几何学期末考试参考答案与评分标准

考试日期: 2012 年 1 月 6 日。**考试时间**: 2 小时。

题 1 (10 分) 设 Γ 是平面 Σ 上一个正五边形。回答以下问题并说明理由。

(i) 有多少平面 Σ 上非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ?

(ii) 有多少空间中非恒同的等距变换，它将 Γ 变成 Γ?

• 解：(i) 的答案是 9 个，(ii) 的答案是 19 个。注意等距变换必把顶点映为顶点，且保持相邻顶点仍为相邻顶点。若设顶点 $ABCDE$ 顺序排列，则变换后要么顺时针要么逆时针，每种情形下又有 5 种可能性，各顶点位置只差一个 72 度角的整数倍的旋转。扣除恒同变换，满足要求的平面等距共有 9 个。当考虑空间等距时，设它在平面 Σ 上的作用效果给定，为 10 个平面等距变换之一，则不同空间等距之间只差关于平面 Σ 的反射 (可看在平面 Σ 的某单位法向上的作用效果，或看 $\phi_1^{-1}\circ\phi_2$ 以整个平面 Σ 为不动点集)，故共有 20 个，扣除恒同之后有 19 个。 (若按不同类型变换来穷举，则 (i) 中有 4 个旋转和 5 个反射，(ii) 中有 4 个绕过 O 点的 Σ 垂线的旋转，5 个绕 Γ 不同对称轴的旋转，5 个关于对称平面 (均垂直于 Σ 且过 Γ 中心) 的反射，1 个关于 Σ 的平面反射，以及 4 个"旋转反射"。

• 评分标准：给出正确答案且有适当讨论，无论详略均不扣分。穷举不同类型空间等距变换的个数也可做，但很容易出错。

题 2 (12 分) 在给定空间直角坐标系中，设直线 l 为平面 $y+2z=0$ 和 $y-2z=0$ 的交线，求 l 在平面 $\Sigma: x+y+z=0$ 上的投影直线的方程 (任一形式均可)。此处投影为沿着垂直于 Σ 的方向作平行投影。

• 解：第一种解法，取 l 与其投影 l' 所在平面，则与给定 Σ 垂直，且属于 $y+2z=0$ 和 $y-2z=0$ 决定的共轴平面系，所共之轴实为 x 轴，此平面系可表为 $ay+bz=0$。法向量 $(0,a,b)$ 与 Σ 之法向量 $(1,1,1)$ 垂直当且仅当 $a+b=0$。故直线 l' 为 $\Sigma: x+y+z=0$ 与 $y-z=0$ 之交线，这也给出了其一般方程。

第二种解法，取 l (x 轴) 上一点如 $(1,0,0)$，向 $\Sigma: x+y+z=0$ 作垂线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$，与 $\Sigma: x+y+z=0$ 交点为 $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$。又 l 与 $\Sigma: x+y+z=0$ 有交点 $(0,0,0)$，故投影后仍在 l' 上，故 l' 过原点和 $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$。由此得 l' 标准方程为 $-x=2y=2z$.

• 评分标准：

题 3 (36 分) 设圆锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 与 $\Sigma: z=ax+by+c$ 截得双曲线。

(i) 参数 a,b,c 取哪些值，上述截线才为双曲线？请说明理由。(10 分)

(ii) 取 $b=0$，证明：Σ 的平行平面族所截双曲线彼此相似（等价于有相同的偏心率或长短轴之比），且 $c=0$ 时截得的两条直线恰为这一族双曲线的公共渐近方向。(10 分)

(iii) 取 $b=0$，证明：Σ 的平行平面族所截双曲线中心在一条空间直线上，且此直线的方向向量 v 与任一平行于平面 Σ 的向量 w 满足 $v^TAw=0$，其中 A 为对角矩阵 $diag(1,1,-1)$，v,w 均视为列向量。(10 分)

(iv) 若 $b\neq 0$，试问 (ii),(iii) 中的结论是否仍成立？若将圆锥面推广为一般的椭圆锥面呢？(6 分)

