实变函数期末考试

命题: 刘和平、刘建民 录入: erliban@bdwm

时间: 2005年1月

一、判断下列命题是否正确. 若正确请给出证明, 若错误请给出反例(每小题10分).

1. 设 $f_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数列, $\lim\limits_{k\to\infty}=f(x), a.e.x\in E$, 则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

2. 设 $f_k(x)\in L(E)(k=1,2,\cdots)$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|dx<\infty,$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛, 且

$$\int_E\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

3. 设 $f\in L(\mathbb{R}), f_k(x)=f(x+\frac{1}{k}), k=1,2,\cdots$. 则 $f_k(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处可微, 且 $f'(x)=0, a.e.x\in[a,b]$. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数函数.

5. 设 $0<r<p<s\le\infty, f\in L^r(E)\cap L^s(E)$. 则 $f\in L^p(E)$.

二、(20分) 设 $f_k(x), g_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上两个可测函数列, 且 $|f_k(x)|\le g_k(x), x\in E$. 如果

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\qquad \lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x).$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx=\int_E g(x).$$

证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)<\infty.$$

三、(15分) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$. 如果

$$\int_a^b |f'(x)|dx=\bigvee_a^b(f).$$

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

四、(10分) 设 $f,g\in L^2(E), f_k,g_k\in L^2(E), k=1,2,\cdots$. 如果 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0, \lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x), a.e. x\in E$, 并且 $\sup\limits_{1\leq k<\infty}\|g_k\|_2\leq M<\infty$. 证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g_k(x)dx=\int_E f(x)g(x)dx.$$

五、(5分) 设闭集 $E\subset\mathbb{R}$. 令 $\delta(t)=\inf\{|t-x|:x\in E\}$ 是点 t 到 E 的距离. 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 令

$$M_f(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\delta(t)f(t)}{|t-x|^2}dt.$$

求证: $M_f\in L(E)$.