

## 平衡态统计物理期末考试

一、（20分）不必进行推导和计算简单回答下列问题：

1. 低温固体中晶格振动对热容的贡献与温度的几次幂成正比？自由电子气体对热容的贡献与温度的几次幂成正比？
2. 什么是吉布斯佯谬？怎样解决吉布斯佯谬？
3. 对于理想玻色气体，如果规定基态的能量为零，那么对化学势的符号有什么要求？请简单说明理由。
4. 弱简并理想玻色气体和理想费米气体的压强与经典理想气体的压强相比有什么变化？这说明统计关联对理想玻色气体和理想费米气体分别带来什么影响？

二、（20分）写出一维、二维系统的能态密度 $D(\epsilon)d\epsilon$ 。如果化学势为零是发生玻色-爱因斯坦凝聚的条件，试讨论一维、二维玻色气体是否会发生玻色-爱因斯坦凝聚。附数学公式：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l, \quad e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$$

三、（20分）考虑二维理想电子气体，

- (1)求温度 $T = 0\text{K}$ 时费米能级与电子数密度的关系；
- (2)求 $T > 0$ 且化学势 $\mu \gg k_B T$ 时化学势与温度的关系和电子气体的热容量与温度的关系；
- (3)考虑非简并条件，求能量间隔 $\Delta E = k_B T$ 的范围内容纳的电子数占总电子数的比例。

四、（20分）考虑 $N$ 个振子构成的三维爱因斯坦固体（计算中用爱因斯坦理论），每个振子振动的角频率为 $\omega$ 除振动外仅与体积相关的那部分内能记做 $U(V)$ ，

- (1)写出温度为 $T$ 时体积为 $V$ 的固体的内能（包含 $U(V)$ ，但 $U(V)$ 已知，不必求出）；
- (2)如果 $\Gamma = (\partial \ln \omega / \partial \ln V)$ 是常数，求这块固体的状态方程；
- (3)不加外界压强时，晶格热振动将导致固体的热膨胀，且 $T = 0\text{K}$ 时 $U(V) = U(V_0)$ ，

$$U(V) = U(V_0) + \left. \frac{\partial^2 U(V)}{\partial V^2} \right|_{V_0} (\Delta V)^2, \quad \left. \frac{\partial U(V)}{\partial V} \right|_{V_0} = 0,$$

求温度为 $T$ 时 $\Delta V$ 的表达式；

- (4)利用 $\alpha = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_p$ 和 $C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V$ 讨论上题结果。

五、（20分）考虑三维伊辛模型， $H = -\sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i \mu B s_i$ ，在平均场近似下，记配位数为 $q$ ，

- (1)在有外加磁场时，求系统的正则配分函数以及磁化率与温度的关系；
- (2)在没有外加磁场的情况下，系统也可能发生自发磁化，求发生自发磁

- 化的临界温度 $T_c$ 。并说明为什么能发生自发磁化；
- (3) 计算临界温度附近跨过临界点的熵的变化；
- (4) 计算临界点两侧的热容变化，根据相变理论说明顺磁-铁磁相变是几级相变。