2011-2012 学年实变函数期末考试

1. 设 f 为 E 上的可积函数, 证明:对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$,使得对任何 $e\subset E$，若 $m(e)<\delta$；那么

$$|\int_e f(x)dx|<\delta$$

2. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$，试证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)=\frac{d}{dx}f(x) \qquad a.e \quad x\in[a,b]$$

3. 设 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 为 E 上的非负可积函数列，满足 $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 以及 $g_n(x)\geq|f_n(x)|$，若还有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx=\int_E g(x)dx$$

试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$$

4. 设 $f\in BV([0,a])$，试证明：$F\in BV([0,a])$，其中 F（x）定义为

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \qquad F（0）=0$$

5. 设 $f\in L(\mathbb{R})$，证明：$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$

6. 设 g（x）为 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的函数，若 $\int_0^1 f(x)dx=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx=0$$

7. 设 $f\in L^2([-1,1])$，E 为 $[-1,1]$ 中的闭集，令 $\delta(t)=\inf\{|x-t|;x\in E\}$，证明：

$$F(x)=\int_{[-1,1]\setminus E}\frac{\delta(t)^{\frac{1}{2}}f(t)}{|x-t|}dt\in L^2(E)$$

8. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上具有紧支集的有界可测函数，且有 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=0$，令

$$M_f(x) = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} dy \right|$$

试证明：$M_f(x) \in L(\mathbb{R})$