北京大学数学科学学院期末试题

2013 -2014 学年第 2 学期

1. (10 分) 设复矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. (1) 证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$， (2) 求矩阵 $2I_n-A$ 的特征值，其中 I_n 为单位矩阵.

2. (20 分) 求下面复矩阵的 Jordan 标准形及初等因子。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (20 分) 设 $\dim V=5$. 若已知线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 有特征值 $1,2$, 且存在 V 中线性无关的向量 α,β,γ 满足 $\mathcal{A}\alpha=\vec{0},\mathcal{A}\beta=\alpha,\mathcal{A}\gamma=\alpha+\beta$.
(1) 证明： $g(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^3(\lambda-2)^3$ 为 $\mathcal{A}$ 的零化多项式;
(2) 将 V 表为若干 $\mathcal{A}$ 的广义不变子空间 (即形如 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathrm{id})^k$ 的子空间) 的直和并求出这些子空间的维数.

4. (20 分) 设 V 为复数域上的 n 维线性空间. 证明： $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$ 可对角化 (即存在一组基使得 $\mathcal{A}$ 在其下对应对角矩阵) 当且仅当 对任意 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 U, 存在 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 U', 使得 $V=U\oplus U'$.

5. (15 分) 设 $m_A(x)$ 和 $f_A(x)$ 分别为 n 阶复矩阵 A 的极小多项式和特征多项式. 证明： $f_A(x)|m_A(x)^n$.

6. (15 分) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 且存在幂零线性变换 $\mathcal{P}$ 满足： $(\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathcal{A}-\mathcal{B})$, $\mathcal{B}\mathcal{P}-\mathcal{P}\mathcal{B}=2(\mathcal{A}-\mathcal{B})$. 求满足 $\mathcal{A}\mathcal{Q}=\mathcal{Q}\mathcal{B}$ 的可逆线性变换 $\mathcal{Q}$.