常微分方程期末考试

少. (20分)解下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} y$$

2. (20分) 求解高阶方程 $y''' - y'' + y' - y = 8e^x + 5x \sin x$.

3. (20分) 求出微分方程 $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$ 的通解以及通过曲线 $y = x^2, z = x^3$ 的积分曲面.

4 (15分) 求边值问题

$$y'' + \lambda y = 0$$
, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$,

くく

的非零解.

- 5. (15分) 考虑微分方程 $\frac{dy}{dx} = Ay + r(y)$, 其中A的所有特征值的实部为负,r(y)是连续且有界. 求证每个解的存在区间都是整个实轴并且是正向有界的.
- 6. (10分) 设 $\phi(x)$ 是方程y'' + q(x)y = 0的非零解, 其中连续函数q(x) > 0. 假定 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ 是 $\phi(x)$ 的依次增加的零点. 如果q(x)是严格递增的, 证明:
 - $(1) \quad x_{n+1} x_n < x_n x_{n-1};$
 - (2) $i \exists b_n = \max_{x \in [x_n, x_{n+1}]} |\phi(x)|. \quad \exists b_1 > b_2 > b_3 > \cdots.$