第 3 章

場合の数・確率

私自身が高校数学を学ぶ側だったころには気づかなかったことなのだが，今にしてみれば文科省は社会でよく使う数学 3 大テーマを数学 1 A で学ぶ内容に選んだのではないだろうか.

1 章 2 章で学んできた関数，論理に並んで日常生活でよく目にする「場合の数・確率」がこの章のテーマである.

ビジネスでもアカデミックでも圧倒的な威力を発揮する統計学は確率論から発展したものであるし*[1]，「場合の数」も物理学や情報理論の基礎*[2]となっている.

それでは現代社会の技術を支えるアイデアを学んでいこう．この章で学んだ内容は受講者の皆さんに金銭的・精神的な豊かさをもたらすだろう.

---

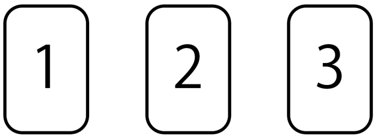
*1 確率論以外に統計学に必要なものは微積の考え方である．高校数学を一通り学んだら，すぐに実用レベルの統計学（統計検定２級相当）を学び始めることができる．すうがくぶんかでも微積および統計学の講座を開講しているので，是非受講してマスターしてほしい．統計検定 2 級相当であっても，驚くほどの利便性を備えている.

*2 「物理学の基礎」や「基礎的な数学」の『基礎』とは決して「最初に学ぶ易しいステージ」というわけではない．重力を応用した技術は紀元前からすでにあるが，重力の基礎となる万有引力の法則は 17 世紀の理論であり，万有引力はいかにして発生しているかの研究については 20 世紀〜21 世紀になっても未だに全貌解明には至っていない.

3.1　場合の数

3.1.1　場合の数の基本は書きだして数えることである

例題 1　　1 から 3 までの数字のカードが 1 枚ずつある．



これらを並び替えて作れる 3 ケタの整数は何通りあるだろうか？

例題 1 の解

1 2 3，1 3 2，2 1 3，2 3 1，3 1 2，3 2 1の 6 通りである．

当然ながらダブりも数え落としもないように気を付けて数え上げれば答えを求められる．しかしながら，「1 から 3 までの数字のカード」でなく，「1 から 9 までの数字のカード」であった場合，すべて数え上げるのには時間が足りない[*3]．しかも，数え落としやダブルカウントの危険性も上がるだろう．そこで，規則的に場合の数を求める方法が求められる．

3.1.2　樹形図を書くとダブルカウントや数え落としを防げる

樹形図とは，「最初にある値[*4]を決め，その条件下で次の値を決め（なりうるもの全てを書きだす），さらに前 2 つが決まったときに次の値を決め，…」というアルゴリズムを図式化したものである．

先ほどの例題で言うと，

[*3] 1 秒に 1 つ数を書いたとしても丸 4 日以上かかることになる．

[*4] 本文中で「値」と言ったが，数値でなくてもよい．例えば A 君 B 君 C 君を 1 列に並べる場合の数を求めるときは，先頭に並ぶ人の名前をまず決定することになる．

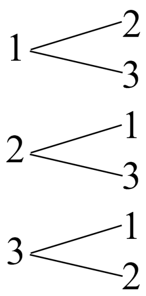
手順 1　まず百の位の数を決定する

1

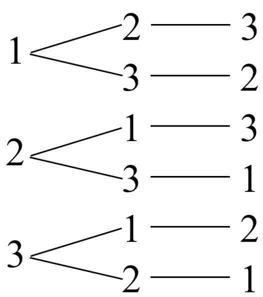
2

3

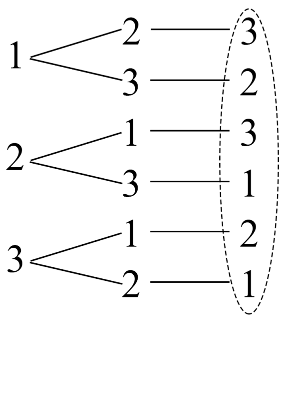
手順 2　それぞれの条件下で十の位の値として取り得るすべての数を書きだす



手順 3　さらに，百の位・十の位の値に対して一の位を決定（百・十の位で使わなかったカードは 1 枚しか残っていないので，それぞれの百・十の位の組に対して一の位は 1 通りしか考えられない）.



