北京大学数学科学学院期末试题

2013 -2014 学年第 1 学期

考试科目：高等代数 I 考试时间：2014 年 1 月 3 日

姓 名：________ 学 号：________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1. (8 分) 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+4x+2u, g(x)=x^3+tx^2+2u$ 的最大公因式 $d(x)$ 是一个二次多项式，求 t,u 的值。

2. (18 分)(1) 判断整系数多项式 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中的可约性，并给出原因。 (2) 令 $V=\{h(x)\in\mathbf{Q}[\mathrm{x}]\mid \mathrm{f(x)|h(x)}\}$. 计算商空间 $\mathbf{Q[x]/V}$ 的基和维数。

3. (24 分) 设 $f(x),g(x)\in\mathbf{F}[\mathrm{x}]$, $d(x)$ 和 $m(x)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 最大公因式和最小公倍式. 若 $A\in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ ，令 $W_1=\{X\in\mathbf{F^n}\mid \mathbf{f(A)X=0}\}$, $W_2=\{X\in\mathbf{F^n}\mid \mathbf{g(A)X=0}\}$, $W_3=\{X\in\mathbf{F^n}\mid \mathbf{d(A)X=0}\}$, $W_4=\{X\in\mathbf{F^n}\mid \mathbf{m(A)X=0}\}$. (1) 证明 $W_3=W_1\cap W_2$; (2) 证明 $W_4=W_1+W_2$; (3) 给出 $W_4=W_1\bigoplus W_2$ 成立的一个充要条件。

4. (1)(10 分) 已知下列两组多项式

$$S_1:1,x,x^2,\cdots,x^{n-1},$$

$$S_2:\prod_{j\neq 1}(x-a_j),\prod_{j\neq 2}(x-a_j),\cdots,\prod_{j\neq n}(x-a_j)(\text{当}i\neq j\text{时},a_i\neq a_j,1\leq i,j\leq n),$$

证明 S_2 是线性空间 $\{f(x)\in\mathbf{F}[\mathrm{x}]\mid \mathbf{deg(f(x))\leq n-1}\}$ 的基， (2)(10 分) 求第一组基 S_1 到第二组基 S_2 的过渡矩阵； (3)(10 分) 求第二组基 S_2 到第一组基 S_1 的过渡矩阵.

5. (10 分) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是反对称多项式, 即对任意一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都有 $f(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}f(x_1,\cdots,x_n)$. 证明存在对称多项式 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$.

6. (10 分) 设线性子空间 $0\neq V_i\neq V$ $(i\in\{1,\cdots,s\})$ 是线性空间 V 的真子空间。证明 $\bigcup_{i=1}^s V_i\neq V$.