北京大学数学科学学院期中试题

2010-2011　学年第二学期

考试科目： **常微分方程**　**考试时间：** **2011 年 4 月 29 日**

姓　　名：　**学　　号：**

本试题共 5 道大题，满分 100 分

1. （40 分，每题 10 分）求解下列微分方程。

   (1) $y\mathrm{d}x-(x+y^2)\mathrm{d}y=0$

   (2) $(e^x\cos y+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3-e^x\sin y)\mathrm{d}y=0$

   (3) $(x^2y-y^3)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y=0$

   (4) $(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$

2. （15 分）记初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy+\sin(xy),y(0)=\eta$$

   的解为 $y=\phi(x,\eta)$. 求 $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(x,0)$.

3. （15 分）证明微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2+y^4+\sin x$$

   的所有右行解的最大存在区间是有界的。

4. （10 分）证明微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x^2+y^2+1)\sin(xy)$$

   的所有解在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在，并且为单调的。

5. （20 分）设 $f(x,y)$ 为全平面上的有界连续函数，且存在常数 $L\in(0,1)$，使得对任意的 x,y_1,y_2 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|.$$

   考虑一阶微分方程

$$y'+y=f(x,y).$$

(1) （10 分）证明：$y=\phi(x)$ 为上述方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界解当且仅当 $\phi(x)$ 为下面积分方程的连续有界解：

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{t-x} f(t,\phi(t))\mathrm{d}t.$$

(2) 证明上述一阶微分方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上有唯一的有界解。

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)