手順 4　数えると 6 通り



問題 3.1　1，2，3，4，5 の数字がひとつずつ書かれたカードが各 1 枚ずつある．これらを使って作ることができる 3 桁の整数は何通りあるだろうか？ 樹形図を書いて考えよ．

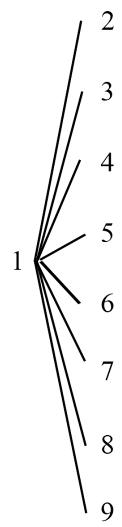
3.1.3 樹形図の形によっては，樹形図の全貌を書かずとも場合の数を求められる

例題や問 1 のように，樹形図が対称形をしている場合，樹形図の一部を書くことで全ての場合の数を計算することができる．

例題 2　1 から 9 までの数字のカードが 1 枚ずつある．
これらを並び替えて作れる 7 ケタの整数は何通りあるだろうか？ 樹形図を書いて考えよ．

例題 2 の解

まず，10^6 の位について考える．1 から 9 までのいずれかを選んだとする．このとき 10^5 の位はそれ以外の 8 通りである．

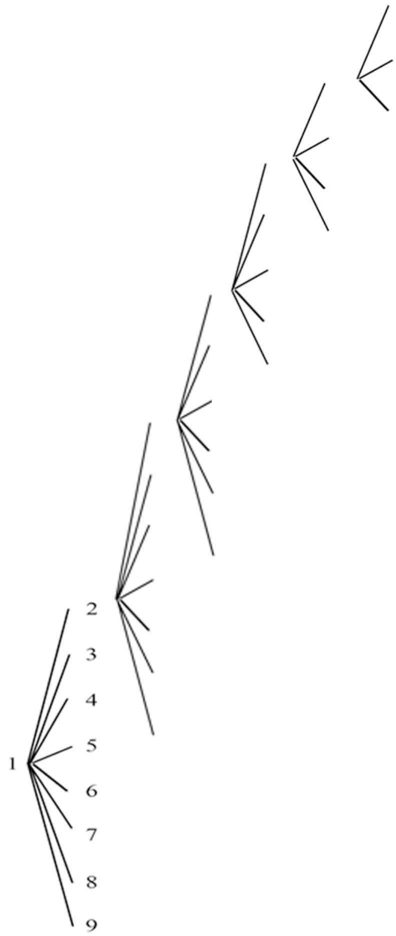


このとき，10^6 の位が 1 の樹と 2 の樹，3 の樹…は同じ形になる．したがって，10^6 の位が 1 の樹のみの場合の数を数えて，それを 9 倍すれば全ての場合の数が求められる．

言い換えるなら，10^6 の位の数 1〜9 それぞれに対して，10^5 の位から一の位のバリエーションが同じ数ずつあるということだ.

同様に，10^5 の位の数それぞれに対して，10^4 の位から一の位のバリエーションが同じ数ずつある.

この手順を繰り返し，最終的に十の位のそれぞれに対して，一の位のバリエーションが同じ数ずつある．すでに 6 桁分の数字カードを使っているので，一の位のバリエーションは 3 通りである.



全ての場合の数は，

$$\left(\left(\left(\left(\left((3\times 4)\times 5\right)\times 6\right)\times 7\right)\times 8\right)\times 9\right) = 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9 \text{ である．}$$

$\uparrow 10^6$ の位 1 種類につき，10^5 の位が 8 種類ある

$\uparrow 10^5$ の位 1 種類につき，10^4 の位が 7 種類ある

$\uparrow 10^4$ の位 1 種類につき，10^3 の位が 6 種類ある

$\vdots$

これを計算すると 181,441 通りとなる．

このように，場合の数を求める際は整数倍を複数回繰り返すので，場合の数はすぐに巨大な数になってしまう．例えば，将棋盤 81 マスに 1~81 の自然数を 1 つずつ重複なく書きこむ場合の数は，

「1 一」に入れる数が 81 通り

その時「1 二」に入れる数が 80 通り（これまでに 1 つの数を使っている）
その時「1 三」に入れる数が 79 通り（これまでに 2 つの数を使っている
⋮
その時「9 九」に入れる数が 1 通り（これまでに 80 個の数を使っている）

となるため，$81 \times 80 \times 79 \times \cdots \times 2 \times 1 \fallingdotseq 5.8 \times 10^{120}$ 通りとなる．

問題 3.2 以下の場合の数を答えよ．樹形図を書いてもよいし，計算のみで求めてもよい．

1. A，B，C，D の 4 人がいる．4 人を一列に並べる（全員正面を向き，東に向く）場合，並べ方は何通りあるだろうか？
2. A，B，C，D，E，F の 6 人がいる．リーダー，副リーダー，書記を選ぶ場合，選び方は何通りあるだろうか？
3. 今，個人を識別可能な n 人の人間がいる．ここから r 人を選んで序列をつけて並べる場合，選び方は何通りあるだろうか？

「問題 3.2」の 3. の答えを，**“n 個から m 個を選んで順番を意識して並べる場合の数”** あるいは **“n 個から m 個を選ぶ順列”** と呼び[*5]，${}_n\mathrm{P}_m$ と書く．

$$
{}_n\mathrm{P}_m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}
$$

3.1.4 樹形図が非対称ならば，やはりすべて書かないと場合の数を求められない

先にも書いたが，公式のようなものを使って簡潔に場合の数を求める数式を書くことができたのは，樹形図が対称形をしていたからである．以下の問題のように，樹形図が対称形をしていない場合，樹形図をすべて書かなくては場合の数を求められない．

