范函分析 II 期末考试

命题：王保祥　录入: erliban@bdwm

时间: 2007年1月

1. (20分) 设 $\delta(x)$ 表示 δ 函数, 证明

$$x^n \partial^m \delta(x) = \begin{cases} (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!} \delta^{(m-n)}(x), & m \geq n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

2. (20分) 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则 $\mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且有 $\|\mathscr{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

3. (20分) 设 $\mathscr{A}$ 为有幺元的 Banach 代数, $\|a\| < 1$ 则 $e - a$ 可逆且

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

4. (10分) 设 $\mathscr{A}$ 为C^*-代数, $a \in \mathscr{A}$ 为 Hermite 元, Γ为 Gelfand 表示, $\mathfrak{M}$ 为 $\mathscr{A}$ 的所有极大理想构成的空间. 求证: Γa 为 $\mathfrak{M}$ 上的实值函数.

5. (10分) 设 X为 Banach 空间, $A : X \to X$ 为有界线性算子, 定义

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

求证: $e^{tA} (t \geq 0)$ 是 X 上的强连续半群.

6. (15分) 设 X 为 Banach 空间, A 为 X 上的强连续半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元. 求证: $D(A)$ 在 X 中稠密.

7. (5分) 令 $S(t) = \mathscr{F}^{-1} cos(t|\xi|^2) \mathscr{F}$. 求证:

$$\|S(t)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C|t|^{-n/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$