第 3 章

微分とは

$$\frac{\text{関数の出力値の微小変化量}}{\text{入力値の微小変化量}}$$

の微小変化量である

前章までで $\int$ あるいは $\lim_{dx\to 0+0}$ を用いて積分を表記できるようになったが，積分計算ができるようになる前に我々は少し回り道をしなくてはならない．この章では名前以外は積分とは関係なさそうな『微分』について学習する．

3.1　我々は出力値の変化に興味がある

高校数学 I A で，我々は関数に対して，ある入力をしたときの出力値を求めたり，目的とする出力に必要な入力値を求めたり，出力値を最大化したりすることを学んだ．関数の入力と出力の関係性を把握したり操作したりすることは人類普遍の欲求である*1.

上記の問題とは別に，我々が日常生活でしばしば気になるのが『関数の出力の変化量』であろう．　この章で学ぶ微分は関数の変化量に関する技術である．

問題 3.1　A 君の店の 2015 年の年商は 500 万円だった．2018 年には年商 750 万円になった．このとき

1. 3 年間で，年商はいくら増えたか？
2. 年商は 1 年あたりいくら増えたと考えられるか？

1．のように単純に差分が気になる場合と，2．のように単位時間*2あたりの差分が気になる場合とがある．

問題 3.2　日常生活やビジネスシーン，自然科学において，

1. 関数の出力値の増減分が気になるケースを例示せよ．
2. ある関数に対して，入力値の単位量*3変化あたりの出力値の変化が気になるケースを例示せよ．

1.，2．ともに，それが関数であるか，関数だとしたらどういう関数であるかを明示した上で答えよ．

*1 人類の歴史においても我々の日常やビジネスにおいても，だ．
*2 今回は入力値が時間であるので『単位時間あたりの』差分であるが，入力値は必ずしも時間である必要はない．
*3 1 m とか 1 時間とか 1 分とか 1kg とかである

3.2　平均変化率

前節の**問題** 3.1 の 2．で，我々は 1 年あたりの増分を求めるために

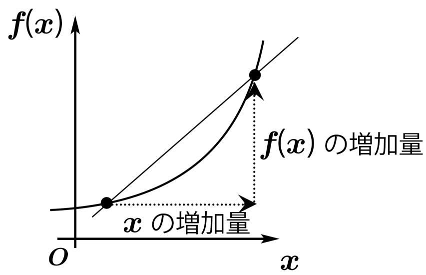
$$\frac{\text{年商の増分}}{\text{年の増分}} = \frac{750\text{ 万円} - 500\text{ 万円}}{2018\text{ 年} - 2015\text{ 年}} = \frac{250\text{ 万円}}{3\text{ 年}} \fallingdotseq 83(\text{万円／年})$$

という計算をした．このように，「毎年同じ額増えていると仮定したときに，1 年あたりに増える額」を**平均変化率**という．

一般に，関数 $f(x)$ に対して，その**平均変化率**を

$$\text{区間 } [x_1, x_2] \text{ での平均変化率} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

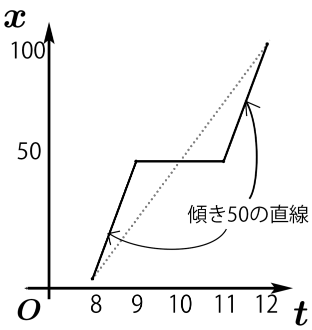
と定義できる．右辺の分子は**出力値の変化**，右辺の分母は**入力値の変化**である．



問題 3.3　B 君の車は一直線状の道を走っている．
午前 8 時にはスタートから 4km 地点，午前 12 時にはスタートから 104km 地点を走っていた．

1. B 君の車の座標の平均変化率（いわゆる平均時速）はいくらか．
2. 1．の結果を見る限り，皆さんは「B 君の車は不自然に遅い」と判断するだろう．だが，問題文は何一つ間違っていない実録のデータである．何が起こったと考えられるか．

では，**問題** 3.3 のようなケースが起こってしまった原因を考えてみよう．実は，車の座標の時間変化は図 1 のようになっていた．まず 1 時間走り，9 時から 11 時までドライブインに入り，11 時から 12 時まで再び走ったのだ．



このとき，車の速度メーターはどうなっているだろうか．当然，正の実数の範囲を上がったり下がったりしていることになる．では，この速度というの

はどのような区間の平均変化率なのだろうか.「時刻午前 8.5 時の瞬間の速度」と言っても，文字通り『瞬間』では**分母が 0 になってしまうので平均変化率を定義できない**．しかしながら我々は「午前 8.5 時から 0.1 時間の平均時速」や「午前 8.5 時から 0.01 時間の平均時速」や「午前 8.5 時から 0.001 時間の平均時速」…を定義することはできる．そう，分母を **0 にできないのならば，0 に限りなく近い正の実数にすればよいのだ**．すなわち，

$$\text{時刻午前 8.5 時の瞬間速度} = \lim_{dt \to 0+0} \frac{x(8.5+dt) - x(8.5)}{dt}$$

である[*4].

