期末试卷

本试卷共九道大题，满分 100

1. 问 $f(z)=z^{-1}\sin z+(1-z)^{-2}+z^3$ 在扩充复平面上有哪些奇点？ 分别是什么类型的奇点？

   给出 $f(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处的 Laurent 级数，并给出这些级数的主部（15 分）。

2. 计算 $f(z)=\sin z^3(1-\cos z)^{-3}$ 在 $z=0$ 处的留数（15 分）。

3. 设 $\lambda>1$， 证明方程 $e^z+z+\lambda=0$ 在复平面中区域 $D=\{z\,|\,\mathrm{Re}(z)<0\}$ 内有且仅有一个零点（15 分）。

4. 表述和证明幅角原理（15 分）。

5. 设 D 是复平面中以有限条光滑曲线为边界的有界区域， $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是 $\overline{D}$ 的某个邻域上的亚纯函数，在 ∂D 上没有极点，如果在 ∂D 上满足 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$，

   证明：$f(z)$ 在 D 内零点个数（按重数计）与极点个数（按重数计）的差等于 $g(z)$ 在 D 内零点个数（按重数计）与极点个数（按重数计）的差（8 分）。

6. 设幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 1， 且 $z=1$ 是其在单位圆周上的极点， 单位圆周上其它点都是 $f(z)$ 的正则点， 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n/a_{n+1})=1$（8 分）

7. 设 D 是复平面中以有限条光滑曲线为边界的有界区域，$M>0$ 是给定的常数， 令 $I=\{f(z)\,|\,f(z)$ 在 D 上解析，且 $\iint\limits_D|f(z)|^2dS\le M\}$， 证明 I 是正规族（说明： 对应用到的等式或不等式请清楚表述并给出证明， 可以用 Montel 定理，不需要证明）(8 分）。

8. 设 $f(z)$ 是 $D(z_0,r)-\{z_0\}$ 上的解析函数， z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点， 证明对于任意 $r>\varepsilon>0$，集合 $f(D(z_0,\varepsilon)-\{z_0\})$ 与复平面中任意一条直线的交都是直线上的稠密集（说明： 此题请直接证明， 不能引用 Picard 大，小定理）(8 分）。

9. 设 $f(z)$ 是圆环 $D(0,r,R)=\{z\,|\,0<r<|z|<R\}$ 上的解析函数， 取定 $r_1\in(r,R)$，对于 $|z|<r_1$， 定义 $f_1(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|w|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}dw$； 对于 $|z|>r_1$，定义 $f_2(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|w|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}dw$, 积分路径都取逆时针方向。证明：对于任意 $|z_0|=r_1$， 极限 $\lim\limits_{|z|<r_1,z\to z_0}f_1(z)$ 和 $\lim\limits_{|z|>r_1,z\to z_0}f_2(z)$ 都收敛， 并且成立 $f(z_0)=\lim\limits_{|z|<r_1,z\to z_0}f_1(z)-\lim\limits_{|z|>r_1,z\to z_0}f_2(z)$。如果进一步假定 $f(z)$ 可连续延拓到 $\overline{D(0,r,R)}$ 上，并且 $|f(z)|$ 在 $|z|=r$ 和 $|z|=R$ 上都是常数，问对于函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$， 你能得到什么结论？请证明你的结论（8 分）。