北京大学期中试题解答

2016–2017学年第一学期

考试科目：数学物理方法（上）　考试时间：2016年11月4日

姓　名:__________　学　号:__________

本试题共七道大题，满分100分

注意：各题均需写出必要的关键步骤。

一、（15分）简单计算和回答

1. 写出$\sin z$（其中z是复数）的实部，虚部，模和辐角。

解:

$$z = x + \mathrm{i}y, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-y+\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{y-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - \mathrm{e}^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)}{2\mathrm{i}}$$

$$= \sin x\frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} + \mathrm{i}\cos x\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} = \sin x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\sinh y$$

$\sin z$的实部是$\sin x\cosh y$，虚部是$\cos x\sinh y$，模是$\sqrt{(\sin x\cosh y)^2 + (\cos x\sinh y)^2} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x\cosh^2 y + (\cos x\sinh y)^2} = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x} = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$和

$$\text{辐角是}\begin{cases} \theta + 2k\pi, & \sin x > 0 \\ \theta + (2k+1)\pi, & \sin x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & \sin x = 0\text{且}\cos x\sinh y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & \sin x = 0\text{且}\cos x\sinh y < 0 \\ \text{不定}, & \sin x = 0\text{且}\sinh y = 0 \end{cases} \quad \text{其中} \quad \begin{array}{l} \theta = \arctan(\cot x\tanh y), \\ \\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \end{array}$$

2. 在复平面中画出满足不等式$\mathrm{Im}\left(z^2\right) \geq 0$的点集，这个点集构成区域吗？

解：

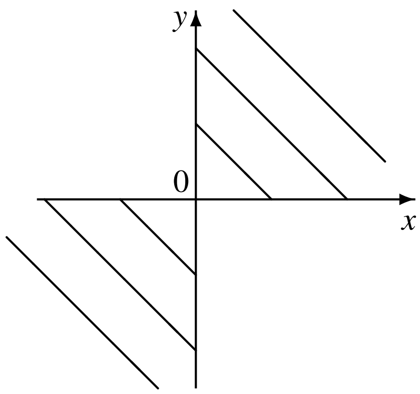
$$z = x + \mathrm{i}y$$

$$\mathrm{Im}\left(z^2\right) = 2xy \geq 0$$

即

$$x \geq 0, y \geq 0; \text{或} x \leq 0, y \leq 0$$

复平面内第一象限以及第三象限的点集(如下图阴影部分所示)。这个点集不构成区域。



3. 请给出i^{i}的所有可能值，其中i 是虚单位。

解：

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln\mathrm{i}}$$

$$|\mathrm{i}| = 1, \qquad \arg\mathrm{i} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\therefore \ln\mathrm{i} = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi\mathrm{i}, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\therefore \mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

即i^{i}的可能值有无穷多个，分别为$\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi}$，其中$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

二、　（10分）已知复数$z = x + \mathrm{i}y$，$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$，解析函数$f(z) = u + \mathrm{i}v$的实部$u$和虚部$v$满足$u + v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. 试求$f(z)$.

解：先求出$F(z)$，再求$f(z)$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) = u + v$$

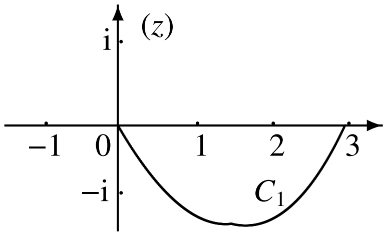
$$F = u - v + \mathrm{i}(v + u) = (1 + \mathrm{i})(u + \mathrm{i}v) = (1 + \mathrm{i})f$$

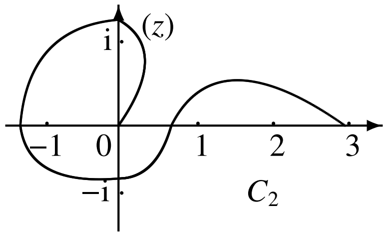
$$f(z)=\frac{F}{1+\mathrm{i}}=-\frac{1}{(1+\mathrm{i})z}+(1-\mathrm{i})C,\qquad C\in\mathbb{R}$$

三、 （15分）已知$f(z)=\ln\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}+\sqrt{z^2+1}$，规定$f(0)=-1+2\pi\mathrm{i}(1+2k\pi\mathrm{i})$，求$f(3)$.

