田叔高量历年考题集

2000年考题

1.(20分) 定义如下的酉正算符

$$\hat{U}=exp\left[\frac{\pi}{2}(\hat{c}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{c}_{\downarrow}^{\dagger}-\hat{c}_{\downarrow}\hat{c}_{\uparrow})\right],\quad \hat{U}^{\dagger}=exp\left[-\frac{\pi}{2}(\hat{c}_{\uparrow}^{\dagger}\hat{c}_{\downarrow}^{\dagger}-\hat{c}_{\downarrow}\hat{c}_{\uparrow})\right]$$

这里，$c_{\uparrow}$和$c_{\downarrow}$分别为自旋向上和向下的费米子算符。利用Baker-Hausdorff公式证明下面的关系成立

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{c}_{\uparrow}\hat{U}=\hat{c}_{\downarrow}^{\dagger},\quad \hat{U}^{\dagger}\hat{c}_{\downarrow}\hat{U}=-\hat{c}_{\uparrow}^{\dagger}.$$

2.(20分) (i)当$t=0$时，波函数在海森堡表象与相互作用表象中的形式相同，即 $\Psi_H(t=0)=\Psi_I(t=0)=\Psi_S(t=0)$。利用表象之间的关系，证明在以后的时刻 $t>0$时，有等式

$$exp[-it(H_0+V)]=exp(-itH_0)\hat{P}exp\left[-i\int_0^t dt_1\left(e^{it_1H_0}Ve^{-it_1H_0}\right)\right]$$

成立（取$\hbar=1$）。

(ii)假设$[H_0,V]=C$为一复常数。利用上面得到的公式及Baker-Hausdorff公式证明

$$exp[-it(H_0+V)]=exp(-itH_0)exp(-itV)exp\left(\frac{t^2C}{2}\right)$$

（在计算中，可将编时算符$\hat{P}$略去）。

3.(20分)考虑一个二维时空（一维时间加一维空间）中的Dirac方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{\alpha}\hat{P}_x\Psi+\hat{\beta}\Psi$$

这里，$\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$各是一个2×2矩阵。

(i)从相对论能量关系式$E^2=P_x^2c^2+m_0^2c^4$出发，推导出矩阵 $\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$的可能形式。

(ii)求出此方程的平面波解。

4.(15分)假设算符$\hat{U}$满足对易关系

$$[\hat{U},\hat{J}_z]=\frac{1}{2}\hat{U},\quad [[\hat{U},\hat{J}^2],\hat{J}^2]=\frac{1}{2}(\hat{U}\hat{J}^2-\hat{J}^2\hat{U})+\frac{3}{16}\hat{U}$$

确定$\hat{U}$在角动量算符本征态$\{|JM\rangle\}$之间的选择定则（即确定哪些矩阵元$\langle J_1M_1|\hat{U}|J_2M_2\rangle$可能非零）。

5.(15分)考虑非轴对称陀螺的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \alpha_1\hat{I}_\xi^2+\alpha_2\hat{I}_\eta^2+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2-\hat{I}_\zeta^2)+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2+\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2+\hat{I}_-^2) \end{aligned}$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E},\hat{R}_1=e^{-i\pi\hat{I}_\xi},\hat{R}_2=e^{-i\pi\hat{I}_\eta},\hat{R}_3=e^{-i\pi\hat{I}_\zeta}$。这个群的一个一维不可约表示$B_2$具有特征标

$$\chi_{B_2}(\hat{E})=1,\chi_{B_2}(\hat{R}_1)=-1,\chi_{B_2}(\hat{R}_2)=1,\chi_{B_2}(\hat{R}_3)=-1$$

当角动量$I=2$时，找出哈密顿量在对称操作下按照表示B_2进行变换的全部本征函数， 并计算它们的能量。

6.(10分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\},\{C_2^{(1)},\cdots,C_2^{(6)}\},\{C_3^{(1)},\cdots,C_3^{(4)},C_3^{(1)2},\cdots,C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)},C_4^{(2)},C_4^{(3)},C_4^{(1)3},C_4^{(2)3},C_4^{(3)3}\},\{C_4^{(1)2},C_4^{(2)2},C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2 ，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

已知算符$\vec{d}=(-e)\vec{r}$（$-e$为电子电荷）在上述对称操作下按照表示 F_1变换。问下面的矩阵元哪些恒为零。

$$\langle\Psi_{F_1}|\vec{d}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{F_2}|\vec{d}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_B|\vec{d}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{A_2}|\vec{d}|\Psi_B\rangle$$

这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。

2002年考题

1.(15分)试将相干态

$$|z\rangle \equiv exp(z\hat{a}^\dagger)|0\rangle$$

归一化。这里，$\hat{a}^\dagger$为玻色子的产生算符，而z为一复数。

2.(15分)当$j=\frac{1}{2}$时，利用关系式 $\hat{j}_x^2=\hat{j}_y^2=\hat{j}_z^2=\frac{1}{4}$（令$\hbar=1$），求出矩阵

$$d_{m'm}(\theta)=\langle jm'|e^{-i\theta\hat{j}_y}|jm\rangle,\quad m',m=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$$

