

北京大学数学科学学院期末试题

2008-2009 学年第二学期

考试科目： 常微分方程 考试时间： 2009 年 6 月 12 日
姓 名： 学 号：

本试题共 7 道大题，满分 100 分

1. (10 分) 求下面的齐次线性微分方程组的通解。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

2. (10 分) 求二阶方程

$$y'' - 2y' + y = e^x + \sin x$$

的通解。

3. (20 分) 考虑方程

$$y'' + xy = 0, (-\infty < x < +\infty).$$

(a) 设该方程满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解为 $\phi(x)$ ，求 $\phi(x)$ 在 $x = 0$ 处的幂级展式。

(b) 证明： $\phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有无穷多个零点。

4. (10 分) 求方程 $x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0 (x > 0)$ 的通解。

5. (20 分) 考虑一阶方程 $y' = f(x, y)$ ，其中 $f(x, y)$ 是平面上的 C^1 函数，并且关于 y 是 1 周期的，即 $f(x, y + 1) = f(x, y)$ 。记 $\phi(x, y)$ 是方程的解，满足 $\phi(0, y) = y$ 的解。证明：

(a) $\phi(x, y + 1) = \phi(x, y) + 1$

(b) $\phi(x, y)$ 关于 y 是严格单调增加的。

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续 2π 周期函数，证明二阶方程 $y'' + y = f(x)$ 的任何有界解都是 2π 周期解。

7. (20 分) 已知 $H(x, y)$ 是平面上一个二次连续可微函数。考虑如下方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

- (a) 求上面方程的一个首次积分。
- (b) 设 $(\phi(t; x_0, y_0), \psi(t; x_0, y_0))$ 为上述方程满足初值条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ 的解。证明: Jacobi 行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} & \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \end{vmatrix} \equiv 1$$

(编辑 by 伏贵荣 2017 年 2 月)