

实变函数论期末考试试题

数学学院 04 级

1. $E \in \mathcal{R}^d$ 是 Lebesgue 可积集, 试证: 对于几乎所有的 $\mathbf{x} \in E$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{m(E \cap B(\mathbf{x}, \varepsilon))}{m(B(\mathbf{x}, \varepsilon))} = 1,$$

其中

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon\},$$

而 $m(X)$ 表示 Lebesgue 可积集 X 的 Lebesgue 测度.

2. 设 $\mu, \nu, \delta, \pi, \rho, \omega$ 是 \mathcal{R} 上的如下定义的 Radon 测度: 对于任何 $f \in C_0$,

$$\mu(f) = \int_0^1 f dx, \quad \nu(f) = \int_2^3 f dx, \quad \delta(f) = f(0),$$

$$\pi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!e} f(n), \quad \rho(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f dx, \quad \omega(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f dx.$$

试问:

- (1) μ 与 ν 是否互为奇异?
 - (2) π 与 ρ 是否互为奇异?
 - (3) δ 与 ω 是否互为奇异?
 - (4) ρ 与 ω 是否互为奇异?
 - (5) δ 与 π 是否互为奇异?
 - (6) μ 是以 ν 为基的测度吗?
 - (7) μ 是以 ρ 为基的测度吗?
 - (8) ω 是以 ρ 为基的测度吗?
 - (9) δ 是以 π 为基的测度吗?
 - (10) μ 是以 ω 为基的测度吗?
3. 设 μ 是 \mathcal{R}^d 上的 Radon 测度. $f_n, n = 1, 2, \dots$ 是一串下半连续函数, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, 且对于任何 $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d$, 有

$$|f_n(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x}), \quad n = 1, 2, \dots$$

其中, $h \in L^1_{|\mu|}$. 试证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}^d} f_n(\mathbf{x}) d\mu = \int_{\mathcal{R}^d} g(\mathbf{x}) d\mu.$$

4. (1) 试述 Hardy 最大函数的定义;
(2) 试述 Hardy 最大定理;
(3) 试证 Hardy 最大定理.