2015-2016 学年第二学期高等代数 II 期中考试（安金鹏）

May 5, 2016

注：下面 F 表示任意一个域，n 表示任意正整数.

一、（24 分）在复数域上求下列矩阵的特征多项式、最小多项式和 Jordan 标准形.

$$(1)\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)\begin{bmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

二、（20 分）设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^3 = I_n$，$A \neq I_n$. 证明：

（1）A 在 $\mathbb{C}$ 上可对角化；

（2）A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

三、（16 分）设 $\operatorname{char} F \neq 2$，$A \in F^{n\times n}$ 是幂零矩阵. 证明 A 与 $2A$ 相似.

四、（16 分）设 V 是 n 维 F-线性空间，$T \in L(V)$. 假设 $|\sigma(T)| = n$，证明 V 的 T-不变子空间的个数等于 2^n.

五、（10 分）设 V 是 n 维复线性空间，$T \in L(V)$. 证明在 V 的循环分解中，直和项的个数等于 T 的特征子空间的最大维数.

六、（10 分）设 V 是 n 维 F-线性空间，$T \in L(V)$. 证明集合

$$\{\alpha \in V \mid p_\alpha \neq p_T\}$$

是有限多个 V 的真子空间的并集.

七、（4 分）设 V 是 n 维 F-线性空间，$T \in L(V)$. 证明存在 V 上的非零双线性函数 $\Phi \in (V^*)^{\otimes 2}$ 满足

$$\Phi(T\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, T\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in V.$$