

杨磊老师高等数学（B）历年试题汇总

秋季学期期末考试

（星宇女神整理）

2010 级（2011 年 1 月 4 日）

共 5 道大题，满分 100 分。

1.（20 分）证明：e 是无理数。

2.（20 分）证明不等式：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \text{ 对于任意的 } x > 0.$$

3.（20 分）找出下列二次曲面上的所有直线：

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1, \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - z = 0$$

4.（20 分）设 $f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$. 求 $f(x, y)$ 的极值。

5.（20 分）（1）求证：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{3}$$

（2）设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 求证：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \sqrt{3}$$

共 5 道大题, 满分 100 分。

1. (20 分) 求证: e 是无理数。

2. (20 分) 证明两直线

$$l_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \quad \text{与} \quad l_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

是异面直线。

3. (20 分) 求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值。

4. (20 分) 求极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} e^{-x}$$

5. (20 分) 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 求证:

$$\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$$

2012 级（2013 年 1 月 7 日）

共 5 道大题，满分 100 分。

1. （20 分）求证：e 是无理数。

2. （20 分）求极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \arctan x}{x}$$

3. （20 分）设 a_1, \dots, a_n 为任意实数，求证：

$$f(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 内必有根。}$$

4. （20 分）求 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xz + 2x + 4y - 6z + 3$ 的极值。

5. （20 分）将二次曲面方程化为标准形式，并判断曲面类型：

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 13 = 0$$

2013 级（2014 年 1 月 2 日）

共 5 道大题，满分 100 分。

1. （20 分）求证：e 是无理数。
2. （20 分）判断二次曲面 $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 1$ 的形状，并写出标准型。
3. （20 分）求证：方程 $\ln x = ax + b$ 至多只有 2 个正根。
4. （20 分）求函数 $f(x, y) = 2(y - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$ 的极值。
5. （20 分）（1）求极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$$

（2）设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 求证：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot x_n = \sqrt{3}$$

补充一下，由第 3 题想到了我们去年（2014 级）期末考题里面有一道：

求证：方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 至多只有 3 个根。