• 解：(i) 截线之 x,y 分量满足 $0=x^2+y^2-(ax+by+c)^2=(1-a^2)x^2-2abxy+(1-b^2)y^2-2acx-2bcy-c^2$，实为投影到 xy 平面后的曲线方程，而熟知平行投影是仿射映射，保持二次曲线的类型不变，所以只需分析此方程对应二次曲线类型。计算知其 $I_2=det\,\begin{smallmatrix}1-a^2 & -ab\\ -ab & 1-b^2\end{smallmatrix}=1-a^2-b^2$，

$$I_3=det\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & -c^2\end{pmatrix}=c\cdot det\begin{pmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & -b\\ 0 & 0 & -c\end{pmatrix}=-c^2.$$

故参数满足 $a^2+b^2>1, c\neq 0$ 时截得双曲线。

(ii) 此处不用特殊假设 $b\neq 0$。也可直接利用 (i) 所得方程，可知 c 值不同只影响截线的一次项和常数项，不影响二次项，故长轴短轴与平行平面取法无关，故不退化时，恒为彼此相似的二次曲线，有相同的渐近方向。当退化时，恰为相交直线的方向。注意此处得到的仅是投影曲线的结论，但由于是空间中的平行平面上的双曲线向 xy 平面投影，可知投影后有平行的渐近线，当且仅当在空间里有平行的渐近线。(也可直接用观察，用关于原点的位似变换，可将两平行平面互相转化，而圆锥面不变，于是两截线在空间中差一位似，必为相似的二次曲线。当位似比趋于 0 时，得到极限情形，即 $c=0$ 时退化到两相交直线，而渐近方向应不变。)

(iii) 同 (i) 中方法，求得投影曲线方程为 $y^2+(1-a^2)(x-\frac{a}{1-a^2}c)^2=\frac{c^2}{1-a^2}$，中心为 $(x_0,y_0)=(\frac{ac}{1-a^2},0)$。在原平面上的中心坐标满足 $z_0=ax_0+c$，故有 $(x_0,y_0,z_0)=(\frac{ac}{1-a^2},0,\frac{c}{1-a^2})$。对于平行平面族而言，$a$ 为固定常数（根据 (i) 可知 $a^2<1$），c 为变动参数，故上述中心在过原点且方向向量为 $v=(\frac{a}{1-a^2},0,\frac{1}{1-a^2})$ 的一条直线上。(用 (ii) 中的位似变换同样易证这一结论。) 以下由于与平面 $\Sigma: z=ax+c$ 平行的向量均可表示为 $w=(s,t,as)$ (s,t 为任意实数，给出所有与 $(a,0,-1)$ 垂直的向量)，可直接验证 $v^TAw=0$。

(iv) 由于圆锥面是旋转对称的，平面 $\Sigma: z=ax+by+c$ 也可以经适当旋转与 xz 平面垂直，此时圆锥面不变，故归结为 $b=0$ 情形，结论同样成立。另外，由于所讨论性质为仿射不变，故在圆锥情况证明的结论同样适用于椭圆锥面。(包括 $v^TAw=0$ 也同样成立，不过 A 应改为椭圆锥面的系数矩阵。此处若忘记讨论，扣 1 分；若猜出结论而未证，不扣分。)

• 评分标准：若 (i) 中用几何直观和通常的圆锥截线之结论，不太合适，要扣 2 分。若忽视了 $c\neq 0$ 这一条件，也要再扣 1 分。粗心把不等号方向弄反，扣 2 分。若 (i) 或 (ii) 中将投影曲线（方程）代替空间曲线进行论证，而未说明两者联系，是严重失误，每一小题中对应错误要扣 3 分。

题 4（12 分） 证明：三角形 ABC 存在内切椭圆 Γ 且恰好相切于各边上给定三点 D, E, F 的充分必要条件是 AD, BE, CF 三线共点。（注：D 在 BC 上，E 在 CA 上，F 在 AB 上。）

• 解：作业和习题课已讲过。

• 评分标准：要求论证严密，有逻辑漏洞处一般至少扣 2 分。

题 5（14 分） 给定圆锥曲线 Γ，过 Γ 外一点 O 作直线交 Γ 于 A, B 两点。令 l 是 O 对 Γ 的极线。取 l 上一点 P 且不在直线 AB 上。连 PA, PB 分别交 Γ 于 C, D 两点。证明 O, C, D 三点共线。

