

北京大学数学科学学院期末试题

2012 -2013 学年第 2 学期

考试科目: 常微分方程

考试时间: 2013 年 6 月 20 日

姓 名: _____

学 号: _____

本试题 2 页共 7 道大题, 满分 100 分

1 (20 分) 求以下方程的通解 (每题 10 分)

(i) $y''' - 3y'' + 4y = e^x$;

(ii) $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, 其中

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 (20 分) (每题 10 分)

(i) 求初值问题 $y'' + y = -\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 的解.

(ii) 令

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 a, b 为任意实数. 证明初值问题 $\frac{dy}{dx} = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \eta_1$ 的解当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于 0, 初值问题 $\frac{dy}{dx} = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \eta_2$ 的解总是周期的.

3 (15 分) 求方程 $y'' + (1 - \frac{1}{2}x^2)y = 0$ 的幂级数解并指出幂级数的收敛半径.

4 (15 分) 试求实参数 λ 使得边值问题 $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = e$ 有解并求出相应的解.

5 (12 分) 设 $y = \phi(x; \xi, \eta)$ 是初值问题

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x^2 y^2) + \sin(xy), \quad y(\xi) = \eta$$

的解, 试求 $\frac{\partial \phi(x; \xi, \eta)}{\partial \xi} \big|_{(\xi, \eta)=(1,0)}$ 和 $\frac{\partial \phi(x; \xi, \eta)}{\partial \eta} \big|_{(\xi, \eta)=(1,0)}$.

6 (10 分) 设 $M(x) = (m_{ij}(x))$ 是 $n \times n$ 矩阵, 每个元素关于 x 连续, $x \in (-\infty, \infty)$, $n \times n$ 矩阵函数 $Y(x) = (y_{ij}(x))$ 满足以下方程

$$\frac{dY(x)}{dx} = Y(x) \cdot M(x) - M(x) \cdot Y(x).$$

(i) 证明矩阵 $Y(x)$ 的迹 $\text{tr}(Y(x)) = \sum_{i=1}^n y_{ii}(x)$ 与变量 x 无关.

(ii) 证明矩阵 $Y(x)$ 的行列式 $\det(Y(x))$ 与变量 x 无关.

7 (8 分) 求解以下方程:

$$y'' + y = \frac{1}{y^3}, \quad y(x) > 0.$$