北京大学期中试题解答

2016–2017 学年第二学期

考试科目：数学物理方法（下）　　考试时间：2017 年 4 月 14 日

姓　名:______________________　　学　号: ________________________

本试题共 四 道大题，满分 100 分

题号	一	二	三	四	总分
分数					

注意：各题均需写出必要的关键步骤。

一、 (25 分) 简单计算和回答

1. 在均匀细弦的横振动问题中，若弦受到一个与速度成正比（比例系数为 d）的阻尼，以及与弦的位移成正比（比例系数为 k）的回复力，请写出此弦的振动满足的方程并将此方程分离变量。

解：微元分析法

微元除了两端受到弦的弹性力以外，依题意，还受到阻尼力

$$F_{\text{阻}} = du\Delta x, \quad \text{正方向与 } u \text{ 的正方向相反}$$

以及回复力

$$F_{\text{回}} = -ku\Delta x, \quad \text{正方向沿 } u \text{ 的正方向}$$

由牛顿第二定律，得

$$\left(\widetilde{T}\cos\theta\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(\widetilde{T}\cos\theta\right)\Big|_{x} = 0$$

$$\left(\widetilde{T}\sin\theta\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(\widetilde{T}\sin\theta\right)\Big|_{x} + F_{\text{回}} - F_{\text{阻}} = \eta\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中 $\widetilde{T}$ 是弦内弹性力，η 是弦的线密度。　　　　符号定义 1 分

小振动近似下

$$\begin{aligned}
&\cos\theta \sim 1 \\
&\sin\theta \sim \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

因此弦的运动方程为

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \widetilde{T}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d\frac{\partial u}{\partial t} + ku = 0 \qquad 4\text{ 分}$$

令

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

分离变量，得

$$\begin{aligned}
&X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad 1\text{ 分} \\
&\eta T''(t) + dT'(t) + (\widetilde{T}\lambda + k)T(t) = 0 \qquad 1\text{ 分}
\end{aligned}$$

2. 请分别在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系下将三维球对称线性谐振子的薛定谔方程分离变量。在直角坐标系下，三维球对称线性谐振子满足的薛定谔方程为：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z,t) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)\psi(x,y,z,t)$$

其中 $\hbar$，m 和 ω 都是与 x,y,z,t 均无关的常数，i 是虚单位 $\mathrm{i}^2=-1$.
解：在直角坐标系下方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)\psi \qquad 0.5\text{ 分}$$

令

$$\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2X(x) = E_xX(x) \qquad 0.5\text{ 分} \\
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2Y(y) = E_yY(y) \qquad 0.5\text{ 分} \\
&-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{2}m\omega^2z^2Z(z) = E_zZ(z) \qquad 0.5\text{ 分} \\
&\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = (E_x+E_y+E_z)\,T(t) \qquad 0.5\text{ 分}
\end{aligned}$$

在柱坐标系下方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2}m\omega^2(\rho^2+z^2)\psi \qquad 0.5\text{ 分}$$

令

$$\psi(x,y,z,t)=R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)T(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]-\frac{\mu}{\rho^2}R(\rho)\right\}+\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2R(\rho)=E_\rho R(\rho) \qquad 1\text{ 分}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi(\phi)=0 \qquad 0.5\text{ 分}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{2}m\omega^2z^2Z(z)=E_zZ(z) \qquad 0.5\text{ 分}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=(E_\rho+E_z)\,T(t) \qquad 0.5\text{ 分}$$

在球坐标系下方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\psi \qquad 0.5$$

令

$$\psi(r,\theta,\phi,t)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\frac{\lambda}{r^2}R(r)\right\}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2R(r)=ER(r) \qquad 1\text{ 分}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0 \qquad 1\text{ 分}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi(\phi)=0 \qquad 0.5\text{ 分}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=ET(t) \qquad 0.5\text{ 分}$$

3. 求解下列本征值问题，并计算本征函数的模方

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda\,X(x)=0\,, \\ X'(-l)=0, \quad X'(l)=0 \end{cases}$$