• 证：若 O 在 Γ 内部，可取一射影变换，将 (Γ, O) 变为一圆及其圆心。此时 O 之极线为无穷远直线，P 为一无穷远点，PA, PB 为与直径 AB 相交的一对平行线，分别交圆 Γ 于 C, D，易证这是圆周上一对对径点（直径端点），故 O, C, D 三点共线。（若 O 在 Γ 外部，可取一射影变换，将 (Γ, O) 变为一圆及圆外一无穷远点。AB 为圆内一弦，O 之极线为 AB 的平行弦中点轨迹，故是垂直于 AB 的直径。取 P 在此直径/直线上，由对称性易见 C, D 关于此直径对称，故 CD 连线同样过无穷远点 O。）以上极线关系和三点共线均为射影不变性质，故原图形中成立相同性质。

证法二直接用配极方法。设 OC 交 Γ 于 D'，连 BD' 交 AC 于 P'。若 $P = P'$，已证。若 $P \neq P'$，则 P, P' 都与 O 调和共轭，故 PP' 所在直线 AC 为极线。但若这样，A, C 必为 O 向 Γ 所作切线之切点，与 OAB 与 Γ 有两交点矛盾。

• 评分标准：若上述证法一中只处理了 O 在 Γ 内部或外部中的一种情形，遗漏了另一情形，要扣 5 分。若未说明“取上述特殊射影变换...”，或未说明“射影不变性”，酌情扣 2 分左右。

题 6（8 分） 设 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 和 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 为增广复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上两对圆，每一对中两个圆周都是相交的。证明：存在 Möebius 变换 ϕ 将 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 分别映成 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 当且仅当两对圆周交角相等。

• 证：必要性由 Möbius 变换的保角性得证。下证充分性。法一是取 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 交点之一 A 为反演中心，任意正实数为反演半径，作反演 f 后 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 映为一对相交直线 $\{l_1, l_2\}$。类似可作一反演 f^*，将 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 映为另一对相交直线 $\{l_1^*, l_2^*\}$。由于反演保角，故 $\{l_1, l_2\}$ 与 $\{l_1^*, l_2^*\}$ 各自交角相等，从而存在一个适当的等距变换 ϕ，将 $\{l_1, l_2\}$ 映为 $\{l_1^*, l_2^*\}$。则 $(f^*)^{-1} \circ \phi \circ f$ 即为所求。

法二是取 $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ 交点 A, B 及 Σ_1 上第三点 C，类似取 $\{\Sigma_1^*, \Sigma_2^*\}$ 交点 A^*, B^* 及 Σ_1^* 上第三点 C^*。则存在一个 Möbius 变换，将 A, B, C 映为 A^*, B^*, C^*，于是其外接圆 Σ_1 映为 Σ_1^*，Σ_2 映为 Σ_2^*，或再复合上关于 Σ_1^* 的反演即可。这是因为 Möbius 变换保圆、保角，而过 Σ_1^* 上给定两点且与 Σ_1^* 交角为给定值的圆周只有两个（若交角是直角，这样的圆周只有一个，但论证更简单），恰好关于 Σ_1^* 构成反演对称。

• 评分标准：只证了必要性，给 2 分。

题 7（8 分） 射影平面 $P(\Sigma)$ 上有两个四点组 $\{A, B, C, D\}$ 和 $\{A', B', C', D'\}$。其中 A, B, C 落在直线 l 上，D 在 l 外; A', B', C' 落在直线 l' 上，D' 在 l' 外。问：是否存在射影变换 $\phi : P(\Sigma) \to P(\Sigma)$ 将四点 $\{A, B, C, D\}$ 对应地映到四点 $\{A', B', C', D'\}$? 如果存在，这样的变换 ϕ 是否唯一？证明你的结论。

• 解：存在但不唯一。在三角形 ACD 的边 DC 上取定一点 E，然后在三角形 $A'C'D'$ 的边 $D'C'$ 上任取一点 E'。根据射影变换基本定理，总是存在（唯一一个）从四点组 $\{A, B, E, D\}$ 到对应四点 $\{A', B', E', D'\}$ 的射影变换 f，且这样的变换把对应直线 AB, DE 交点 C 映到对应直线 $A'B', D'E'$ 交点 C'。这证明了存在性。又任何这样的射影变换 f 必把指定的 E 映到 $D'C'$ 上某一点 E'，且 E' 的取法与这样的 f 一一对应，故不唯一，恰有一个自由度。

• 评分标准：证明存在性，可得 4 分。若能证明不唯一，即可得剩下 4 分（不必证明自由度为 1）；但若只是猜测不唯一而不能论证，只给 1 分；若能在特例情形有一些有价值的观察，可酌情给分。