問題 3.3 A，B，C，D，E の 5 人から 4 人を選んで 1 列に並べる．ただし，A は 2 番目

[*5] 「順列」という言葉を使った定型文のような呼び方があるわけではないが，後述する「順番を意識せずに並べる場合の数」を意味する「組み合わせ」の対になる概念として「順列」という言葉を導入する．日本語だとどう言っても長くなるので，数学をするときはほとんどの場合 ${}_n\mathrm{P}_m$ と言う．

に，B は 4 番目にはなれない．このとき，並べ方は何通りあるだろうか？

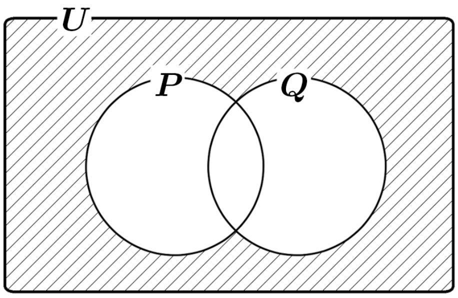
3.1.5　条件のある場合の数とは，集合の要素数に他ならない

例題 3　　A，B，C，D，E の 5 人から 4 人を選んで 1 列に並べる．ただし，A は 2 番目に，B は 4 番目にはなれない．このとき，並べ方は何通りあるだろうか？

例題 3 の解

5 人から 4 人を選んで 1 列に並べる全ての順列を全体集合 U とする．U の要素数は，${}_5\mathrm{P}_4 = 120$ である．

このとき，条件 p：A が 2 番目になる　条件 q：B が 4 番目になる　とおくと，「A は 2 番目に，B は 4 番目にはなれない」という条件は $\neg p \wedge \neg q$ と書ける．これを満たす集合は $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{(P \cup Q)}$ である．ただし，集合 P は条件 p を満たす要素の集合，集合 Q は条件 q 満たす要素の集合，集合 U は全体集合である．



P の要素数を求めるには，A 以外の 4 人から 3 人を選んで 1 番目・3 番目・4 番目に並ばせればよい（樹形図を書いてみよ）.

そう，${}_4\mathrm{P}_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 通りである．

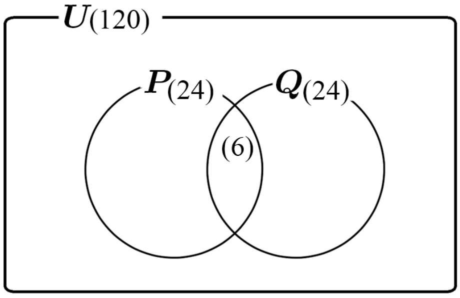
　同様に，Q の要素数も求めよ．

24 通りである．

　ここで，$P \cap Q$ の要素数を求めよう．2 番目が A，4 番目が B と決まっている時に，C，D，E から 2 人を選んで 1 番目と 3 番目に並べればよい．（樹形図を書いてみよ）

そう，${}_3\mathrm{P}_2$ で 6 通りである．

　要素数をベン図に書きこむと，



となるため，$\overline{(P \cup Q)}$ の要素数は

$$（U \text{ の要素数}）-（P \cup Q \text{ の要素数}）= 120 -（24 + 24 - 6）= 78$$

である．

これが「A は 2 番目に，B は 4 番目にはなれない」という条件を満たす要素の数に他ならない．

3.1.6　順番を意識した場合は“順列”，順不同ならば“組み合わせ”

例題 4　A，B，C，D，E の 5 人がいる．この中から 3 人を序列や順番をつけずに選ぶ方法は何通りあるだろうか．

例題 4 の解

もしも順番をつけて選ぶなら，${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りである．

ただし，この 60 通りには，例えば A，B，C の 3 人を選んだ後で ABC と ACB と BAC と BCA と CAB と CBA の 3 通り（3 人の並び方の順列 ${}_3P_3$ 通り）を別々に数えてしまった数である．これは，選んだ 3 人が A,，B，C であった場合だけではなく A，D，E などを選んだ場合も同様である．

したがって，5 人の中から 3 人を選ぶ方法（“${}_5C_3$”と書く）は，

$$
{}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{{}_3P_3}
$$

となる．

問題 3.4　一般に，n 個の中から m 個を順序や序列なく選ぶ方法を，“n 個から m 個を選ぶ組み合わせ”と呼び，${}_nC_m$ と書く．${}_nC_m$ を求めよ．