解：当 $\lambda=0$ 时，

$$X''(x)=0\Rightarrow X_0(x)=Ax+B \qquad 1\text{ 分}$$

$$X'(-l)=0\Rightarrow A=0$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow A = 0$$

B 任意，但 $B \neq 0$. 因此 $\lambda = 0$ 是本征值

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ X_0(x) = 1 \qquad 1\text{ 分} \end{cases}$$

模方

$$\int_{-l}^{l} [X_0(x)]^2 \mathrm{d}x = 2l \qquad 1\text{ 分}$$

当 $\lambda \neq 0$ 时，

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x \qquad 1\text{ 分}$$

$$X'(-l) = 0 \Rightarrow C\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + D\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow -C\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + D\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

C、D 有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}l & \cos\sqrt{\lambda}l \\ -\sin\sqrt{\lambda}l & \cos\sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = 0 \qquad 1\text{ 分}$$

解得

$$\sin 2\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad 1\text{ 分}$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{2l}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \cdots \\ X_n(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{n\pi}{2l}x, & n\text{为正奇数}, \qquad 1\text{ 分} \\ \cos\dfrac{n\pi}{2l}x, & n\text{为正偶数} \qquad 1\text{ 分} \end{cases} \end{cases}$$

模方

$$\int_{-l}^{l} X_n(x)X_n(x)\mathrm{d}x = l, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad 1\text{ 分}$$

二、 (25 分) 求解一维半无界长弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\cos\omega t, & 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & t \geq 0 \\ u(x,\ t)|_{t=0} = x^2, & 0 \leq x < \infty \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

其中 a, A 和 ω 都是已知常数。

解法一：偏微分方程的通解为

$$u = -\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t + f(x+at) + g(x-at) \qquad 5\text{ 分}$$

代入初条件，得

$$u(x,\ t)|_{t=0} = -\frac{A}{\omega^2} + f(x) + g(x) = x^2, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = af'(x) - ag'(x) = x, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$f(x) - g(x) = \int \frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}x^2 + C, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4a}x^2 + \frac{A}{2\omega^2} + \frac{C}{2}, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4a}x^2 + \frac{A}{2\omega^2} - \frac{C}{2}, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$f'(x) = x + \frac{1}{2a}x, \qquad x > 0 \qquad 2\text{ 分}$$

代入边条件

$$\left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=0} = f'(at) + g'(-at) = 0, \qquad t > 0$$

因此

$$g'(x) = -f'(-x) = x + \frac{1}{2a}x, \qquad x < 0 \qquad 2\text{ 分}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4a}x^2 + D, \qquad x < 0$$

$g(x)$ 在 $x=0$ 连续，得

$$D=\frac{A}{2\omega^2}-\frac{C}{2}\qquad 2\text{ 分}$$

即

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4a}x^2+\frac{A}{2\omega^2}-\frac{C}{2},\qquad x<0\qquad 2\text{ 分}$$

所以一维半无界弦的波动问题的解为

$$\begin{aligned}u&=-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t+\left[\frac{1}{2}(x+at)^2+\frac{1}{4a}(x+at)^2+\frac{A}{2\omega^2}+\frac{C}{2}\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{2}(x-at)^2-\frac{1}{4a}(x-at)^2+\frac{A}{2\omega^2}-\frac{C}{2}\right]\\&=-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t+x^2+a^2t^2+xt+\frac{A}{\omega^2},\qquad at<x<\infty\qquad 1\text{ 分}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u&=-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t+\left[\frac{1}{2}(x+at)^2+\frac{1}{4a}(x+at)^2+\frac{A}{2\omega^2}+\frac{C}{2}\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{2}(x-at)^2+\frac{1}{4a}(x-at)^2+\frac{A}{2\omega^2}-\frac{C}{2}\right]\\&=-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t+\left(1+\frac{1}{2a}\right)(x^2+a^2t^2)+\frac{A}{\omega^2},\qquad 0<x<at\qquad 1\text{ 分}\end{aligned}$$