(1) 若z沿下图中的路径C_1从原点到达$z=3$点；

(2) 若z沿下图中的路径C_2从原点到达$z=3$点。





解：

$$\begin{aligned}f(z)&=\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}+\sqrt{z^2+1}=\ln\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}+\sqrt{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\\&=\sqrt{|z^2+1|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg(z^2+1)}+\ln\left|\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\end{aligned}$$

由已知条件$f(0)=-1+2\pi\mathrm{i}$，知

$$\arg\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\bigg|_{z=0}=2\pi(2k\pi),\qquad \arg\left(z^2+1\right)\Big|_{z=0}=(4n+2)\pi(4m\pi)$$

(1) 若z沿图中的路径C_1从原点到达$z=3$点，则

$$\Delta\arg(\mathrm{i}-z)=\arctan 3,\qquad \Delta\arg(\mathrm{i}+z)=-\arctan 3$$

$$\therefore\ \arg\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\bigg|_{z=3}=2\pi+2\arctan 3(2k\pi+2\arctan 3)$$

$$\Delta\arg(z-\mathrm{i})=\arctan 3$$

$$\therefore\ \arg\left(z^2+1\right)\Big|_{z=3}=2(2n+1)\pi(4m\pi)$$

因此

$$f(3)=\left[\sqrt{|z^2+1|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg(z^2+1)}+\ln\left|\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right]\bigg|_{z=3}=2\mathrm{i}\arctan 3+2\pi\mathrm{i}-\sqrt{10}$$

$(2\mathrm{i}\arctan 3+2k\pi\mathrm{i}+\sqrt{10})$

(2) 若z沿图中的路径C_2从原点到达$z=3$点，则

$$\Delta\arg(\mathrm{i}-z)=2\pi+\arctan 3,\qquad \Delta\arg(\mathrm{i}+z)=-\arctan 3$$

$$\therefore\ \arg\left.\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right|_{z=3}=4\pi+2\arctan 3(2k\pi+2\pi+2\arctan 3)$$

$$\Delta\arg(z-\mathrm{i})=2\pi+\arctan 3$$

$$\therefore\ \arg\left.\left(z^2+1\right)\right|_{z=3}=4(n+1)\pi(2(2m+1)\pi)$$

因此

$$f(3)=\left.\left[\sqrt{\left|z^2+1\right|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\arg\left(z^2+1\right)}+\ln\left|\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right|+\mathrm{i}\arg\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}\right]\right|_{z=3}=2\mathrm{i}\arctan 3+4\pi\mathrm{i}+\sqrt{10}$$

$$(2\mathrm{i}\arctan 3+2\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}-\sqrt{10})$$

四、 （20分）计算下列积分：

1. $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=2}\frac{(\zeta^*)^2\cos\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ （其中ζ^*是复数ζ的复共轭，z是复数且$|z|\neq 2$.）

解：这是Cauchy型积分。因为在$|\zeta|=2$上，$\zeta^*=\dfrac{4}{\zeta}$

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{16\cos\zeta}{\zeta^2(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$

当$z=0$时，

$$f(0)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{16\cos\zeta}{\zeta^3}\mathrm{d}\zeta=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}16\cos\zeta\Big|_{\zeta=0}=-16\pi\mathrm{i}$$

当$0<|z|<2$时，由多连通区域的Cauchy定理

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=\epsilon}\frac{\frac{16\cos\zeta}{\zeta-z}}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta+\oint_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{\frac{16\cos\zeta}{\zeta^2}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

