杨磊下学期期中期末试题整理

童年

2015 年 3 月 20 日

第一部分　期中考试

I　2009-2010年

1.（20分）　求两曲面 $z = x^2 + 3y^2$ 与 $z = 8 - x^2 - y^2$ 所围区域的体积。

2.（20分）　求证：对于一元连续函数 $f(x)$,有 Poisson 公式

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by)dxdy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi^2} f(\xi\sqrt{a^2+b^2})\ d\xi$$

3.（20分）　设函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的二阶偏导数 L 为 D 的边界，分段光滑。证明：

$$\iint_D v\triangle u\ d\sigma = \oint_{L^+} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\ ds - \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})\ d\sigma,$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 为 u 沿 L 的外法线方向的方向导数

4.（20分）　计算第一型曲面积分

$$I = \iint_S (x+y+z)dS,\quad S: x^2+y^2+z^2 = a^2, z\geq 0.$$

5.（20分）　用常数变易法求方程的通解：

$$y'' + 4y = 2\tan x.$$

II　2010-2011年

1.（20分）　计算积分

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} |3x+4y|\ dxdy$$

2.（20分）　设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的二阶偏导数 L 为 D 的边界，分段光滑。证明：

$$\iint_D v\triangle u\ d\sigma=\oint_{L^+} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\ ds-\iint_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})\ d\sigma,$$

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 为 u 沿 L 的外法线方向的方向导数

3.（20分）　计算第二型曲面积分

$$I\ =\iint_S \frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中 S 是含原点在其内部的光滑闭曲面

4.（20分）　设 $y=\varphi(x)$ 是线性齐次微分方程

$$y''(x)+p(x)\ y'(x)+q(x)\ y(x)=0$$

的一个非零解，即 $\varphi(x)\not\equiv 0,x\in(a,b)$,若有 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\varphi(x_0)=0$，证明：$\varphi'(x)\neq 0$

5.（20分）　求微分方程的通解：

$$y''+4y=2\tan x.$$

III　2011-2012年

1.（10分）　计算二重积分 $\iint_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|\,dxdy$

2.（10分）　求曲线 $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$,其中 $a>0$,所围成区域的面积。

3.（10分）　求由曲面 $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2$ 与平面 $x+y+z=2a$ 所界物体的表面积和体积。其中 $a>0$

4.（10分）　求由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $x+y=z$ 所界的均匀物体的重心坐标。

5.（10分）　求 $\displaystyle\int_C x^2ds$,其中 C 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0$,其中 $a>0$

6.（10分） 计算 $\int_{L^+} y^2dx + z^2dy + x^2dz$,其中 L 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax(z\geq 0, a\geq 0)$ 的交线。从 Oz 轴的正的部分看去，此曲线是沿逆时针方向进行的。

7.（10分） 证明 $\iint_C f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du$,其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$。

8.（10分） 计算 $\iint_S \frac{dydz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdy}{z}$,其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面。

9.（10分） 证明：如果 C 为平面上闭曲线并且 $\vec{l}$ 为任意取定的方向，则有 $\oint_C \cos(\vec{l},\vec{n})ds=0$, 其中 $\vec{n}$ 为 C 的外法线。

10.（10分） 设 L是平面上 $2x+2y+z=2$ 上的一条光滑简单闭曲线。证明曲线积分 $\oint_{L^+} 2ydx+3zdy-xdz$ 只与 L 所围成的区域面积有关，而与 L 的形状与位置无关。

IV 2012-2013年

1.（20分） 求曲面 $z=xy, z=0, x+y=1$ 所围立体的体积。

2.（20分） 计算第一型曲面积分

$$I=\iint_S (x+y+z)dS,\quad S: x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0.$$

3.（20分） 设函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的二阶偏导数 L 为 D 的边界，分段光滑。证明：

$$\iint_D v\triangle u\, d\sigma = \oint_{L^+} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds - \iint_D (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})\, d\sigma,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 为 u 沿 L 的外法线方向的方向导数

4.（20分） 求解初值问题：$xy''-y'=x^2, y(1)=0, y'(1)=0.$

5.（20分） 求证：对于一元连续函数 $f(x)$,有 Poisson 公式

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(ax+by)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\xi^2}f(\xi\sqrt{a^2+b^2})\, d\xi$$

V 2013-2014年

1.（20分） 计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}|3x+4y|\,dxdy$$

2.（20分） 下列积分在区域 D上是否与路径无关？

$$\int_{AB}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},\quad D=(x,y)\in\mathbf{R}^2:(x,y)\neq(0,0).$$

3.（20分） 设 $u(x,y,z)$ 是三维调和函数，即 u 有连续的二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

又设 S 为一光滑闭曲面， S 所围区域为 Ω .证明：若 $u(x,y,z)$ 在 S 上恒为零，则 $u(x,y,z)$ 在 Ω 上也恒为零。

4.（20分） 求微分方程的通解：

$$y''-9y'+20y=x+1.$$

5.（20分） 求由 $x^2+y^2=a^2,y^2+z^2=a^2,x^2+z^2=a^2$ 所围区域的体积。

第二部分 期末考试

VI 2009-2010年

1.（20分） 判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}$ 是否绝对收敛？

2.（20分） 判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在[0,1]上是否一致收敛？

3.（20分） 判断广义积分的收敛性：

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

4.（10分） 利用 B 函数和 Γ 函数计算积分：

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$$

5.（20分） 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx$$

6.（10分） 求证：收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

不可能是某个有界可积的Fourier 级数.

VII 2010-2011年

1.（20分） 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$$

2.（10分） 利用 B 函数和 Γ 函数计算积分：

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}}.$$

3.（10分） 将函数

$$f(x) = \arctan \frac{2x}{1 - x^2}$$

在 $x = 0$ 点展开为幂级数.

4.（20分） 求证：收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

不可能是某个有界可积的Fourier 级数.

5.（20分） 求证：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$$

在[0,1]上是否一致收敛？

6.（20分） 判断广义积分的收敛性：

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx.$$

VIII 2011-2012年

1.（20分） 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$$

2.（10分） 利用 B 函数和 Γ 函数计算积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx.$$

3.（10分） 将函数 $f(x) = x(-\pi \le x \le \pi)$ 展为Fourier 级数.

4.（20分） 判断广义积分的收敛性：

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x+x^2)}$$

5.（20分） 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的一致收敛性.

6.（20分） 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$,且有界，$f(0) > 0$. 讨论函数

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性。

IX 2013-2014年

1.（20分） 判断积分的收敛性：

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx \ (a < b)$$

2.（20分） 计算以下两个积分：

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x}dx(b > a > 0), \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx.$$

3.（20分） 令

$$f(t) = \int_1^{\infty} \frac{\cos xt}{1+x^2}dx, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

判断函数 $f(t)$ 的连续性。

4.（20分） （1）将 $f(x) = x(0 \le x \le 2\pi)$ 展为 Fourier 级数.（2）证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}(0 < x < 2\pi)$$

(3)判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上的一致收敛性.

5.（20分） 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(n+1)},\quad (-1\le x\le 1).$$

判断 $f(x)$ 在区间[-1,1]上的连续性以及在 $x=-1$ 和 $x=1$ 点处的可微性.

第三部分　说明

祝大家高数愉快。

By Childhood_Chen QAQ