以上で場合の数に関する説明は終了する．

具体的なケースについては練習問題を設けたのでそこで学んでいこう．

3.2　確率

3.2.1　「○○である確率」とは，「（○○である事象の場合の数）／（全事象の場合の数）」である

事象 A[*6]が起こる確率を Probability の頭文字を使って $P(A)$ と書く．$P(A)$ の定義は，以下の通りである[*7]．

$$P(A) = \frac{\text{（事象 } A \text{ が起こる場合の数）}}{\text{（全事象の場合の数）}}$$

したがって，確率には単位がなく，0 以上 1 以下の有理数を取る．また，すべての事象は同じ割合で発生するものとする[*8]．

例　1 から 6 までの整数が書かれたサイコロを振る．出た目が偶数である確率を考える．
（偶数である場合の数）$= 3$，（全事象の場合の数）$= 6$ なので，答えは，$\dfrac{3}{6}$つまり$\dfrac{1}{2}$ である．

問題 3.5　1 から 6 までの整数が書かれたサイコロ甲と，1 から 6 までの整数が書かれたサイコロ乙を同時に振る．出た目の和が偶数である確率はいくつか．また，出た目の和が 8 である確率はいくつか．上の定義に基づいて求めよ．

3.2.2　積の法則は，複数の独立な事象が同時に起こる確率を導出する

事象 A，B が同時に起こる確率は $P(A \cap B)$ と書くことができる．

[*6] 結果はランダムで得られるが，何が起こり得るかの集合（これを標本空間という）が決まっている操作を行うことを，**試行**という．試行の結果を**事象**という．

[*7] この定義は後ほどアップデートされる．そこでは「$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の確率」というものも定義できる．

[*8] 今回導入した定義によると確率というのは発生の割合のようなものなので，この書き方は自己言及的である．確率の定義の歴史については後述する．

事象 A が起こったか否かにより事象 B が起こる確率が変化しない場合，「2 つの試行は独立」という．独立でないことを「従属」という．

例　　サイコロを 2 回振るとき，「1 回目に 1 が出る」かどうか判定する試行と「2 回目に 1 が出る」かどうか判定する試行は独立である．なぜなら，1 回目に 1 が出たからと言って，2 回目に 1 が出る確率は変化しないからである．

問題 3.6　以下の事象 A，B を結果とする試行は独立だろうか．

1. 佐藤君は日本在住の学生で，White さんはオーストラリア在住の学生である．
   A：今日，佐藤君が交通事故に遭う．
   B：今日，White さんが交通事故に遭う．

2. 一郎君と二郎君は同じ家に住んでいる兄弟である．
   A：今日，一郎君が寝坊する．
   B：今日，二郎君が寝坊する．

3. 田中さんと高橋さんはくじ引きの列に並んでいる．くじを引く順番は，田中さん→高橋さんの順番だ．ただし，くじの箱は非復元抽出であり，アタリとハズレがそれぞれ 5 本ずつ入っている．
   A：田中さんが当たりを引く．
   B：高橋さんが当たりを引く．

問題 3.7　独立な試行と従属な試行の例を 1 組ずつ挙げよ．

そして，独立な試行に対して

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

という定理があり，これを**積の法則**と呼ぶ．

積の法則の証明

1 つ目の試行の全ての場合の数を n_1，事象 A に該当する場合の数を m_1，2 つ目の試行の全ての場合の数を n_2，事象 B に該当する場合の数を m_2 とする．

2 回の試行を行った場合の全事象の場合の数は，1 つ目の試行 n_1 通りに対して 2 つ目の試行がそれぞれ　n_2 通りあるため，$n_1 \times n_2$ 通り．

また，1 つ目の試行で事象 A になる場合の数 m_1 通りに対して 2 つ目の試行で事象 B になる場合の数がそれぞれ m_2 通りあるため，事象 A と事象 B が同時に発生する場合の数は $m_1 \times m_2$ 通り．

アンダーラインを引いた“それぞれ”は 1 つ目の試行と 2 つ目の試行が独立であることの言い換えである．1 つ目の試行によって 2 つ目の試行の場合の数が増減することはないのだ．

確率の定義より，

$$P(A \cap B) = \frac{m_1 \times m_2}{n_1 \times n_2} = \frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = P(A) \times P(B)$$

となる．　証明終

例　サイコロを 2 回振るとき，「1 回目に 1 が出る」かどうか判定する試行と「2 回目に 1 が出る」かどうか判定する試行は独立である．このとき，2 回とも 1 が出る確率は，

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である．

問題 3.8　5 本中アタリが 1 本，ハズレが 4 本あるくじ引きがある．今，5 人の人間が順番にくじを引いていく（非復元抽出）．i 番目の人 (i=1,2,3,4,5) がアタリを引く確率を求めよ．

