几何学期末考试参考答案和评分标准

考试日期：2011 **年** 1 **月** 4 **日**。**考试时间**：2.5 **小时**。

题 1（20 分） 设二次曲线 Γ 在单位直角坐标系 Oxy 下的方程为

$$5x^2-6xy+5y^2-6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-4=0.$$

(i) 计算 Γ 的代数不变量 I_1，I_2 和 I_3 并判定 Γ 的类型；（10 分）

(ii) 将上述方程化简成标准形式，并求 Γ 的中心在 Oxy 中的坐标。（10 分）

（本题可不写详细过程，只要结果正确即可给分。）

• 解：(i) 系数矩阵为

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}5&-3&-3\sqrt{2}\\-3&5&\sqrt{2}\\-3\sqrt{2}&\sqrt{2}&-4\end{pmatrix}$$

根据定义计算得 $I_1=10,I_2=16,I_3=-128=\det(a_{ij})$。
由于 $I_1>0,I_2>0,I_3<0$，故 Γ 图像是一椭圆。
(ii) 先通过“转轴”消去“交叉项” xy。考虑坐标变换

$$x=\cos\theta\ x'-\sin\theta\ y',\quad y=\sin\theta\ x'+\cos\theta\ y'.$$

变换后 $x'y'$ 系数为 0 当且仅当 $(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta+2a_{12}\cos 2\theta=0$. 代入系数后知必须 $\cos 2\theta=0,\theta=\pi/4$ 即可。故取变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

得新方程

$$(x'-1)^2+4\left(y'+\frac{1}{2}\right)^2-4=0.$$

注意若取 $\theta=3\pi/4$ 则答案中两二次项系数对调，形如 $4\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=4$，也是正确答案。或直接计算特征值写出标准形也可以。由上述过程知对称中心 $(x',y')=(1,-1/2$ 在原坐标系 Oxy 中的坐标为

$$(x,y)=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

• 评分标准：*若 I_1,I_2,I_3 错，每一项扣 2 分。类型判断错误扣 4 分。标准形式或中心坐标结果有错，但思路正确，仅是粗心错误，每一项酌情扣 2-3 分。*

题 2（20 分） 设点 A, B 分别在空间异面直线 ℓ_1, ℓ_2 上自由运动。试求 AB 中点的轨迹，说明此曲面相对于 ℓ_1, ℓ_2 的位置，并用解析几何方法证明你的结论。

• 解法一：不妨取 ℓ_1, ℓ_2 公垂线为空间直角坐标系的 z 轴，ℓ_1 为 x 轴，ℓ_2 过 $(0,0,d)$ 点（不妨设 ℓ_2 上点的参数方程为 $(0,0,d)+t(a,b,0)$）。则 ℓ_1 上各点 z 坐标恒为 0，ℓ_2 上各点 z 坐标恒为 d。由向量加法可知 AB 中点的 z 坐标恒为 $d/2$，故落在平面 $z=d/2$ 上，它平行于 ℓ_1, ℓ_2 且垂直于 z 轴（ℓ_1, ℓ_2 的公垂线）。反之，任取此平面上一点 $(x_0, y_0, \frac{d}{2})$，易见它是 ℓ_1 上一点 $(2x_0 - \frac{2a}{b}y_0, 0, 0)$ 与 ℓ_2 上一点 $(\frac{2a}{b}y_0, 2y_0, d)$ 的中点。
解法二：任取空间直角坐标系，两直线参数方程分别为 $a+tv$ 和 $b+sw$，t, s 分别是参数，v, w 分别是方向向量。则 AB 中点为 $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{t}{2}v+\dfrac{s}{2}w$。这明显是一个平面的参数方程，且 t, s 取遍所有实数时，轨迹为整个平面，法向由 $v \times w$ 给出，故平面同时平行于 ℓ_1, ℓ_2。ℓ_1, ℓ_2 公垂线段中点也在此轨迹上，故此平面过公垂线段中点且垂直于公垂线段。

