Satz: Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist beschränkt.

Beweis:

(1) Offensichtlich gilt $x_n \geq 1$. (Noch einfacher ist $x_n \geq 0$ zu begründen.)

(2) Wir zeigen, dass $x_n \leq 3$ gilt:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{1}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 + 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
&\leq 1 + 2 \cdot 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Bemerkung: Die Abschätzung kann später noch verbessert werden. Die kleinstmögliche obere Schranke ist die EULERsche Zahl $e = 2,718281828459\ldots$.

Satz:

Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist streng monoton wachsend.

Beweis:

Der eigentliche Beweis folgt in Punkt (4). In den Punkten (1) bis (3) werden für (4) benötigte Zwischenergebnisse hergeleitet.

(1) $\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)\cdot(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ und $\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = 1 - \frac{1}{n+2}$

(2) Es gilt $1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}$ (nachrechnen!).

(3) Aus der Bernoulli-Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

folgt:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$$

(4) Wir können nun zeigen, dass $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} > x_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir also nur noch überprüfen,

ob $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2}$ eine wahre Aussage ist.

Das trifft zu, weil wegen (3) $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$

und wegen (2) $1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}$,

insgesamt also $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2}$ gilt.

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$