北京大学数学科学学院 期末试题

2011 一 2012 学年第 2 学期

考试科目: 高等代数II　　考试时间: 2012 年 6 月 18 日

系　别: ______　　学　号: ______

姓　名: ______

本试题有正反2页, 共4 道大题, 满分 100 分

1. (22分)(其中(a),(b)各5分,(c),(d),(e)各4分) 称$A \in M_n(\mathbb{C})$为正规矩阵, 若$A\overline{A'} = \overline{A'}A$.

   (a) 实对称矩阵、正交矩阵都是正规矩阵.

   (b) Hermitian矩阵、酉矩阵都是正规矩阵.

   (c) 证明: 实2阶正规矩阵或者是实对称的或者是正交矩阵的倍数.

   (d) 找出2阶复矩阵是正规矩阵的充要条件; 并举例说明存在2阶复正规矩阵既不是Hermitian矩阵, 也不是酉矩阵的倍数.

   (e) 存在3阶实正规矩阵既不是实对称的, 也不是正交矩阵的倍数.

2. (28分) (其中(a),(b),(c)各6分, (d)10分)

   设

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad | \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   那么

   (a) 矩阵

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   是$V$的一组基.

   (b) 映射

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(A, B) \mapsto \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det(A) - \det(B))$$

   是$V$上的双线性函数($\det(A)$表示矩阵$A$的行列式).

   (c) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是本题(a)中的向量, 求$\varphi$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的度量矩阵$G$.

   (d) 设$G$是(c) 中的度量矩阵, 求$\mathbb{R}^3 - \left\{\overrightarrow{0}\right\}$上的函数

$$F(X) = \frac{X'GX}{X'X}$$

   的最大值和最小值, 其中$X = (x_1, x_2, x_3)' \in \mathbb{R}^3 - \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. (要写出推理过程; 用数学分析方法求解不给分.)

3. (35分)(其中(a)5分, (b),(c),(d)各10分)

设$V$是一个有限维欧氏空间, $W$是$V$的子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$W$的一组标准正交基. 那么,

(a) 映射

$$\pi_W : V \longrightarrow V$$
$$\alpha \mapsto \sum_{i=1}^{r} (\alpha, \alpha_i)\alpha_i$$

是$V$上的线性变换. 这个线性变换称为$V$在$W$上的正交投影.

(b) 证明对任意的$\alpha \in V$, $\beta \in W$, 都有

$$|\alpha - \pi_W(\alpha)| \leq |\alpha - \beta|.$$

(c) 有限维欧氏空间$V$的非零线性变换$\mathcal{A}$为正交投影的充要条件是$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$并且$\mathcal{A}$是对称变换.

(d) 如果$\mathcal{B}$是欧氏空间$V$上的对称线性变换,那么存在实数$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$及子空间$W_1, \cdots, W_s$使得

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \pi_{W_i}.$$

4. (15分) (各5分)

设$V$是一个非退化(i.e. 正则)的辛空间, $W$是它的一个子空间.

(a) 证明$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

(b) 举例说明存在$W \cap W^{\perp} \neq \{\overrightarrow{0}\}$的情况.

(c) 如果$W$是$V$的非退化子空间, 那么$V = W \oplus W^{\perp}$.