几何学期末考试参考答案和评分标准

考试日期：2014 **年** 1 **月** 8 **日**。**考试时间**：2.5 **小时**。

题 1（25 分） 给定一个平面直角坐标系 I 下描述的仿射变换

$$\phi:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1\\1&\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

(i) 求出矩阵 A 的特征值和特征向量，以及其不变直线 l_1,l_2，其中 l_1 穿过第一象限。

(ii) 作出点列 $\{(x_1,y_1)=(1,0),(x_{n+1},y_{n+1})=\phi(x_n,y_n),n=1,2,\cdots\}$。试证此轨迹落在一条双曲线 Γ 上，并写出 Γ 在坐标系 I 中的方程。验证此双曲线在仿射变换 ϕ 下保持不变，以 ϕ 的不变直线为渐近线。在同一坐标系中作出 Γ 和不变直线的图形。

(iii) 以 l_1,l_2 分别为新坐标系 I' 的横轴和纵轴，取单位正交右手系标架，写出 Γ 在 I' 下的方程。

(iv) 若初始值 (x_1,y_1) 任给，$n\to+\infty$ 过程中，点 (x_n,y_n) 会如何运动？比值 x_n/y_n 会如何变化？给出答案和理由。

- 解：

(i) 特征值为 $\sqrt{2}+1$ 和 $\sqrt{2}-1$，对应特征向量可取为 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$。不变直线 l_1 方程为 $x-y=0$，l_2 为 $x+y=0$。

(ii) 双曲线 Γ 为 $x^2-y^2=1$。易于验证 $(\sqrt{2}x+y)^2-(x+\sqrt{y})^2=x^2-y^2=1$，故在 ϕ 作用下保持不变。

(iii) Γ 在 I' 下的方程为 $x'y'=-\frac{1}{2}$。其中用到的坐标变换为 $x'=(x+y)/\sqrt{2},y'=(x-y)/\sqrt{2}$.

(iv) 若初值落在原点，则为不动点。
若初值落在 l_1 上其它位置，则点 (x_n,y_n) 会沿 l_1 单调趋于无穷远处。
若初值落在 l_2 上其它位置，则点 (x_n,y_n) 会沿 l_2 单调趋于原点。

　　初值在其它点处，将沿着双曲线 $x^2-y^2=c\neq 0$ 的一支趋于无穷远处，渐近于 l_1，比值 x_n/y_n 会趋于 1。

　　理由是：可将初值分解为 $(x_1,y_1)=\frac{1}{2}(x_1+y_1,x_1+y_1)+\frac{1}{2}(x_1-y_1,y_1-x_1)$。前一部分落在 l_1 上，沿 l_1 单调趋于无穷远处；前一部分落在 l_2 上，沿 l_2 单调趋于原点。而点列 $\{(x_n,y_n)\}$ 的变化是两部分运动的合成，且值 $(x_n)^2-(y_n)^2$ 保持不变。由此得结论。

- 评分标准：

(i) 6 分，每一项 1 分。

(ii) 9 分，其中 Γ 方程 2 分，验证点列在 Γ 上 2 分，验证在 ϕ 下不变 2 分，验证渐近线 1 分，画图 2 分。

(iii) 5 分（错了符号扣 2 分，$\frac{1}{2}$ 错成 1 扣 2 分）。

(iv) 5 分，其中不动点和两条不变直线的情形共 3 分；未说明理由扣 1 分。

题 2（20 分）

(i) 证明椭球面与平面 Σ 如有截线，则截线是一条椭圆。

(ii) 证明：Σ 的平行平面族所截椭圆彼此相似（有相同长短轴之比）。

(iii) 证明：Σ 的平行平面族所截椭圆中心落在一条空间直线 l 上。

(iv) 设椭球面方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$，则上述 l 的方向向量 v 与任一平行于 Σ 的向量 w 满足 $v^TAw=0$，A 为对角阵 $\mathrm{diag}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，$v,w$ 为列向量。

