《复变函数》期中试题 本试卷共 7 道大题，满分 100 分

1. 设 $f(x,y)$ 是 $(0,0)\in\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ 邻域上关于实变量 (x,y) 二阶连续可导的函数。用复变量 $z=x+iy$ 和 $\bar{z}=x-iy$ 及其相关的一阶、二阶偏导给出这一函数在 $z=0$ 邻域上的 Taylor 展开。（20 分）

2. 证明复函数 $(x^2+2y)+i(y-3x)$ 不是复变量 $z=x+iy$ 的解析函数。构造一个尽可能简单地二阶多项式函数 $p(x,y)+iq(x,y)$，使得 $(x^2+2y)+i(y-3x)+p(x,y)+iq(x,y)$ 是复变量 $z=x+iy$ 不为常数的解析函数。（20 分）

3. 表述 Cauchy 定理（不证）。利用 Cauchy 定理证明解析函数的 Cauchy 积分公式。（15 分）

4. 令 $D=\{x+iy|y>0\}$ 为上半平面，证明 D 到自身，并且将 $i\in D$ 映到 $i\in D$ 的解析同胚全体构成的群可以用一个实参数来表示，给出群运算（同胚的复合与同胚的逆）与参数的关系。（15 分）

5. (a) 给出单位圆盘 $D(0,1)$ 到上半平面 $D=\{x+iy|y>0\}$ 的所有解析同胚映射。证明你的结论；
   (b) 证明在这些同胚中，存在唯一的一个同胚 $f(z)$，满足 $f(0)=i, f'(0)>0$。（15 分）

6. 设 $D=\{z|1<|z|<2\}$ 为圆环，$f(z)$ 是 D 上的解析函数，证明 $f(z)$ 可以分解为 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ 的形式，其中 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别是圆盘 $D(0,2)=\{z||z|<2\}$ 和扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 中取区域 $\bar{\mathbb{C}}-\overline{D(0,1)}$ 上的解析函数。如果上面分解中要求 $f_1(0)=0$，问这样的分解是否是唯一的，为什么？（8 分）

7. 令 $D=\{z=x+iy||z|<1,y>0\}$ 为单位圆盘的上半部分，设 $f(z)$ 是 D 上解析，$\overline{D}$ 上连续的函数，并且当 $z=x$ 为实数时，$f(z)$ 也是实数。在单位圆盘 $D(0,1)$ 上定义函数 $g(z)$ 为：$g(z)=f(z)$，如果 $z=x+iy$ 满足 $y\le 0$;$g(z)=\overline{f(\bar{z})}$，如果 $z=x+iy$ 满足 $y<0$，证明 $g(z)$ 是单位圆盘 $D(0,1)$ 上的解析函数（本题的结论如果直接引用定理，请给出定理的证明。证明中用到的其他定理只需表述，不需证明）（7 分）

(编辑：伏贵荣 2017 年 4 月，任课老师：谭小江)