北京大学数学科学学院 期末试题

2015 — 2016 学年第 1 学期

考试科目: 高等代数　　　　考试时间: 2016 年 1 月 7 日

系　　别: ______　　　　学　　号: ______

姓　　名: ______

本试题有正反1页, 共8 道大题, 满分 100 分

1. (30分)

设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a 求正交矩阵T使T^tAT是对角矩阵;

b 求实函数$f(X) = \frac{X^tAX}{X^tX}$的值域，列向量$0 \neq X \in \mathbb{R}^4$。

2. (10分)设A, B, C是n阶方阵，$B^2 = 0$, 计算

$$\begin{pmatrix} I_n & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & B & I \end{pmatrix}^{-1}.$$

3. (10分)设$A, B \in M_n(F)$是对称矩阵，A是可逆的。那么存在可逆矩阵$P \in M_n(F)$使得P^tAP和P^tBP同时为对角矩阵的充要条件是$A^{-1}B$在数域F上可对角化。

4. (10分)设$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, 这里$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$是$n$阶实矩阵。那么，对任意的$A, B \in M_n(\mathbb{R})$都有

$$(tr(AB^t))^2 \leq tr(AA^t)tr(BB^t).$$

5. (10分) 设F是一个数域，$A \in M_n(F)$. 如果$A^2 + 5A + 6I = 0$, 那么A可对角化。

6. (10分) 设$A_1, A_2, B \in M_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^t & A_2 \end{pmatrix}$. 如果$A$是正定的，那么$|B|^2 \leq |A_1A_2|$.

7. (10分) 设$A \in M_n(\mathbb{R})$. 那么A有m个线性无关的特征向量的充要条件是存在秩为m半定矩阵$P \in M_n(\mathbb{R})$使得$AP = PA^t$.

8. (10分) 设A是可逆的复对称矩阵，B是复对称矩阵，多项式$f(\lambda) = |\lambda A - B|$有$n$个不同的复根。那么存在可逆矩阵$P$使得$PAP^t = I$且$PBP^t$是对角矩阵。