Mathematische Methoden für Informatiker

Prof. Dr. Ulrike Baumann

05.04.2019

2. Vorlesung

- Grenzwerte von Folgen
- Beispiele: *Harmonische Folge, Geometrische Folge*
- Rechnen mit Grenzwerten: *Grenzwertsätze*
- Uneigentliche Grenzwerte
- Konvergenzkriterien

Zur Wiederholung (1)

$a \in M$ ist Grenzwert von (x_n) $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq \mathbb{N} : \; n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

bzw.

Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ (und sei sie auch noch so klein)

gibt es eine natürliche Zahl N (und sei sie auch noch so groß),

so dass für alle Folgenglieder x_n mit $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \varepsilon$

Zur Wiederholung (2)

bzw.

Zu jeder noch so kleinen Fehlerschranke $\varepsilon > 0$

unterscheiden sich die Folgenglieder ab einem genügend großen Index N

um weniger als ε vom Grenzwert a.

bzw.

In der ε-Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ von a
liegen „fast alle“ Folgenglieder x_n
(d.h. alle bis auf endlich viele Ausnahmen)

Grenzwert einer Folge

- Folgen, die einen Grenzwert a besitzen, heißen konvergent (die Folge konvergiert dann gegen den Grenzwert a).

  Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} = a \quad \text{bzw.} \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$

- Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, heißen divergent.

- Folgen mit dem Grenzwert $a = 0$ heißen Nullfolgen.

- **Satz:** Jede Folge (x_n) besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beispiele

- Konvergente Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{(harmonische Folge)}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{für } |q| < 1 \quad \text{(geometrische Folge)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

- Divergente Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \text{ existiert nicht}$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \text{ für } |q| > 1 \text{ existiert nicht}$$

Rechenregeln für reellwertige bzw. komplexwertige konvergente Folgen (Grenzwertsätze)

Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ und $k \in \mathbb{R}$ (bzw. $k \in \mathbb{C}$).
Dann existieren auch die folgenden Grenzwerte und es gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Die konvergenten Folgen bilden einen Vektorraum und $x_n \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist eine lineare Abbildung in den Grundkörper.

Uneigentliche Grenzwerte

- Eine reellwertige Folge (x_n) hat den uneigentlichen Grenzwert ∞,
  wenn gilt:

  $$\forall r \in \mathbb{R}\ \exists N(r) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ x_n \geq r$$

  Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

- Ist $\lim_{n\to\infty}(-x_n) = \infty$, so schreibt man $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

- Beispiel: (geometrische Folge)

  $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, falls $q > 1$

  $\lim_{n\to\infty} q_n$ existiert nicht für $q \leq -1$

Konvergenzkriterien für reellwertige Folgen (x_n)

- (x_n) konvergent $\quad\Rightarrow\quad$ (x_n) beschränkt

- Monotoniekriterium:

  (x_n) monoton und beschränkt $\quad\Rightarrow\quad$ (x_n) konvergent

  Vollständigkeit der reellen Zahlen:

  $$\begin{aligned} & (x_n) \textit{ monoton wachsend und nach oben beschränkt} \\ \Rightarrow\quad & (x_n) \textit{ konvergent und } \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} & (x_n) \textit{ monoton fallend und nach unten beschränkt} \\ \Rightarrow\quad & (x_n) \textit{ konvergent und } \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

- Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat denselben Grenzwert.

- Enthält eine Folge eine divergente Teilfolge oder zwei konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten, dann ist die Folge divergent.