的具体形式。

提示：将$e^{-i\theta\hat{j}_y}$展开成泰勒级数。

3.(15分)当入射粒子能量为$E_i=\frac{P_i^2}{2m}$时，已知其弹性散射截面为

$$\sigma_e=\frac{\pi}{k_i^2}\sum_l(2l+1)|1-S_l(E_i)|^2$$

利用S矩阵的酉正性证明，对于第l个分波，关系式

$$\sigma_e^{(l)}=\frac{|1-S_l|^2}{1-|S_l|^2}\sigma_r^{(l)}$$

成立。这里，$\sigma_e^{(l)}$和$\sigma_r^{(l)}$分别代表弹性和非弹性散射截面的第l个分波。并由此证明不等式

$$\frac{(1-|S_l|)^2}{1-|S_l|^2}\sigma_r^{(l)}\le\sigma_e^{(l)}\le\frac{(1+|S_l|)^2}{1-|S_l|^2}\sigma_r^{(l)}$$

成立。

4.(15分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\},\{C_2^{(1)},\cdots,C_2^{(6)}\},\{C_3^{(1)},\cdots,C_3^{(4)},C_3^{(1)2},\cdots,C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)},C_4^{(2)},C_4^{(3)},C_4^{(1)3},C_4^{(2)3},C_4^{(3)3}\},\{C_4^{(1)2},C_4^{(2)2},C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

又知原子四级矩算符的非对角分量$\hat{Q}_{xy},\hat{Q}_{xz},\hat{Q}_{yz}$在上述对称操作下按照表示$F_2$变换。问下面的矩阵元

$$\langle\Psi_{F_1}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{F_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_B|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{A_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle$$

中哪些恒为零。这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。

5.(15分)令

$$\hat{U}=\prod_{i=1}^{N}(\hat{C}_i^\dagger+\hat{C}_i)=(\hat{C}_1^\dagger+\hat{C}_1)(\hat{C}_2^\dagger+\hat{C}_2)\cdots(\hat{C}_N^\dagger+\hat{C}_N)$$

(1)首先验证$(\hat{C}^\dagger+\hat{C})(\hat{C}^\dagger+\hat{C})=1$，然后证明$\hat{U}$是酉正算符。

(2)证明关系式

$$\hat{U}^\dagger\hat{C}_j^\dagger\hat{U}=(-1)^{N-1}\hat{C}_j,\quad \hat{U}^\dagger\hat{C}_j\hat{U}=(-1)^{N-1}\hat{C}_j^\dagger$$

成立。文献中，这一变换成为粒子-空穴变换。

6.(15分)在一个非均匀外电场中，原子的四极矩对于其能级劈裂的贡献由下面的哈密顿量给出

$$\begin{aligned}H &= \alpha_1\hat{I}_\xi^2+\alpha_2\hat{I}_\eta^2+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2\\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2-\hat{I}_\zeta^2)+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2+\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2+\hat{I}_-^2)\end{aligned}$$

这一哈密顿量与非轴对称陀螺的哈密顿量形式相似，但其参数满足关系

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E},\hat{R}_1=e^{-i\pi\hat{I}_\xi},\hat{R}_2=e^{-i\pi\hat{I}_\eta},\hat{R}_3=e^{-i\pi\hat{I}_\zeta}$。并且这个群的一个一维不可约表示$B_3$具有特征标

$$\chi_{B_3}(\hat{E})=1,\chi_{B_3}(\hat{R}_1)=1,\chi_{B_3}(\hat{R}_2)=-1,\chi_{B_3}(\hat{R}_3)=-1$$

。当角动量$I=3$时，

(1)证明哈密顿量H没有按照B_3表示进行变换的形如

$$\Psi_I=a_1\overline{D}^3_{k=2}+a_2\overline{D}^3_{k=0}+a_3\overline{D}^3_{k=-2}$$

的本征波函数。

(2)证明哈密顿量H有两个按照B_3表示进行变换的形如

$$\Psi_{II} = b_1\overline{D}^3_{k=3} + b_2\overline{D}^3_{k=1} + b_3\overline{D}^3_{k=-1} + b_4\overline{D}^3_{k=-3}$$

的本征波函数。它们的本征值由下式给出

$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{1}{2}\{(H_{1,1} - H_{1,-1} + H_{3,3}) \\ &\pm \sqrt{(H_{1,1} - H_{1,-1} + H_{3,3})^2 - 4[H_{3,3}(H_{1,1} - H_{1,-1}) - H_{1,3}H_{3,1}]}\Big\} \end{aligned}$$

这里，$H_{i,j} = \langle k = i|H|k = j\rangle$。

(3)计算诸量$H_{1,1}, H_{3,3}, H_{1,-1}, H_{1,3}$和$H_{3,1}$，并利用约束条件加以简化。

7.(10分)考虑一个三角形。设在每个顶点都有一个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，并且整个体系 的哈密顿量由下式给出

$$H = -JS_{1x}S_{2x} - JS_{1y}S_{2y} - JS_{1x}S_{3x} - JS_{1y}S_{3y} - JS_{2x}S_{3x} - JS_{2y}S_{3y}$$

这里，$J > 0$为一耦合常数。求该体系的基态能量（令$\hbar = 1$）。

提示：先将哈密顿量写成

$$H = -J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 - J\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + H'$$

