北京大学数学科学学院期末试题

2013 – 2014 学年第二学期

考试科目: 复变函数　　考试时间: 2014 年06 月18 日

姓　　名: ____________　　学　　号: ____________

本试题共七 道大题，满分100 分

1. (20分) 求Laurent级数展开. 求

$$f(z) = \frac{-z^2 + (4+2i)z - 2i}{z(z+i)(z-2)}$$

在圆环$\{z \in \mathbf{C} | 0 < |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbf{C} | 1 < |z| < 2\}$, $\{z \in \mathbf{C} | 2 < |z| < 3\}$上的Laurent展式.

2. (20分) (1) 是否存在单位圆盘$\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 到复平面$\mathbb{C}$的全纯双射? 若存在请写出例子; 若不存在，请给出证明。

   (2) 是否存在单位圆盘$\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ 到复平面$\mathbb{C}$的全纯满映射? 若存在请写出例子; 若不存在，请给出证明。

3. (10分)：令$f(z) = \frac{z^2-1}{z \sin^2 z}$, 求留数$Res(f, 0)$.

4. (15分) 设Γ是D内可求长的Jordan曲线且其内部属于D, 再设$f(z)$和$g(z)$在D内亚纯, 在Γ上满足$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$. 证明

$$N(f) - P(f) = N(g) - P(g),$$

其中$N(f)$, $P(f)$ 分别是f在Γ内部的零点和极点的个数(零点和极点均计重数).

5. (15分) $g(z)$在单位圆$\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$内全纯, 且$g(0) = 0$, $Reg(z) < 1 (z \in \Delta)$, 证明$|g(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}$.

6. (10分) (1) 设$f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_n z^n$是整函数, 证明对任意$r > 0$,有

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

(2) $f(z) = u + iv$是整函数, C是一常数, 存在一列$r_i \to \infty$使得当$|z| = r_i$时, $u(z) \leq Cr_i^s$. 求证f是一个次数小于等于s的多项式.

7. (10分)设$R_j = \{z \in \mathbf{C} | 1 \leq |z| \leq r_i\}$ $(j = 1, 2)$是两个闭圆环, $\phi : R_1 \mapsto R_2$ 为全纯同胚，且在R_1 上连续，证明$r_1 = r_2$.