3.2.3　和の法則は，複数の背反な事象のいずれかが起こる確率を導出する

1 つの試行に対して事象 A，B のいずれか一方または両方が起こる確率は $P(A \cup B)$ と書くことができる．

A が起こった場合 B が起こらず，B が起こった場合 A が起こらないとき（言い換える

なら，A と B が同時には起こらないとき)，「事象 A と事象 B は背反な事象」という．

事象 A と事象 B が背反であるとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

という定理が成立する．これを**和の法則**という．

和の法則の証明

試行（これは 1 回の試行でも複数回の試行でもよい）によって得られる全ての事象の場合の数を n とする．

事象 A に該当する場合の数を m_1, 事象 B に該当する場合の数を m_2 とすると，

$$P(A \cup B) = \frac{(m_1 + m_2)}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

最初の等号では，事象 A と事象 B が背反であることを用いた．　　　　証明終

例 1　　サイコロを 1 回振る．

$$\begin{cases} \text{事象 } A : 1 \text{ の目が出る} \\ \text{事象 } B : 2 \text{ の目が出る} \end{cases}$$

とすると，事象 A と事象 B は同時に起こらないため，事象 A と事象 B は背反である．

例 2　　6 面サイコロを 1 回振る．

$$\begin{cases} \text{事象 } C : \text{偶数の目が出る} \\ \text{事象 } D : 3 \text{ の倍数の目が出る} \end{cases}$$

とすると，事象 C と事象 D が同時に起こる（6 の目が出る）ことがあるので，事象 C と事象 D は背反でない．

問題 3.9　ハート・ダイヤ・スペード・クラブの A 合計 4 枚を伏せて置く．無作為に 2 枚を選んだとき，マークの色が同じである確率を求めよ．

問題 3.10　アタリが 1 本，ハズレが 4 本入ったくじがある．佐藤君がまず 1 本引き，鈴木君が次に 1 本引く（非復元抽出）．佐藤君か鈴木君がアタリを引く確率を求めよ．

3.2.4　余事象が起こる確率を求める方が楽なこともある

“事象 A が起こる”という条件の否定は何だろうか.

そう，“事象 A が起こらない”あるいは“事象 A でない事象が起こる”である．そして，事象 A でない事象のことを，事象 A の**余事象**といい，$\overline{A}$ と書く．

一般に起こりうるすべての事象の発生確率の和は 1 であるので，$P(A)+P(\overline{A})=1$ である．したがって，ある事象が発生する確率を求めるために，その余事象が発生する確率を求めてそれを 1 から引けばよいということになる．

$P(A)$ よりも $P(\overline{A})$ の方が求めやすいケースを紹介しよう．

例題　　6 面サイコロを 2 つ振る．このとき，サイコロの出目の積が偶数である確率を求めよ．

例題の解

サイコロの出目の積は偶数か奇数しかないので，サイコロの出目の積が奇数であるという事象は，サイコロの出目の積が偶数であるという事象の余事象である．

サイコロの出目の積が奇数である事象は，2 つのサイコロの出目がともに奇数であるときである．したがって，サイコロの出目の積が奇数である確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ である（積の法則を使った）.

したがって，サイコロの出目の積が偶数である確率は $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ である．

問題 3.11　3 つの 6 面サイコロを同時に振る．このとき，少なくとも 1 つ 1 の目が出る確率を求めよ．

3.2.5　確率の定義を更新する

今までの確率の定義では，同じ確率で発生する事象を想定したうえで確率を定義しているような気持ち悪さがあった．そこで，ここからは極限を用いた確率の定義を行う．

ある試行を N 回行った時の結果が事象 A であった回数を n_A としたとき，N を無限に大きくして行った時に $\frac{n_A}{\mathrm{N}}$ が収束する値を $P(A)$ と定義する[*9]．

例えば，$P(A) = \frac{1}{3}$ が意味するのは，試行を 30000 回行ったら事象 A が起こるのはおよそ 10000 回，3000000 回行ったら事象 A が起こるのはおよそ 1000000 回…となるということである．

3.2.6　条件付き確率の表記方法

私が 1 時間外を歩くときに，交通事故に遭う（事象 A）確率を考える．しかし，視界が悪い雨の日（事象 B）に事故に遭う確率は，晴天の日に事故に遭う確率よりも高いだろう．「雨の日である」とか「晴天の日である」という条件によって，私が事故に遭う確率は変わってくるのだ．そこで，「雨の日に私が交通事故に遭う確率」を以下のように書く．

$$P(\text{交通事故に遭う} \mid \text{雨の日である}) = P(A|B)$$

｜記号は，集合の要素の条件を記述する際に用いた記号と同じ意味である．[*10]．

これは，「雨の日であり，かつ私が交通事故に遭う確率 $= P$(雨の日である $\cap$ 交通事故に遭う)」ではないことに注意してほしい．

問題 3.12　まず，コインを投げる．次に 6 面サイコロを投げる．

1. コインが表で（事象 A），かつサイコロの出目が 1 である（事象 B）確率を記号

[*9] 歴史的には，この後さらに確率の定義が厳密化されていくが，高校数学およびほとんどの日常的場面ではこのチャプターで紹介する定義で問題ないだろう．なお，$\frac{n_A}{N}$ が収束することは自明ではなく，そのことを証明するにはさらなる定義の更新が必要であり…と話は続くのだが，長くなってしまうので割愛する．

