一. 在$\mathbb{R}$内求行列式$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix}$.

解. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$ □

二. (1) 设M和N是多项式代数$\mathbb{Q}[x]$的理想. 证明$\mathrm{M}\cap\mathrm{N}$也是$\mathbb{Q}[x]$的理想.
(2) 考虑$\mathbb{Q}[x]$的理想

$$\mathrm{M}_k = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(k) = f(k+1) = 0\}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

求理想$(\mathrm{M}_1\cap\mathrm{M}_2)+(\mathrm{M}_2\cap\mathrm{M}_3)$的首项系数是1的生成元.

解. (1) 显然$\mathrm{M}\cap\mathrm{N}$是$\mathbb{Q}[x]$的子空间. 设$f \in \mathrm{M}\cap\mathrm{N}$, $g \in \mathbb{Q}[x]$. 由于M和N是理想, 由$f \in \mathrm{M}$和$f \in \mathrm{N}$分别推出$fg \in \mathrm{M}$和$fg \in \mathrm{N}$, 从而$fg \in \mathrm{M}\cap\mathrm{N}$. 因此$\mathrm{M}\cap\mathrm{N}$是理想.
(2) 容易看出,

$$\mathrm{M}_1 = ((x-1)(x-2)), \qquad \mathrm{M}_2 = ((x-2)(x-3)), \qquad \mathrm{M}_3 = ((x-3)(x-4)).$$

进而

$$\mathrm{M}_1\cap\mathrm{M}_2 = ((x-1)(x-2)(x-3)), \qquad \mathrm{M}_2\cap\mathrm{M}_3 = ((x-2)(x-3)(x-4)).$$

因此

$$(\mathrm{M}_1\cap\mathrm{M}_2)+(\mathrm{M}_2\cap\mathrm{M}_3) = ((x-2)(x-3)),$$

即所求的生成元为$(x-2)(x-3)$. □

三. 设V为所有从有限域$\mathbb{F}_7$到$\mathbb{R}$的映射构成的实线性空间. 定义$T \in L(V)$为

$$T(f)(x) = 2f(x) - f(x+1), \qquad \forall f \in V, x \in \mathbb{F}_7.$$

求$\det(T)$.

解. 对$i \in \{1, \ldots, 7\}$, 取$f_i \in V$为$f_i(\bar{j}) = \delta_{ij}$, $j \in \{1, \ldots, 7\}$. 容易验证, $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_7\}$是$V$的有序基. 由于

$$T(f_i)(\bar{j}) = 2f_i(\bar{j}) - f_i(\overline{j+1}) = 2f_i(\bar{j}) - f_{i-1}(\bar{j}) = (2f_i - f_{i-1})(\bar{j}), \qquad j \in \{1, \ldots, 7\}$$

(这里约定$f_0 = f_7$), 即

$$T(f_i) = 2f_i - f_{i-1},$$

所以

$$[T]_{\mathcal{B}} = A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\det(T)=\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=127.$$

□

四. 设V是域F上的有限维线性空间, W是V的子空间, $T\in L(V)$. 证明$T(W)\subset W$的充分必要条件是$T^t(W^0)\subset W^0$.

证明. 先证明:
引理1. 设V是域F上的有限维线性空间, W是V的子空间, $T\in L(V)$. 则

$$(T^t)^{-1}(W^0)=T(W)^0.$$

引理1的证明. 只需注意到对$f\in V^*$有

$$f\in (T^t)^{-1}(W^0)\Longleftrightarrow f\circ T\in W^0\Longleftrightarrow f(T(W))=\{0\}\Longleftrightarrow f\in T(W)^0.$$

原题的证明:

$$T(W)\subset W\Longleftrightarrow T(W)^0\supset W^0\Longleftrightarrow (T^t)^{-1}(W^0)\supset W^0\Longleftrightarrow T^t(W^0)\subset W^0.$$

□

五. 设V是域F上的有限维线性空间, r是正整数. 证明对于$\alpha_1,\dots,\alpha_r\in V$和$f_1,\dots,f_r\in V^*$, 以下两个论断等价:

(1) 存在非零向量$\beta\in V$使得$\displaystyle\sum_{i=1}^r f_i(\beta)\alpha_i=0$.

(2) 存在非零函数$g\in V^*$使得$\displaystyle\sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i=0$.

证明. 考虑映射$T\in L(V)$, $T(\beta):=\sum_{i=1}^r f_i(\beta)\alpha_i$. 则对$g\in V^*$有

$$(T^tg)(\beta)=g(T\beta)=\sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i(\beta),\qquad \forall\beta\in V,$$

即$T^tg=\sum_{i=1}^r g(\alpha_i)f_i$. 因此

$$(1)\Longleftrightarrow T\text{不单}\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(T)<\dim V\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(T^t)<\dim V^*\Longleftrightarrow T^t\text{不单}\Longleftrightarrow (2).$$

□

六. 考虑3×3复矩阵的集合

$$\mathcal{M}=\{A\in\mathbb{C}^{3\times 3}\mid (A_{rs})^4=1,\forall r,s\in\{1,2,3\}\},$$

其中A_{rs}为A的(r,s)-元. 求集合$\mathbb{R}\cap\{\det(A)\mid A\in\mathcal{M}\}$.

解. 所求集合为$\{0,\pm2,\pm4\}$. 为证明这一结论, 先证明对任意$A\in\mathcal{M}$有
(1) $|\det(A)|<6$,
(2) $\det(A)$的实部和虚部均为偶数.

