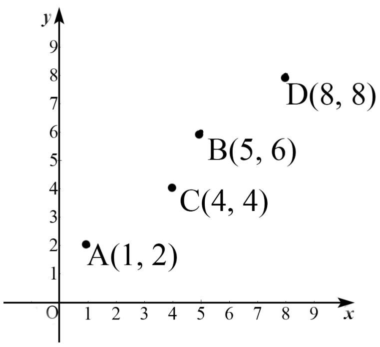
第 7 章

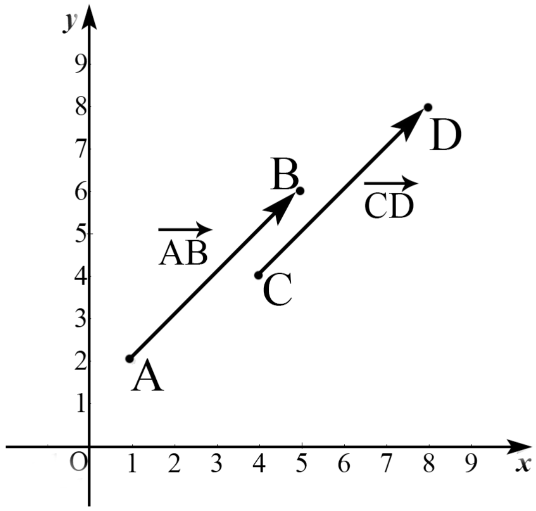
ベクトル

7.1　ベクトルとは 2 点間の相対位置を表すものである

今，下図のように直交座標平面上に 4 点 $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(5,6), \mathrm{C}(4,4), \mathrm{D}(8,8)$ があるとする．



点 A から B に向けて直線 AB 上を動く際の「動き」のことを「ベクトル AB」と呼び，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．



この動き（ベクトル）を決めるのは，**方向**と**長さ**である．
したがって，動かし方が直線に限定されているので，どの方向にどれだけの長さ動かすかを決めさえすれば，動かし方は一意に定まることになる．

ここで重要なのは，ベクトルを一意に定めるのに始点や終点は決めなくてよいということだ．

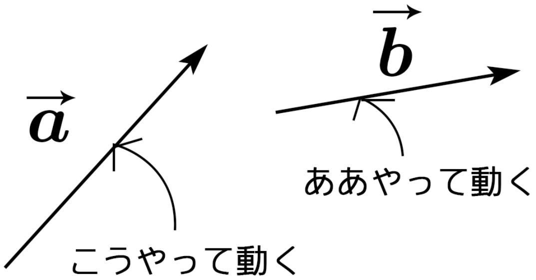
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は，始点終点は異なるが，「動かし方」は同じなので同じベクトルであると解釈する[*1]．

7.2　ベクトルの演算の定義

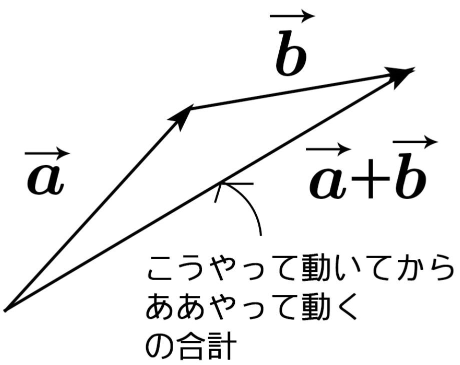
7.2.1　ベクトルの足し算

まずはベクトル同士の足し算を定義する．

「(こうやって動く)+(ああやって動く)」が「こうやって動いてからああやって動く合計の動き」となるように定義したい．



「$\vec{a}$ の動きを行った後に $\vec{b}$ の動きを行った合計の動きを 1 つのベクトルで表したものが $\overrightarrow{a+b}$ である」というイメージだ．



*1 どちらも x 軸方向に $+4$，y 軸方向に $+4$ 動かしていることに注目せよ．すなわち，右上 45° の方向に長さ $4\sqrt{2}$ 動かしている．

