北京大学数学学院泛函分析二期末试题

2008–2009 学年第一学期

1. (10 分) 设 Ω 为开区域．算子 $Lu := \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_{j=1}^n b_j\partial_j u + cu$, 定义域为 $C_0^\infty(\Omega)$．其中 a_{ij}, b_j, c 为实有界光滑函数．
   (i) 求 L 在 $L^2(\Omega)$ 上的伴随算子 L^*．
   (ii) 设 a_{ij} 满足强椭圆条件，证明 L 生成强连续算子半群．

2. (10 分) 设 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$．定义算子 $T : u(x) \to |x|^2 u(x)$，其定义域为

$$D(T) := \{u \in \mathscr{H} \,|\, \int_{\mathbb{R}^n} |x|^4 |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty\},$$

   证明 T 是无界算子，且为闭算子．

3. (20 分) 设 A 为希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中的自伴算子，$\{E_\lambda, \mathbb{R}\}$ 为其谱族，证明：
   (i) $\mathrm{e}^{iAt} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\lambda t}\,\mathrm{d}E_\lambda$ 为一酉群．
   (ii) 若 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$，$A = -\Delta$，写出对应酉群的积分核表达式．

4. (10 分) 设 A 为希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中的自伴算子，$\{E_\lambda, \mathbb{R}\}$ 为其谱族．令 $A_n = \int_{-n}^n \lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$．证明 A_n 在强预解式意义下收敛到 A．

5. (20 分) 设 S^1 为周长 2π 的圆，Laplace 算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 定义在 $C_0^\infty(S^1 \times \mathbb{R}) \subset L^2(S^1 \times \mathbb{R})$ 上．设 V 为 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上紧支集光滑函数．令 $H = -\Delta + V$．证明本质谱 $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = [0, \infty]$．

6. (10 分) 设 A 为希尔伯特空间上的严格正的对称算子，证明 A 本质自伴等价于 $\ker(A^*) = 0$．

7. (20 分) 设 $a_k\,(k = 1, \cdots, n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数，$a_k \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $q \geq 4$, $q > n$, $\nabla \cdot (a_1, \cdots, a_n) = 0$ (在分布意义下)．令 $\Delta_H = \sum_{j=1}^n (\partial_j - ia_j)^2$．证明：
   (i) Kato 不等式：$\forall u \in L^1_{\mathrm{loc}}, \Delta_H u \in L^2_{\mathrm{loc}}$，有

$$\Delta|u| \leq \mathrm{Re}(\mathrm{sgn} u \cdot \Delta_H u).$$

   (ii) 若 $V \geq 0, V \in L^2_{\mathrm{loc}}$，则 $-\Delta_H + V$ 为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上本质自伴算子．