两端令$\varepsilon\to 0$，由高阶导数公式以及小圆引理，得

$$f(z)=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{16\cos\zeta}{\zeta-z}\Big|_{\zeta=0}+2\pi\mathrm{i}\frac{16\cos\zeta}{\zeta^2}\Big|_{\zeta=z}=32\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{z^2}+\frac{\cos z}{z^2}\right)$$

$|z|>2$时，

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\frac{16\cos\zeta}{\zeta - z}}{\zeta^2} \mathrm{d}\zeta$$

由高阶导数公式，得

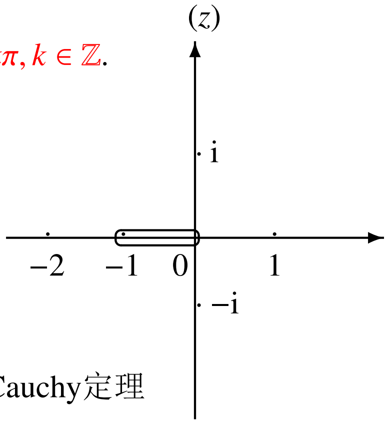
$$f(z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{16\cos\zeta}{\zeta - z}\bigg|_{\zeta=0} = -32\pi\mathrm{i}\frac{1}{z^2}$$

综上所述，知

$$f(z) = \begin{cases} -16\pi\mathrm{i}, & z = 0 \\ \frac{32\pi\mathrm{i}}{z^2}(\cos z - 1), & 0 < |z| < 2 \\ -\frac{32\pi\mathrm{i}}{z^2}, & |z| > 2 \end{cases}$$

2. $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \left(\frac{z+1}{z}\right)^p \frac{\mathrm{d}z}{z+2}$，其中$p$为实数。如下图在实轴上沿$-1$到$0$作割线，规定在割线上岸

$$\arg\frac{z+1}{z} = -\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$



解：由多连通区域的Cauchy定理

$$\oint_{|z|=R>2} \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)^p}{z+2}\mathrm{d}z = \oint_{|z+2|=\varepsilon} \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)^p}{z+2}\mathrm{d}z + \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)^p}{z+2}\mathrm{d}z$$

令$R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，由大圆引理和小圆引理，得

$$2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z+1}{z}\right)^p\bigg|_{z\to\infty} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z+1}{z}\right)^p\bigg|_{z=-2} + \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)^p}{z+2}\mathrm{d}z$$

从割线上岸沿实轴正方向到达无穷远点，

$$\Delta \arg(z+1) = 0, \qquad \Delta \arg(z) = -\pi$$

$$\therefore \Delta \arg \frac{z+1}{z} = \pi$$

因此

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^p \Bigg|_{z\to\infty} = 1 \left(e^{i2kp\pi}\right)$$

从割线上岸沿负实轴到达$z=-2$点，

$$\Delta \arg(z+1) = \pi, \qquad \Delta \arg(z) = 0$$

$$\therefore \Delta \arg \frac{z+1}{z} = \pi$$

因此

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^p \Bigg|_{z=-2} = 2^{-p} \left(2^{-p} e^{i2kp\pi}\right)$$

故

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)^p}{z+2} dz = 2\pi i \left(\frac{z+1}{z}\right)^p \Bigg|_{z\to\infty} - 2\pi i \left(\frac{z+1}{z}\right)^p \Bigg|_{z=-2} = 2\pi i \left(1-2^{-p}\right) \left(2\pi i \left(1-2^{-p}\right) e^{i2kp\pi}\right)$$

五、（10分）α取何值时，函数$F(z) = \int_0^z \left(\frac{\alpha}{e^\zeta + 1} + \frac{\zeta}{\zeta^2 + \pi^2}\right) d\zeta$ 在$|z| < 3\pi$内是单值的？

