北京大学数学科学学院 期中试题

2011 — 2012 学年第 2 学期

考试科目: 高等代数II　　　　考试时间: 2012 年 4 月 23 日

系　　别: ________　　　　学　　号: ________

姓　　名: ________

本试题有正反2页, 共8 道大题, 满分 100 分

本试题中$L(V)$表示线性空间V上线性变换构成的线性空间, $L(V,U)$表示从线性空间V到线性空间U的线性映射构成的线性空间.

1. (13分) 对线性空间V的任意子空间$V_1, V_2, \ldots, V_s$ $(s \geq 2)$, 给出$\sum_{i=1}^s V_i$为直和(i.e. $\forall \alpha \in \sum_{i=1}^s V_i$, 表法$\alpha = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ $(\alpha_i \in V_i)$是唯一的) 的两个充分必要条件并证明之.

2. (12分) $\mathbb{Q}$上的矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
是否相似于对角阵? 若答案为肯定, 给出某个与之相似的对角矩阵; 若答案为否定, 证明之.

3. (12分) 判断下列复矩阵是否相似:
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$
证明你的结论.

4. (12分) 设复矩阵A的特征多项式为$f(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)^2$, 最小多项式为$m(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)$. 求$A$的Jordan标准形.

5. (12分) 维数公式是否可推广为以下结论? 对线性空间V的任意子空间V_1, V_2, U, 恒有
$$\dim((V_1+V_2)\cap U) = \dim(V_1 \cap U) + \dim(V_2 \cap U) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap U).$$
若对, 证明之; 否则给出反例.

6. (13分) 设V是数域P上的线性空间, 且$\mathcal{A} \in L(V)$的某个化零多项式$g(\lambda)$可分解为一次因式幂的乘积的形式:

$$g(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{t_i}. \ (\text{当} i \neq j, \text{有} \lambda_i \neq \lambda_j)$$

证明: 若存在$h(\lambda) \in P[\lambda]$, 使得$(\lambda - \lambda_i)^{t_i} | (h(\lambda) - \lambda_i)$, $\forall i \in [m]$, 则(i) $h(\mathcal{A})$在适当的基下对应对角形矩阵; (ii) $h(\mathcal{A}) - \mathcal{A}$是幂零变换.

7. (13分) 设V, U, W是数域P上的线性空间, 且$\mathcal{A} \in L(V, U)$, $\mathcal{B} \in L(U, W)$. 证明:

$$\dim \mathrm{Im} \mathcal{A} + \dim \mathrm{Im} \mathcal{B} \leq \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{B}\mathcal{A})) + \dim U.$$

8. (13分) 设$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{2012}$为线性空间$V$上两两不同的线性变换即$\mathcal{A}_i \neq \mathcal{A}_j$当$i \neq j$. 是否必定存在$\alpha \in V$, 使得$\mathcal{A}_1(\alpha), \mathcal{A}_2(\alpha), \cdots, \mathcal{A}_{2012}(\alpha)$两两不同? 证明你的结论.