北京大学数学科学学院几何学期末试题

2014.09—2015.01 学年第 1 学期

授课教师: ____________________　　考试时间: 2015-1-14

姓　　名: ____________________　　学　　号: ____________________

本试题共 7 道大题, 满分 100 分。

1. (14分) 如果一张平面$Ax+By+D=0$与曲面$6xy+z^2=1$的交线是圆，求实数A,B的比值。

2. (10分) 证明单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$的任意一条直母线在xOy平面上的投影，一定是腰椭圆的切线。

3. (10分) 设三个平面方程为

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1Z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0$$

$$\pi_3: A_3x+B_3y+C_3Z+D_3=0$$

且三个平面交于一点O'（交点唯一）.求以平面π_1,π_2,π_3依次为新的仿射坐标系$[O';x',y',z']$的$y'O'z',z'O'x',x'O'y'$平面的仿射坐标变换公式。

4. (14分) 求双曲线

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$$

的一对共轭直径的方程，使得两共轭直径的夹角是$\frac{\pi}{4}$。

5. (20分) 设$(a_i)_{1\leq i\leq 5}$ 是射影平面$\mathbf{P}$中五个点，前四个点构成射影标架，d_{ij}为线a_ia_j，则

(a)

$$(d_{12},d_{13};d_{14},d_{15})(d_{23},d_{21};d_{24},d_{25})(d_{31},d_{32};d_{34},d_{35})=1.$$

(b) 设$(a'_i)_{1\leq i\leq 5}$ 是射影平面$\mathbf{P}$中五个点，前四个点构成射影标架, 则存在射影变换τ: $\mathbf{P}\mapsto\mathbf{P}$, 且$\tau(a_i)=a'_i$, $1\leq i\leq 5$ 的充要条件是

$$(d_{12},d_{13};d_{14},d_{15})=(d'_{12},d'_{13};d'_{14},d'_{15});$$

及

$$(d_{23},d_{21};d_{24},d_{25})=(d'_{23},d'_{21};d'_{24},d'_{25}).$$

这里d'_{ij}为线$a'_ia'_j$.

(反面还有试题)

6. （10分）设$f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$为双射，若$f$把每个圆周映射成圆周，则$f$把平行直线映射成平行直线。

7. (22分）设给出的仿射变换为

$$\begin{cases} x'=x+y+3z \\ y'=x+5y+z \\ z'=3x+y+z \end{cases}$$

求三个相互正交的向量，使得在此变换下，它们仍变为三个相互正交的向量；并将所给的仿射变换表示为一个保距变换和分别对3个相互正交的方向施行的伸缩变换的乘积。