• 评分标准：*若只证明了轨迹在一平面上，忘了论证平面上的点都可以取到，扣 3 分。若未说明平面的具体几何信息（例如平行于 ℓ_1, ℓ_2），扣 3 分。若不能判断出轨迹为平面，则最多给 5 分。*

题 3（20 分） S 为旋转抛物面，Σ 是与 S 旋转轴垂直的一张平面。证明：
(1) 任一平面与 S 的交线 Γ 垂直投影到 Σ 上都是一个圆周。
(2) 任一族平行平面与 S 的交线 Γ_t 垂直投影到 Σ 上都是一族同心圆周。
（平面与 S 旋转轴平行时投影结果为一族平行直线。）

• 证：不妨设 S 方程为 $z=a(x^2+y^2), a>0$，Σ 为 Oxy 平面。任取其它平面 $Ax+By+Cz+D=0$（固定 A, B, C 而令 D 变动时得平行平面族）。若它与 z 轴平行，答案显然。若与 z 轴不平行，不妨设 $C=1$，则交线方程为

$$\begin{cases} z=a(x^2+y^2) \\ Ax+By+z+D=0 \end{cases}$$

将 $z=-Ax-By-D$ 代入第一式，消去 z 后得到的即为交线在 Oxy 平面上的投影曲线的方程，为

$$a(x^2+y^2)+Ax+By+D=0.$$

D 为常数时这是一个圆的方程，且只要平面与抛物面相交，则此圆不退化。若其它常数固定而 D 变化，则圆的中心不变而半径改变，故为同心圆族。（这顺带说明了这族平行平面的截线中心在一条与抛物面的轴线平行的直线上，是平面上抛物线类似结论的高维推广。）

• 评分标准：

题 4 (10 分) 给定平面上椭圆 Γ 以及 Γ 外部一点 Q，过 Q 作 Γ 的两条切线和一条割线，切点为 A,B，割点为 C,D。过 D 点作一直线 l 平行于 Γ 在 C 点的切线，l 与直线 CA,CB 分别交于 E,F。证明：D 是线段 EF 的中点。

• 证法一：只需证 CA,CB,CD 与过 C 点的切线构成调和线束即可（则过 D 任作一线与上述四线相交得调和点列，当此线与过 C 点切线平行时，对应此调和点列的第四点在无穷远点，故第三点 D 是前两点 E,F 的中点）。而此性质是射影不变性质。于是设两弦 AB,CD 交点 P，取一射影变换将 Γ 映为圆周，P 映为中心（存在性已在课上论证过）。则 A,B 映为直径的两端点，两处对应切线与 CD 的像平行，于是 $ACBD$ 构成圆内接正方形，此时答案显然成立。证毕。
（或证明一开始就直接取射影变换将 Γ 映为圆周，P 映为中心，此时过 A,B 的切线映为一对平行切线，C,D 映为平行直径的端点，但注意原直线 l 此时一般不再平行于过 C 点的切线，尽管如此，依然有调和线束/调和点列的结论，映回到原图形即知 $E,F,D,\infty(l)$ 构成调和点列，故 D 为 EF 中点。也可以将 Q 映到无穷再利用椭圆的共轭直径知识来证调和线束/ 调和点列。）