• 解：前三条性质证明可以用同一方法，即对于椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，取一个空间仿射变换 ϕ（如两个或三个正压缩）将其映为球面。对于球面情形，任一平面截线都明显是圆，满足第一条结论；平行平面截线都是圆，满足第二条结论；它们的中心落在球面的一条直径上，满足第三条结论。现取逆变换 ϕ^{-1}，则保持平面截线、二次曲线、共线点列、中心等性质不变。故结论一和结论三明显对原椭球面也成立。（结论一、三是仿射不变性质，也可直接用仿射坐标变换 $x'=\frac{x}{a},y'=\frac{y}{b},z'=\frac{\alpha x+\beta y+t}{c}$ 来证。）

至于结论二，设 Σ 的平行平面族 $\{\Sigma_t\}$ 映为另一族平行平面 $\{\Sigma_t'\}$ 注意仿射变换 ϕ^{-1} 在平行平面族 Σ_t' 中任一个上的作用效果，等于其诱导的线性变换在一个平行的二维向量子空间上的作用，故不同半径的圆周会变成具有相同长短轴之比的椭圆（且在适当平移后可看作位似图形）。

直接用解析方法，不妨设平行平面族 $\{\Sigma_t\}$ 不与 z 轴平行，方程为 $z=\alpha x+\beta y+t$，其中 α,β 为常数，t 为变化的实参数。将此代入椭球面方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 并消去 z，得

$$\begin{aligned}0&=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F\\&=\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}\Big)x^2+\frac{2\alpha\beta}{c^2}xy+\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{\beta^2}{c^2}\Big)y^2+\frac{2\alpha t}{c^2}x+\frac{2\beta t}{c^2}y+\Big(\frac{t^2}{c^2}-1\Big).\end{aligned}$$

这是截线 σ_t 平行投影到 Oxy 平面上的曲线 $\tilde{\sigma}_t$ 方程，为二次曲线。其代数不变量 $I_2=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{\alpha^2}{b^2c^2}+\frac{\beta^2}{a^2c^2}>0$，知 $\tilde{\sigma}_t$ 为椭圆型，非退化时必为椭圆。由“平行投影”是仿射映射，保持二次曲线类型不变，故原截线 σ_t 也是椭圆，这证明了 (i)。又上述二次项系数与参数 t 无关，可知 t 不同时对应的为位似图形，投影回到彼此平行的平面上，也是相似图形，这说明了 (ii)。根据课上讲过的结论（尤书中有），$\tilde{\sigma}_t$ 中心 (x_t,y_t) 满足

$$Ax_t+By_t+D=0,\ Bx_t+Cy_t+E=0\quad\Rightarrow\quad x_t=\frac{-\alpha t}{b^2c^2I_2},\ y_t=\frac{-\beta t}{a^2c^2I_2}.$$

σ_t 中心 (x_t,y_t,z_t) 在平面 Σ_t 上，故 $z_t=\alpha x_t+\beta y_t+t$。再根据此前计算的 I_2 和 x_t,y_t 取值，得

$$(x_t,y_t,z_t)=v\cdot t,\quad v^T=(-\alpha a^2,-\beta b^2,c^2)\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2I_2}$$

故这些中心在一条空间直线上（过椭球中心），结论 (iii) 得证。现在可立即对此一般情形验证结论 (iv) 成立。

• 评分标准：*每一项欲证结论 5 分。忽视了消去 z 后得到的是投影曲线方程，要扣 5 分。*

题 3（10 分） 证明：三角形 ABC 有内切椭圆 Γ 且切点 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 线段内的充分必要条件是 AD,BE,CF 三线共点。

• 证：(必要性) 设三角形 ABC 有内切椭圆 Γ, 则存在一个适当的仿射变换 (例如一个正压缩) 将 Γ 映为一个圆 Γ', 三角形的像 $A'B'C'$ 以此为内切圆, 则三个对应切点 D',E',F' 满足 $|A'F'|=|A'E'|,|C'E'|=|C'D'|,|B'D'|=|B'F'|$, 故

$$\frac{|A'E'|}{|E'C'|}\cdot\frac{|C'D'|}{|D'B'|}\cdot\frac{|B'F'|}{|F'A'|}=1.$$

由 Ceva 定理之逆定理可知 $A'D',B'E',C'F'$ 三线共点。由于这是仿射映射下不变的性质, 故原图形中即有 AD,BE,CF 三线共点。

（充分性）设三角形 ABC 中已有 AD,BE,CF 三线共点，往证存在内切椭圆 Γ 且对应切点为 D,E,F。构造三条线段长 x,y,z，使得

$$\frac{x}{y}=\frac{|AE|}{|EC|},\ \frac{y}{z}=\frac{|CD|}{|DB|},\ \frac{z}{x}=\frac{|BF|}{|AF|}.$$

