范函分析 I 期末考试

命题：陈天权 录入: erliban@bdwm

时间: 2006年6月

1. (20分) 设 B_1 和 B_2 是两个 Banach 空间.
(i) 试述线性算子 $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ 是紧算子的定义;
(ii) 若 $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, 且 $dim(\mathrm{Im}T) < \infty$. 试证: $T \in \mathcal{L}_c(B_1, B_2)$;
(iii) 若 $(Tn)_{n=1}^{\infty}$是 $B_1 \to B_2$ 的一串紧算子, 又在范数意义下，有 $T = lim_{n\to\infty} T_n$. 试证: $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$.

2. (20分) 设 $K(x, y) \in C([0, 1] \times [0, 1])$, 记积分算子

$$\boldsymbol{K}(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

试证:
(i) 设 $K(x, y) \in C([0, 1] \times [0, 1]), \boldsymbol{K} \in \mathcal{L}(C[0, 1], C[0, 1])$;
(ii) 若 $L(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y)$, 其中 $a_j(x) \in C[0, 1], b_j(y) \in C[0, 1]$, 则 $\boldsymbol{L} \in \mathcal{L}_c(C[0, 1], C[0, 1])$;
(iii) 对一切 $K(x, y) \in C([0, 1] \times [0, 1])$, 有 $\boldsymbol{K} \in \mathcal{L}_c(C[0, 1], C[0, 1])$.

3. (20分) 设 $v_y(x) = u(x + y)$, 其中 $u \in \mathcal{D}$, δ表示相对于自变量 x 的 Dirac δ 函数, $a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \cdots, n$. 试求:
(i) $< v_y, \delta >=?$
(ii) $< v_y, \delta' >=?$
(iii) $< v_y, \delta^{(j)} >=?$
(iv)$< v_y, \sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j \delta^(j) >=?$

4. (20分) 设 $A \in \mathcal{L}(H, H)$ 是一个自伴算子, 其中 H 是一个 Hilbert 空间. 而预解式 $R(z)$ 定义为:

$$R(z) = (A - zI)^{-1}.$$

试证:
(i) 对于一切 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(z)$ 有定义;
(ii) 对于一切 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$\|R(z)\| \le \frac{1}{|\mathrm{Im}z|};$$

(iii) 对于一切 $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$R(z)R(w)(z-w) = R(z) - R(w) = R(w)R(z)(z-w).$$

5. (20分) 设 $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, 其中 B_1, B_2 是两个 Banach 空间, 且 $codim(\mathrm{Im}T) < \infty$. 试证: $\mathrm{Im}T$ 是闭子空间.