的形式。

2004年考题

1.(15分)令$\hat{a}$和$\hat{a}^\dagger$分别为玻色子的湮灭算符和产生算符。

(i)利用Baker-Hausdorff公式证明

$$exp(-z\hat{a}^\dagger)\hat{a}exp(z\hat{a}^\dagger) = \hat{a} + z$$

这里，z是一个任意的复常数。

(ii)现定义相干态如下

$$|z\rangle = exp(z\hat{a}^\dagger)|0\rangle$$

利用上一问的结果，试证明，$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$。

2.(15分)设两个算符$\hat{A}$和$\hat{B}$满足对易关系

$$[\hat{A}, \hat{B}] = c\hat{I}$$

这里，c为一个复常数，证明

(i)$[\hat{A}, \hat{B}^n] = nc\hat{B}^{n-1}, n = 1, 2, 3, \cdots$

(ii)$[\hat{A}, e^{\hat{B}}] = ce^{\hat{B}}$

(iii)$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^c e^{\hat{B}} e^{\hat{A}}$

提示：证明(i)时，利用恒等式

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\hat{D}\cdots] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}\hat{D}\cdots + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]\hat{D}\cdots + \hat{B}\hat{C}[\hat{A}, \hat{D}]\cdots + \cdots\cdots$$

证明(ii)式时，利用$e^{\hat{B}}$的泰勒展开级数。

证明(iii)式时，利用Baker-Hausdorff公式。

3.(10分)假设当$E = E_0$时，$\delta_l = \frac{\pi}{2}$。证明，对于具有能量$E \cong E_0$的入射粒子，其散射截面可以近似地写作

$$\sigma_l(E) = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)|\sin\sigma_l(E)|^2 \cong \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\frac{\frac{{\Gamma_l}^2}{4}}{(E-E_0)^2 + \frac{{\Gamma_l}^2}{4}}$$

的形式。给出Γ_l的表达式。

提示：利用恒等式

$$|\sin\delta_l(E)| = |e^{i\delta_l(E)}\sin\delta_l(E)| = \left|\frac{\sin\delta_l(E)}{\cos\delta_l(E) - i\sin\delta_l(E)}\right|$$

4.(10分)考虑非轴对称陀螺的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \alpha_1\hat{I}_\xi^2 + \alpha_2\hat{I}_\eta^2 + \alpha_3\hat{I}_\zeta^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2 - \hat{I}_\zeta^2) + \alpha_3\hat{I}_\zeta^2 + \frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2 + \hat{I}_-^2) \end{aligned}$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E}, \hat{R}_1 = e^{-i\pi \hat{I}_\xi}, \hat{R}_2 = e^{-i\pi \hat{I}_\eta}, \hat{R}_3 = e^{-i\pi \hat{I}_\zeta}$。这个群的一个一维不可约表示$B_2$具有特征标

$$\chi_{B_2}(\hat{E}) = 1, \chi_{B_2}(\hat{R}_1) = -1, \chi_{B_2}(\hat{R}_2) = 1, \chi_{B_2}(\hat{R}_3) = -1$$

当角动量$I = 2$时，找出哈密顿量在对称操作下按照表示B_2进行变换的全部本征函数， 并计算它们的能量。

5.(15分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\}, \{C_2^{(1)}, \cdots, C_2^{(6)}\}, \{C_3^{(1)}, \cdots, C_3^{(4)}, C_3^{(1)2}, \cdots, C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)}, C_4^{(2)}, C_4^{(3)}, C_4^{(1)3}, C_4^{(2)3}, C_4^{(3)3}\}, \{C_4^{(1)2}, C_4^{(2)2}, C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

又知原子四级矩算符的对角分量$\hat{Q}_{xx}, \hat{Q}_{yy}, \hat{Q}_{zz}$在上述对称操作下按照表示$A_1$变换。问下面的矩阵元

$$\langle \Psi_{F_1} | \hat{Q}_{xx} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_{F_2} | \hat{Q}_{xx} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_B | \hat{Q}_{xx} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_{A_2} | \hat{Q}_{xx} | \Psi_B \rangle$$

中哪几个恒为零。这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。

6.(15分)考虑$Dirac$变换

$$\hat{\Lambda} = exp\left(\frac{i}{4}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\epsilon_{\mu\nu}\hat{\sigma}_{\mu\nu}\right)$$

这里，$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\mu)$而$\hat{\gamma}_i = -i\hat{\beta}\hat{\alpha}_i, i = 1, 2, 3$及 $\hat{\gamma}_4 = \hat{\beta}$。
当$\epsilon_{14} = -\epsilon_{41} = \omega$并且其余的变量$\epsilon_{\mu\nu} \equiv 0$时，这一变换退化为

$$\hat{\Lambda} = exp\left(\frac{i\omega}{2}\hat{\sigma}_{14}\right)$$

试证明，此时恒等式

$$\hat{\Lambda} = \cos\frac{\omega}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\omega}{2}\hat{\alpha}_1$$

成立。

提示： 先将公式中的算符$\hat{\sigma}_{14}$化简，再将$\hat{\Lambda}$ 展开成泰勒级数。

7.(10分)考虑一个总角动量$J \geq 1$的粒子，假设它处于$|J, J_z\rangle = |J, J\rangle$态中。

(i)证明$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_z}\hat{J}_x e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_z} = \hat{J}_y$。

