数学学院 2010级数学分析I 期末考试试题

考试时间: 2011年 1月 10日

1. (7') 已知 $y=\dfrac{x^{2011}}{1-x^2}$, 求 $y^{(2011)}(0)$.

2. (14') (1) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x-x\cos x}$, (2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2\right]$.

3. (14') (1) 计算 $\displaystyle\int\frac{x(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, (2) 计算 $\displaystyle\int\frac{1-\cos x}{1+\sin x}e^x\mathrm{d}x$.

4. (15') 设 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, 求函数 y 的单调区间, 极值, 上下凸区间, 拐点和渐近线.

5. (10') 设 $f(x)>0$, $f''(x)$ 存在, 证明: $\ln f(x)$ 是下凸函数的充分必要条件是:
$$\begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ f'(x) & f''(x) \end{vmatrix}\geqslant 0$$

6. (10') 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导, 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得:
$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)$$

7. (6') 设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域 $O_\delta(x_0)$ 上任意次可导, $\forall h\in O_\delta(x_0)$, $\exists\theta=\theta(h)\in(0,1)$ 满足 $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta(h)h)$. 若 $f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(2010)}(x_0)=0$, $f^{(2011)}(x_0)=2011$, 求 $\lim\limits_{h\to 0+}\theta(h)$.

8. 设函数 $f(x)$ 满足: $f'(0)=0$, $f''(0)$ 存在, 证明:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0)$$

9. (6') 求数列 $a_n=n\sin(2\pi n!\sin 1)$ 的聚点集.

10. (6') 设 $f(x)\in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, 且 $|f(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格凸函数. 证明: $f(x)$ 至多有一个拐点.

11. (6') 证明当 $s>0$ 时,
$$\frac{n^{s+1}}{s+1}<\sum_{k=1}^{n}k^s<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$$