解：方法一

要函数$F(z) = \int_0^z \left(\frac{\alpha}{e^\zeta + 1} + \frac{\zeta}{\zeta^2 + \pi^2}\right) d\zeta$ 在$|z| < 3\pi$内是单值，当且仅当对$|z| < 3\pi$内所有闭合围道C，都有$\oint_C \left(\frac{\alpha}{e^\zeta + 1} + \frac{\zeta}{\zeta^2 + \pi^2}\right) d\zeta = 0.$

当C内没有被积函数$\left(\frac{\alpha}{e^\zeta + 1} + \frac{\zeta}{\zeta^2 + \pi^2}\right)$的奇点时，由单连通区域的Cauchy定理知沿闭合围道C的积分为零。

当C内有被积函数的奇点时，由多连通区域的Cauchy积分公式知，沿闭合围道C的积分等于沿C内所有奇点的无穷小圆的积分之和。

在$|\zeta| < 3\pi$内被积函数$\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)$有且只有两个奇点$\zeta = \pm\pi i$，由小圆引理

$$\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{|\zeta+\pi i|=\epsilon}\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)d\zeta = 2\pi i\left(\frac{\alpha(\zeta+\pi i)}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta-\pi i}\right)\Bigg|_{\zeta=-\pi i} = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{|\zeta-\pi i|=\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)d\zeta = 2\pi i\left(\frac{\alpha(\zeta-\pi i)}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta+\pi i}\right)\Bigg|_{\zeta=\pi i} = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$$

因此，当$\alpha = \frac{1}{2}$时，

$$\oint_{|\zeta+\pi i|=\epsilon<2\pi}\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)d\zeta = \oint_{|\zeta-\pi i|=\varepsilon<2\pi}\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)d\zeta = 0$$

所以，当$\alpha = \frac{1}{2}$时，函数$F(z) = \int_0^z\left(\frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}\right)d\zeta$ 在$|z| < 3\pi$内是单值的。

方法二

找被积函数的原函数

$$\because \frac{d}{d\zeta}\left[\alpha\zeta-\alpha\ln\left(e^{\zeta}+1\right)+\frac{1}{2}\ln(\zeta^2+\pi^2)\right] = \frac{\alpha}{e^{\zeta}+1}+\frac{\zeta}{\zeta^2+\pi^2}$$

$$\therefore F(z) = \left[\alpha\zeta-\alpha\ln\left(e^{\zeta}+1\right)+\frac{1}{2}\ln(\zeta^2+\pi^2)\right]_{\zeta=z} - \left[\alpha\zeta-\alpha\ln\left(e^{\zeta}+1\right)+\frac{1}{2}\ln(\zeta^2+\pi^2)\right]_{\zeta=0}$$

$F(z) = \alpha z-\alpha\ln(e^z+1)+\frac{1}{2}\ln(z^2+\pi^2)-C,\qquad$ 其中$C = \left[\alpha\zeta-\alpha\ln\left(e^{\zeta}+1\right)+\frac{1}{2}\ln(\zeta^2+\pi^2)\right]_{\zeta=0}$

$$F(z) = \alpha z + \ln\frac{\sqrt{z^2+\pi^2}}{(e^z+1)^{\alpha}} - C$$

在$|z| < 3\pi$内，$F(z)$有$z = \pi i$和$z = -\pi i$两个可能的枝点。在z平面内，绕$z = \pi i$的无穷小圆一圈，$\sqrt{z^2+\pi^2}$ 的辐角变化π，$(e^z+1)^{\alpha}$的辐角变化$2\alpha\pi$，当且仅当$\alpha = \frac{1}{2}$ 时，$F(z)$的函数值不变。对$z = -\pi i$类似。因此，当$\alpha = \frac{1}{2}$时，$F(z)$在$|z| < 3\pi$内是单值的。

六、（10分）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+2}}z^{4n+1}$的收敛区域。

解：由Cauchy根式判别法，当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|u_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{(-1)^n}{2^{3n+2}}z^{4n+1}\right|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{2^{\frac{3n+2}{n}}}z^{\frac{4n+1}{n}}\right| < 1$$

也就是当

$$|z| < \sqrt[4]{8}$$

时，级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n+2}}z^{4n+1}$绝对收敛。

七、 （20分）将下列函数在指定点展开为级数，并给出其收敛半径。

1. 函数$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z+z^2}}$ 在$z = 0$ 的邻域内展开，规定$f(0) = 1$.

