物理学院 2004-2005 学年第一学期 **高等数学** 期末试题

请将系别、 姓名和学号填写在答题纸上

1. **求下列函数的指定偏导数，方向导数或微分**(共 26 分)：

   (1)(8 分) 设 $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$,$f(\cdot,\cdot)$ 有连续偏导，求全微分;

   (2)(8 分) 求函数 $u = \ln(x^2 + 2y + 5z^2)$ 在点 $P(\sqrt{2}, -1, 1)$ 沿方向 $\underline{\mathbf{k}} = (1, 1, -1)$ 的方向导数;

   (3)(10 分) 求由方程

   $$f(x + 2y + 3z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

   确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数和全微分，其中二元函数 f 有连续偏导.

2. **泰勒展开**(共 16 分，每小题 8 分)：

   (1) 求函数 $y = \sqrt{1 - 3x + x^2} - \sqrt{1 + 2x - x^3}$ 在 $x = 0$ 的局部泰勒公式至 x^2 阶.

   (2) 在点 $(0, 1)$ 的邻域内按泰勒公式展开函数 $z = x^3 - x^2 + xy + x - y$.

3. **平面、直线与向量**(共 18 分，每题 9 分)：

   (1) 求过点 $(1, 2, -1)$ 和 $(-2, 3, 7)$ 且平行于直线

   $$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

   的平面.

   (2) 设 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{c}| = 3, |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}| = \sqrt{17 + 6\sqrt{3}}$ 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \pi/3$, 求 $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = ?$

4. **阶的比较**(10 分)：请将以下的十个函数按从左到右重新排好序，使得在 $x \to +\infty$ 的极限过程中，相邻的两个函数都满足：左边函数是右边函数的高阶无穷小量.　(如果一行排不下，可切换到第二行继续排.)(不必给出证明.)

   $$1 - \cos\frac{1}{x}; \quad \arctan x; \quad \mathrm{e}^x; \quad (\ln x)^{10}; \quad \csc\frac{1}{x};$$
   $$\ln(1 + \frac{1}{x^4}); \quad (\ln x)^x; \quad \mathrm{e}^{-x}; \quad x^{\ln x}; \quad \sqrt{x};$$

注意反面还有！!

5. **极值问题**(10 分)：已知函数 $f(x,y,z,w)=x\cdot y\cdot z\cdot w$ 在条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{a},\quad a>0,x>0,y>0,z>0,w>0$$

下存在最小值，求出这个最小值．并证明：当 $a_i>0(1\le i\le 4)$ 时，有

$$\frac{4}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}}\le\sqrt[4]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4}.$$

6. **切线**(共 10 分):

(1) (4 分) 设点 $P(x,y,z)$ 在曲线 $\mathcal{S}$

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

上，其中 F 和 G 有连续偏导．记过 P 点 $\mathcal{S}$ 的切线上的动点坐标是 (X,Y,Z), 请给出该切线的方程.

(2)(6 分) 证明下列曲线

$$\begin{cases}H\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0,\\ K\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0\end{cases}$$

的所有切线都通过同一个定点，其中 a,b,c 为常数，二元函数 H 和 K 有连续偏导.

7. **证明题**(10 分)：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $()$ 内二阶可导，过点 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $(c,f(c)),0<c<1$ 证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=0$.

祝开心每一题！