北京大学数学科学学院期末考试试题

2009 - 2010 学年第 2 学期

考试科目 复变函数 **考试时间** 2010 年 7 月 1 日

姓 名 ________ **学 号** ____________

本试题共 6 道大题，满分 60 分

在下面试题中, $\mathbb{R}$ 记实数轴, $\mathbb{C}$记复平面, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 记扩充的复平面。

1.(10分，数学思想) (1) 从本复变函数课中所给出的代数基本定理的十七个证明中，抽象出你所能感悟出的若干数学思想。（不要求列出十七个证明, 只要求写出若干数学思想。） (2) 从这些数学思想中，展望你所能想象出的它们的可能发展前景。

2.(10分，基本概念) 本题中每小题 **1分**。 只要求写出答案。判定题只要求写明 "对" 或 "错" 两字之一。

(1). 判定命题 "设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中非空开集 D 上的复值函数, $a \in D$ ，则 $f(z)$ 在 a 处复导数 $f'(a)$ 存在的充要条件 是 $f(z)$ 在点 a 处实可微并且满足 Cauchy-Riemann 方程。"

(2). 判定命题 "如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$中非空 **连通**开集 D上的解析函数, 并且对任意 $z \in D$, $f(z)$ 的实部 u 和 $f(z)$ 的虚部 v 满足 $(sin\, u)^3 + (cos\, v)^3 = 1$ ，则 $f(z)$ 在 D上是常数。"

(3). 判定命题 "如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中非空开集 D 上的解析函数, $a \in D$, 则 $f(z)$ 在 a 处 Taylor 级数的收敛半径 大于或等于 D 内部以 a为中心最大开园盘的半径。"

(4). 判定命题 "如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $r > 0$, $b \in \mathbb{C}$, $|b| = r$， 则它在b 处的收敛性，与它在 b 处的解析开拓性，一般地互相推不出。"

(5). 判定命题 "如果 $\mathbb{C}$ 中非空单连通开集 D 上的复值连续函数 $f(z)$ 处处非零, 则多值函数 $Arg(f(z))$ 在 D 上有单值连续分支。"

(6). 写出 $\mathbb{C}$ 中一个 **极大** 的开集 D 使得 D 上存在 **单值** 解析函数 $f(z)$ 满足 $f(z)^2 = z(z-1)(z-2)$.

(7). 判定命题 "如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 中非空开集 D 上的复值函数, $a \in D$， $f(z)$ 在 a 处导数 $f'(a)$ 存在, 则 $f(z)$ 在 a 处解析。"

(8). 判定命题 "如果 $f(z)$ 是 $\{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}$ 上的解析函数, 并且 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $f(z)$ 在 ∞ 点处的留数为零。"

(9). 判定命题 "如果 $f(z)$是 $\mathbb{C}$ 中非空开集 D 上的复值函数, $a \in D$, $f(z)$ 在 $D - \{a\}$ 上解析, a 是 $f(z)$ 的可去奇点， 则 $f(z)$ 是 D 上的亚纯函数。"

(10). 判定命题 "如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $r > 0$, $b \in \mathbb{C}$, $|b| = r$, $\lim\limits_{|z|<r,\ z \to b} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 不存在, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在 b 点处不可解析开拓。"

3.(10分，理论1) 具体构造出从区域 $\{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ |z-1| < 2,\ |z+1| < 2\}$ 到 区域 $\{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ 0 < Imz < \pi\}$ 的一个一一对应的保定向保角变换。

4.(10分，理论2) 设 $f(z) = \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$. (1) 求出 $f(z)$ 在扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的所有奇点; (2) 指出上述每个奇点的类别; (3) 计算出 $f(z)$ 在上述每个奇点的留数。

5.(10分，应用1)

(1). 一元三次方程 $7z^3 - z^2 + z + 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 范围内有几个根(计重数) ?

(2). 某个系统中的振动的稳定性问题 可以化为 求常微分方程 $y''' + 2y'' + 3y' + y = 0$ 的解 在时间趋于正无穷大时的极限问题， 这里的导数指的是 复变量 y 对实变量时间 t 的导数。 已知 此常微分方程的通解是 $y = y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$, c_1, c_2, c_3 是三个任意给定的复常数， $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是一元三次方程 $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ 的三个复数根。 求证: $\lim\limits_{t \in \mathbb{R},\ t \to +\infty} y(t) = 0$.

6.(10分，应用2) 在求出机翼剖面绕流的问题中，当低速时，可以通过保角变换，把此问题转化成求出满足下面条件的速度场 $V(z)$: (1) $V(z)$ 是一个在单位圆外部的闭包 $\overline{\Omega} = \{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| \geq 1\} \cup \{\infty\}$ 中无源的、无涡旋的、稳定的平面速度场; (2) $V(z)$ 在 $\overline{\Omega} - \{\infty\}$ 上是实连续可微的; (3) 在 ∞ 处， $V(\infty)$ 用复数表示为一个复常数 $c \in \mathbb{C}$, 并且 $V(z)$ 在 ∞ 处是连续的; (4) 在单位圆周 $\{\, z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ 上， $V(z)$ 处处相切于此单位圆周。 求出: $\overline{\Omega}$ 上所有的这样的速度场 $V(z)$. （用复函数表示。）

祝愿同学们将来作为北大数院的毕业生，有能力独立地提出开创性的、可能引出一片新天地的好问题。"提问是研究者的天职。"