显然总可以取 x,y,z 使得前两式成立，而 Ceva 定理保证了此时第三个等式自动成立。然后我们构造一个三角形 $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$，满足

$$|\tilde{A}\tilde{B}|=x+z,\ |\tilde{B}\tilde{C}|=z+y,\ |\tilde{C}\tilde{A}|=y+x.$$

由于三条线段中任两条长度之和大于另一条，故这样的三角形总存在。取其内切圆，由熟知的关系，可知切点 $\tilde{D},\tilde{E},\tilde{F}$ 恰好分各边单比为 $y/z,x/y,z/x$。根据平面仿射变换基本定理，存在（唯一）一个仿射变换 ϕ，将三角形 $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ 对应映为三角形 ABC，将前者内切圆 $\tilde{\Gamma}$，映为后者的一个内切椭圆 Γ，且由于保单比，故将对应切点 $\tilde{D},\tilde{E},\tilde{F}$ 恰好映为对应切点 D,E,F，满足要求。

整个结论也可以完全应用射影几何方法来证。

（必要性）对三角形 ABC 及内切椭圆与各边切点 D,E,F，视为椭圆外切（退化）六边形 $AECDBF$，用 Brianchon 定理，注意 D,E,F 既是两个重合的切点，也是六边形的顶点，故 AD,BE,CF 作为椭圆外切六边形的三条对角线必共点。

（充分性）应用“平面射影变换基本定理”：任给（射影）平面上一般位置（无三点共线）的四点组 $\{A,B,C,P\}$ 和 $\{A',B',C',P'\}$，存在（唯一的）射影变换将其中一组四点映到另一组对应的四点。对于本题，设已有三角形 ABC 中 AD,BE,CF 三线共点 P，取一个射影变换 ϕ 将 $\{A,B,C,P\}$ 映为一个等边三角形的对应顶点及其中心 $\{A',B',C',P'\}$，后者显然有一个内切圆 Γ'，且切点为 D,E,F 的像点 D',E',F'。用 ϕ^{-1} 将 Γ' 映回去即得所要求的内切椭圆。

• 评分标准：充分性和必要性各占 5 分。

题 4 (15 分) Pappus 定理说，在平面 Σ 上，有直线 l 上三点 A, B, C 与 l' 上三点 $A', B'C'$，且 AB' 交 BA' 于 P，BC' 交 CB' 于 Q，CA' 交 AC' 于 R，则 P, Q, R 三点共线。试陈述其对偶命题，并给出对偶命题的证明。

• 解：对偶命题为："给定过 L 点的三直线 a, b, c 和过 L' 点的三直线 $a'b'c'$，直线 a, b' 交点 M_1 与直线 a', b 交点 M_2 连线 p，直线 b, c' 交点 M_3 与直线 b', c 交点 M_4 连线 q，直线 c, a' 交点 M_5 与直线 c', a 交点 M_6 连线 r，则三线 p, q, r 共点。"

此题作业中出现过，至少可用六种不同方法来证。其中一种典型做法是把 L, L' 用一个射影变换均映到无穷远点，则 a, b, c 变成三条平行线，a', b', c' 是另一组三条平行线，求证对应的三线 M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 共点。以两组平行线方向为坐标轴方向建坐标系，用解析方法，或在对应三角形中用 Menelaus 定理，均易证出。

• 评分标准：*陈述对偶命题 5 分，证明 10 分。上述证法中，不少同学出的典型错误是把 L, L' 映到无穷远后，想当然地认为 M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 三线平行，这种情况均扣 5 分。*

题 5 (10 分) 设椭圆 Γ 在直角坐标系 Oxy 下的方程为 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，$P = (a/2, b/2)$ 为 Γ 内部的一点。求 P 点关于该椭圆的极线 $\ell(P)$ 的方程。

