2014年物理学院高等数学期中试题

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3}\sin n}{n+1}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{7^n+7n}}{\sqrt[n]{n^2}}$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{x^2+1}-x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x^{3/2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin x^2}$

3. 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{nx}+x^2\sin\frac{1}{nx}\right)^n$的定义域.

4. 设

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}，\ y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k}{k^2}，\ n=1,2,\cdots$$

请证明数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$和$(y_n)_{n=1}^{\infty}$均收敛.

5. 设$x_1=1$，$x_2=2$，$x_{n+2}=(x_n+x_{n+1})/2$，$n=1,2,\cdots$，求数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的极限.

6. 请判断函数$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$和$g(x)=\frac{1}{x^2}$在区间$(0,1)$上是否一致连续并证明你的结论.

7. 设$x_{n+1}=x_n^2-1$，$n=1,2,\cdots$. (1)试证当x_1取值于区间$[5/3,+\infty)$时数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$极限不存在；(2)请判断$x_1=-\frac{1}{2}$时数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$极限是否存在并说明理由.

8. 设函数$f(x)$定义域为区间$[0,+\infty)$. 已知对于$f(x)$定义域内任意一点x_0极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在（区间端点处只考虑单侧极限），并且极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$也存在，问：$f(x)$是否一定有界？请证明你的结论.

9. 假设世界上的所有个体集合可以近似看那成全体实数集$\mathbb{R}$，两个个体x_1和x_2之间关系密切程度可以用$|x_1-x_2|$刻画，这个数越小代表此二者之间关系越密切. 再假设任意时刻t可以赋予每个个体x一个代表其素质高低的指数$q_x(t)$，素质高者指数大. 对任意时刻t定义函数f_t如下：$f_t(x)=q_x(t)$，$x\in\mathbb{R}$. 设x_0代表姓名为商世的个体，请用纯粹中文尽可能准确表述下面这个数学命题：对于任意时刻t，存在$\mathbb{R}$中点列$x_n(t)$，$n=1,2,\cdots$，使得$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(t)=x_0$并且$\lim\limits_{n\to+\infty}f_t(x_n(t))>f_t(x_0)$，要求你的表述中只汉字及标点符号，并且不出现诸如“变量”、“点列”、“趋于”与“极限”等数学术语.