解法二：设

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t\qquad 5\text{ 分}$$

则 $v(x,\ t)$ 满足定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, & 0<x<\infty,\ t>0\\ \left.\dfrac{\partial v(x,\ t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, & t\geq 0\\ v(x,\ t)|_{t=0}=x^2+\dfrac{A}{\omega^2}, & 0\leq x<\infty\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=x, & 0\leq x<\infty\end{cases}\qquad 4\text{ 分}$$

令

$$w(x,\ t)=\begin{cases}v(x,\ t), & 0<x<\infty,\ t>0\\ v(-x,\ t), & -\infty<x<0,\ t>0\end{cases}\qquad 3\text{ 分}$$

则 $w(x,\ t)$ 满足定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ w(x,\ t)|_{t=0} = \phi(x) = x^2 + \dfrac{A}{\omega^2}, & -\infty \le x < \infty \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \infty \\ -x, & -\infty < x < 0 \end{cases} & \end{cases} \qquad 3\ 分$$

由行波法解得本定解问题的解为

$$w(x,\ t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at) + \phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad -\infty < x < \infty \qquad 6\ 分$$

当 $0 < x < \infty,\ t > 0$ 时，$x + at$ 总是 ≥ 0，而 $x - at$ 则可能会 < 0.

当 $x - at \ge 0$ 时，$\phi(x) = x^2 + \dfrac{A}{\omega^2},\ \psi(x) = x$

$$\begin{aligned} v(x,\ t) = w(x,\ t) &= \frac{1}{2}\left[\phi(x+at) + \phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}\left[(x+at)^2 + (x-at)^2\right] + \frac{A}{\omega^2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \xi\mathrm{d}\xi \\ &= x^2 + a^2t^2 + \frac{A}{\omega^2} + xt, \quad at \le x < \infty \qquad 1\ 分 \end{aligned}$$

当 $x - at < 0$ 时，$\phi(x) = x^2 + \dfrac{A}{\omega^2},\ \psi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \infty \\ -x, & -\infty < x < 0 \end{cases}$ 2 分

$$\begin{aligned} & v(x,\ t) = w(x,\ t) \\ = & \frac{1}{2}\left[\phi(x+at) + \phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ = & \frac{1}{2}\left[(x+at)^2 + (x-at)^2\right] + \frac{A}{\omega^2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x-at}^{0} (-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{x+at} \xi\mathrm{d}\xi\right\} \\ = & \left(1 + \frac{1}{2a}\right)\left(x^2 + a^2t^2\right) + \frac{A}{\omega^2}, \quad 0 < x \le at \qquad 1\ 分 \end{aligned}$$

所以一维半无界弦的波动问题的解为

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)-\frac{A}{\omega^2}\cos\omega t=\begin{cases}x^2+a^2t^2+xt+\dfrac{A}{\omega^2}-\dfrac{A}{\omega^2}\cos\omega t, & at\le x<\infty\\ \left(1+\dfrac{1}{2a}\right)\left(x^2+a^2t^2\right)+\dfrac{A}{\omega^2}-\dfrac{A}{\omega^2}\cos\omega t, & 0<x\le at\end{cases}$$

三、 (25 分) 设长为 l 的均匀细杆，通过 $x=0$ 端，在单位时间内、经单位面积供给热量 q，其中 q 为常数。另一端温度恒为 0，杆内无热源，杆身散热忽略不计。初始时杆的温度分布为 $u|_{t=0}=x-\cos x$. 求杆中温度的分布与变化。

解：杆中的温度分布函数 $u(x,\ t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\dfrac{q}{k},\quad u|_{x=l}=0, & t>0,\\ u|_{t=0}=x-\cos x, & 0<x<l.\end{cases}\qquad 6\text{ 分}$$