(ii)计算算符$\hat{J}_x^2$在这个态下的平均值。

8.(10分)考虑两个角动量分别为J_1和J_2的粒子。由它们耦合而成的复合粒子的角动量为 $J, J_z = M$的态可以写作

$$|JM\rangle = \sum_{M_1}\langle J_1M_1, J_2(M-M_1)|JM\rangle|J_1M_1\rangle|J_2(M-M_1)\rangle$$

这里，所有的$C.G.$系数都是实数。证明，下面的恒等式

$$\langle JM|\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y}|JM\rangle \equiv 0$$

成立。

提示： 证明时，可利用如下的事实

(1)算符$\hat{J}_{1x}$和 $\hat{J}_{2y}$是厄密的。

(2)在$\hat{J}_{1z}$和$\hat{J}_{2z}$对角的表象中， $\hat{J}_{1x}$和$\hat{J}_{2y}$可以分别写成一个实数算符和一个虚数算符。

2006年考题

1.(20分)考虑如下定义的算符

$$\hat{\gamma}_1=\hat{c}_1+\hat{c}_1^\dagger,\hat{\gamma}_2=\hat{c}_2+\hat{c}_2^\dagger,\hat{\gamma}_3=-i\hat{c}_1+i\hat{c}_1^\dagger,\hat{\gamma}_4=-i\hat{c}_2+i\hat{c}_2^\dagger,$$

这里，$(\hat{c}_1,\hat{c}_1^\dagger)$和$(\hat{c}_2,\hat{c}_2^\dagger)$为两对彼此相互独立的费米子算符。 证明，对于这些算符，反对易关系

$$\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_3+\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_3=2,\quad \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2+\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_3+\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_1=0$$

成立（实际上，我们有 $\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu+\hat{\gamma}_\nu\hat{\gamma}_\mu=2\delta_{\mu\nu}$）。 又证明

$$\hat{\gamma}_0\equiv\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4=(1-2\hat{n}_1)(1-2\hat{n}_2)=1-2\hat{n}_1-2\hat{n}_2+4\hat{n}_1\hat{n}_2$$

2.(20分)利用$Born$近似，计算粒子在下面给出的势场中的微分散射截面

$$V(r)=\frac{e^{-\alpha r}}{r},\quad \alpha>0$$

提示：弹性微分散射截面的表达式为

$$\frac{d\sigma}{d\omega}=\sigma(\theta)=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}|\langle\vec{k}_f|\tilde{t}|\vec{k}_i\rangle|^2$$

这里，θ为入射波矢$\vec{k}_i$与出射波矢$\vec{k}_f$之间的夹角。

3.(15分)考虑非轴对称陀螺的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \alpha_1\hat{I}_\xi^2+\alpha_2\hat{I}_\eta^2+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2-\hat{I}_\zeta^2)+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2+\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2+\hat{I}_-^2)\end{aligned}$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E},\hat{R}_1=e^{-i\pi\hat{I}_\xi},\hat{R}_2=e^{-i\pi\hat{I}_\eta},\hat{R}_3=e^{-i\pi\hat{I}_\zeta}$。这个群的一个一维不可约表示$B_2$具有特征标

$$\chi_{B_2}(\hat{E})=1,\chi_{B_2}(\hat{R}_1)=-1,\chi_{B_2}(\hat{R}_2)=1,\chi_{B_2}(\hat{R}_3)=-1$$

当角动量$I=2$时，找出哈密顿量在对称操作下按照表示B_2进行变换的全部本征函数， 并计算它们的能量。

4.(15分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\},\{C_2^{(1)},\cdots,C_2^{(6)}\},\{C_3^{(1)},\cdots,C_3^{(4)},C_3^{(1)2},\cdots,C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)},C_4^{(2)},C_4^{(3)},C_4^{(1)3},C_4^{(2)3},C_4^{(3)3}\},\{C_4^{(1)2},C_4^{(2)2},C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2 ，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

又知原子四级矩算符的非对角分量$\hat{Q}_{xy},\hat{Q}_{xz},\hat{Q}_{yz}$在上述对称操作下按照表示$F_2$变换。问下面的矩阵元

$$\langle\Psi_{F_1}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{F_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_B|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle,\langle\Psi_{A_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle$$

中哪些恒为零。这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。

5.(10分)令$\hat{a}$和$\hat{a}^\dagger$为一对玻色子算符。定义相干态为

$$|z\rangle\equiv exp(z\hat{a}^\dagger)|0\rangle$$

这里，z为一复数。证明下式成立

$$exp(2\hat{a}^\dagger\hat{a})|z\rangle=|e^2z\rangle$$

6.(10分)考虑由四个自旋构成的体系。其哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= J(\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3+\hat{S}_4)\cdot(\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3+\hat{S}_4)\\ &+ \hbar(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z}+\hat{S}_{3z}+\hat{S}_{4z})\end{aligned}$$

这里，J和$\hbar$为任意实常数。若每个自旋的值皆为$S=\frac{1}{2}$，计算这一 哈密顿量的全部的本征值及相应的简并度。

提示：根据定义，

$$\hat{S}=\hat{S}_1+\hat{S}_2+\hat{S}_3+\hat{S}_4,\quad \hat{S}_z=\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z}+\hat{S}_{3z}+\hat{S}_{4z}$$

