feldstärke $E = U/l$ und die Verschiebungsflußdichte ist $D = \varepsilon E$. Natürlich hat die Anordnung die Kapazität $C = \varepsilon bh/l$.

Weiterhin gilt $Q = CU$, und wegen $Q = \Psi$ errechnet sich $\Psi = D\,b\,h$.
Der Ohmsche Widerstand der Anordnung ist $R = \rho\, l / bh$.

In diesem Zusammenhang muß hier noch der Begriff des Flächenwiderstandes genannt werden, da sowohl bei den halbleitertechnischen als auch hochfrequenten Anordnungen die Höhe h der Struktur klein gegen die Länge und Breite ist und im allgemeinen auch konstant ist. Deshalb definiert man den Flächenwiderstand $R_{\#}$ mit $R_{\#} = \rho/h$ und erhält dann den vom Längen- Breiten- Verhältnis abhängigen Widerstand $R = R_{\#}\, l/b$.
$R_{\#}$ ist ein vom Hersteller der Anordnung anzugebender Wert. Die Dimension des Flächenwiderstandes ist Ohm.

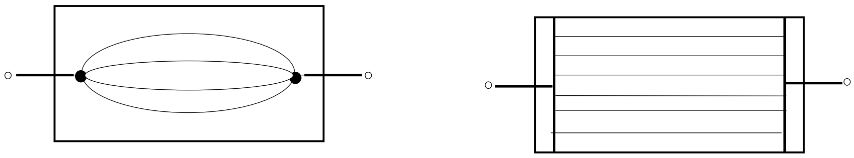
In dem flächenhaften Leiter herrscht unter den angegebenen Bedingungen ein homogenes elektrisches Feld, also ist D konstant. Auch die Stromdichte S ist konstant. Es errechnet sich

$$S = \chi E \quad \text{und} \quad D = \varepsilon E .$$

Für $\chi = 0$ ist der Widerstand unendlich groß, es fließt kein Strom.
Für $\rho = 0$ ist der Widerstand der Anordnung zwischen den Anschlußplatten Null. Diese sind dann kurzgeschlossen und es kann sich kein elektrisches Feld ausbilden.

Strömungsfeld und elektrisches Feld

In leitenden Volumen (elektrolytischer Trog, Halbleitermaterial) gibt es Strömungsfelder:
Die Stromdichte ist an jeder Stelle $S = dI/dA$; $S = I/A$ bzw. Der Strom errechnet sich zu $I = \int S\, dA$. mit A= jeweilige Querschnittsfläche. Das Bild der Strömungsdichte entspricht dem der elektrischen Feldstärke.
Zwei Beispiele:



Zwei Punktelektroden im Trog: $E = f(x,y)$ — Ebene Elektroden: $E = U/d =$ konst.

Abbildung 31

In der ersten Anordnung entsteht ein inhomogenes Feld, die gezeichneten Linien entsprechen dem elektrischen und dem Strömungsfeld. Die Feldstärke (und Stromdichte) ist unmittelbar an den Elektroden am höchsten und nimmt nach außen ab. Das rechte Bild mit den ebenen Elektroden entspricht der Geometrie des Plattenkondensators. Es herrschen homogene Felder.

Der Strom I und der Verschiebungsfluß Ψ breiten sich von den Spitzen ausgehend entsprechend der angedeudeten Verteilung über die gesamte Fläche aus. Es entsteht das Bild von Stromröhren, bei denen in jeder der gleiche Teilstrom fließt. Die Stromdichte ist an den Ein- und Austrittsstellen am höchsten und in der Mitte zwischen ihnen am geringsten. Die Flußröhren verhalten sich analog. Deshalb herrscht an den Stromeinspeisestellen die höchste elektrische Feldstärke ($E = D/\varepsilon$).

$$\psi = \varepsilon \cdot E \cdot b \cdot h = C \cdot U = \frac{\varepsilon \cdot b \cdot h}{l} U .$$

6 Magnetisches Feld:

Magnetische Feldstärke:
Formelzeichen : **H**
Einheit : **1A/m (Volt pro Meter)**

Θ ist die Durchflutung (magnet. Urspannung) und s die Länge eines geschlossenen Umlaufs in diesem Magnetfeld.

