1、指出 D3 群的所有子群和不变子群，注意包含平庸的（3 分）。

2、一个群可不可以有几个不同的不变子群。如可以，请举例；如不可以，请证明。（3 分）

3、试问下列三个矩阵在矩阵乘法下是否构成一个群：

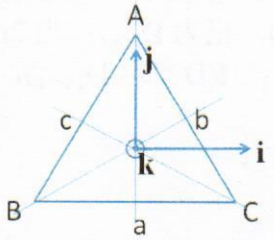
$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

如是，请写出乘法表；如否，需要添加哪几个矩阵才能构成一个群？写出该群的乘法表，并通过该乘法表指出其分类情况（9 分）。

4、设群 G 只有一个阶为 2 的元素 h，证明：对任意 $g\in G$，有 $gh=hg$。（5 分）

5、有一个群 $G_1=\{e,g_1,g_2,\ldots g_n\}$，它有 m 个类，现在把它与一个二阶群 $G_2=\{e,a\}$ 作直积。请问这个直积群类的个数是多少，为什么（6 分）？

6、1）以三维空间三个正交矢 **i**、**j**、**k** 为基，写出 D3 群各群元的表示矩阵与特征标，并根据其特征标表，利用特征标内积的方式把它化为不可约表示的直和；2）以 $\phi_1=x^2$、$\phi_2=y^2$、$\phi_3=z^2$、$\phi_4=xy$、$\phi_5=yz$、$\phi_6=xz$ 为基，写出群元 f 的表示矩阵（18 分）。



7、设 A(g)是有限群 G 的一个不可约表示，C 是 G 中一个共轭类，λ 为常数，E 是单位矩阵，证明：$\sum_{g\in C}A(g)=\lambda E$。（8 分）

8、4n 阶转动反射轴 S_{4n} 能否给出反演元素 I，为什么？（8 分）

9、请用熊夫利符号说出下列点群：1）在 C_4 群中，增加空间反演操作 I，构成什么群？2）在 $C_{6,v}$ 群中，增加空间反演操作 I，构成什么群？3）在 $C_{5,h}$ 群中，去掉所有转动反演操作，得到什么群？4）在 T_d 群中，增加空间反演操作 I，形成什么群？5）$D_{5,d}$ 群中，去掉所有转动反演操作，得到什么群？6）$D_{6,d}$ 群中，增加空间反演操作 I，构成什么群？（15 分）

10、一个杂质原子在放到一个晶体中，之后系统具备 T 群对称性。结合 T 群特征标表讨论原子 *d* 轨道可能产生什么样的劈裂？在原子轨道中，转动操作在转动群下特征标为 $\frac{\sin[(l+\frac{1}{2})\alpha]}{\sin[\frac{1}{2}\alpha]}$，α 为转角。d 轨道对应 l=2。（10 分）

C3v群反射面由

11、上图中，a 轴为 $C_2^{(1)}$，b 轴为 $C_2^{(2)}$，c 轴为 $C_2^{(3)}$，定义 C_{3v} 群。用投影算符 二次轴[illegible]
的方法说明从 1) z，2) xy 出发，生成的 C_{3v} 群的表示空间是什么（指出几维，以及线性无关的基函数）？他们承载的是哪些不可约表示？(15 分)