北京大学数学科学学院 期末试题

2015 一 2016 学年第 2 学期

考试科目: 高等代数　　　　考试时间: 2016 年 6 月 23 日

系　　别: ____________　　　　学　　号: ____________

姓　　名: ____________

本试题有正反2页, 共6 道大题, 满分 100 分

1. (30分) 设V有理数域上的4维空间，e_1, e_2, e_3, e_4是它的一组基。φ是V的线性变换，定义为：

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \quad -3e_2 \quad -2e_3 \\ \varphi(e_2) &= e_1 \quad -e_2 \quad +e_3 \\ \varphi(e_3) &= -e_1 \quad +3e_2 \quad +e_3 \\ \varphi(e_4) &= \quad e_2 \quad +e_3 + \quad 2e_4\end{aligned}$$

(a) 求φ在基e_1, e_2+e_3, e_3, e_4下的矩阵，

(b) 求φ的极小多项式及特征多项式；

(c) 求φ的Jordan标准型。

2. (30分)设$U =< \alpha_1, \alpha_2 >$是欧氏空间$\mathbb{R}^4$的子空间，其中

$$\alpha_1 = (1, 0, 1, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0, 0)$$

(a) 求$U^\perp$的维数和它的一组正交基。

(b) 求向量$\alpha = (1, 1, 1, 1)$在U上的正交投影；

(c) 求点$(1, 1, 1, 1)$到空间U最短距离。(本题需要写出详细的推理过程，只有答案不给分)

3. (25分) 设φ是有限维线性空间V的幂零线性变换，幂零指数是l.

(a) 设V_1是φ的像空间，φ_1是φ在V_1上的限制，那么$dim(V_1) < dim(V)$, φ_1是幂零的，幂零指数是$l-1$。

(b) 利用(a)及数学归纳法证明: 如果φ的核空间的维数为r, 那么存在正整数$l_1 = l, l_2, \cdots, l_r$及向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 使得

$$\begin{gathered}\alpha_1, \varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi^{l_1-1}(\alpha_1) \\ \alpha_2, \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi^{l_2-1}(\alpha_2) \\ \cdots \\ \alpha_r, \varphi(\alpha_r), \cdots, \varphi^{l_r-1}(\alpha_r)\end{gathered}$$

是V的一组基。这里$l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r$.

(c) 如果V是10维线性空间，是否存在幂零线性变换φ满足$\varphi^4=0, rank(\varphi^3)=1, rank(\varphi^2)=3$。(写出推理过程，只有答案不给分)。

4. （5分）设V,W是有限维欧氏空间，$\varphi: V\rightarrow W$是实线性变换，那么存在实线性变换$\varphi^*: W\rightarrow V$ 使得

$$(\varphi(\alpha),\beta)_W=(\alpha,\varphi^*(\beta))_V$$

对任意的$\alpha\in V, \beta\in W$, 其中$(\quad,\quad)_V$表示欧氏空间V上的内积。

5. (6分)设(V,f)是一个非退化的正交空间，W是V的r维全迷向子空间，证明

(a) 存在r维全迷向子空间N使得$V=W^\perp\oplus N$;

(b) 设$H=W^\perp\cap N^\perp$，那么

$$V=W\oplus H\oplus N.$$

6. (4分）设V是有限维线性空间，f是V上的对称双线性函数，W是V的子空间，$U=W^\perp$. 如果f限制在U上是非退化的，那么f是非退化的。