7.2.2　ゼロベクトル

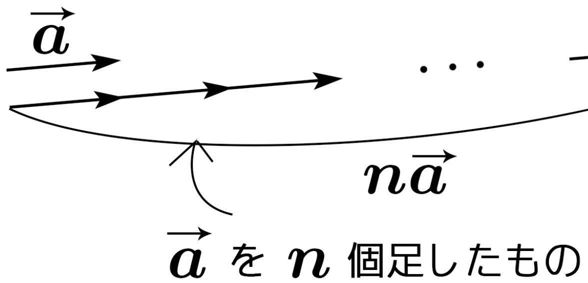
一切動かないベクトルを 0 ベクトルと定義し，$\vec{0}$ と書く．

当然，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ である．

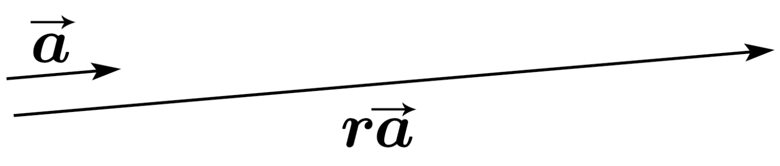
7.2.3　ベクトルの定数倍

次に，ベクトルの定数倍を定義する．

実数同士の掛け算を定義する際に，まずは足し算を自然数回足し算することに着想を得て，それを実数全体に拡張したことを思い出してほしい．



$n\vec{a}$ は「$\vec{a}$ を n 回足した動き」，すなわち $\vec{a}$ と同じ向きだが長さが n 倍のベクトルである[*2]ことに着想を得て，$r\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きだが大きさが r のベクトルであると定義する．ただし，n は自然数，r は正の実数である．

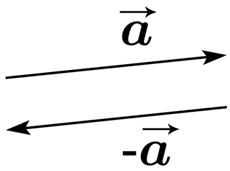


[*2] ベクトルの足し算の定義より．

7.2.4 $-\vec{a}$

次に，ある $\vec{a}$ $(a \neq 0)$ に対して $-\vec{a}$ を定義する．
これも実数の負の数の定義に似た定義を採用する．

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ となるように $-\vec{a}$ を定義する．



これは，$\vec{a}$ と同じ大きさで向きが $180°$ 回転したベクトルのみである．

$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$ と考えることで，「**7.2.3　ベクトルの定数倍**」の r を負数まで拡張することができる．

7.3 ベクトルの演算に関する便利な定理

以下の定理[*3]を見ていこう．

定理 1　$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

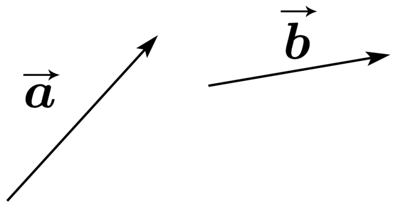
定理 2　$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

定理 3　$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\,\vec{a} + r\,\vec{b}$

問題 7.1　定理 1〜3 を図を描いて確認せよ．
ただし，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 2 次元空間内のベクトル，r は実数とする．

[*3] **注意**：本講座ではこの節の内容を「定理」として紹介するが，以下のような性質を持つ演算を「足し算」「定数倍」などと定義することもできる．数学全体に言えることではあるが，特にこの章は何を定義として話を展開しているかを注意してほしい．なぜなら，ベクトルの定義を章の途中で何度か更新する予定だからだ．

問題 7.2　以下の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，1.〜5. のベクトルを作図せよ．



1. $\vec{a} + \vec{b}$

2. $1.5\,\vec{a}$

3. $\vec{a} - \vec{b}$

4. $2\,\vec{a} + \vec{b} - 4\,\vec{a}$

5. $\dfrac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})$

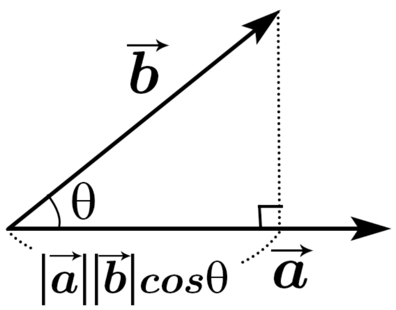
問題 7.3　問題 **7.2** の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて，$r\,\vec{a}+(1-r)\vec{b}$ を作図せよ．ただし r は $0 \leq r \leq 1$ を満たす実数とする．

7.4　内積

ここまでにベクトル同士の足し算と引き算を定義したが，掛け算や割り算に相当するものは存在しなかった．

この節ではベクトル同士の「内積」を定義する..

