常微分方程 期末考试

命题: 柳斌 录入: erliban@bdwm

时间: 2005年6月

1. (10分) 解微分方程

$$y'' - 2y' + 10y = e^x \cos(3x)$$

2. (16分) 解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

3. (10分) 解方程

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad (0 \le x < +\infty) \\ y(0) + y''(0) = 0 \end{cases}$$

且当 $x \to +\infty$ 时, $y(x)$ 有界.

4. (10分) 设 $\phi(x, x_0, y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解, 其中 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的. 证明:

$$\frac{\partial \phi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial \phi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} \right) f(x_0, y_0) \equiv 0.$$

5. (4分) 设函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 分别满足方程 $y'' + q(x)y = 0$ 和 $z'' + Q(x)z = 0$, 其中 $Q(x)$ 和 $q(x)$ 是连续函数且 $Q(x) > q(x) > 0$. 假定存在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_1, x_2^*]$ 使得

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad y(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2);$$

$$z(x_1) = z(x_2^*) = 0, \quad z(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2^*).$$

证明: 若 $y'(x_1) = z'(x_1)$, 则在区间 (x_1, x_2^*) 上, $z(x) < y(x)$.