《应用随机过程》期中考试试卷

2012 年 1 月 3 日下午，闭卷，每题 10 分

1. 考虑生灭过程，出生速率 $\lambda_n = \alpha n + \beta$, 死亡速率 $\mu_n = \delta n$, 其中 $\alpha, \beta, \delta > 0$. 给出过程是 正常返，零常返，非常返 的分类，并简略说明你的理由.

2. 某系统由 n 个不同部件构成，第 i 个部件的寿命服从参数为 λ_i 的指数分布，失效后修理时间服从参数为 μ_i 的指数分布. 若 n 个部件都正常，则系统处于工作状态；若其中某个部件失效，则其他各个部件也停止工作，修理工马上对失效部件进行修复. 一旦完成修理，系统马上进入工作状态. 假设各个部件失效与否相互独立，求系统处于工作状态的概率.

3. 考虑 Z^1 上连续时间 (紧邻) 随机游动 $\{X_t\}$, $q_{n,n+1} = \lambda$, $q_{n,n-1} = \mu$, 则 $V_r = \int_0^\infty 1_{\{X_t = r\}} dt$ 是随机游动 $\{X_t\}$ 在整数 r 处逗留的总时长 (又称 *局部时*). 假设 $X_0 = 0, \lambda > \mu$, 试求 V_1 和 V_{-1} 的分布.

4. 设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是相互独立的泊松过程，参数分别是 λ 和 μ, 初值均为 0. 假设 $Z_t = (X_t, Y_t)$, $m \geq 0, n \geq 0$, 试求 $P(Z_t = (m,n) \text{ for some } t \geq 0)$, 即二维过程 $\{Z_t, t \geq 0\}$ 经过 (m,n) 的概率.

5. 假设有限状态空间上连续时间马氏链 $\{X_t\}$ 的 Q 矩阵是对称的，即对任意 i, j, $q_{ij} = q_{ji}$. 给定初始分布 μ, 令 $P_i(t) = P_\mu(X_t = i)$ 表示 t 时刻过程处在状态 i 的概率. 证明 $E(t) = -\sum_i P_i(t) \log P_i(t)$ 是关于 t 的非降函数.

在以下五题中恒设 $\{B_t\}$ 为一维标准布朗运动， $B_0 = 0$,

6. 设 $s > t$. 给定 $B_t = x$ 条件下，试求 $E(B_s^4 - 6sB_s^2 + 3s^2 | B_t = x)$

7. 设 $X_t = \int_0^t B_s ds$, 试求 $Ee^{\lambda X_t}$.

8. 设 $\mu < 0 < \alpha$, $M = \max\{B_t + \mu t;\ t \geq 0\}$. 试求 $P(M > \alpha)$.

9. 设 $\{W_t\}$ 也是一维标准布朗运动， $W_0 = 0$, 而且与 $\{B_t\}$ 相互独立. 判断下列表述是否正确，并简略说明理由.
(a) 对于几乎所有 ω, 存在无穷多 t, 使得 $B_t(\omega) = W_t(\omega)$.
(b) 设 $\sigma_t = \min\{s; B_s = t\}$, $Y_t = W(\sigma_t)$, 对任意 $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$, 随机变量 $Y(t_1) - Y(s_1), Y(t_2) - Y(s_2), \cdots, Y(t_n) - Y(s_n)$ 相互独立.

10. 记 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$. 设 $0 < t_0 < t_1$, 试证

$$P(M_s = B_s \text{ for some } s \in (t_0, t_1)) = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

提示：下列等式或许有用

$$\int_{x_i \geq 0} \cdots \int_{\sum_i x_i \leq s} e^{-\alpha \sum_i x_i} dx_1 \cdots dx_n = \int_0^s \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha r} dr.$$