• 解：极线方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$。一种最简单的办法是应用对极点、极线关系的刻画。在射影坐标下，P 点齐次坐标为 $[a/2, b/2, 1]$，二次曲线对应系数矩阵为对角阵 $diag(1/a^2, 1/b^2, -1)$；对应的极线 $\ell(P)$ 上的点 $[x, y, z]$ 满足

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

故极线 $\ell(P)$ 方程为 $x/a + y/b - 2 = 0$。

方法二是选择过 P 的两条线，并求对应直线上的调和共轭点，再由这两个调和共轭点定出极线方程。例如过 P 且平行于 x 轴方向的直线交椭圆于 $(\pm\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{b}{2})$，对应调和共轭点为 $(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2})$；过 P 且平行于 y 轴方向的直线交椭圆于 $(\frac{a}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}b}{2})$，对应调和共轭点为 $(\frac{a}{2}, \frac{3b}{2})$。求出极线方程为 $x/a + y/b = 2$。

方法三：采用仿射变换（正压缩），将椭圆映为圆 $x^2 + y^2 = a^2$，对应 P 点的像是 $(a/2, a/2)$，由熟知的一点关于一圆的极线位置，此时极线应该垂直于 $(1, 1)$ 方向且到圆心距离为 $\sqrt{2}a$，故为 $x + y = 2a$。经过逆向的正压缩变换，对应极线应为 $x/a + y/b = 2$。

• 评分标准：*若按方法二计算，但中间计算出错，一般扣 5 分。*

题 6（8 分） 给定平面上圆周 Γ 的两个内接矩形，其中一个是正方形，另一个不是。是否存在射影变换，将 Γ 映为 Γ，将正方形映为另一个矩形？请回答并给出论证。

• 解：这样的射影变换不存在。

理由一：反设存在这样的射影变换，记为 ϕ. 注意它将正方形四顶点映到另一个长方形四顶点，由射影变换基本定理，这样的变换是唯一的，而恰好有一个平面上的仿射变换做到这一点，为一个等距变换与两个垂直方向的不同比率的正压缩之复合，它必然等于 ϕ。可 ϕ 明显不会把圆周仍然映为圆周。这是矛盾。

理由二：反设存在这样的射影变换 ϕ，则它把正方形的一对对边交点映为长方形的一对对边交点；故它把两个无穷远点映为另两个无穷远点，这说明无穷远直线是不变直线，所以 ϕ 是仿射变换。（或者利用正方形的对角线交点映为另一个矩形的对角线交点，所以是把圆心映为圆心，所以对应极线保持不变，即无穷远直线保持不变。）它又把一个圆仍然映为圆，所以是相似变换。这个圆的半径在映射前后没变，所以相似比是 1，故 ϕ 是等距变换。但等距变换不可能把正方形变为长宽不同的矩形，矛盾。

另一种论证前半部分同上述理由二，不过最后是由保圆周 Γ 推出仿射变换的变积系数为 1，而圆内接正方形与长宽不等的圆内接矩形具有不相同的面积，这是矛盾。

• 评分标准：光有断言无论证，不得分。

题 7（12 分） 给定平面上一组同心圆 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$，半径之比为 $1:2$；给定另一组两个圆 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$，圆心不同，一个在另一个内部且无公共点。回答以下问题并说明你的理由。

(i) 是否一定存在一个 Moebius 变换，将一组两圆同时映为另一组？（7 分）

(ii) 是否一定存在一个射影变换，将一组两圆同时映为另一组？（5 分）

• 解：(i) 不一定存在。首先注意，$\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 总可以用一个 Möbius 变换映为一对同心圆 $\{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$。习题课上已论证过存在唯一一对点关于 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 同时构成反演对称，取两者之一为反演中心，此反演就可以做到这一点。不妨设 $\{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ 与 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ 有同一圆心 $z=0$。

若 $\{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ 的半径之比是 $1:2$，则明显存在题意中要求的 Möbius 变换。

