TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2019

0. Übungsblatt für die Woche 01.04. - 07.04.2019

Grundlagen zur Analysis

A1 Es wird die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ betrachtet. Bestimmen Sie die folgenden Funktionen und skizzieren Sie ihre Funktionskurven (achten Sie dabei auf die Lage der Nullstellen):

(a) $y = f(-x)$, (b) $y = -f(x)$, (c) $y = 2f(x)$,
(d) $y = f(2x)$, (e) $y = f(x+2)$, (f) $y = f(x) + 2$.

A2 Skizzieren Sie die Bilder folgender reeller Funktionen $y = f(x)$:

(a) $y = e^{x-1} - 1$, (b) $y = |x-1|$, (c) $y = \ln|x-1|$,
(d) $y = (x+2)(x-1)$.

A3 Berechnen Sie alle Werte $x \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

(a) $\dfrac{\frac{5}{3x}}{3} + \dfrac{1}{\frac{25}{14} + \frac{1}{21}} = 1$, (b) $(x+1)(\sqrt{x}-1)^{-2} = 1$, (c) $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{1-2x} = 0$.

A4 Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $\ln(e^x - 1) > \ln(2)$, (b) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, (c) $|x-1| < 5$.

Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass unter allen Rechtecken mit festem Flächeninhalt von 1 Flächeneinheit das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

Weitere Aufgaben zur Wiederholung im Selbststudium:

A5 (a) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(i) $2\ln(x) \cdot \ln(x+6) - \ln^2(x+6) = 0$, (ii) $\frac{x-2}{x+3} < 2x$,

(iii) $|1+x| \geq 4$, (iv) $\left|\frac{x-3}{2x+4}\right| < 1$.

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme (in (i) bedeutet das, den Term so umzuformen, dass keine Wurzeln im Nenner stehen):

(i) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, (ii) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a-b}{ab}} - \dfrac{4}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$, $a > b > 0$.

(Tipp: Mit Differenz der Wurzeln des Nenners erweitern)

A6 Gegeben sind die reellen Polynome $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ und $q(x) = x^2 + x - 2$.

(a) Berechnen Sie die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x > 1$ durch Polynomdivision.
Untersuchen Sie, ob $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ injektiv bzw. surjektiv ist.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $p(x)$, und zerlegen Sie $p(x)$ in Linearfaktoren.

A7 Betrachtet wird der Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grad kleiner 3 mit der üblichen Polynomaddition und Skalierung mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob die Menge

$$U = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \;\middle|\; 2a + 3b + 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Untervektorraum von V bildet.

A8 Berechnen Sie $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \overline{z_2} \cdot z_1,\ \overline{z_2} \cdot z_2$ von:

(a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_2 = 1 - \mathrm{i}$, (b) $z_1 = 2 + 3\mathrm{i},\ z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$,

(c) $z_1 = 4 - 5\mathrm{i},\ z_2 = 4 + 5\mathrm{i}$, (d) $z_1 = \mathrm{i},\ z_2 = -2 - 4\mathrm{i}$.

A9 Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild von $z \neq 0$ bei Spiegelung

(a) an der reellen Achse,
(b) an der imaginären Achse,
(c) an der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten?

A10 (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen:

(i) $z = \frac{3+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, (ii) $z = (\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2$.

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen in trigonometrischer und kartesischer Form dar:

(i) $z = (1 - \mathrm{i})^6$, (ii) $z = e^{2+3\pi\mathrm{i}}$.

(c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $z^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathrm{i} - 1)$, (ii) $z^2(1 + i) = 2z$.

Literaturempfehlungen zu den Grundlagen der Analysis, um Lücken aus dem Schulstoff zu schließen:

- Rießinger, Thomas:
  Mathematik für Ingenieure - Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium, Springer, 2005. (Lehrbuchsammlung SLUB)
  dazu das Buch der Übungsaufgaben nebst Lösungen (Lehrbuchsammlung SLUB)
- Bosch, Karl:
  Brückenkurs Mathematik, Oldenbourg, 2010. (DrePunct)
- Gehrke, Jan:
  Brückenkurs für Wirtschafts- und Naturwissenschaften, Oldenbourg, 2012. (DrePunct)
- Scheid, Harald:
  Abiturwissen Analysis, Klett-Verlag, 1994. (SLUB)
- weitere Literatur zum Abiturwissen in der SLUB unter SM 900 - 910.