[*10] 日本語に条件などの後置修飾節を作る言葉がないので，∧（かつ）∨（または）のように，｜にはうまい日本語での呼び名がない．個人的には「どんな時かっていうと〜〜」と心の中で呼びながら書いている．副詞節を作るときの関係代名詞”When”の和訳なのだ．

を用いて書き，その確率を求めよ．

2. 　コインが表だという条件のもとで，サイコロの出目が 1 である確率を記号を用いて書き，その条件付き確率を求めよ．
3. 　コインが裏だという条件のもとで，サイコロの出目が 1 である確率を記号を用いて書き，その条件付き確率を求めよ．

問題 3.13　まず，6 面サイコロを投げる．次に，4 面サイコロを投げる．

1. 　6 面サイコロの出目が 4 以上で，かつ 2 つのサイコロの出目の和が 6 以上である確率を求めよ．
2. 　6 面サイコロの出目が 4 以上という条件のもとで，2 つのサイコロの出目の和が 6 以上である確率を求めよ．
3. 　6 面サイコロの出目が 3 という条件のもとで，2 つのサイコロの出目の和が 6 以上である確率を求めよ．

問題 3.11 のように，条件が違っても条件付き確率が同じである場合や，問題 3.12 のように条件が違うと条件付き確率が異なる場合がある．前者の場合，事象 A と事象 B は独立である．あるいは「独立」自体を，「条件となる試行の標本空間に属する任意の事象 B に対して $P(A|B) = P(A)$ のとき，2 つの試行は独立である」というふうに条件付き確率を用いて定義することもできる．

問題 3.14　日常生活で，条件付き確率を考えるケースを挙げてみよう．

3.2.7　条件付き確率の考え方

条件付き確率を考えるうえで非常に重要な定理（あるいはこの式を条件付き確率の定義とすることもある）を紹介する．

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

この式[11]が何を意味しているか考えてみよう．確率・条件付き確率の定義に照らせば，

$$P(A \cap B) = \frac{\text{（事象 } A \text{ と } B \text{ が両方発生する場合の数）}}{\text{（全事象の場合の数）}}$$

となり，

$$P(A|B) = \frac{\text{2 回目の試行で事象 } A \text{ が発生する場合の数)}}{\text{（全事象のうち，1 回目の試行で事象 } B \text{ が発生している場合の数）}}$$

$$P(B) = \frac{\text{（全事象のうち，1 回目の試行で事象 } B \text{ が発生する場合の数）}}{\text{(全事象の場合の数)}}$$

$P(A|B)$ の分母と $P(B)$ の分子が約分できて，右辺＝左辺が求められる．

問題 3.15　事象 A を，「明日雨が降る」という事象とする．事象 B を，「明後日雨が降る」という事象とする．

1. $P(B|A)$，$P(B|\overline{A})$，$(A \cap B)$ は，それぞれどのような確率だろうか？
2. $P(A) = 0.3$，$P(B|A) = 0.5$，$P(B|\overline{A}) = 0.2$ とする．$P(A \cap B)$ と $P(B)$ を求めよ．

問題 3.16　私の隣家には 2 人の子供がいる．今朝，私は隣家から男の子が 1 人で出かけていくのを見た．隣家の 2 人の子供が，共に男の子である確率を求めよ（男の子が生まれる確率を 0.5 として計算せよ）．

3.2.8　条件付き確率は P(結果 | 原因) だけではない！ P(原因 | 結果) について考える

今まで考えた条件付き確率の例では，すべて「先立つ試行」や「原因」に該当するものが条件となっていた．

[11] $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ であるので，$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ でもある．

例えば，

$$P\,(\text{飛行機が墜落する} \mid \text{エンジンが故障する})$$

$$P\,(\text{肺ガンになる} \mid \text{煙草を吸わない})$$

$$P\,(\text{国士無双をアガる} \mid \text{配牌が九種九牌})$$

といった具合だ．ビジネスや工学・医療・ギャンブルにおいて重要な確率であることは言うまでもないだろう．

では，

$$P\,(\text{エンジンが故障する} \mid \text{飛行機が墜落する})$$

と書いた場合，これはどういう確率を意味するのだろうか．条件付き確率の定義通りに考えればよい．P（エンジンが故障する｜飛行機が墜落する）は，飛行機が墜落したときにその飛行機のエンジンが故障していた確率に他ならない．

