北京大学数学科学学院 中期试题

2015 一 2016 学年第 2 学期

考试科目: 高等代数　　　　考试时间: 2016 年 4 月 21 日

系　　别: ________　　　　学　　号: ________

姓　　名: ________

本试题有正反1页, 共6道大题, 满分100分

1. (20分)

　　设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

　a 求A的极小多项式及特征多项式;

　b 求A的Jordan标准型。

2. (30分)

　a （5分）叙述Eisenstein判别法;

　b （10分）证明Eisenstein判别法;

　c （15分）设$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}}$，求$\mathbb{Q}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^i \quad | \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i \in \mathbb{Q}.\}$作为$\mathbb{Q}$-线性空间的维数。(本题需要写出详细的推理过程，只有答案不给分)

3. (10分) 证明: 多项式$f(x) \in F[x]$是一个不可约多项式的方幂的充要条件是: 对任意的多项式$g, h \in F[x]$, 如果$f|gh$，那么存在正整数m使得$f|g^m$或者$f|h^m$.

4. (15分)设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是$F$-线性空间$V$的一组基，$W$是$V$的$r$维子空间。

　a 证明存在$i_1, \cdots, i_{n-r}$使得$V = W \oplus < \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{n-r}} >$.

　b a中的$i_1, i_2, \cdots, i_{n-r}$是唯一（不计顺序）的吗? 证明你的判断。

5. (15分) 设$A \in M_{10}(\mathbb{C})$, 请确定分别满足下列条件的矩阵是否存在。如存在列举它们的Jordan标准型。(写出推理过程，只有答案不给分)。

　a $A^4 = 0, rank(A^3) = 1, rank(A^2) = 3$。

　b $A^5 = 0, rank(A^2) = 5, rank(A^3) = 4$.

6. (10分) 如果两个实矩阵在复数域上相似，那么它们在实数域上也相似。