

常微分方程期末试题. 18/06/2012

1. (25分) 求解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - 4x_3 \end{cases}$$

2. (20分)

$$y'' + 5y' = \cos x^2$$

3. (10分) 比较下列概念的异同

(1) 解对初值的连续依赖性和Lyapunov稳定性

(2) 积分曲线(解曲线)和轨线

4. (15分) 讨论稳定性

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y \end{cases}$$

5. (15分) 确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y - 5 \end{cases}$$

的奇点及其类型, 并画奇点附近的相图(只要考虑拓扑结构)

6. (15分) 用斯图姆比较定理证明书中定理9.1(2)

下面的习题, 只由期中考试未参加者解答

7. 讨论问题. 考虑里卡蒂方程,  $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ , 其中  $p(x), q(x), r(x)$  为区间  $I$  上的连续函数. 当知道一个特解时, 里卡蒂方程可转化而伯努利方程进而再转化成线性方程求解. 线性方程的通积分一般需要多于一次的积分才能表述出来. 现在, 如果我们知道了里卡蒂方程的两个特解  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$ , 能否找出一种方法, 使得里卡蒂方程的通积分通过一次积分表示出来? 请说明理由.