若比值为其它，则不存在，理由是：若存在这种 Möbius 变换，意味着同心圆 $\{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2\}$ 与同心圆 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$Möbius 等价。根据 Möbius 不变性，与前者同时正交的圆周族必然映为与后者同时正交的圆周族。注意与一组同心圆同时正交的圆周族必然是欧氏平面上过圆心的直线族，以圆心 $z=0$ 和 ∞ 为公共点，所以这种变换只能是相似变换 $z \to az$ 或 $z \to a\bar{z}$，或反演 $z \to a/\bar{z}$，或 $z \to a/z$。无论哪种情形，这个比值 $1:2$ 都是不变的。

(ii) 这种变换一定不存在。事实上，永远不可能通过一个实射影变换把一组同心圆（无论半径比是多少）映为一对偏心圆。

最简单的理由是（证法一）：考察两圆 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ 的虚交点，以及 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 的虚交点，两组交点都包含虚无穷远点 $[1, i, 0]$ 和 $[1, -i, 0]$；同心圆情形，两圆甚至是在这两点相切的。如果存在射影变换 ϕ 将 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ 映为 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$，则必然也将对应虚交点映为虚交点，由此推出实无穷远点 $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ 也保持不变，故 ϕ 是仿射变换。它将一个圆映为另一个圆，故为相似，但熟知相似变换保持同心圆仍映为同心圆。这是一个矛盾。

如果上述看法过于高级，可以用以下的证法二。考虑与同心圆中内部较小圆相切的线段 AB，A, B 在较大圆周上变动，为其动弦。无论其如何转动，切点都是两端点的中点，所以适当顺序下的第四调和点是一条直线（无穷远直线）。经过射影变换后，设映为偏心圆 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$，Γ_1' 在内侧，无穷远直线映为 l'。容易看出，l' 必须与 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 连心线垂直，且是普通直线。但从 l' 上不在 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 连心线上的任意一点 P 向 Γ_1' 引两条切线 PC, PD；PC 与 Γ_2' 交于 A, B，PD 与 Γ_2' 交于 E, F。切线段长相等，$PC = PD$。由割线定理，$PA \cdot PB = PE \cdot PF$。由于不对称，$|PA - PB| \neq |PE - PF|$，故同样有 $PA + PB \neq PE + PF$，由此易推出 $\{P, C, A, B\}$ 和 $\{P, D, E, F\}$ 不可能同时构成调和点列，矛盾！

顾超、李艺轩、金辉、郑迪文、陈凯文等几位同学想到了利用题目中关于半径比为 $1:2$ 的信息，指出过 $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ 圆心的直线与其四个交点的顺序交比恒为 $9/8$；适当取 $\{\Gamma_1', \Gamma_2'\}$ 的半径比，任一与两圆同时相交的割线的顺序四交点之交比都不可能取到这个值，故不存在所问的射影变换。这个思路是很巧的，但没有彻底解决整个问题，所以只给 4 分，扣了 1 分。

魏宏济同学完全解决了这个问题，也是唯一的满分。他的思路类似证法二。注意从任一无穷远点向同心圆 Γ_1, Γ_2 引四条切线（彼此平行），则显然四个切点共线。经射影变换 ϕ 后，设无穷远直线映为 l'，从 l' 上任一点 P 向 Γ_1', Γ_2' 作的四条切线之切点就仍然必须共线。设 P 不在连心线 $O_1'O_2'$ 上。设

Γ_1' 圆心为 O_1'，Γ_2' 圆心为 O_2'，PS,PT 分别与 Γ_1' 切于 S,T，则 PO_1' 必然垂直平分线段 ST；PR,PQ 分别与 Γ_2' 切于 R,Q，则 PO_2' 必然垂直平分线段 RQ。由于刚才已推出 S,T,P,Q 四点共线，故 PO_1',PO_2' 方向相同，故三点共线，与此前 P 取法矛盾。这说明了 ϕ 的不存在性。

• 评分标准：*(i)* 中答出“可将偏心圆映为同心圆”并有适当讨论和提及 *Möbius* 不变性，但最后答案错误或理由不充分者，一般只得 *2-4* 分。*(ii)* 中设想到了利用极线和交比不变性，但没有完成后面讨论的，得 *1* 分。