# 《高等代数I（实验班）》期末试题答案

**2015-2016学年第1学期**

一. 在实数域内求下列行列式.

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{vmatrix}.$$

**解.** (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 \\ 13^2 & 14^2 & 15^2 & 16^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2-1^2 & 3^2-2^2 & 4^2-3^2 \\ 5^2 & 6^2-5^2 & 7^2-6^2 & 8^2-7^2 \\ 9^2 & 10^2-9^2 & 11^2-10^2 & 12^2-11^2 \\ 13^2 & 14^2-13^2 & 15^2-14^2 & 16^2-15^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 3 & 5 & 7 \\ 5^2 & 11 & 13 & 15 \\ 9^2 & 19 & 21 & 23 \\ 13^2 & 27 & 29 & 31 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1^2 & 3 & 5-3 & 7-5 \\ 5^2 & 11 & 13-11 & 15-13 \\ 9^2 & 19 & 21-19 & 23-21 \\ 13^2 & 27 & 29-27 & 31-29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 3 & 2 & 2 \\ 5^2 & 11 & 2 & 2 \\ 9^2 & 19 & 2 & 2 \\ 13^2 & 27 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$ □

二. 考虑多项式代数$\mathbb{Q}[x]$的理想

$$\mathrm{M} = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) = f(1) = 0\} \qquad (0, 1 \in \mathbb{Q})$$

和

$$\mathrm{N} = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(A) = 0\}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}.$$

求理想$\mathrm{M}+\mathrm{N}$的首项系数是1的生成元.

**解.** 首先, 容易看出$x(x-1) \in \mathrm{M}$. 由于M中的非零多项式总有0和1两个根, 所以次数至少是2. 这说明$x(x-1)$是M的生成元. 另一方面, 注意到$x^2 \in \mathrm{N}$, 并且N中没有次数$\le 1$的非零多项式. 所以$x^2$是N的生成元. 两方面结合起来, 并且注意到$x$和$x-1$是素多项式, 即得$x(x-1)$与$x^2$的最大公因式$x$是$\mathrm{M}+\mathrm{N}$的生成元. □

三. 设$n \ge 2$, $A \in F^{n\times n}$. 证明$\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$, 这里$\mathrm{adj}(A)$为$A$的伴随矩阵.

**证明.** 首先, 我们有

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A) I_n. \tag{1}$$

我们利用上式分两种情况证明.

*情况一.* 假设$A$可逆. 则$\det(A) \ne 0$. 对(1)式两边取行列式, 得

$$\det(A)\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^n.$$

此式两边乘$\det(A)^{-1}$即得欲证等式.

*情况二.* 假设$A$不可逆. 则$\det(A) = 0$. 因此只需证明$\det(\mathrm{adj}(A)) = 0$, 即$\mathrm{adj}(A)$不可逆. 若不然, 由(1)得$A\,\mathrm{adj}(A) = 0$, 两边右乘$\mathrm{adj}(A)^{-1}$得$A = 0$, 从而$\mathrm{adj}(A) = 0$, 矛盾. □

四. 设$V$和$W$是域$F$上的线性空间, $\dim V = \dim W = 2$, $T \in \mathrm{L}(V, W)$, $U \in \mathrm{L}(W, V)$. 证明
$$\det(\mathrm{id}_V + UT) = \det(\mathrm{id}_W + TU).$$

**证明.** 设$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$分别是$V$和$W$的有序基, $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in F^{2\times 2}$. 则
$$\det(\mathrm{id}_V + UT) = \det([\mathrm{id}_V + UT]_{\mathcal{B}}) = \det(I_2 + BA),$$
$$\det(\mathrm{id}_W + TU) = \det([\mathrm{id}_W + TU]_{\mathcal{B}}) = \det(I_2 + AB).$$
因此只需证明
$$\det(I_2 + AB) = \det(I_2 + BA). \tag{2}$$
设$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. 则
$$\det(I_2 + AB) = \det \begin{bmatrix} ax + bz + 1 & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw + 1 \end{bmatrix} = \det(AB) + ax + bz + cy + dw + 1,$$
$$\det(I_2 + BA) = \det \begin{bmatrix} ax + cy + 1 & bx + dy \\ az + cw & bz + dw + 1 \end{bmatrix} = \det(BA) + ax + cy + bz + dw + 1.$$
比较上面两式, 并注意到$\det(AB) = \det(BA)$, 即得(2)式. □

五. 设$V$是域$F$上的有限维线性空间. 证明对于互不相同的$f_1, \dots, f_n \in V^*$, 以下两个论断等价:
(1) 集合$\{f_1, \dots, f_n\}$线性无关.
(2) 由$T(\alpha) = (f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$定义的线性映射$T : V \to F^n$是满射.

**证明.** 注意到$T$是满射$\Longleftrightarrow T^t : (F^n)^* \to V^*$是单射. 任何$g \in (F^n)^*$形如
$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \qquad c_i \in F.$$
此时有
$$T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha), \qquad \forall \alpha \in V,$$
即$T^t(g) = \sum_{i=1}^n c_i f_i$. 因此
$$(2) \iff \text{由}T^t(g) = 0\text{可推出}g = 0 \iff \text{由}\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0\text{可推出}c_i = 0 \iff (1).$$
□

六. 设$V$是域$F$上的线性空间(可以是无限维的), $\dim V \geq n + 1$. 证明对于$V$的子空间$W$, 以下两个论断等价:
(1) 存在$f_1, \dots, f_n \in V^*$满足$W = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i)$.
(2) 对$V$的任意$n + 1$维子空间$Z$总有$W \cap Z \neq \{0\}$.