6.1 Durchflutungsgesetz

Jeder Strom ist gemäß Durchflutungsgesetz von einem Magnetfeld umgeben. $\oint Hdl = \sum I$.
Zwischen Feld und Strom besteht keine Zeitverzögerung. Ein Wechselstrom erzeugt ein zeitgleiches Wechselfeld.
Vom aktuellen Stromwert ausgehend breitet sich das Feld mit Lichtgeschwindigkeit in den freien Raum aus.
In Abhängigkeit von der geometrischen Form des stromdurchflossenen Leiters und der Form und des materials des magnetischen Kreises ergeben sich zwei unterschiedliche Rechenwege.Inhomogenes Feld:
Bei einem geradlinigen Leiter im freien Raum ist das Ringintegral elementar lösbar, wenn die magnetische Feldstärke entlang des geschlossenen Umlaufes konstant ist. Das ist entlang konzentzrischer Kreise erfüllt.
Beispiel: freie Eindrahtleitung

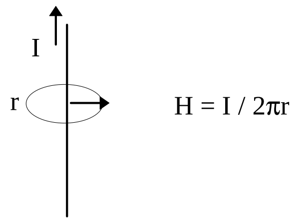


Abbildung 32

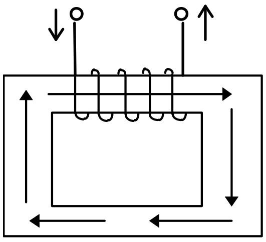
Auf dieser Betrachtung aufbauende Anordnungen sind Leitung gegen Masse, Paralleldrahtleitung und das Koaxialkabel. Außerhalb des Koaxialkabels ist die Summe der umfaßten Ströme gleich Null, es besitzt also kein Magnetfeld. Das Feld der Paralleldrahtleitung kann durch vektorielle Addition der zwei Einzelfelder ermittelt werden. Eng aneinander liegende Leitungen ergeben in großer Entfernung eine minimale Feldstärke.

Homogenes Feld:
Gibt ein magnetischer Kreis mit ferromagnetischem Material (μ_r>>1) den Weg für die magnetischen Feldlinien vor, ist dieser magnetische Kreis in Analogie zum elektrischen Stromkreis berechenbar. Dabei sind folgende Größen analog zu betrachten: Magn. Spannung Θ= I•N ⇔ elektrische. Spannung; Magnetfluß Φ ⇔ Strom und magnetischer Widerstand $R_m = l/\mu{\cdot}A$ analog dem elektrischen Widerstand R. Wichtige Anordnungen, die nach dieser Variante berechnet werden, sind der Transformator und die magneto–motorischen Speicher (Floppy, Festplatte und Bandspeicher).

Eisenkreis ohne Luftspalt:
Der Kreis besteht aus ferromagnetischem Material und gibt deshalb den Weg und den Querschnitt für die Ausbreitung des magnetischen Feldes vor. Seine Länge ist l_{Fe}, sein Querschnitt A.

Eine derartige Anordnung läßt sich in Analogie zum elektrischen Stromkreis berechnen. Diese Analogien sind:
i(t) N = Magn. Urspannung = Quelle (Spannungsquelle)
$R_m = l/\mu A$ = magn. Widerstand (Ohmscher Widerstand)
Φ = magn. Fluß (Strom I)
B = Flußdichte (Stromdichte)
H = magnetische Feldstärke (Spannungsabfall über einem Ohmschen Widerstand)

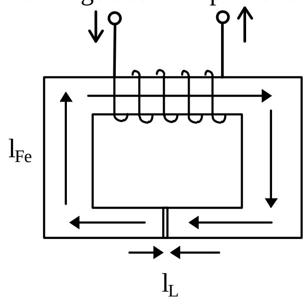
Der magnetische Fluß berechnet sich somit zu $\Phi = i(t) / R_m$ mit $R_m = l/\mu A$. Dabei ist $\mu = \mu_0\mu_r$.



$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r \cdot A}$$

Abbildung 33

Eisenkreis mit kleinem Luftspalt:
Die Länge des Luftspaltes ist l_L. Es gilt $l_L << l_{Fe}$.



