北京大学数学科学学院 期末试题

2011 — 2012 学年第 1 学期

考试科目: 高等代数 I　　考试时间: 2012 年 1 月 2 日

系　别: ________　　学　号: ________

姓　名: ________

本试题有正反2页, 共9 道大题, 满分 100 分

本试题中$\mathbb{P}$为一般的数域, $\mathbb{Q}$是有理数域, $\mathbb{R}$是实数域, $\mathbb{C}$是复数域. 一般地, $\mathbb{P}^{s\times n}$为数域$\mathbb{P}$上s行n列的矩阵的集合.

1. (15分) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & O & A_2 \\ O & A_3 & O \end{pmatrix}_{9\times 9}$$

的逆, 其中:

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2011 \\ 0 & 2012 & 0 \\ 2020 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3},$$

$$\mathbf{A_2} = \Big(P(2,1(3))\Big)_{2\times 2},$$

$$\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

(以上每个O表示相应大小的零矩阵, $P(2,1(3))$表示将单位矩阵第1行的3倍加到第2行上得到的初等矩阵.)

2. (10分) 设A, B是n级矩阵, 且$ABAB$为零矩阵. 则$BABA$是否也必定为零矩阵? 证明你的结论. $n\geq 3$

3. 设A, B是n级矩阵.

   (a) (4分) 当A可逆, 且$AB = BA$, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \left|A^2 - B^2\right|.$$

(b) (3分) 当A不可逆, 但$AB = BA$时, 是否也有上述结论?

(c) (3分) 当A可逆, 但$AB \neq BA$时, 是否也有上述结论?

以上(b)(c)中若答“是”, 证明你的结论; 若答“否”, 给出反例.

4. (10分) 设$A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ $n\geq 3$ 且$|A| = d$. 证明: $(A^*)^* = d^{n-2}A$, 这里*表示伴随矩阵.

5. (a) (8分) 设$A \in \mathbb{P}^{s\times n}, B \in \mathbb{P}^{n\times m}, C \in \mathbb{P}^{m\times t}$. 证明: 秩$(ABC) \geq$ 秩(AB) + 秩(BC) − 秩(B).

(b) (7分) 设A为n级方阵, $r =$ 秩(A). 令$k = \begin{cases} r+1, & 当r < n; \\ 0, & 当r = n. \end{cases}$

证明: 对于任意的整数$m \geq k$恒有秩$(A^k) =$ 秩(A^m).

6. (10分) 化$\mathbb{Q}$上的二次型$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1x_4 + 2x_3x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$为标准型, 并给出非退化线性替换矩阵.

7. (10分) 设$B = (b_{ij})_{n\times m}$为数域$\mathbb{R}$上的矩阵, 秩$(B) = r$. 求二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j)^2$$

的秩. 证明你的结论.

8. (10分) 设实对称矩阵$A = aE_n + bJ_n$, 其中E_n表示单位矩阵, J_n为元素全是1的n级矩阵, a, b均为正的实数. 求矩阵A的规范形.

9. (10分) 证明: 对任意实对称矩阵A, 存在实数$x, y \in \mathbb{R}$, 使得$A + xE$和$E + yA$都是正定矩阵(E为同级的单位矩阵).