分别为四个自旋的总角动量及其z分量。

7.(10分)直观来看，上题中哈密顿量的对称群既可能是D_4群，也可能是置换群 S_4。前者有8个群元素，5个共轭类。而后者有4!个群元素和5个共轭类。要求由上题中得到的各个本征值的简并度来决定，到底哪个群是哈密顿量的对称群？

2008年考题

1.(10分)令i为晶体中的一个格点，而$\hat{n}_{i\uparrow}$和$\hat{n}_{i\downarrow}$ 分别为该格点处自旋向上及自旋向下的电子数。考虑到电子是费米子，试证明恒等式

$$(\hat{n}_{i\uparrow}+\hat{n}_{i\downarrow})^2=\hat{n}_{i\uparrow}+\hat{n}_{i\downarrow}+2\hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}$$

成立。

2.(10分)我们曾用运动方程法证明了，在相互作用表象中的玻色子产生和湮灭算符可以被写作

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger_{kI}(t) &= exp\big(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\big)\hat{a}^\dagger_k exp\big(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\big)=\hat{a}^\dagger_k exp\big(\frac{i}{\hbar}\epsilon_k t\big)\\ \hat{a}_{kI}(t) &= exp\big(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\big)\hat{a}_k exp\big(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\big)=\hat{a}_k exp\big(-\frac{i}{\hbar}\epsilon_k t\big)\end{aligned}$$

这里，$\hat{H}_0=\sum_{k_1}\epsilon_{k_1}\hat{a}^\dagger_{k_1}\hat{a}_{k_1}$为玻色子的单粒子动能哈密顿量。试用Baker-Hausdorff 公式重新证明这些恒等式。

3.(10分)利用$Born$近似，计算粒子在势场

$$V(r)=a\delta(r-r_0)$$

中的弹性微分散射截面。

提示：弹性微分散射截面的表达式为

$$\frac{d\sigma}{d\omega}=\sigma(\theta)=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}|\langle\vec{k}_f|\tilde{t}|\vec{k}_i\rangle|^2$$

这里，θ为入射波矢$\vec{k}_i$与出射波矢$\vec{k}_f$之间的夹角。

4.(15分)在一个非均匀外电场中，原子的四极矩对于其能级劈裂的贡献由下面的哈密顿量给出

$$\begin{aligned}H &= \alpha_1\hat{I}^2_\xi+\alpha_2\hat{I}^2_\eta+\alpha_3\hat{I}^2_\zeta\\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2-\hat{I}^2_\zeta)+\alpha_3\hat{I}^2_\zeta+\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}^2_++\hat{I}^2_-)\end{aligned}$$

这一哈密顿量与非轴对称陀螺的哈密顿量形式相似，但其参数满足关系

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E},\hat{R}_1=e^{-i\pi\hat{I}_\xi},\hat{R}_2=e^{-i\pi\hat{I}_\eta},\hat{R}_3=e^{-i\pi\hat{I}_\zeta}$。并且这个群的一个一维不可约表示$B_3$具有特征标

$$\chi_{B_3}(\hat{E})=1,\chi_{B_3}(\hat{R}_1)=1,\chi_{B_3}(\hat{R}_2)=-1,\chi_{B_3}(\hat{R}_3)=-1$$

。当角动量$I=3$时，
(1)证明哈密顿量H没有按照B_3表示进行变换的形如

$$\Psi_I = a_1\overline{D}^3_{k=2} + a_2\overline{D}^3_{k=0} + a_3\overline{D}^3_{k=-2}$$

的本征波函数。
(2)证明哈密顿量H按照B_3表示进行变换的本征波函数具有如下的形式

$$\Psi_{II} = a\left(\overline{D}^3_{k=3} - \overline{D}^3_{k=-3}\right) + b\left(\overline{D}^3_{k=1} - \overline{D}^3_{k=-1}\right)$$

(3)令$H_{i,j} = \langle k=i|\hat{H}|k=j\rangle$。计算$H_{1,1}, H_{3,3}$和$H_{3,1}$，并利用约束条件加以简化。
5.(15分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\}, \{C_2^{(1)}, \cdots, C_2^{(6)}\}, \{C_3^{(1)}, \cdots, C_3^{(4)}, C_3^{(1)2}, \cdots, C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)}, C_4^{(2)}, C_4^{(3)}, C_4^{(1)3}, C_4^{(2)3}, C_4^{(3)3}\}, \{C_4^{(1)2}, C_4^{(2)2}, C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

又知原子四级矩算符的非对角分量$\hat{Q}_{xy}, \hat{Q}_{xz}, \hat{Q}_{yz}$在上述 对称操作下按照表示$F_2$变换。问下面的矩阵元

$$\langle\Psi_{F_1}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_{F_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_B|\hat{Q}_{xz}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_{A_2}|\hat{Q}_{yz}|\Psi_B\rangle$$

中哪些恒为零。这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。
6.(15分)考虑一个二维时空（一维时间加一维空间）中的Dirac方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\alpha}\hat{P}_x\Psi + \hat{\beta}\Psi$$

这里，$\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$各是一个2×2矩阵。 从相对论能量关系式$E^2 = P_x^2c^2 + m_0^2c^4$出发，推导出矩阵 $\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$的可能形式。

