

光华管理学院高等数学 (B) 期末试题

2007 - 2008 学年第 1 学期

考试科目: 高等数学 (B)

考试时间: 丁亥年腊月初八 (腊八节)

姓名: _____

学号: _____

本试题共 10 道大题, 满分 100 分 (共 2 页)

注意: (1) 请在答题纸封面右上角写上序号;

(2) 试题纸、草稿纸和答题纸都要交;

(3) 试题有两面, 不要漏题。

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1^p + 2^p + 4^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(2) \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + 4^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. 设

$$(*) \quad \begin{cases} x = e^v + u^3 \\ y = e^u - v^3 \end{cases}$$

(1) 求 Jacobi 行列式 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$;

(2) 设 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 是由 (*) 确定的隐函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 。

3. 求下列定积分

$$(1) \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$(2) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

4. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$

(1) 求 y 的最小值

(2) 画出函数的图像, 尽可能说明你认为重要的特征。

5. (1) 写出 $(1+x)^{\frac{1}{5}}$ 在 $x=0$ 处泰勒展开的前三项;

(2) 利用这一近似公式计算 $30^{\frac{1}{5}}$ (答案用小数表示)。注: $30^{\frac{1}{5}} \approx 1.97435048584$

6. 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 4 \sin t \\ z = 3t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

(1) 求曲线相应于 $t \in [0, 2\pi]$ 这一段的弧长;

(2) 求曲线的切线与 OZ 轴的夹角。

7. 求椭球面 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{12^2} = 1$ 平行于平面 $x - y + z = 1$ 的切平面。

8. 已知三次方程 $x^3 - 3x + a = 0$ 有三个不同的实根, 求 a 的范围。

9. 求曲面 $x^2 + y^2 - 4z = 0$ 上到点 $(10, 5, 2)$ 最近的一点。

10. 设 $x_0 = 2$, $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$, $n = 1, 2, \dots$

(1) 证明序列 x_0, x_1, x_2, \dots 单调下降;

(2) 证明序列 x_0, x_1, x_2, \dots 收敛到 $\sqrt{2}$ 。

(注: $\sqrt{2} \approx 1.41421356237$, 上面序列中 $x_3 = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} \approx 1.41421568627$, 误差小于 3×10^{-6})