北京大学数学科学学院期末试题

2007-2008 学年第一学期

考试科目： 泛函分析 II **考试时间：** 2008 年 1 月

姓 名： ____________ **学 号：** ____________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

注 按杨磊老师的说法，期末考试分开卷和闭卷两部分。开卷部分是写关于 Feynman-Kac 公式的证明或者 Feynman 路径积分的应用的一篇文章; 闭卷部分试题如下 (6 道题都是张恭庆和郭懋正老师《泛函分析讲义》下册书上的)

1. （20 分）设 $A, B \in L(\mathscr{H}), 0 \le A \le B$, 又 A, B 可交换，则 $A^2 \le B^2$, 但当 A, B 不可交换时，上述结论未必正确。（第 52 页 5.5.5 题）

2. （20 分）设 A 是 Hilbert 空间上的对称算子，则以下三个命题等价：

   (1) A 是自伴算子；

   (2) A^* 是闭算子且 $ker(A^* \pm iI) = \{\theta\}$

   (3) $R(A \mp iI) = \mathscr{H}$.(第 68 页定理 6.2.4)

3. （15 分）设 A 是一个闭对称算子，求证 $\sigma(A)$ 或者是（1）闭上半平面；或者是（2）闭下半平面；或者是（3）整个平面；或者是（4）实轴的子集。（第 115 页 6.4.5 题）

4. （10 分）设 A 是一个闭对称算子，A 的预解集至少包含一个实数，则 A 是自伴算子。（第 115 页 6.4.6 题）

5. （20 分）设 $= C(-\infty, +\infty)$ 定义线性算子

$$(T(t)u)(s) = \begin{cases} u(s), & t = 0, \\ e^{-\lambda i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u(s - n\mu), & t > 0. \end{cases}$$

   其中参数 $\lambda, \mu > 0$. 证明 $\{T(t) | t \ge 0\}$ 是强连续压缩半群。并证明它的无穷小生成元是差分算子

$$(Au)(s) = \lambda(u(s - \mu) - u(s)).$$

   (第 181 页 7.2.3 题)

6. （15 分）（1）在 Hilbert 空间 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$，设 $V \in L^2(\mathbb{R}^3, \lambda > 0)$, 证明

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| V(-\triangle + \lambda)^{-1} \|,$$

   并进而证明 V 关于 $-\triangle$ 紧的。

   （2）设 $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 是实值函数，证明 $\sigma_{\circ\circ\circ}(-\triangle + V) = [0, \infty)$.（提示：利用 $\sigma_{\circ\circ\circ}(-\triangle) = [0, \infty)$）。（第 136 页 6.5.9 题 + 第 137 页 6.5.17 题）

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)