一般に，時刻 t における瞬間速度は

$$\text{時刻 t の瞬間速度} = \lim_{dt \to 0+0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} = \frac{\text{出力値の微小変化}}{\text{入力値の微小変化}}$$

と書ける．これを，t の関数であることに注意して，$\boldsymbol{\dfrac{dx(t)}{dt}}$ とか $\boldsymbol{x'(t)}$ などと書く[*5].

$\dfrac{dx(t)}{dt}$ と書くとき，$\displaystyle\lim_{dt \to 0+0}$ と書かなくても dt は 0 に限りなく近い実数値であることを示している[*6].

一般に，$f(x)$ から $f'(x) = \displaystyle\lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ を求めることを

「$\boldsymbol{f(x)}$ を $\boldsymbol{x}$ で微分する」

といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ を**「$\boldsymbol{f(x)}$ の導関数」**という．また，定数 a に対して，$f'(a)$ を**「$\boldsymbol{x=a}$ における微分係数」**という．

*4 実際の車では，dt は運転に支障がない程度まで小さくした正の実数値である．

*5 前者はライプニッツ式，後者はニュートン式の書き方である．2 人は同時期に微分法を発表し，お互い「自分の方が先に見つけた」と主張し合った．

*6 実は，$dt \to 0-0$ でもよい．$t = a$(a は定数) で $dt \to 0+0$ と $dt \to 0-0$ 両方で同じ値に収束するとき，「$x(t)$ は $t = a$ で両側微分可能」あるいは単に「微分可能」という．

3.3 導関数の正負は，関数の出力の増減である

ある区間での平均変化率が正であるということは，その区間で関数の出力値が増加したということである．[*7]同様にある区間での平均変化率が負であるということは，その区間で関数の出力値が減少したということである．そして，平均変化率が 0 であるということは，その区間の始まりと終わりで出力値が同じであるということを意味する．

区間が限りなく 0 に近づいた場合にも同様の議論をする．$f'(a) > 0$（$x = a$ における微分係数が正）であれば，$x = a$ の周りの微小区間において出力値が増加したということになる．これを指して，「関数 $f(x)$ は，$x = a$ で増加している」という[*8]．

同様に，$f'(a) < 0$ ならば「関数 $f(x)$ は，$x = a$ で減少している」といい，$f'(a) = 0$ ならば「関数 $f(x)$ は，$x = a$ で増加も減少していない」という．特に，

$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to a-0} f'(x) > 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to a+0} f'(x) < 0 \end{cases}$$

のとき，**「$\boldsymbol{x = a}$ のとき，関数 $\boldsymbol{f(x)}$ は極大値 $\boldsymbol{f(a)}$ をとる」**といい，

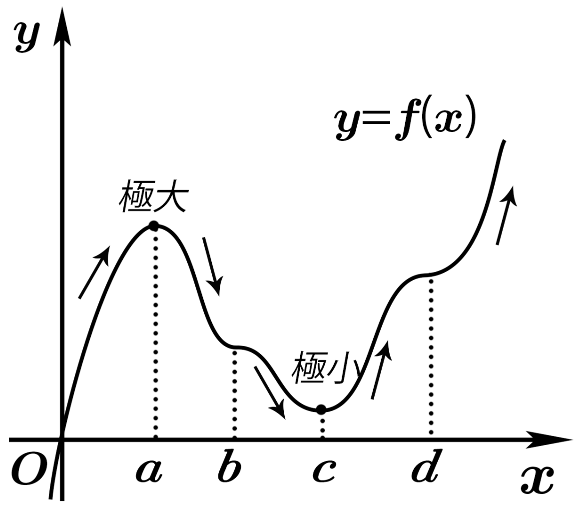
$$\begin{cases} f'(a) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to a-0} f'(x) < 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to a+0} f'(x) > 0 \end{cases}$$

のとき，**「$\boldsymbol{x = a}$ のとき，関数 $\boldsymbol{f(x)}$ は極小値 $\boldsymbol{f(a)}$ をとる」**という．