证法二：由于原命题的条件和结论均为仿射不变性质，所以不妨设 Γ 为圆周。对于三角形 $\triangle CDE$ 和 $\triangle CDF$ 分别应用正弦定理，只需证

$$\sin\angle DCE/\sin\angle CED = \sin\angle DCF/\sin\angle CFD.$$

利用平行线和弦切角定理，转化为证明

$$\sin\angle DCA/\sin\angle ADC = \sin\angle DCB/\sin\angle BDC.$$

利用正弦定理和相似三角形

$$\triangle QAC \sim \triangle QDA, \triangle QBC \sim \triangle QDB$$

和 $QA = QB$ 得证。

证法三：过 Q 点作 l 的平行线 l'，考虑作射影变换将 l' 映为无穷远直线，此时 Γ 映为椭圆，可再复合一仿射变换将其变为圆，而 l' 依然映为 l_∞。以上步骤保持 l 的无穷远点还在无穷远点，故依然只需证此时 D 的像点在 EF 的像的中点位置。对应图形为圆周的一对平行切线和一条平行割线，ABC 构成直角三角形，l 垂直于此直角三角形斜边上的中线，易证结论。

• 评分标准：容易犯的错误是证法一中想当然地认为 l 经过射影变换后还平行于 C 处切线，或证法三中没意识到需要保持 l 的无穷远点还在无穷远，对此扣 4 分。若用坐标法但未能顺利完成，酌情给分，其中若想到了“不妨设 Γ 为圆周”可给 4 分以上。此题还有其它证法，如很多同学直接利用 EF 与 C 点切线之交点的极线为直线 CD，有同学利用 *Menelaus* 定理等。

题 5（12 分） 给定平面 Σ 上一点 Q 及不过该点的直线 l，定义射影平面 $\mathbb{P}(\Sigma)$ 到自身的映射 f 如下：若 A 不同于点 Q 也不在 l 上，设直线 QA 交 l 于 a，则定义 $A' = f(A)$ 为线 QA 上满足交比 $(Qa; AA') = -1$ 的唯一一点（即 $\{Q, a, A\}$ 的第四调和点）。

(i) 证明：$f : \mathbb{P}(\Sigma) \to \mathbb{P}(\Sigma)$ 为射影变换，且满足 $f^2 = id$，以 Q 和射影线 $\mathbb{P}(l)$ 上的点为全体不动点。(7 分)

(ii) 是否存在其它射影变换，以 Q 和射影线 $\mathbb{P}(l)$ 上的点为全体不动点？这类变换如果不唯一，有多大自由度？(5 分)

• (i) 证法一：任取一条直线 ℓ_1，取其与 l 的交点 P，则由点线交比的协调性，$A \in \ell_1$ 的像 A' 必在直线 $\{QP, l; \ell_1\}$ 的第四调和线 ℓ_2 上。这证明 f 是保线的。又补充定义 $f(Q) = Q$，f 保持 l 上所有点不动以后，可见这是射影平面到射影平面的一一对应，故为射影变换。由定义易见 $f(A') = A$，f 为一对合，即 $f^2 = id$。当 $A \neq Q$ 不在 l 上时，明显 $A \neq A'$，不是不动点。证毕。

证法二：取射影等价图形，其中 l 为无穷远直线，则如题定义的变换其实就是绕 Q 点旋转 180 度，为射影变换，故原变换也是，其它易证。

证法三：取中心直线把模型，其中 O 点位置满足 “OQ 连线与 Ol 平面垂直”。由交比定义以及题中构造可知 f 将直线 OA 映到与 Ol 所张平面对称的一直线 OA'。这显然是一个对合的线性变换，诱导射影平面上对合的射影变换，且只有题中所述不动点。(用射影坐标来论证实质是一样的。若用仿射坐标系来证明保线性也可以。)

(ii) 由证法二、三易见有很多以 Q 和射影线 $\mathbb{P}(l)$ 上的点为全体不动点的射影变换。按证法二，它们相当于以 Q 为中心、不同倍数 λ 的相似变换（注意不是旋转，因为要保持每一个方向不变/每一个无穷远点不动），自由度为一。按证法三，它们相当于保持一个平面不动、同时把垂直于它的分量乘以固定非零因子 λ，或用坐标表示为 $(x', y', z') = (x, y, \lambda z)$，自由度也是一。最后一种做法，是在 l 上取三个点，相当于讨论 l 上三点 A, B, C 和外面一点 Q 为不动点的线性变换的自由度，习题课/思考题已经讨论过。这种变换必把 QC 上一个给定点 D 映成 QC 上另一点，且此像点就决定一个变换，故自由度为一。

