１～４回目の総集編

まず，我々は関数というものの定義からスタートした．授業でも何度も話したように，関数というのは，ある入力に対して一定の出力をするブラックボックスのことであった．そして，関数を自然言語で書くよりも簡潔に書くためのツールとして文字式を導入した．

授業本編では数学の歴史や流れを重視するため，末節のテクニックや小ネタを省略してしまった個所がいくつかあるので，今回はそのフォローを行いたい．

1　展開

本編では，入力値 x 以外の文字を含む式の展開をほとんど行わなかった．ここではより一般的な展開を行ってみよう．

問題 1.1　以下の式を展開し，項を a の次数が大きい順に並び替えよ．文字があくまで定数を表したものであることに気を付けること．

(1)　$(a+b)(a+c)$

(2)　$(a+b)^2$

(3)　$(a+b)(a-b)$

本編で行った $(x+3)(x+2)$ の展開は，問題 1.1(1) に $a=x$，$b=3$，$c=2$ を代入したものである．また，平方完成を行うためには (2) を強く意識することとなる．(3) の展開は本編では登場していないが，印象的な結果となる．今後，数学を学ぶ上でたびたび登場する便利な定理だ．

問題 1.2（応用）　78×82 を工夫して計算せよ．

問題 1.3（応用）　$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ を工夫して計算せよ．$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$　$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$

2　方程式

2.1　日本語への再翻訳は重要である

「方程式を解く」とは，「関数からある出力を得るための入力を求める」ということだ．本編では，解を求めて終わりであったが，ここでは「日本語を数学語にしたもの（方程式）の解を解釈し，再度日本語に翻訳する」という問題を取り扱ってみよう．

問題 2.1　4 辺の長さの和が 20 ㎝の長方形がある．今，面積が 21 ㎠であるとき，長方形の辺の長さは何㎝だろうか？

解 2.1

長方形の面積は，1 辺の長さの関数である．（ここでいう「1 辺」は横向きの辺の長さとしよう．1 辺の長さが決まれば，もう一方の辺の長さも決まる．）

$$f(x) = x\left(\frac{20}{2} - x\right) = 21$$

を満たす x を求めればよい．
$x = 3$，$x = 7$ が解となるが，これはどういうことだろうか？

$x = 3$ のときは，横向きの辺が 3 ㎝で，縦向きの辺が $10 - 3 = 7$ ㎝ のときを意味し，
$x = 7$ のときは，横向きの辺が 7 ㎝で，縦向きの辺が $10 - 7 = 3$ ㎝ のときを意味する．

2 つの図形は合同であり，題意を満たす長方形は一方の辺が 3 ㎝，もう一方が 7 ㎝の長方形に限られるということになる．

計算練習問題でない限り，解がどのような現象を意味するかを必ず解釈するようにしよう．

問題 2.2　ある駅ビルの月額テナント料（円）は，床面積（㎡）を入力値とする次の関数 $f(x)$ で表されるとする．

$$f(x) = 100x^2 + 2000x + 30000$$

ちょうど 180000 円の物件の床面積は何㎡だろうか？

2.2　2 次方程式の解の一般化

2 次方程式の解き方を一般化してみよう．

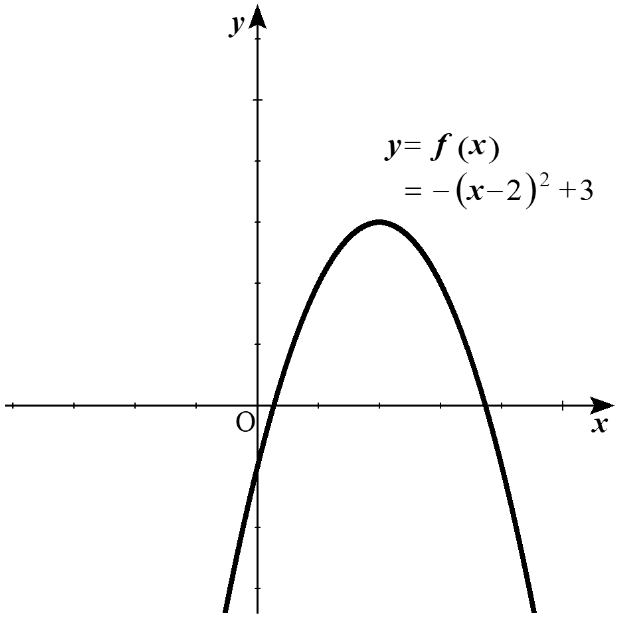
問題 2.3　2 次方程式の一般形は，$ax^2 + bx + c = 0$ (a，b，c は定数．$a \neq 0$) である．x を a，b，c を用いて表せ．（いわゆる 2 次方程式の解の公式と呼ばれるものである．）

3　最大値・最小値問題

関数の出力がある値になるのは，何を入力したときかを知りたいケースは多い．

一方で，関数の出力が最大・最小になるときの入力値を知りたいケースも多い．例えば，ビジネスの世界では収益が最大になる入力を知りたいだろうし，医療の世界では死亡率が最小になる入力や，治癒率が最大になる入力を知りたいだろう．

問題 3.1　以下のグラフで表される関数が，最大値をとるような入力値をグラフに記入せよ．



問題 3.2　4 辺の長さの和が 20 ㎝の長方形がある．面積が最大になるとき，4 辺の長さはそれぞれ何㎝だろうか？

(Hint：長方形の縦の長さを x とする．x を入力値，面積を出力値とする関数 $f(x)$ を多項式の形で表し，$y = f(x)$ のグラフを描く．)