解法1

$$1 + z + z^2 = 0 \Rightarrow z = \mathrm{e}^{\pm\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$$

$$1 + z + z^2 = (z - \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}})(z - \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}) = (z + \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})(z + \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z + \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})(z + \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + z\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})(1 + z\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}})}}$$

利用规定

$$(1+z)^{\alpha}|_{z=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\alpha\pi},\ \text{其中}k\ \text{为任意整数}$$

时，函数$(1+z)^{\alpha}$在$z = 0$邻域内可以展开为级数

$$(1+z)^{\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\alpha\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ \\ n\end{pmatrix}z^n, \qquad \text{最大可能的收敛范围}|z| < 1$$

其中

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \\ n\end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}$$

得

$$\begin{aligned}f(z) &= e^{ik_1\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ m\end{pmatrix}(ze^{-\frac{1}{3}\pi i})^m e^{ik_2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}(ze^{\frac{1}{3}\pi i})^n\\ &= e^{i(k_1+k_2)\pi}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{n=0}^{k}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}(e^{\frac{1}{3}\pi i})^{2n-k}\end{aligned}$$

所以规定

$$f(0) = 1$$

时，在$z = 0$邻域内$f(z)$可以展开为级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{n=0}^{k}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}(e^{\frac{1}{3}\pi i})^{2n-k},\qquad \text{最大可能的收敛范围}|z| < 1$$

解法2

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z+z^2}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1-z^3}}$$

利用规定

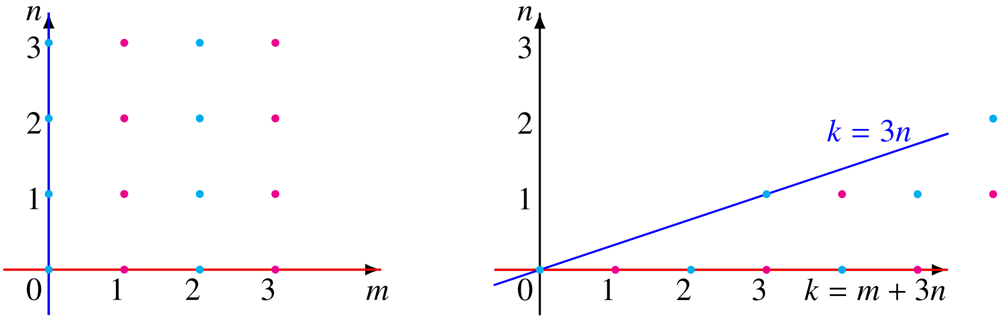
$$(1+z)^{\alpha}|_{z=0} = e^{i2k\alpha\pi},\ \text{其中}k\ \text{为任意整数}$$

时，函数$(1+z)^{\alpha}$在$z = 0$邻域内可以展开为级数

$$(1+z)^{\alpha} = e^{i2k\alpha\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}z^n$$

得

$$f(z) = e^{ik_1\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ m\end{pmatrix}(-z)^m e^{ik_2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}(-z^3)^n$$
$$= e^{i(k_1+k_2)\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k\sum_{n=0}^{[\frac{k}{3}]}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ k-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}$$



