北京大学期中试题

2017–2018 学年第一学期

考试科目：数学物理方法（上）　考试时间：2017 年 11 月 3 日

姓　名:____________________　学　号: ____________________

本试题共 七 道大题，满分 100 分

注意：各题均需写出必要的关键步骤。

一、　（15 分）简单计算和回答

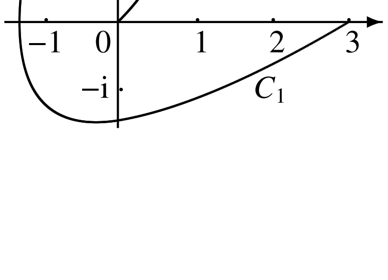
1. 写出 $\sinh z$（其中 z 是复数）的实部，虚部，模和辐角。
2. 在 z 复平面中画出满足不等式 $\Big(|z+1|-|z-1|\Big)^2 \geq 1$ 的点集，这个点集构成区域吗？如果是区域，是有界的还是无界的？是单连通的还是多连通的？
3. 请给出 $\sqrt{\ln \mathrm{i}}$ 的所有可能值，其中 i 是虚单位。

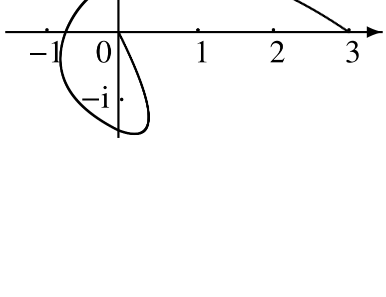
二、　（10 分）已知复数 $z = x + \mathrm{i}y$，$x \in \mathbb{R}$，$y \in \mathbb{R}$，函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 在某区域 G 内解析，在 z 复平面的虚轴上实部 $u(0,y) = y^2 - 1$，虚部 $v(0,y) = 2y$. 虚轴在区域 G 内。试求 $f(2+\mathrm{i})$ 的所有可能值。

三、　（15 分）已知 $f(z) = \ln(z^2+1) + \sqrt{\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}}$，规定 $f(0) = -1 + 2\pi\mathrm{i}$，求 $f(3)$.

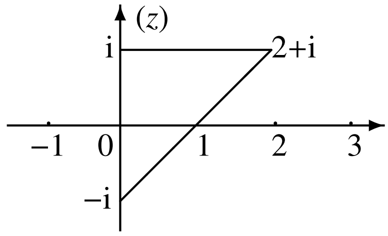
(1) 若 z 沿下图中的路径 C_1 从原点到达 $z = 3$ 点；

(2) 若 z 沿下图中的路径 C_2 从原点到达 $z = 3$ 点。





四、 （20 分）计算下列积分，其中闭合围道 C 是 z 复平面内由 $-\mathrm{i}$，$2+\mathrm{i}$ 和 i 组成的三角形。



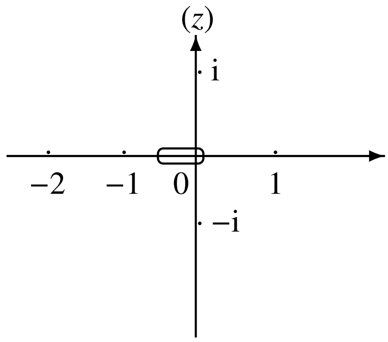
1. $\oint_C \mathrm{Im}z\mathrm{d}z$

2. $\oint_C |\mathrm{Im}z|\,\mathrm{d}z$

3. $\oint_C \mathrm{Im}z\,|\mathrm{d}z|$

4. $\oint_C |\mathrm{Im}z|\cdot|\mathrm{d}z|$

五、 （20 分）计算下列积分：



1. $\oint_{|z|=2} \tan z\mathrm{d}z$

2. $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\dfrac{(\mathrm{Im}\zeta)\,\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ （其中 z 是复数且 $|z|\neq 2$.）

3. $\oint_{|z|=1}\dfrac{\sqrt{z\,(2z+1)}}{(z+2)^2}\mathrm{d}z$. 如右图在实轴上沿 $-\dfrac{1}{2}$ 到 0 作割线，规定在割线上岸 $\arg z=-\pi$，$\arg(2z+1)=0$.

六、 （10 分）求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$ 的收敛区域。

七、 （10 分）求含参量无穷积分 $f(z)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1+t}\mathrm{d}t$ 的解析区域。

本 试 题 用 毕 收 回