問題 3.17　以下の条件付き確率を自然言語で説明せよ．

1. P（煙草を吸う｜肺ガンになる）
2. P（肺ガンになる｜煙草を吸う）
3. P（年収が 1000 万円以上である｜マンションの 20 階以上に住んでいる）
4. P（マンションの 20 階以上に住んでいる｜年収が 1000 万円以上である）

問題 3.18　日常生活やビジネスやアカデミックにおいて，P（原因｜結果）のようなイメージの条件付き確率を考える例は意外なほど多い．例を挙げよ．

計算する上では，条件付き確率が P（原因｜結果）であるのか P（結果｜原因）であるのかは関係ない．

余談：

　婚活にいそしむ佐藤君と鈴木君が，女性受けの悪い男性ファッションとしてしばしばやり玉に挙げられる「つま先が尖った靴」について話している．

「彼女がいる男の人見てみなよ？ ほとんどつま先が尖った靴履いてないよ」と言う鈴木君．それを聞いた佐藤君はこう言う．「いや，今大事な条件付き確率はP(つま先が尖った靴を履いている｜彼女がいる) ではなく，P(彼女がいる｜つま先が尖った靴を履いている) ではないか？」

　これは可愛らしい話であるが，二つの事象のうち，どちらが“条件”である条件付き確率が重要であるかを見誤ると見当違いの確率を求めてしまうことになるのだ．

3.2.9　ベイズの定理

　条件付き確率の定義より，

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

である．

　したがって，$P(A) \neq 0$ のとき，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \qquad \text{式 } 1$$

である．

　式 1 をベイズの定理と呼ぶ．とてもシンプルな定理であるが，その威力は絶大である．例題を解きながら体感しよう．

例題 届いたメールを「迷惑メール(スパム)」と「そうでないメール(ハム)」に振り分けるシステムを考えてみよう．佐藤君が半年間メールサービスを利用し，手動でスパムメールとハムメールを振り分けた．その結果，事象 A を“届いたメールがスパムメールである”事象，事象 B を“届いたメールに「出会い」と書かれている”事象とすると，$P(A) = 0.3$，$P(B) = 0.2$，$P(B|A) = 0.6$ であった．

1. $P(B|A)$ とは何の確率だろうか?また，全世界のユーザーのメールボックスから $P(A)$，$P(B)$，$P(B|A)$ を求められることを確認せよ．

2. $P(A|B)$ を求めよ．

3. 今，未知のアドレスから，「出会い」を含むメールが届いた．これはスパムメールだろうか？ ハムメールだろうか？ どの条件付き確率を用いるべきか答えて判断せよ．

例題の解

1. $P(B|A)$ は，届いたメールがスパムであるとき，そのメールに「出会い」と書かれている条件付き確率である．また，2．で聞かれている $P(A|B)$ は「出会い」と書かれているメールがスパムである条件付き確率である．

2. ベイズの定理より，$P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{0.6 \times 0.3}{0.2} = 0.9$

3. メールに「出会い」と書かれているという条件の下でスパムメールである確率を知りたいので，$P(A|B)$ を参照すればよい．「出会い」と書かれているメールのうち 9 割がスパムである．とりあえず「出会い」と書かれているメールはスパムに割り振っても良いだろう．ただし，1 割の確率で，スパムでないメールをスパムと誤認してしまうことになる．実際のスパムフィルタでは，「出会い」一語の有無ではなく，「『出会い』が含まれている $\cap$『無料』が含まれている $\cap$『未成年』が含まれている」という事象を条件としたときにそのメールがスパムである条件付き確率を求めている．

問題 3.19　ある刑務所で入所時に調査を行ったところ，犯罪者のほとんどがパンを食べているということが明らかになった．パンを食べているものは犯罪者であるといえるだろうか？ 条件付確率を元に議論せよ．パンを食べたことがあるという事象を A, 犯罪者であるという事象を B とする．$P(A) = 0.99$，$P(B) = 0.001$，$P(A|B) = 0.99$ である．

3.3　場合の数・確率　補足集

この講座も残り回数が僅かになってきた．

この講座では「数学の本質を理解して，プライベートやビジネスシーンをちょっぴり豊かにしよう」を理念として，それに合致したテーマ——個々の数学的概念が発生・進歩した歴史的背景や，日常での活用事例——を最優先で語ってきた．

しかしながら，日常での活用には直結せずとも，「日常で使われる数学」を支える数学もある．この補足集では，そういった話をしようと思う．

3.3.1　二項定理

$(a+b)^n$ の展開について考えてみよう．

このとき $a^m b^{n-m}$（m は $m \leq n$ となる自然数）の係数はいくつだろうか．

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ を計算する．ただし，同じ項同士を足し合わせないままとする．すると，各項は a か b を各々の（　　）について選んで掛けたものになる．