この数学的な定義を日本語で解説すると，「任意の微小距離だけ離れた入力値よりも大きな出力値を得られるような入力値を a としたとき，$f(a)$ を極大値という」ということになる．もっと雑な日本語で言うなら「周りよりも大きな値を取っている時，その値を極大値という」と言えばよいかも知れない．同様に，「周りよりも小さな値を取っている時，その値を極小値という」ということだ．以下の図に極大値と極小値の例を示す．

[*7] ただし，区間の途中で減少に転じることがあっても良い．トータルで見て，その区間で出力値が増加したということだ．

[*8] 「$x = a$ ではなく，$x = a$ から $x = a + dx$ の間で増加しているのでは…」とツッコミたくなるかもしれないが，用語として「$x = a$ で増加している」という言い方をするのだ．



上の図で，$f'(a) = 0$ であり，$x = a$ 近傍で $f'(x)$ の値が正から負に変わっている．このとき，$f(x)$ は $x = a$ で極大値 $f(a)$ をとる．

また，$f'(c) = 0$ であり，$x = c$ 近傍で $f'(x)$ の値が負から正に変わっている．このとき，$f(x)$ は $x = c$ で極小値 $f(c)$ をとる．

しかし，$f'(b) = 0$，$f'(d) = 0$ であっても，$x = b$ 近傍，$x = d$ 近傍 で $f'(x)$ の正負は変わらない．したがって，$f(b)$，$f(d)$ は極値ではない．

3.4　実際に導関数を求めよう

例題 1　関数 $f(x) = x^2$ の導関数を求めよ．

例題 1 の解

導関数の定義に従う．

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \lim_{dx\to 0} \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \end{aligned}$$

このままでは $\frac{0}{0}$ の不定形なので，先に分子を展開して約分する．その後で極限をとる．

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{dx \to 0} \frac{x^2 + 2x\,dx + dx^2 - x^2}{dx} \\
&= \lim_{dx \to 0} (2x + dx) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

問題 3.4　微分の定義に従い，以下の関数の導関数があればそれを求めよ．無い場合はその旨を答えよ．x 範囲の一部においてのみ存在する場合，どの範囲において導関数が存在するか明らかにした上で導関数を求めよ．（慣れないうちは，$f(x)$ のグラフを書いて微分の意味を自分に対して説明しながらやってみよ．）

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x^n$　（n は自然数）　　ヒント：2 項定理を用いよ
4. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
5. $f(x) = x$ の血液型　（ただし，x は人間 1 個体である）
6. $f(x) = |x|$
7. $f(x) =$ 時刻 x[*9]における，すうがくぶんかの社員数

特に**問題 3.4** の 3. は非常に重要な定理である．導出方法と結果を併せて覚えておきたい．

定理 3.1

$f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ である．
（任意の実数 x に対して成立）

[*9] 単位は『西暦年』とでもしておこう（私の授業においては）『年』は任意の実数に対して定義される．例えば 2018.5 年は「2018 年の元日から $\frac{1}{2}$ 年たった時刻」のことである．

私が**問題 3.4** の 4. から学んでほしいのは，**問題 3.4** の 4. をより一般化すると

定理 3.2　微分の線形性

ある x の領域で微分可能な関数 $f_1(x), f_2(x)$ に対して，同じ x の領域では

$$\big(f_1(x) + f_2(x)\big)' = f_1'(x) + f_2'(x) \tag{1}$$

および，

$$\big(a\,f(x)\big)' = a\,f'(x) \quad (a \text{ は定数}) \tag{2}$$

が成立する，ということだ．

2 つを併せると，

$$\big(a_1\,f_1(x) + a_2\,f_2(x)\big)' = a_1\,f_1'(x) + a_2\,f_2'(x) \quad (a_1,\ a_2 \text{は定数}) \tag{3}$$

となる．

つまり，「関数を足してから微分しても，それぞれ微分してから足しても同じ」「関数を定数倍してから微分しても，それぞれ微分してから定数倍しても同じ」ということである．

定理 3.2　(1) の証明

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{dx\to 0} \frac{\big(f_1(x+dx) + f_2(x+dx)\big) - \big(f_1(x) + f_2(x)\big)}{dx} && (\text{微分の定義}) \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{f_1(x+dx) - f_1(x)}{dx} + \frac{f_2(x+dx) - f_2(x)}{dx} && (\text{実数の足し算は順番自由＆分配の法則}) \\
&= f_1'(x) + f_2'(x) = \text{右辺} && (\text{微分の定義})
\end{aligned}$$

証明終

問題 3.5　定理 3.2　(2) と (3) を証明せよ．

問題 3.6　ある関数 $f(x)$ が，$x=a$ で不連続であったとする．このとき「$f(x)$ は $x=a$ で微分不可能である」すなわち「微分可能であるためには，連続であることが必要条件である」ことを示せ．

MEMO