2013.11 高代(I)期中 赵玉凤 回忆版

for 文艺部 2014　　钱鑫 2014 年 11 月

说明：一共有四个大题，全卷满分 100 分。

一、 每小题 10 分，共 6 小题（第 4、5 小题为原题，其他题目只是示例）；

1. 简单纯数字低阶行列式（不是原题），例如：$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$

2. 简单的带字母的行列式，例如：

计算下列 n 阶行列式($n\geqslant 2$)：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

3. “三对角”行列式（可百度其通解）：

例 7 计算下述 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix},$$

其中 $a\neq b$。

4. 线性方程组有解的情况及其判别准则：系数矩阵与增广矩阵的秩相等。（认真读教材 P90 第三章第 6 节的内容）

5. （应该是此卷最难的一题）求 n 阶行列式的值 $D_n=\left|\left(\dfrac{1}{1-a_ib_j}\right)_{n\times n}\right|$.

前三题均选自《高等代数学习指导书》（上册）：

1.　　P39 习题 2.3 1.

2.　　P45 例 5
3.　　P47 例 7

二、（20 分）设 A 是 $n\ (n\ge 2)$ 级矩阵，证明：

(1) 当 $n=2$ 时，$\left(A^*\right)^*=A$

(2) 当 $n\ge 3$ 时，$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$

（学习指导书 P224 例 8，需用到例 7 的结论。P224 最下方 A^* 计算有误，自己手算一下）

三、（10 分）如果数域 K 上 n 级矩阵 A 满足 $A^2=A$，那么称 A 是幂等矩阵。证明：数域 K 上 n 级矩阵 A 是幂等矩阵当且仅当

$$rank(A)+rank(I-A)=n$$

（学习指导书 P221 例 3，请认真读懂证法一）

五、（10 分）

设 g 是定义在 $M_n(K)$ 上一个数量函数，满足如下条件：对 K^n 中任意向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta$（写成竖列形式）以及 K 中任意数 λ，都有

$$\begin{aligned} &g(\beta_1,\cdots,\beta_j+\beta,\cdots,\beta_n)\\ &\quad=g(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)+g(\beta_1,\cdots,\beta,\cdots,\beta_n),\\ &g(\beta_1,\cdots,\lambda\beta_j,\cdots,\beta_n)=\lambda g(\beta_1,\cdots,\beta_j,\cdots,\beta_n)\end{aligned}$$

（这里 $j=1,2,\cdots,n$），则称 g 为 $M_n(K)$ 上一个**列线性函数**.

定义　设 f 是 $M_n(K)$ 上一个列线性函数且满足如下条件：

(i) 如果 $A\in M_n(K)$ 不满秩，则 $f(A)=0$；

(ii) 对 $M_n(K)$ 内单位矩阵 E，有 $f(E)=1$，

则称 f 为 $M_n(K)$ 上一个**行列式函数**.

证明：行列式函数存在且唯一。

（证明见《高等代数简明教程（第二版）》上册第三章第 2 节，这是全卷的最后一题）