1 Diskrete Informationsquellen

1.1 Diskrete Informationsquellen mit unabhängigen Ereignissen

1. (a) Bestimmen Sie die Entropien von Binärquellen, wenn die Wahrscheinlichkeiten $p_i(1) = 0,1 \cdot i \quad (i = 0, 1, ..., 5)$ gegeben sind.

   (b) Stellen Sie die Funktion $H(p) = p \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{p} + (1-p) \,\mathrm{ld}\, \frac{1}{1-p}$ für $0 \leq p \leq 1$ grafisch dar! Beachten Sie die Symmetrie!

2. Berechnen Sie den mittleren Informationsgehalt einer diskreten Quelle mit 6 Zeichen:

   (a) $p(x_1) = 0,5 \quad p(x_2) = 0,2 \quad p(x_3) = 0,1$
   $p(x_4) = 0,1 \quad p(x_5) = 0,05 \quad p(x_6) = 0,05$ $(H_m = 2,06\, bit/QZ)$

   (b) alle Zeichen sind gleichwahrscheinlich. $(H_0 = 2,58\, bit/QZ)$

3. Bestimmen Sie den Informationsgehalt einer Buchseite (40 Zeilen, 65 Zeichen/Zeile). Für die Berechnung sind 45 unabhängige Zeichen anzunehmen.
   $(H_0 = 14,3 \cdot 10^3\, bit/S)$

4. Eine automatische Waage umfasst den Messbereich von $0...100\, g$ mit der Schrittweite von $1\, g$.

   (a) Bestimmen Sie den mittleren Informationsgehalt je Messwert!$(H_0 = 6,66\, bit/MW)$

   (b) Wie groß wird der mittlere Informationsgehalt je Messwert bei einer Schrittweite von $0,1\, g$? $(H_0 = 9,97\, bit/MW)$

5. Eine Bildschirmeinheit umfasst 10^5 Bildpunkte mit folgender Verteilung der Helligkeitsstufen:

Helligkeitsstufe	Wahrscheinlichkeit
H1	50 %
H2	25 %
H3	12,5 %
H4	6,25 %
H5	6,25 %

   (a) Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt einer Bildschirmeinheit?
   $(H_m = 1,88 \cdot 10^5\, bit/Bild)$

   (b) Wie groß wird der mittlere Informationsgehalt, wenn über die Auftrittswahrscheinlichkeit der Helligkeitsstufen keine Information vorliegt?$(H_0 = 2,32 \cdot 10^5\, bit/Bild)$

6. Ein kontinuierliches Signal mit exponentieller Verteilungsdichte soll quantisiert werden. Der Amplitudenbereich wird dazu in 7 Intervalle aufgeteilt, in denen die Amplitudenwerte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten auftreten:

Intervall i	Auftrittswahrscheinlichkeit $p(x_i)$
1	0,47
2	0,25
3	0,13
4	0,07
5	0,04
6	0,02
7	0,02

(a) Wie groß ist der mittlere Informationsgehalt eines Amplitudenwertes (Intervalls)?
$(H_m = 2,07\, bit/AW)$

(b) Wie groß wird der mittlere Informationsgehalt, wenn jedes Intervall zusätzlich in 16 Teilintervalle zerlegt wird?
(Gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit in den Teilintervallen angenommen!)
$(H_m = 6,07\, bit/AW)$

7. Eine Nachrichtenquelle sendet Zahlen mit folgenden Auftrittswahrscheinlichkeiten aus:

Zahlenbereich i	1–25	26–70	71–100
Auftrittswahrscheinlichkeit $p(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Innerhalb eines Bereiches treten die Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Berechnen Sie die Entropie dieser Quelle! $(H_m = 6,52\, bit/Z)$
Vergleichen Sie mit der Entropie bei gleichwahrscheinlichem Auftreten der Zahlen!
$(H_0 = 6,64\, bit/Z)$

8. Eine diskrete Informationsquelle hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p(x_i)) = (0,5\ \ 0,2\ \ 0,1\ \ 0,1\ \ 0,05\ \ 0,05)$.
Bestimmen Sie die Entropie sowie ihre Streuung σ^2 und Standardabweichung σ.

Hinweis: $\sigma^2 = \sum_i p(x_i) \left(\mathrm{ld}\, \frac{1}{p(x_i)} - H_m \right)^2 = \sum_i p(x_i) \left(\mathrm{ld}\, \frac{1}{p(x_i)} \right)^2 - H_m^2$

$(H_m = 2,06 \pm 1,19\, bit/QZ)$

1.2 Diskrete Informationsquellen mit abhängigen Ereignissen (MARKOW-Quellen)

Die Steuerung eines automatischen Teilefertigungsprozesses erfordert die laufende Qualitätsprüfung der produzierten Teile. Dabei sollen drei Güteklassen (Zustände $z_1,\ z_2,\ z_3$) unterschieden werden, für die folgende Verteilung der Auftrittswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $t = 0$ anzunehmen ist: $(p(z_i)) = (0,9 \quad 0,1 \quad 0)$.

Für den Fertigungsprozess wurde folgendes Übergangsverhalten der Zustände statistisch ermittelt:

$$(p(z_j|z_i)) = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,38 & 0,02 \\ 0,15 & 0,80 & 0,05 \\ 0,40 & 0,60 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) die stationären Wahrscheinlichkeiten, $\left(\left(\overline{p(z_i)} \right) = (0,29 \ \ 0,67 \ \ 0,04) \right)$

b) die MARKOW-Entropie, $(H_M = 0,95\, bit/Z)$

c) die Entropie, wenn die Abhängigkeiten unberücksichtigt bleiben, $(H_m = 1,09\, bit/Z)$

d) die Entropie, wenn die Zustände gleichwahrscheinlich auftreten. $(H_0 = 1,58\, bit/Z)$