其中 $\kappa=\dfrac{k}{\rho c}$

边条件非齐次，因此首先需要找齐次化函数

令

$$u(x,\ t)=-\frac{q}{k}(x-l)+v(x,\ t)\qquad 3\text{ 分}$$

则 $v(x,\ t)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, & t>0,\\ v|_{t=0}=x-\cos x+\dfrac{q}{k}(x-l), & 0<x<l.\end{cases}\qquad 4\text{ 分}$$

$v(x,\ t)$ 的一般解为

$$v(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\kappa\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2t}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x\qquad 7\text{ 分}$$

代入初条件，得

$$u|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x=x-\cos x+\frac{q}{k}(x-l)$$

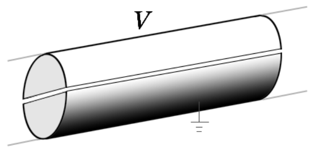
$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l\left[x-\cos x+\frac{q}{k}(x-l)\right]\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x \qquad \text{模方 2 分}\\
&= \frac{4l}{(2n+1)\pi}\left(1+\frac{q}{k}\right)\left[(-1)^n-\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]-\frac{4ql(-1)^n}{(2n+1)\pi k} \qquad \text{每个积分 1 分，共 3 分}\\
&\quad -\frac{2}{(2n+1)\pi-2l}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi-l\right)-\frac{2}{(2n+1)\pi+2l}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi+l\right)\\
&= \frac{4l(-1)^n}{(2n+1)\pi}-\left(1+\frac{q}{k}\right)\frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}-\frac{4(-1)^n(2n+1)\pi\cos l}{(2n+1)^2\pi^2-4l^2}
\end{aligned}$$

所以原定解问题的解为

$$u(x,\ t)=-\frac{q}{k}(x-l)+\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-\kappa\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2t}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

其中 C_n 见上式。

四、 (25 分) 如右图所示一横截面半径为 a 的无穷长空心圆柱导体，沿柱轴分成两半，互相绝缘．一半电势为 V，另一半接地，电势为 0，求柱内电势分布，其中 a 和 V 都是已知常数。



第四题图

解：柱轴方向取为 z 轴方向，整个问题具有 z 平移对称性，柱内电势 u 与 z 无关。 2 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, & 0<x^2+y^2<a^2\\[2ex] u|_{x^2+y^2=a^2}=\begin{cases}V, & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}\end{cases} \qquad \text{3 分}$$

采用平面极坐标系

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0, \qquad 0<\rho<a \\ u\big|_{\rho=0}\text{有界}, \quad u\big|_{\rho=a}=\begin{cases} V, & 0<\phi<\pi \\ 0, & \pi<\phi<2\pi \end{cases} \end{cases} \qquad 5\text{ 分}$$

一般解为

$$u(\rho,\phi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\rho^m+D_m\rho^{-m}\right)\sin m\phi+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\rho^m+B_m\rho^{-m}\right)\cos m\phi \qquad 8\text{ 分}$$

$$u\big|_{\rho=0}\text{有界}\Rightarrow D_0=0, D_m=0, B_m=0, \quad m=1,2,3,\cdots \qquad 1\text{ 分}$$

$$u\big|_{\rho=a}=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m a^m\sin m\phi+A_m a^m\cos m\phi\right)=\begin{cases} V, & 0<\phi<\pi \\ 0, & \pi<\phi<2\pi \end{cases}$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}V\mathrm{d}\phi=\frac{V}{2} \qquad 2\text{ 分}$$

$$C_m=\frac{1}{\pi a^m}\int_0^{\pi}V\sin m\phi\mathrm{d}\phi=\frac{V}{\pi a^m}\frac{1-(-1)^m}{m} \qquad 2\text{ 分}$$

$$A_m=\frac{1}{\pi a^m}\int_0^{\pi}V\cos m\phi\mathrm{d}\phi=0 \qquad 1\text{ 分}$$

原定解问题的解为

$$u(\rho,\phi)=\frac{V}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2V}{(2n+1)\pi}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n+1}\sin(2n+1)\phi \qquad 1\text{ 分（感谢指出原稿中错误的同学）}$$

本 试 题 用 毕 收 回