2011-2012 学年偏微分方程期末考试

1. 设$n\ge 3$, $u\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, 定义$\Gamma(x)$如下：

$$\Gamma(x)=\frac{1}{n(n-2)|x|^{n-2}}\,(x\neq 0)$$

证明：

$$u(x)=-\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x-y)\Delta u(y)dy$$

2. 设$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，这里$\Omega$为$\mathbb{R}^n$中的有界区域，称$u$为$\Omega$上的下调和函数，若$-\Delta u\le 0$

（1） 试写出下调和函数满足的极值原理

（2） 证明：存在仅与Ω的直径有关的常数C使得，下述问题任何解u都满足$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|\le C(F+\Phi)$；

$$\begin{cases}-\Delta u\le f & x\in\Omega\\ u\big|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

这里$F=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$，$\Phi=\sup_{x\in\partial\Omega}|\varphi(x)|$

3. （1） 对于热方程的初值问题，写出其热核$H(x,t)$

（2） 定义$u(x,\ t)$如下：

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}H(x-y,t)\varphi(y)dy$$

证明：$u(x,\ t)$是如下初值问题的古典解

$$\begin{cases}u_t-a^2\Delta u=f & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

4. 对于热方程的混合问题：

$$\begin{cases}u_t-a^2\Delta u=f & (x,t)\in\Omega\times[0,T]\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\Omega\\ u(x,t)=0 & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]\end{cases}$$

证明其能量不等式：

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\Omega}u^2(x,t)dx+\int_{Q_T}u_x^2(x,t)dxdt\le M(\int_{\Omega}\varphi^2(x)dx+\int_{Q_T}f^2(x,t)dxdt)$$

这里 M 是只与 a，T 相关的常数

5. 对于热方程的混合问题：

$$\begin{cases}u_t-a^2\Delta u=f & (x,t)\in[0,l]\times[0,T]\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in[0,l]\\ u(0,t)=u(l,t)=0 & t\in[0,T]\end{cases}$$

写出其 *Green* 函数 $G(x, y, t)$

6. 用特征线法求解波动方程的初值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=0 & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in\mathbb{R}\\ u_t(x,0)=0 & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$