2014-2015 学年高等代数 (I) 期中考试试题

2014.11.18

注: 本试题为回忆版本, 具体叙述可能与原问题略有差别.

1. (15 分) 求 $A^{-1}B$ 的值, 其中

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

2. (15 分) 设 $\vec{\alpha}_1=(1,2,3,4)'$. 求实数域上的非零 4 维列向量 $\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$, 使得 $\vec{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 构成正交向量组.

3. (15 分) 求出所有 $X\in \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$, 使得 $X^2+X+1=0$.

4. (15 分) 设正整数 $k\geq 2.A_i\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), i=1,2,\cdots,k$. 已知 $\sum\limits_{i=1}^{k}A_i^2=0$. 证明 $A_i=0, i=1,2,\cdots,k$.

5. (10 分) 构造两个方阵 A,B 使得 $A+B\neq 0, A-B\neq 0$, 但是 $A^2-B^2=0$.

6. (10 分) 证明方阵 A 为可逆矩阵当且仅当 A 不是右零因子.(所谓 A 是右零因子, 即存在非零方阵 B, 使得 $BA=0$.)

7. (10 分) 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, 且对任何 $X\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 均有 $AXB\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明存在 $A_0,B_0\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 使得对任何 $X\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 均有 $AXB=A_0XB_0$.

8. (10 分) 设 A,B,P 是数域 $\mathbb{K}$ 上的方阵. 已知 $P^3=0, P^2\neq 0$, 且满足 $(A-B)P=P(A-B), BP-PB=2(A-B)$. 试构造可逆矩阵 Q, 使得 $AQ=QB$.