

# 北京大学数学科学学院期中试题

2010-2011 学年第二学期

考试科目： 常微分方程 考试时间： 2011 年 6 月 20 日  
姓 名： 学 号：

本试题共 5 道大题，满分 100 分

1. (20 分) 求微分方程  $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5)$  满足初值问题  $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$  的解。

2. (20 分) 求下面的齐次线性微分方程组的通解。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

3. (20 分) 求边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

的特征值与相应的特征函数。

4. (20 分) 考虑方程

$$y'' + xy = 0, (-\infty < x < +\infty)$$

- (a) 设该方程满足初值条件  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  的解为  $\phi(x)$ . 求  $\phi(x)$  在  $x = 0$  处的幂级数展式。

- (b) 证明： $\phi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有无穷多个零点。

5. (20 分) 考虑方程

$$y'' + 3y' + 2y = f(x), x \in [0, +\infty)$$

其中  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续。

- (a) 利用常数变易法求该方程的通解。

- (b) 证明：如果  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界，则该方程的所有解在  $[0, +\infty)$  上都有界。
- (c) 证明：如果  $f(x)$  是  $2\pi$  周期的，则该方程存在唯一的  $2\pi$  周期解。

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)