北京大学数学科学学院期中试题

2013.9 -2013.11 学年第 1 学期

1. 计算题（共 60 分）(1) 设有向量组 $\alpha_1=(1\ 0\ 2\ 3),\alpha_2=(1\ 1\ 3\ 5),\alpha_3=(1\ -1\ a\ 1),\alpha_4=(1\ b\ 4\ 7)$，若该向量组的秩为 3，(1) 求 a,b; (5 分) (2) 求该向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量表示成为该极大线性无关组的线性组合。(10 分)

   (2)(5 分) 设 n 阶矩阵 A 的行列式为 2，求 $|(\frac{1}{2}A)^{-1}-3A^*|$.

   (3)(10 分) 若 $A\in M(s\times n,F)$ 使得对任意的 $\beta\in F^s$, 线性方程组 $AX=\beta$ 都有解 $\xi\in F^n$, 求 $\mathrm{rank}(A)$.

   (4) (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $C=diag(A,\cdots,A)\in M(2n\times 2n,F)$, 求与准对角矩阵 C 交换的所有方阵的形式.

   (5) (10 分) 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 其中当 $i=j$ 时，$a_{ij}=1$; 当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=-1$; 求矩阵 A 的逆矩阵。

   (6) (10 分) 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=\frac{1}{1-x_iy_j}$，求矩阵 A 的行列式。

2. 设 A 为 3 阶矩阵，(1) (10 分) 若 $r(A)=1$，证明存在常数 k，使得 $A^2=kA$；（2）(10 分) 若 $r(A)=2$，证明存在常数 k，使得 $(A^*)^2=kA^*$，其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵。

3. (10 分) 设 $A,B\in M(n\times n,F)$ 且 $\mathrm{rank}(AB+I_n)+\mathrm{rank}(AB-I_n)=n$, 其中 I_n 为 n 阶单位矩阵. 证明：$AB=B^{-1}A^{-1}$.

4. (10) 设 $M(n\times n,F)$ 为数域 F 上的 n 阶方阵构成的集合。证明存在唯一的函数 $f:M(n\times n,F)\to F$ 满足下列性质：（1）函数 f 关于矩阵的行是线性的，即

$$f\left(\begin{bmatrix}\mathbf{r_1}\\ \mathbf{r_2}\\ \vdots\\ k\mathbf{r_i}+l\mathbf{r_i}'\\ \vdots\\ \mathbf{r_n}\end{bmatrix}\right)=kf\left(\begin{bmatrix}\mathbf{r_1}\\ \mathbf{r_2}\\ \vdots\\ \mathbf{r_i}\\ \vdots\\ \mathbf{r_n}\end{bmatrix}\right)+lf\left(\begin{bmatrix}\mathbf{r_1}\\ \mathbf{r_2}\\ \vdots\\ \mathbf{r_i}'\\ \vdots\\ \mathbf{r_n}\end{bmatrix}\right),$$

其中 $k, l \in F$, $\mathrm{r_i}$ 指矩阵的第 i 个行向量. （2）若矩阵 A 的行向量线性相关，则 $f(A)=0$，（3） $f(I_n)=1$, 其中 I_n 为 n 阶单位矩阵.