

北京大学数学学院期中考试试题

考试科目: 常微分方程 (2 小时) 考试时间: 2013 年 4 月 21 日

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 8 道大题 (正反面共 1 页), 满分 100 分

1. (20 分) 求以下方程的通解, (每题 10 分):

(i) $(4x^3 \cos y + 3x^2 \sin 2y)dx + (3y^2 - x^4 \sin y + 2x^3 \cos 2y)dy = 0$;

(ii) $(x^2 + y^2)dx + (3x^2 - 2y^2)dy = 0$. 只需提供一个求解方法 不必计算出有关的不定积分

2. (20 分) 求以下方程初值问题的解, (每题 10 分):

(i) $y' = 1 + 3 \cos^2 y$, $y(1) = 0$;

(ii) $y' - \frac{1}{1-x^2}y = 1 + x$, $y(0) = 1$.

3. (10 分) 设 $\phi(x, C) = Ce^x + e^x - x - 1$, 其中 C 是任意常数, 求函数 $f(x, y)$ 使 $\phi(x, C)$ 是以下方程的通解:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

4. (10 分) 叙述 Picard 存在唯一性定理并利用此定理证明以下初值问题

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \cos y}, \quad y(0) = y_0$$

解是存在唯一性的。

5. (10 分) 试求满足初值问题

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 0$$

的解 $y = y(x)$ 的最大存在区间, 并写出此解.

6. (10 分) 试讨论方程 $y' = y^2 \sin y^3$, $y(0) = y_0$ 的解的存在区间和解的有界性.

7. (10 分) 设函数 $a(x)$ 在区间 J 上连续且 $a(x) \neq 0, x \in J$. 求以下方程的奇解:

$$y'^3 + a(x)y^2 = 0.$$

8. (10 分)(1) 证明方程 $y'^2 - 2xy' + 2y = 0$ 有一族通解是 x 的一次函数, 有一个特解是 x 的二次函数.

(2) 此方程是否还有其他解, 证明你的结论.