北京大学数学科学学院期末试题

2008 -2009 学年第 2 学期

考试科目: 应用随机分析 考试时间: 2009 年 6 月 18 日

姓 名: ____________ 学 号: ____________

本试卷共 6 道大题，满分 70 分. 第 1 题 16 分、第 2 题 10 分，第 3 、 4 题每题 12 分，第 5 、 6 题每题 10 分；平时成绩满分 30 分.

1. (1) 我们通常用 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$ 来表示一个带 $\sigma-$ 代数 (或 $\sigma-$ 域，或事件域，或事件体) 流的概率空间，其中 $T=[0,\infty)$ 或 $\{0,1,2,\cdots\}$ ，叙述其中每一项的定义. (注意: 不能只写名称)

(2) 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个随机过程，定义 $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s\leq t\}$ 。写出 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上随机过程 $(Y_t)_{t\geq 0}$ 是 $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ 鞅的定义.

(3) 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 Brown 运动，且假设 $B_0=0$ ， $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s\leq t)$, 判断下面三个过程是否为 $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ 鞅? 并说明理由.

(i.) $e^{\frac{1}{2}t}\cos B_t + e^{\frac{1}{2}t}\sin B_t$; (ii.) $\int_0^t e^{t-s}dB_s$; (iii.) $tB_t - \int_0^t B_s ds$.

2. (1) 设 X, Y 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的两个随机变量，且 $E|X|<\infty$, 写出 X 关于 Y 的条件数学期望 $E[X|Y]$ 的定义.

(2) 设 ξ, η 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的两个独立同分布连续型随机变量，且 $E|\xi|<\infty$ 。证明: 下面的等式几乎处处成立,

$$E[\xi|\xi+\eta] = E[\eta|\xi+\eta] = \frac{\xi+\eta}{2}.$$

3. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一维 Brown 运动， $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s\leq t)$, $(X_t)_{t\geq 0}$ 是一个关于 $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ 可知 (适应) 的连续随机过程，而且，对于任意的 $t\geq 0$, 任意的 $\omega\in\Omega$, $|X_t(\omega)|<M<\infty$, M 是一常数. 直接利用 Ito 随机积分、Riemann-Stieltjes 积分的定义证明: 若对于任意的 $\omega\in\Omega$, $X_t(\omega)$ 是 [0,T] 上的有界变差函数，则下式成立:

$$\int_0^T X_t dB_t = X_T B_T - X_0 B_0 - \int_0^T B_t dX_t \quad .$$

4. 考虑如下的随机微分方程

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} dt + A \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} dB_t,$$

其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维 Brown 运动，A 是 2×2 的常数矩阵。求出一个 A 使得若 $(X_t,Y_t)^T$ 的初值是常数 $(x_0,y_0)^T$ 且满足 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$, 则对于任意的 $t>0$, $\frac{X_t^2}{a^2}+\frac{Y_t^2}{b^2}=1$. 并验证你的结论。($T$ 表示矩阵转置)

5. 设 $\{\xi_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, $\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_k, k\leq n)$, $P(\xi_1=1)=P(\xi_1=-1)=\frac{1}{2}$. $\{\eta_n\ n=1,2,\cdots\}$ 是一列随机变量，满足任意的 $n\geq 1$, η_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可知的 (可测的)，且 $|\eta_n|=1$. 设 $S_n=\Sigma_{k=1}^n \eta_k\xi_k$, $n\geq 1$, 令 $S_0=0$, $\tau=\inf\{n\geq 0, S_n<0\}$. 证明: (1) $P(\tau<\infty)=1$; (2) $E\tau=\infty$.

6. 设 $\theta\in\mathbf{R}$, A 为 2×2 对称常数矩阵. $(B_1,B_2)^T$ 是一个 2 维 Brown 运动，(T 表示矩阵转置) 考虑如下的随机微分方程

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ dB_{2,t} \end{pmatrix}.$$

(提示: 设 B 是 2×2 矩阵，则定义 $e^{tB}\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k B^k}{k!}$.)

(1) 设初值为 $(X_0,Y_0)^T=(x_0,y_0)^T$ 是常数时，解上述方程;

(2) 已知上述方程的解是一个马氏过程，请计算出它的转移概率密度;

(3) 写出转移概率密度满足的 Kolmogorov 向前、向后方程;

(4) 对于 A, 给出不变概率密度存在的充要条件，并验证你的结论;

(5) 若不变概率密度存在，写出具体形式，并验证你的结论.