$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \mu_r \cdot A} + \frac{l_L}{\mu_0 \cdot A} = \frac{l_{Fe} + \mu_r \cdot l_L}{\mu_0 \mu_r \cdot A}$$

Abbildung 34

Es gibt also den magn. Widerstand des Eisenkreises, in ihm ist $\mu_r >> 1$ und den magn. Widerstand der Luftstrecke mit $\mu_r = 1$ aber von geringer Länge.
Somit ist

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{i(t) \cdot N}{A \cdot R_{mges}} = \frac{i(t) \cdot N \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{l_{Fe} + \mu_r l_L} \text{ und}$$

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} \text{ und } H_{Fe} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \text{ mit } H_L >> H_{FE}$$

Die Luftstrecke hat die μ_r-fache Wirkung gegenüber der Eisenstrecke. Auf die Abmessungen realer Kreise bezogen bedeutet das bei $\mu_r = 1000$ und einem Eisenweg von 2 cm, daß bereits ein Luftspalt von 20 µm bei gleichbleibendem Strom i(t) den magn. Fluß auf die Hälfte sinken läßt.
Außerdem tritt an den Rändern des Luftspaltes ein Streufeld auf, das zwar gering ist, aber einen nicht feldfreie Umgebung nach sich zieht.

6.2 Induktionsgesetz

An jeder Stelle im Magnetfeld gilt

$$\boxed{U_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} \text{ (Induktionsgesetz)}}$$

Das Induktionsgesetz kann auf zwei Arten wirksam werden:

1.: Bei Vorhandensein eines ruhenden Leiters, aber eines veränderlichen Stromes ändert sich $\frac{d\Phi}{dt}$. Dieser Sachverhalt besteht beispielsweise bei Bus–Leitungen (als Störung), einem Trafo (Nutzanwendung) oder einem bewegten Feld und einem ruhenden Leiter.

2.: Bei konstantem Feld Φ und einem bewegten Leiter wird im Leiter eine Spannung induziert. Diese Variante wird beispielsweise bei der Energieerzeugung genutzt.

Ein Beispiel zu Durchflutungs- und Induktionsgesetz ist der Trafo:

Der Trafo

Der Feldverlauf ist durch einen ferromagnetischen Kreis vorgegeben. Das veränderliche Feld in der einen Spule induziert deshalb jeweils eine Spannung in der anderen. Dieser Effekt wird Gegeninduktivität genannt:

$M = \frac{\psi}{I}$. In einem magnetischen Kreis sind die Gegeninduktivitäten gleich.

Für das Produkt der Gegeninduktivitäten ergibt sich damit:

$M_1 \cdot M_2 = M^2 = \frac{\psi_1}{I_1} \cdot \frac{\psi_2}{I_2} = L_1 L_2$, also

$M = \sqrt{L_1 L_2}$

Damit gibt sich der Wirkungsablauf:
Die Spannung U_1 an Spule 1 erzeugt einen veränderlichen magnetischen Fluß $\Phi(t)$, dieser wiederum erzeugt eine Spannung $u_2(t)$ an der zweiten Spule.

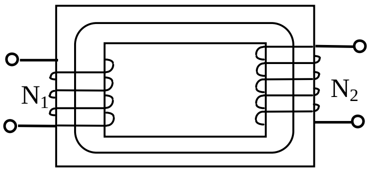


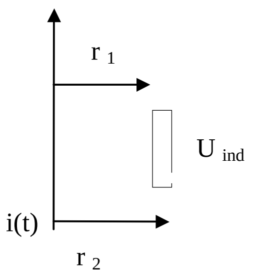
Abbildung 35

Es ist $\Phi = BA$ und $B = \mu H$, also $\Phi = \mu HA$. Den Anwender interessiert nur das Spannungsübersetzungsverhältnis $U_2/U_1 = N_2/N_1$.

Induktion bei inhomogenen Feld

Die Berechnung induzierter Spannungen bei einer im **freien Feldraum** um einen geradlinigen Draht herum befindlichen Leiterschleife erfolgt nach folgendem Modell:
Wird in das Feld der Einzelleitung eine Rähmchenspule eingebracht, ist der von ihr umfaßte Magnetfluß Φ zu berechnen und es ergibt sich bei Änderung des Magnetfeldes $U_{ind} = - N \, d\Phi/dt$.
Dabei ist $\Phi = BA$ und $B = \mu H$ und somit $\Phi = \mu HA$.

Abbildung 36



$\Phi = \mu Il/2\pi \ln r_2 / r_1$
und

$U_{Ind} = - \mu N l / 2\pi \ \ln r_2 / r_1 \ \ d\, i(t)/dt$

Die induzierte Spannung ist umso höher, je größer die Fläche A des Rähmchens, je kleiner r_1 und je schneller die Stromänderung von i(t) sind.

