2009年春泛函分析期末试卷

陈天权老师

2009年6月12日

1. 设X是个有限维赋范线性空间，n个向量$\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$组成$X$的一组基。在有限维赋范线性空间$X$上定义实值函数$|\cdot|_\infty : X \to \mathbb{R}$如下：

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{e}_j|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |a_j|$$

   (a) $|\cdot|_\infty$范数，而点集$\{x : |x|_\infty \le 1\}$相对于由这个范数在有限维赋范线性空间X上诱导出的拓扑来说是紧集；

   (b) 假若$|\cdot|_1$是有限维赋范线性空间X上的另一个范数，则有一个$M \in \mathbb{R}$，使得

$$\forall x \in X(|x|_1 \le M|x|_\infty)$$

   因此，$|\cdot|_1$是有限维赋范线性空间$(X, |\cdot|_\infty)$上的一个连续函数；

   (c) 有一个正数m，使得

$$\forall x \in X(|x|_\infty = 1 \Rightarrow |x|_1 \ge m)$$

   (d) 设$|\cdot|_1$和$|\cdot|_2$是有限维线性空间X上的两个范数，则X上的恒等映射$\mathtt{id}_X : (X, |\cdot|_1) \to (X, |\cdot|_2)$是有限维赋范线性空间$(X, |\cdot|_1)$与$(X, |\cdot|_2)$之间的同胚映射。

2. 试证：

   (a) 设X是个Banach空间，$X_1 \subset X_2 \subset \cdots$是$X$的一列严格单调递增的有

限维线性子空间，则对于每个$j \in \mathbb{N}$有$x_j \in X_j$，使得

$$\forall x \in X_{j-1}(|x_j - x|_X \geq |x_j|_X = 1)$$

(b) 设X是个Banach空间，若X上的恒等映射是紧线性映射，则X是有限维Banach空间。

3. 设X是个Banach空间，$\{x_j\}$是X中的有界点列，$\mathbf{C} : X \to X$是紧线性映射，又设点列$\{x_j - \mathbf{C}x_j\}$在X中强收敛于某点y，试证：点列$\{x_j\}$有收敛子列$\{x_{jk}\}$，记$x = \lim_{k\to\infty} x_{jk}$，我们有

$$x - \mathbf{C}x = y$$

4. 设X是个Banach空间，$\mathbf{C} : X \to X$是紧线性映射，$\mathbf{I}$表示X上的恒等映射，试证：

(a)

$$\mathtt{ind}(\mathbf{I} - \mathbf{C}) = 0$$

(b) 若$\mathbf{I} - \mathbf{C} : X \to X$是单射，则$\mathbf{I} - \mathbf{C} : X \to X$是同胚。

5. 设X是个Banach空间，$\mathbf{C} : X \to X$是紧线性映射，$\mathbf{I}$表示X上的恒等映射。记$N_j = N_{(\mathbf{I}-\mathbf{C})^j} = \{x \in X : (\mathbf{I} - \mathbf{C})^j x = 0\}$。试证：

$$\exists i \in \mathbb{N} \forall k > i(N_k = N_i)$$

评分标准：每个大题20分。同一大题中的小题平均给分。