所以规定
$$f(0) = 1$$
时，在$z = 0$邻域内$f(z)$可以展开为级数

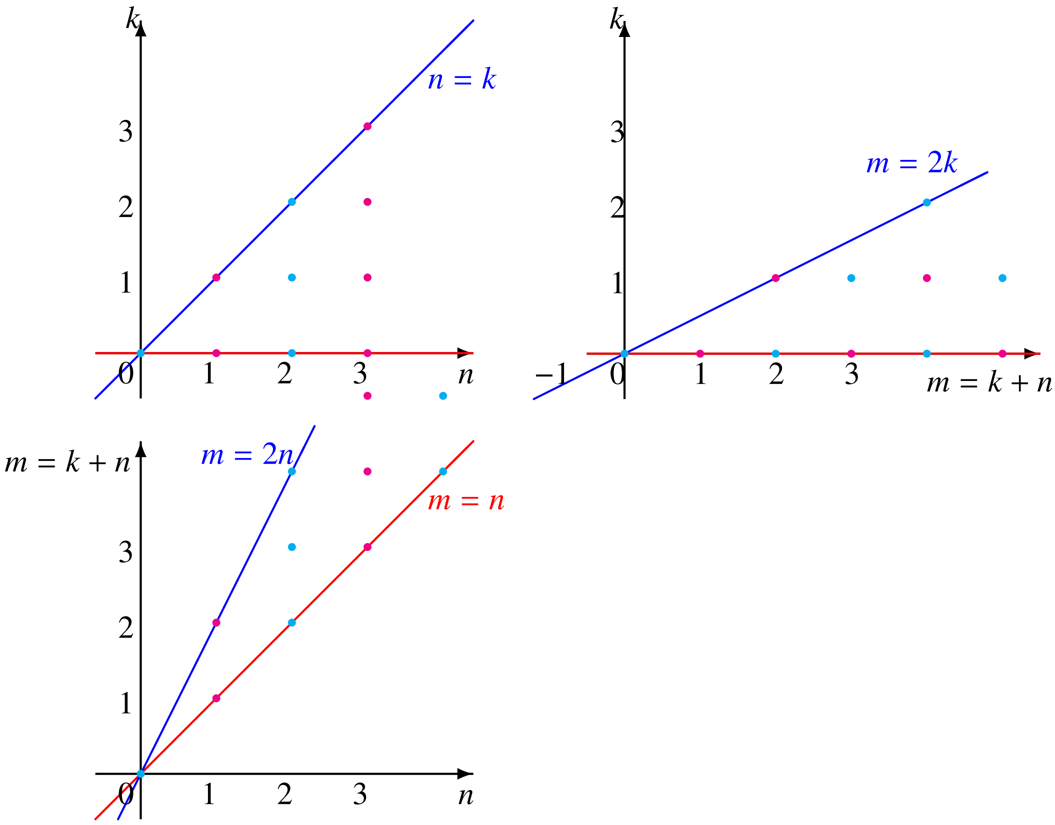
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k\sum_{n=0}^{[\frac{k}{3}]}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ k-3n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}, \qquad \text{最大可能的收敛范围}|z| < 1$$

解法3 利用规定
$$(1+z)^{\alpha}|_{z=0} = 1$$
时，函数$(1+z)^{\alpha}$在$z = 0$邻域内可以展开为级数

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}z^n, \qquad |z| < 1$$

得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{\sqrt{1+z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(z^2+z)}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(z^2+z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n (z+1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{-\frac{1}{2}}{m-k} \binom{m-k}{k} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{n=[\frac{m}{2}]}^{m} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \binom{n}{m-n}, \qquad \text{最大可能的收敛范围} |z| < 1
\end{aligned}
$$



2. 函数$f(z)=\dfrac{\sin z}{z-\pi}$在$z=\pi$的空心邻域内展开。

解：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\sin z}{z-\pi}=\frac{\sin(\pi+z-\pi)}{z-\pi}=-\frac{\sin(z-\pi)}{z-\pi}=-(z-\pi)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}, \qquad\qquad 0<|z-\pi|<\infty
\end{aligned}
$$