**证明.** "(1)$\Longrightarrow$(2)". 设$f_1, \dots, f_n \in V^*$满足$W = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i)$, $Z$是$V$的$n + 1$维子空间. 记$f_i|_Z \in Z^*$为$f_i$在$Z$上的限制. 则$\mathrm{span}\{f_1|_Z, \dots, f_n|_Z\} \neq Z^*$. 因此
$$W \cap Z = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(f_i|_Z) \neq \{0\}.$$
"(2)$\Longrightarrow$(1)". 假设(2)成立. 我们先证明商空间$V/W$是有限维的并且$\dim V/W \leq n$. 为此, 只需证$V/W$中的任意$n + 1$个元素线性相关. 设$\alpha_1 + W, \dots, \alpha_{n+1} + W \in V/W$, 这里$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in V$. 如果$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$线性相关, 则$\alpha_1 + W, \dots, \alpha_{n+1} + W$自然线性相关. 假设$\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$线性无关. 由(2), $W \cap \mathrm{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\} \neq \{0\}$, 即存在不全为零

的$c_1,\ldots,c_{n+1}\in F$满足$\sum_{i=1}^{n+1}c_i\alpha_i\in W$. 这推出

$$\sum_{i=1}^{n+1}c_i(\alpha_i+W)=\sum_{i=1}^{n+1}c_i\alpha_i+W=W.$$

所以$\alpha_1+W,\ldots,\alpha_{n+1}+W$线性相关. 这就证明了$\dim V/W\le n$. 由此可知, 存在$F_1,\ldots,F_n\in(V/W)^*$满足$\bigcap_{i=1}^n\operatorname{Ker}(F_i)=\{W\}$. 设$f_i=F_i\circ Q$, 这里$Q:V\to V/W$为商映射. 我们断言$f_1,\ldots,f_n$满足(1)的要求. 事实上,

$$\alpha\in\bigcap_{i=1}^n\operatorname{Ker}(f_i)\iff Q(\alpha)\in\bigcap_{i=1}^n\operatorname{Ker}(F_i)=\{W\}\iff\alpha\in W.$$

因此$W=\bigcap_{i=1}^n\operatorname{Ker}(f_i)$. □

七. 设$V$是域$F$上的有限维线性空间, $L$是$V$上的双线性函数, $W,Z$是$V$的子空间. 假设下面的两个条件成立:
(a) 对任意$\alpha\in W\setminus\{0\}$, 存在$\beta\in Z$使得$L(\alpha,\beta)\neq 0$;
(b) 对任意$\beta\in Z\setminus\{0\}$, 存在$\alpha\in W$使得$L(\alpha,\beta)\neq 0$.
证明对任意$f\in V^*$, 存在$\alpha\in W$使得对任意$\beta\in Z$有$f(\beta)=L(\alpha,\beta)$.

**证明.** 考虑线性映射$T:W\to Z^*$, $T(\alpha)(\beta)=L(\alpha,\beta)$, 这里$\alpha\in W$, $\beta\in Z$. 我们断言$T$是单映射. 事实上, 如果$T(\alpha)=0$, 则对任意$\beta\in Z$有$L(\alpha,\beta)=0$. 由条件(a), 这推出$\alpha=0$. 所以$T$是单映射. 因此$\dim W\le\dim Z$. 类似地, 条件(b)推出$\dim Z\le\dim W$. 所以$\dim W=\dim Z$. 因此$T$还是满映射. 于是, 对任意$f\in V^*$, 考虑它在$Z$上的限制$f|_Z\in Z^*$, 则存在$\alpha\in W$使得$T(\alpha)=f|_Z$, 即对任意$\beta\in Z$有$f(\beta)=L(\alpha,\beta)$. □

八. 设实矩阵$A,B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$的所有矩阵元等于0或1, 并且$A$可逆. 证明$A^{-1}B$的所有矩阵元的绝对值$\le 2$.

**证明.** 我们先证明下面的结果.
*引理.* 如果实矩阵$D\in\mathbb{R}^{3\times 3}$的所有矩阵元等于0或1, 则$|\det(D)|\le 2$.
*引理的证明.* 设$D$的$(i,j)$-元为$d_{ij}$. 则

$$|\det(D)|=|(d_{11}d_{22}d_{33}+d_{12}d_{23}d_{31}+d_{13}d_{21}d_{32})-(d_{11}d_{23}d_{32}+d_{13}d_{22}d_{31}+d_{12}d_{21}d_{33})|.$$

上面两个括号中的表达式的值只能为$0,1,2$或3. 因此$|\det(D)|\in\{0,1,2,3\}$. 如果$|\det(D)|=3$, 则某个括号中的表达式的值为3. 这推出$D$的所有矩阵元等于1, 从而$\det(D)=0$, 矛盾. 因此$|\det(D)|\in\{0,1,2\}$. 这就证明了引理.

现在证明本题. 记$C=A^{-1}B$, 并设$B$和$C$的第$j$列分别为$B_j$和$C_j$, $(i,j)$-元分别为$b_{ij}$和$c_{ij}$. 由于$AC_j=B_j$并且$A$可逆, 由Cramer法则, $c_{ij}=\frac{\det(D_{ij})}{\det(A)}$, 这里$D_{ij}$为把$A$的第$i$列替换为$B_j$后得到的矩阵. 由于$D_{ij}$的所有矩阵元为0或1, 由引理有$|\det(D_{ij})|\le 2$. 另一方面, 由于$\det(A)$是非零整数, 所以$|\det(A)|\ge 1$. 因此

$$|c_{ij}|=\frac{|\det(D_{ij})|}{|\det(A)|}\le 2.$$

□