2012 春 概率论 期末考卷

蒋达权 教授

2012 年 6 月 11 日

by InfinityX

1. $0 < P(A), P(B) < 1, P(A|B) > P(A|B^C)$, 证明 $P(B|A) > P(B|A^C)$.

2. $X \backsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), Y = \mathrm{e}^X$, 求 $\mathrm{E}Y, \mathrm{var}Y$.

3. (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y) = \mathrm{e}^{-y}, 0 < x < y$.

   (a) $x > 0$, 求 $\mathrm{E}(Y|X = x)$.

   (b) 求 $Z = X/Y$ 的密度.

   (c) 求 $\mathrm{cov}(X, Y)$.

4. $X \backsim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$, Σ 正定, 证明 $(X - \mu)^T \Sigma^{-1}(X - \mu) \backsim \chi^2(n)$.

5. 判断正误并说明理由.

   (a) $\{X_i\}_{i=1}^n$ 两两不相关, 方差存在, 则 $\mathrm{var}(\Sigma_i X_i) = \Sigma_i \mathrm{var} X_i$.

   (b) X, Y 是正态分布, 则 (X, Y) 是二元正态分布.

   (c) $\{X_n\}$ 满足 $P(X_n = k/n) = 1/n, k = 1, ..., n$, 则 $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{U}(0, 1)$.

   (d) $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$, 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

6. 定义 $\mathrm{var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - (\mathrm{E}(X|Y))^2, \mathrm{E}X^2$ 存在, 证明 $\mathrm{var}X = \mathrm{var}\mathrm{E}(X|Y) - \mathrm{E}(\mathrm{var}(X|Y))$.

7. $X_n \backsim \mathcal{P}(\lambda_n), \lambda_n \to +\infty, Y_n = (X_n - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$. 证明 $Y_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, 1)$.

8. $\{X_i\}$i.i.d., 有相同的分布函数 $F(x)$, 定义 $a_F = \inf\{x|F(x) > 0\}, Y_n = \min\{X_1, ...X_n\}$. 证明 $Y_n \xrightarrow{a.s.} a_F$.