7.(15分)令$|lm\rangle$为角动量算符$\hat{l}^2$和$\hat{l}_z$的共同本征态。

(a)利用Baker-Hausdorff公式证明等式

$$exp\big(-i\frac{\pi}{2\hbar}\hat{l}_z\big)\hat{l}_x exp\big(i\frac{\pi}{2\hbar}\hat{l}_z\big) = \hat{l}_y$$

成立。

(b)利用上一问的结果，证明

$$\langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle = \langle lm|\hat{l}_y^2|lm\rangle$$

成立。

(c)最后证明

$$\langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle = \frac{1}{2}\big(l(l+1)-m^2\big)\hbar^2$$

成立。

8.(10分)在目前自旋电子学的研究中，有学者提出利用某些固体材料中存在的所谓Rashba 相互作用来产生自旋流。具有这一相互作用的电子的哈密顿量可以被写作

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \vec{\alpha}\cdot(\hat{s}\times\hat{p})$$

这里，m为电子的质量，而$\hat{p}$是其动量算符，$\hat{s} = \hat{s}_x\mathbf{i} + \hat{s}_y\mathbf{j} + \hat{s}_z\mathbf{k}$是电子的自旋算符，其各分量为

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$是一个方向沿$z$轴的常向量。

(a)已知这一体系的Schrödinger方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r},t) \\ \psi_2(\vec{r},t) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r},t) \\ \psi_2(\vec{r},t) \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\cdot(\hat{s}\times\hat{p})\begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r},t) \\ \psi_2(\vec{r},t) \end{pmatrix}$$

在时间反演变换$\hat{T} = \hat{U}\hat{K}$下是不变的。求酉正算符$\hat{U}$的表达式。

(b)求具有动量 $p = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j}$ 的电子的能量本征值。

2010年考题

1.(15分)定义如下的酉正算符

$$\hat{U}=exp\Big[\frac{\pi}{2}(\hat{c}_\uparrow^\dagger\hat{c}_\downarrow^\dagger-\hat{c}_\downarrow\hat{c}_\uparrow)\Big],\quad \hat{U}^\dagger=exp\Big[-\frac{\pi}{2}(\hat{c}_\uparrow^\dagger\hat{c}_\downarrow^\dagger-\hat{c}_\downarrow\hat{c}_\uparrow)\Big]$$

这里，$c_\uparrow$和$c_\downarrow$分别为自旋向上和向下的费米子算符。利用Baker-Hausdorff公式证明下面的关系成立

$$\hat{U}^\dagger\hat{c}_\uparrow\hat{U}=\hat{c}_\downarrow^\dagger,\quad \hat{U}^\dagger\hat{c}_\downarrow\hat{U}=-\hat{c}_\uparrow^\dagger.$$

2.(10分)当$j=\frac{1}{2}$时，利用关系式 $\hat{j}_y=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_y^2=\hat{I}$，求出矩阵

$$d_{m'm}(\beta)=\langle jm'|e^{-i\beta\hat{j}_y}|jm\rangle=\langle jm'|e^{-i\frac{\hbar\beta}{2}\hat{\sigma}_y}|jm\rangle$$

的具体形式。

提示：将$e^{-i\frac{\hbar\beta}{2}\hat{\sigma}_y}$展开成泰勒级数。

3.(15分)考虑一个二维时空（一维时间加一维空间）中的Dirac方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{\alpha}\hat{P}_x\Psi+\hat{\beta}\Psi$$

这里，$\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$各是一个2×2矩阵。 从相对论能量关系式$E^2=P_x^2c^2+m_0^2c^4$出发，推导出矩阵 $\hat{\alpha}$和$\hat{\beta}$的可能形式。

4.(15分)令$|lm\rangle$为角动量算符$\hat{l}^2$和$\hat{l}_z$的共同本征态。

(a)利用Baker-Hausdorff公式证明等式

$$exp\big(-i\frac{\pi}{2\hbar}\hat{l}_z\big)\hat{l}_x exp\big(i\frac{\pi}{2\hbar}\hat{l}_z\big)=\hat{l}_y$$

成立。

(b)利用上一问的结果，证明

$$\langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle=\langle lm|\hat{l}_y^2|lm\rangle$$

成立。

(c)最后证明

$$\langle lm|\hat{l}_x^2|lm\rangle=\frac{1}{2}\big(l(l+1)-m^2\big)\hbar^2$$

成立。

5.(15分)考虑非轴对称陀螺的哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \alpha_1 \hat{I}_\xi^2 + \alpha_2 \hat{I}_\eta^2 + \alpha_3 \hat{I}_\zeta^2 \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2 - \hat{I}_\zeta^2) + \alpha_3 \hat{I}_\zeta^2 + \frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2 + \hat{I}_-^2) \end{aligned}$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E}, \hat{R}_1 = e^{-i\pi \hat{I}_\xi}, \hat{R}_2 = e^{-i\pi \hat{I}_\eta}, \hat{R}_3 = e^{-i\pi \hat{I}_\zeta}$。这个群的一个一维不可约表示$B_2$具有特征标

$$\chi_{B_2}(\hat{E}) = 1, \chi_{B_2}(\hat{R}_1) = -1, \chi_{B_2}(\hat{R}_2) = 1, \chi_{B_2}(\hat{R}_3) = -1$$