例　　$(a+b)^2$

縦軸を 1 つめの $(a+b)$，横軸を 2 つめの $(a+b)$ として考えてみよう．

	a	b
a	aa	ab
b	ba	bb

したがって，$(a+b)^2 = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$ である．

問題 3.20　$(a+b)^3$ について，同様の表を作ってみよ．

$(a+b)^4$ は図示できないが，$(a+b)^3$ に右から $(a+b)$ を掛ければ問題ない．3 乗を展開した項に右から $(a+b)$ をかけるので，3 乗を展開したそれぞれの項の右端に a が加わったものと b が加わったものができる．

厳密な証明は省略したが，$(a+b)^n$ を展開すると，a または b の n 個の組み合わせがすべてのパターン出るということがわかっただろう[*12]．

さて，全パターンのうち，a が m 個，b が $(n-m)$ 個のパターンは何個あるだろうか．

n 個の文字のうち，a にする文字 m 個がどこにあるかの場合の数なので，${}_n\mathrm{C}_m$ である．実数同士の積は可換なので，この個数こそが $a^m b^{n-m}$ の係数である[*13]．

問題 3.21　$(x+1)^5$ を展開した時，x^3 の係数はいくつか．

問題 3.22　$(x+3)^4$ を展開した時，x^2 の係数はいくつか．

[*12] 厳密な証明には数学的帰納法を使う．数学的帰納法の考え方さえ理解しておけば今まで学んだ数学 IA の知識のみで証明できる．

[*13] 例えば $n=4$ のとき，$aaab$，$aaba$，$abaa$，$baaa$ はいずれも a^3b なので，a^3b の係数は 4 である．

3.3.2 確率変数と確率質量関数

現実のサイコロの出目は，目によって出る確率が違う．そこで，それぞれの目が出る確率を表すのに使うのは関数である．このような関数を**確率質量関数**と呼び，入力値（**確率変数**）は「出目」であり，出力値は「その目が出る確率」である．

サイコロの出目の確率質量関数						
確率変数 X	1	2	3	4	5	6
確率 $P(X)$	0.20	0.17	0.16	0.16	0.16	0.15

一般に，入力値（確率変数）によりその入力値（確率変数）の出現確率が決まっているものならば，「出現確率は確率質量関数 $P(X)$ により制御されている」と言えるだろう．取りうるすべての確率変数とその発生率の対応関係のことを**確率分布**と呼ぶ．

確率変数は離散値であれば，大小関係の無い値でも構わない．

例えば，東京で無作為に声をかけた人間の血液型を確率変数とすれば，$X = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{O}, \mathrm{AB}$ を取り，$P(\mathrm{A}), P(\mathrm{B}), P(\mathrm{O}), P(\mathrm{AB})$ は声をかけた相手がそれぞれの血液型である確率である．ただし，連続値の場合，確率質量関数を定義することはできない．その場合の対処方法は存在する[*14]．統計講座にて確かめてほしい（宣伝）．

問題 3.23　ビジネス・プライベートシーンで確率質量関数を知りたいことは多い．一つ例示せよ．

3.3.3 二項分布

一定確率 p で表が出るコインがある．

このコインを n 回投げたときに，表が何回出るかを考える．表が出た回数 X（X は $0 \leq X \leq n$ となる整数）を確率変数としたときの確率質量関数 $P(X)$ を求めてみよう．

[*14] 例えば 0〜1 の実数のままでは連続値だが，0.1 刻みの階級に区切ってやることで離散化することができる．そうすれば確率質量関数を定義できる．

まずは，$n = 5$ で考えてみる．このとき，$P(0)$ から $P(5)$ を求めてみよう．

$P(0)$ は，5 回ともハズレなので，$(1-p)^5$ である．（積の法則）
$P(1)$5 回中 1 回アタリ，4 回ハズレである．1 回アタリ，4 回ハズレは

OXXXX　　XOXXX　　XXOXX　　XXXOX　　XXXXO

の 5 パターンあり，それぞれが発生する確率は $p(1-p)^4$ である．それぞれのパターンは背反なので，和の法則が使えて，$5p(1-p)^4$ である．

$P(2)$ は，5 回中 2 回アタリ，3 回ハズレである．2 回アタリ，3 回ハズレは，どこで当たるか考えれば良いので ${}_5\mathrm{C}_2$ パターンあり，それぞれが発生する確率は $p^2(1-p)^3$ である．それぞれのパターンは背反なので，和の法則が使えて，${}_5\mathrm{C}_2\ p^2(1-p)^3$ である．

$P(3)$ 以降についても同様.

この分布を二項分布と呼ぶ．確率質量関数が二項展開の係数に似ているからである．

問題 3.24　確率 p でアタリが出る試行を n 回行う場合のアタリの回数の分布を求めよ．

二項分布は，アタリの確率 p と試行回数 n によって，どのような確率質量関数を持つかが決まるのだ.

問題 3.25　二項分布の例を挙げよ．