

# 常微分方程 2017 年期末考试

June 15, 2017

1. (20 分) 求线性微分方程的通解:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} y.$$

2. (20 分) 求高阶微分方程的通解:

$$y''' - y'' + y' - y = 8e^x + 5x \sin x.$$

3. (20 分) 求偏微分方程

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

的通解及过曲线  $y = x^2, z = x^3$  的积分曲面.

4. (15 分) 求边值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

的非零解.

5. (15 分) 设有方程  $\frac{dy}{dx} = Ay + r(y)$ , 其中  $A$  的所有特征值的实部均负,  $r(y)$  有界连续, 证明方程的任一解均在整个实轴上存在且正向有界.

6. (10 分) 设  $\phi(x)$  是方程  $y'' + q(x)y = 0$  的非零解,  $q > 0$  连续且严格单调递增. 设  $\phi(x)$  有零点  $x_1 < x_2 < \dots$ , 证明:

- (1)  $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ ;
- (2) 设  $b_n = \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |x|$ , 则  $b_1 > b_2 > \dots$ .