当角动量$I=2$时，找出哈密顿量在对称操作下按照表示B_2进行变换的全部本征函数， 并计算它们的能量。

6.(10分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\}, \{C_2^{(1)}, \cdots, C_2^{(6)}\}, \{C_3^{(1)}, \cdots, C_3^{(4)}, C_3^{(1)2}, \cdots, C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)}, C_4^{(2)}, C_4^{(3)}, C_4^{(1)3}, C_4^{(2)3}, C_4^{(3)3}\}, \{C_4^{(1)2}, C_4^{(2)2}, C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2 ，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

已知算符$\vec{d} = (-e)\vec{r}$（$-e$为电子电荷）在上述对称操作下按照表示 F_1变换。问下面的矩阵元哪些恒为零。

$$\langle \Psi_{F_1} | \vec{d} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_{F_2} | \vec{d} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_B | \vec{d} | \Psi_B \rangle, \langle \Psi_{A_2} | \vec{d} | \Psi_B \rangle$$

这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。

7.(10分)考虑$Dirac$变换

$$\hat{\Lambda} = exp\left(\frac{i}{4} \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} \epsilon_{\mu\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu} \right)$$

这里，$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}_\nu - \hat{\gamma}_\nu \hat{\gamma}_\mu)$而$\hat{\gamma}_i = -i\hat{\beta}\hat{\alpha}_i, i = 1, 2, 3$及 $\hat{\gamma}_4 = \hat{\beta}$。

当$\epsilon_{14} = -\epsilon_{41} = \omega$并且其余的变量$\epsilon_{\mu\nu} \equiv 0$时，这一变换退化为

$$\hat{\Lambda} = exp\left(\frac{i\omega}{2}\hat{\sigma}_{14}\right)$$

试证明，此时恒等式

$$\hat{\Lambda} = \cos\frac{\omega}{2}\hat{I} - i\sin\frac{\omega}{2}\hat{\alpha}_1$$

成立。

8.(10分)定义在一个一维晶格上的反铁磁模型的哈密顿量可以写作

$$\hat{H} = \sum_i\sum_j J_{ij}\hat{S}_i \cdot \hat{S}_j = \sum_i\sum_j J_{ij}(\hat{S}_{ix}\hat{S}_{jx} + \hat{S}_{iy}\hat{S}_{jy} + \hat{S}_{iz}\hat{S}_{jz}) \quad (i \neq j)$$

这里，$J_{ij} \geq 0$是位于任意两个格点i和j处的电子自旋之间的反铁磁耦合常数。

(i)证明

$$\hat{S}_+ = \sum_i \hat{S}_{i+}, \quad \hat{S}_- = \sum_i \hat{S}_{i-}, \quad \hat{S}_z = \sum_i \hat{S}_{iz}$$

都与哈密顿量$\hat{H}$对易。

(ii)假设Ψ_1和Ψ_2是$\hat{H}$的两个本征态， 即$\hat{H}\Psi_1 = E_1\Psi_1$和$\hat{H}\Psi_2 = E_2\Psi_2$ 成立。又假设它们的总自旋都是零，即$\hat{S}^2\Psi_1 = 0$和$\hat{S}^2\Psi_2 = 0$也成立。 证明，对于定义在晶格点上的任意复函数$F(i)$，关系式

$$\left\langle \Psi_1 \middle| \sum_i F(i)\hat{S}_{iz} \middle| \Psi_2 \right\rangle = 0$$

皆成立。

提示：可先计算$exp(\frac{i\pi}{\hbar}\hat{S}_x)\hat{S}_{iz}exp(-\frac{i\pi}{\hbar}\hat{S}_x)$

2012年考题

1.(10分)令i为晶体中的一个格点，而$\hat{n}_{i\uparrow}$和$\hat{n}_{i\downarrow}$ 分别为该格点处自旋向上及自旋向下的电子数。考虑到电子是费米子，试证明恒等式

$$(\hat{n}_{i\uparrow}+\hat{n}_{i\downarrow})^2=\hat{n}_{i\uparrow}+\hat{n}_{i\downarrow}+2\hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}$$

成立。

2.(10分)我们曾用运动方程法证明了，在相互作用表象中的玻色子产生和湮灭算符可以被写作

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger_{kI}(t) &= exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t)\hat{a}^\dagger_k exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t)=\hat{a}^\dagger_k exp(\frac{i}{\hbar}\epsilon_k t)\\ \hat{a}_{kI}(t) &= exp(\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t)\hat{a}_k exp(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t)=\hat{a}_k exp(-\frac{i}{\hbar}\epsilon_k t)\end{aligned}$$

这里，$\hat{H}_0=\sum_{k_1}\epsilon_{k_1}\hat{a}^\dagger_{k_1}\hat{a}_{k_1}$为玻色子的单粒子动能哈密顿量。试用Baker-Hausdorff 公式重新证明这些恒等式。

3.(10分)利用$Born$近似，计算粒子在势场

$$V(r)=a\delta(r-r_0)$$

中的弹性微分散射截面。

提示：弹性微分散射截面的表达式为

$$\frac{d\sigma}{d\omega}=\sigma(\theta)=\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}|\langle\vec{k}_f|\widetilde{t}|\vec{k}_i\rangle|^2$$

