高等代数 期中试题

2015－2016 学年第 1 学期

授课教师: ________________ 考试时间: **2015-11-10,**

姓　　名: ________________ 学　　号: ________________

本试题共 5 道大题，满分 100 分。

1. （30分）计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 4 & 225 & 125 \\ 4 & 750 & 550 \\ 6 & 875 & 575 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{n\times n},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 37 & 2 & 85 & 0 \\ 0 & 29 & 3 & 73 & 4 \\ 1 & 19 & 0 & 67 & 2 \end{vmatrix}$$

2. （20分）设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

(1) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组;

(2) 求 a, b 的值，使得 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5$ 线性表出;

(3) 在方程组 $\sum_{i=1}^{5} x_i \alpha_i = \beta$ 有解时，求出它的解集。

3. （20分）设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组系数矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式等于零，并且其 (k, l) 元素的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$，试给出这个齐次线性方程组的一个基础解系，并证明你的结论。

4. （20分）设$r < n$是正整数，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$是向量空间$F^n$的线性无关向量组。证明:

(1) （16分）存在向量组$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\in F^n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$是$F^n$的基;

(2) （3分）存在另一组向量$\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\in F^n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$也是$F^n$的基, 但$\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$与$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 不等价;

(3) （3分）存在无穷多组互不等价的向量组$\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$是$F^n$的基.

5. （10分）

(1) (4分）如果矩阵A的秩为r,它的第$i_1,i_2,\cdots,i_r$行线性无关,第$j_1,j_2,\cdots,j_r$列线性无关。证明由这些行和列交叉处的数组成的行列式$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\neq 0.$

(2) （3分）如果矩阵A的秩为$r+1$,它的第$i_1,i_2,\cdots,i_r$行线性无关,第$j_1,j_2,\cdots,j_r$列线性无关。由这些行和列交叉处的数组成的行列式$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$仍然非零吗？并说明你的结论.

(3) （3分）如果$A=-A'$，那么A的秩是偶数。这里$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$A'=(a_{ji})_{n\times n}$.

注意：此题只能用前三章涉及的内容解答。