• 评分标准：*(ii) 没有写出自由度或给出理由，但有非恒同的其它例子，可以给 2 分。*

题 6（8 分）

(i) 平面上取定仿射坐标系后，给定共点四线的方向向量设为列向量 $v_i = (x_i, y_i)^t, i = 1, 2, 3, 4$，并记其中任意两向量排成的二阶方阵行列式为 $\Delta_{ij} = \det(v_i, v_j)$. 证明这共点四线的交比 $(l_1 l_2; l_3 l_4) = \dfrac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{23}\Delta_{14}}$. (5 分)

(ii) 对于 $\mathbb{E}^3$ 中共面且共交点的四线，请考虑利用齐次坐标，给出交比的一种类似定义。(3 分)

• 解：(i) 只需按交比定义，把 v_3, v_4 分别用 v_1, v_2 线性表出，再代入行列式计算，提取公因子 Δ_{12} 即得结论。(ii) 只需按同样思路，补上一个与它们所共平面垂直（或只需不共面）的非零向量 n，用三阶行列式定义 $\Delta_{ij} = \det(v_i, v_j, n)$ 即可。(题外话：注意这个定义依然是良定的。)

• 评分标准：*第 (ii) 问中直接取 n 为 $(0, 0, 1)$ 或 $(1, 1, 1)$ 而未注意要求它与四线不共面的，酌情扣 1-2 分。*

题 7（10 分） 设 Σ_1 和 Σ_2 为增广复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上两个无交点的圆。取与 Σ_1 和 Σ_2 同时正交的圆 Σ 分别交 Σ_1 于 $\{z_1, \xi_1\}$，交 Σ_2 于 $\{z_2, \xi_2\}$，交点顺序 $\{z_1, \xi_1, z_2, \xi_2\}$. 定义 $B(\Sigma_1, \Sigma_2) = (z_1, \xi_1; z_2, \xi_2)$。证明：

(i) $B(\Sigma_1, \Sigma_2)$ 与圆 Σ 的选取无关；（5 分）

(ii) 设 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 和 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 为两组无交点的圆. 则存在 Möebius 变换 ϕ 将 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 分别映成 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 当且仅当 $B(\Sigma_1, \Sigma_2) = B(\Sigma_1^*, \Sigma_2^*)$。（5 分）

• 证：(i) 由于不相交的一对圆周可以 Moebius 等价于一对同心圆周，且所述条件和结论都是 Moebius 变换下的不变性质，所以只需对此情形对证，而与一对同心圆正交的广义圆周是过圆心的直线，不论取哪一条计算题中 $B(\Sigma_1, \Sigma_2) = (z_1, \xi_1; z_2, \xi_2)$，由旋转对称答案都是显然的。

（1 月 11 日补：另有不少同学将这一对相离的圆周映成一个圆周与一条直线来做，但多数未能有更多进展。其实此时取任一与圆 Σ_1 和直线 $\Sigma_2 = l$ 同时正交的圆周 Σ，它与 l 的任一交点 p 可作反演圆圆心，p 到 Σ_1 切线长为反演半径，反演的结果保持 Σ_1, Σ_2 不变，但把 Σ 变为 $\Sigma_1, \Sigma_2 = l$ 的中垂线，这就可以证明四点交比不变。）

(ii) 必要性由上一问易见成立。充分性论证可先分别将两对圆周分别映成同心圆，由 $B(\Sigma_1, \Sigma_2) = B(\Sigma_1^*, \Sigma_2^*)$ 计算知两对圆的半径之比相等，所以可通过等距与相似变换合同。证毕。

• 评分标准：*(ii) 若只证了所述条件的必要性，要扣至少 3 分。*