这里，θ为入射波矢$\vec{k}_i$与出射波矢$\vec{k}_f$之间的夹角。

4.(10分)考虑一个总角动量$J\geq 1$的粒子，假设它处于$|J,J_z\rangle=|J,J\rangle$态中。

(i)证明$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_z}\hat{J}_x e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_z}=\hat{J}_y$。

(ii)计算算符$\hat{J}_x^2$在这个态下的平均值。

5.(15分)在一个非均匀外电场中，原子的四极矩对于其能级劈裂的贡献由下面的哈密顿量给出

$$\begin{aligned}H &= \alpha_1\hat{I}_\xi^2+\alpha_2\hat{I}_\eta^2+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2\\ &= \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)(\hat{I}^2-\hat{I}_\zeta^2)+\alpha_3\hat{I}_\zeta^2+\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)(\hat{I}_+^2+\hat{I}_-^2)\end{aligned}$$

这一哈密顿量与非轴对称陀螺的哈密顿量形式相似，但其参数满足关系

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

已知其对称群共有四个元：$\hat{E}, \hat{R}_1 = e^{-i\pi\hat{I}_\xi}, \hat{R}_2 = e^{-i\pi\hat{I}_\eta}, \hat{R}_3 = e^{-i\pi\hat{I}_\zeta}$。并且这个群的一个一维不可约表示$B_3$具有特征标

$$\chi_{B_3}(\hat{E}) = 1, \chi_{B_3}(\hat{R}_1) = 1, \chi_{B_3}(\hat{R}_2) = -1, \chi_{B_3}(\hat{R}_3) = -1$$

。当角动量$I = 3$时，
(1)证明哈密顿量H没有按照B_3表示进行变换的形如

$$\Psi_I = a_1\overline{D}^3_{k=2} + a_2\overline{D}^3_{k=0} + a_3\overline{D}^3_{k=-2}$$

的本征波函数。
(2)证明哈密顿量H按照B_3表示进行变换的本征波函数具有如下的形式

$$\Psi_{II} = a\big(\overline{D}^3_{k=3} - \overline{D}^3_{k=-3}\big) + b\big(\overline{D}^3_{k=1} - \overline{D}^3_{k=-1}\big)$$

(3)令$H_{i,j} = \langle k = i|\hat{H}|k = j\rangle$。计算$H_{1,1}, H_{3,3}$和$H_{3,1}$，并利用约束条件加以简化。
6.(15分)已知八面体群O有如下5个类24个元

$$\{E\}, \{C_2^{(1)}, \cdots, C_2^{(6)}\}, \{C_3^{(1)}, \cdots, C_3^{(4)}, C_3^{(1)2}, \cdots, C_3^{(4)2}\},$$
$$\{C_4^{(1)}, C_4^{(2)}, C_4^{(3)}, C_4^{(1)3}, C_4^{(2)3}, C_4^{(3)3}\}, \{C_4^{(1)2}, C_4^{(2)2}, C_4^{(3)2}\}$$

它有两个一维表示A_1和A_2，一个二维表示B，两个三维表示F_1和F_2。它们的特征标由下表给出。

	$\{E\}$	$6\{C_4^{(1)}\}$	$3\{C_4^{(1)2}\}$	$8\{C_3^{(1)}\}$	$6\{C_2^{(1)}\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	1	-1
B	2	0	2	-1	0
F_1	3	1	-1	0	1
F_2	3	-1	-1	0	-1

又知原子四级矩算符的非对角分量$\hat{Q}_{xy}, \hat{Q}_{xz}, \hat{Q}_{yz}$在上述 对称操作下按照表示$F_2$变换。问下面的矩阵元

$$\langle\Psi_{F_1}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_{F_2}|\hat{Q}_{xy}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_B|\hat{Q}_{xz}|\Psi_B\rangle, \langle\Psi_{A_2}|\hat{Q}_{yz}|\Psi_B\rangle$$

中哪些恒为零。这里，Ψ_K代表在八面体对称操作下按照表示K进行变换的波函数。
7.(10分)考虑一个二维时空（一维时间加一维空间）中的Dirac方程

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \hat{\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \hat{\delta}\Psi = 0$$

这里，$\hat{\alpha}$和$\hat{\delta}$各是一个2×2矩阵。 从相对论能量关系式$E^2 = P_x^2c^2 + m_0^2c^4$出发，推导出矩阵 $\hat{\alpha}$和$\hat{\delta}$的可能形式。

8.(10分)考虑由四个自旋构成的体系。其哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= J(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + \hat{S}_4)\cdot(\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + \hat{S}_4) \\ &+ \hbar(\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z} + \hat{S}_{4z})\end{aligned}$$

这里，J和$\hbar$为任意实常数。若每个自旋的值皆为$S=\frac{1}{2}$，计算这一 哈密顿量的全部的本征值及相应的简并度。

提示：根据定义，

$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + \hat{S}_4, \quad \hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} + \hat{S}_{3z} + \hat{S}_{4z}$$

分别为四个自旋的总角动量及其z分量。

9.(10分)直观来看，上题中哈密顿量的对称群既可能是D_4群，也可能是置换群 S_4。前者有8个群元素，5个共轭类。而后者有4!个群元素和5个共轭类。要求由上题中得到的各个本征值的简并度来决定，到底哪个群是哈密顿量的对称群？