(1)的证明. 设$A\in\mathcal{M}$. 则$A_{rs}\in\{\pm1,\pm i\}$. 于是

$$\begin{aligned}|\det(A)|&=|A_{11}A_{22}A_{33}+A_{12}A_{23}A_{31}+A_{13}A_{21}A_{32}-A_{11}A_{23}A_{32}-A_{13}A_{22}A_{31}-A_{12}A_{21}A_{33}|\\&\le|A_{11}A_{22}A_{33}|+|A_{12}A_{23}A_{31}|+|A_{13}A_{21}A_{32}|+|A_{11}A_{23}A_{32}|+|A_{13}A_{22}A_{31}|+|A_{12}A_{21}A_{33}|=6.\end{aligned}$$

如果等号成立, 则存在模为1的复数z满足

$$A_{11}A_{22}A_{33}=A_{12}A_{23}A_{31}=A_{13}A_{21}A_{32}=z,$$
$$A_{11}A_{23}A_{32}=A_{13}A_{22}A_{31}=A_{12}A_{21}A_{33}=-z.$$

这推出A的所有矩阵元相乘既等于z^3又等于$-z^3$, 矛盾. 因此$|\det(A)|<6$.

(2)的证明. 设$A\in\mathcal{M}$. 通过对行和列乘上±1或$\pm i$, 可以将A化为形如$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&c&d\end{bmatrix}$的矩阵, 其中$a,b,c,d\in\{\pm1,\pm i\}$. 于是存在$\epsilon\in\{\pm1,\pm i\}$满足

$$\begin{aligned}\det(A)&=\epsilon\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&b\\1&c&d\end{vmatrix}=\epsilon\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&b-1\\0&c-1&d-1\end{vmatrix}\\&=\epsilon\begin{vmatrix}a-1&b-1\\c-1&d-1\end{vmatrix}=2i\epsilon\left(\frac{a-1}{1+i}\frac{d-1}{1+i}-\frac{b-1}{1+i}\frac{c-1}{1+i}\right).\end{aligned}$$

容易看出$\frac{a-1}{1+i},\dots,\frac{d-1}{1+i}$的实部和虚部均为整数. 因此上式括号中的表达式的实部和虚部均为整数. 这就证明了(2).

结合(1)和(2), 我们得到

$$\mathbb{R}\cap\{\det(A)\mid A\in\mathcal{M}\}\subset\{0,\pm2,\pm4\}.$$

只需再说明$\mathcal{M}$中矩阵的行列式可以取到$\{0,\pm2,\pm4\}$中的每个数. 我们举例如下:

- ◇ 对$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}$有$\det(A)=0$.
- ◇ 对$A_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&i&1\\1&1&-i\end{bmatrix}\in\mathcal{M}$有$\det(A_1)=2$. 设$A_1'$为把$A_1$的第一行乘上$-1$得到的矩阵, 则$A_1'\in\mathcal{M}$并且$\det(A_1')=-2$.
- ◇ 对$A_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}$有$\det(A_2)=4$. 设$A_2'$为把$A_2$的第一行乘上$-1$得到的矩阵, 则$A_2'\in\mathcal{M}$并且$\det(A_2')=-4$. □

七. 设整数$n>k>m>0$, V是域F上的n维线性空间, W是V的m维子空间, $T\in L(V)$满足

$$\dim(T(W)+W)=k.$$

求$\dim(T^t(W^0)+W^0)$.

解. 我们用两种方法证明

$$\dim(T^t(W^0)+W^0)=n+k-2m. \tag{1}$$

证明一. 先证明:

引理*2.* 设V是域F上的有限维线性空间, W是V的子空间, $T\in L(V)$. 则

$$\dim(T(W)+W)+\dim(W\cap T^{-1}(W))=2\dim W. \tag{2}$$

引理2的证明. 考虑满映射

$$W \to T(W), \quad \alpha \mapsto T(\alpha)$$

和

$$W \cap T^{-1}(W) \to T(W) \cap W, \quad \alpha \mapsto T(\alpha).$$

它们的核均为$\mathrm{Ker}(T) \cap W$. 因此

$$\begin{aligned} & \dim W - \dim T(W) \\ = \ & \dim(W \cap T^{-1}(W)) - \dim(T(W) \cap W) \\ = \ & \dim(W \cap T^{-1}(W)) + \dim(T(W) + W) - \dim T(W) - \dim W. \end{aligned}$$

整理即得(2)式.

(1)式的证明: 由引理2和第四题证明中的引理1, 有

$$\begin{aligned} \dim(T^t(W^0) + W^0) &= 2\dim W^0 - \dim(W^0 \cap (T^t)^{-1}(W^0)) \\ &= 2\dim W^0 - \dim(W^0 \cap T(W)^0) \\ &= 2\dim W^0 - \dim(W + T(W))^0 \\ &= 2(n-m) - (n-k) = n + k - 2m. \end{aligned}$$

证明二. 考虑$\Phi = QTJ \in L(W, V/W)$, 其中$J : W \to V$为含入映射, $Q : V \to V/W$为商映射. 则

$$\mathrm{Im}(\Phi) = Q(T(W)) = (T(W) + W)/W.$$

注意到

$$\mathrm{Im}(Q^t) = \mathrm{Ker}(Q)^0 = W^0, \qquad \mathrm{Ker}(J^t) = \mathrm{Im}(J)^0 = W^0,$$

从而

$$\mathrm{Im}(\Phi^t) = J^t(T^t(W^0)) = J^t(T^t(W^0) + W^0) \cong (T^t(W^0) + W^0)/W^0.$$

由$\dim \mathrm{Im}(\Phi) = \dim \mathrm{Im}(\Phi^t)$得

$$\dim(T(W) + W) - \dim W = \dim(T^t(W^0) + W^0) - \dim W^0.$$

由此即得(1)式. □