Wirbelströme

Befindet sich ein **flächenhaftes leitendes** Gebilde im Magnetfeld, verursacht die induzierte Spannung im Metall unmittelbar Wirbelströme. Wirbelströme setzen elektrische Energie in Wärme um. Bei Trafos und Elektromotoren bedeutet das Verluste. Nutzanwendung: Abschirmung magnetischer Felder.

7 Kontrollfragen und -aufgaben

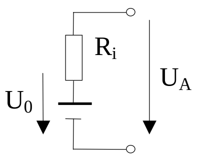
1. Geben Sie die Definitionsgleichung des Widerstandes an; wie lautet das Ohmsche Gesetz?

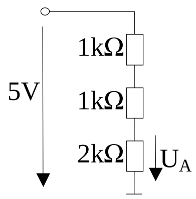
2. Was ist ein nichtlinearer Widerstand? Nennen Sie derartige Widerstände!

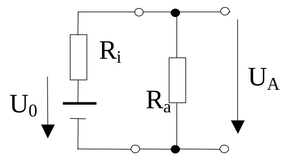
3. Zeichnen Sie den Grundstromkreis, geben Sie seine Kennwerte und Gleichungen an.

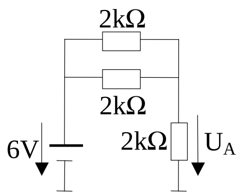
4. Was besagt die Zweipoltheorie ?

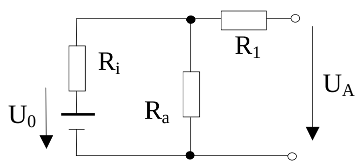
5. Berechnen Sie für die nachfolgenden Schaltungen jeweils die Ausgangsspannung U_A!



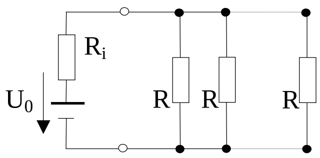






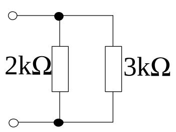


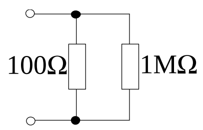
6. Geben Sie eine allgemeine Formel für den Gesamtwiderstand an:

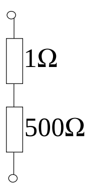


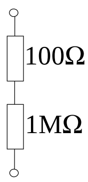
n Stück R

7. Berechnen Sie für alle Schaltungen den Gesamtwiderstand:

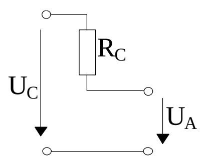


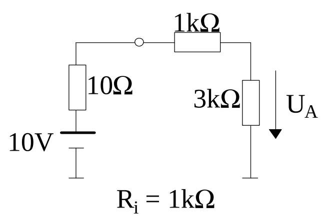






8. Berechnen Sie die Ausgangsspannung der Anordnungen:

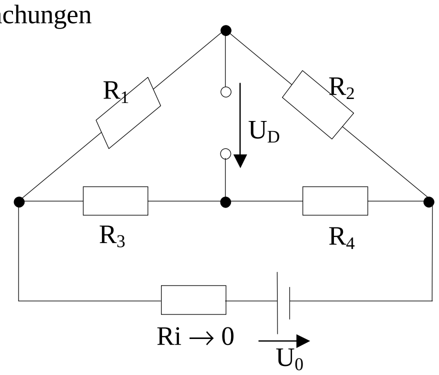




Beachten Sie bei solchen Schaltung:
U_C ist die Spannung einer niederohmigen Quelle, also lastunabhängig, U_A ist die Leerlaufspannung

9. Berechnen Sie unter Benutzung aller möglichen Vereinfachungen die Diagonalspannung der Wheatstoneschen Brücke.
   Laut Maschensatz ist U_D die Differenz zwischen zwei Spannungen über den Brückenwiderständen.
   Mit den angegebenen Werten läßt sich jede Spannung über den Brückenwiderständen mit der Spannungsteilerregel berechnen.

   Berechnen Sie U_D als $f(\Delta R_1)$!



Literaturhinweise:

Lunze/Wagner: „Einführung in die Elektrotechnik“ Band I und II

Schiffmann/Schmitz: „Technische Informatik 1“ Springer- Verlag