定義： $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と表す[*4]．
ただし，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ はそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ の大きさのことであり，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度である．



$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{a}=\vec{0}$ であるときは，内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める．

[*4] 内積はベクトルではなく実数であることに注意せよ．

問題 7.4　以下の定理を示せ.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
3. $(r_1 \vec{a}) \cdot (r_2 \vec{a}) = r_1 r_2 \vec{a}$

7.5　ベクトルの次元は 2 次元でなくても構わない

3 次元空間内においてもベクトルを定義することができる．なぜなら，3 次元空間内においても向きと大きさを定義できるからだ.

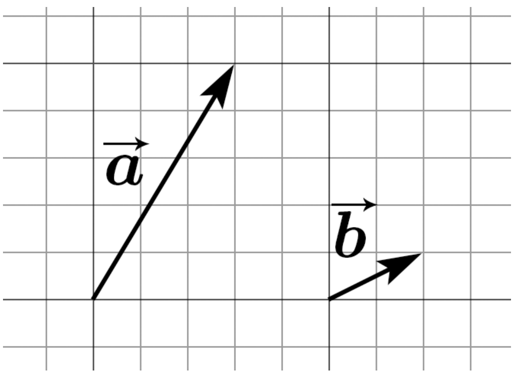
3 次元空間内の 2 つのベクトル同士の演算においては，その 2 つのベクトルにのみ注目することで，2 次元空間内のベクトル同士の演算と同様に足し算や内積を定義できる.

さらに，3 次元空間の場合同様，n 次元空間でも同様に定義することができる.

7.6　座標を用いてベクトルを表記しよう

これまで動きの方向と大きさを指定してベクトルを考えてきた．しかし，このままではベクトルを表現するのが面倒である.「こっち向きに大きさ 3 のベクトル」と毎回言うという問題が生じてしまうのだ.

この問題を解決するために，まずは直交座標軸を導入してみよう.



このとき，$\vec{a}$ は x 軸方向に $+3$，y 軸方向に $+5$ 動かす動きなので，$\vec{a}=(3,5)$ と書くことにする．

同様に $\vec{b}$ は x 方向に $+2$，y 軸方向に $+1$ 動かす動きなので，$\vec{b}=(2,1)$ と書く．

問題 7.5　上記の $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ が $(3+2,\,5+1)=(5,6)$ と書けることを確認せよ．作図して示してもよいし，別の方法を用いても構わない．

問題 7.6　$2\,\vec{a}$ が $(2\times 3,\,2\times 5)=(6,10)$ と書けることを確認せよ．

問題 7.7　座標を用いた書き方をしても，7.3 で示した以下の定理 1〜3 が成立することを確認せよ．

定理 1　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

定理 2　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

定理 3　$r(\vec{a}+\vec{b})=r\,\vec{a}+r\,\vec{b}$

ヒント：　$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，$\vec{c}=(c_1,c_2)$ と置いてみよ．

コラム：　マジック・ザ・ギャザリングと著者の思い出

受講者の皆さんは「マジック・ザ・ギャザリング」というカードゲームをご存知だろうか．このゲームの中ではプレイヤーは魔術師になりきり，カードで示された配下のクリーチャー（魔法生物）を使役して対戦相手の魔術師を打ち破ることを目的としている．クリーチャーにはパワー（攻撃力）とタフネス（耐久力）が与えられていて，カードには「パワー/タフネス」の形で表記されている．

下に示したカードの「シヴ山のドラゴン」は 5 のパワーと 5 のタフネスを，「甲鱗のワーム」は 7 のパワーと 6 のタフネスを持っていることになる．

このままでは単にパワーやタフネスが大きいクリーチャーを使役したプレイヤーが勝つだけだが，先程言ったとおりプレイヤーは魔術師である．したがって強化魔法を唱えてクリーチャーのパワーやタフネスを増減させられるのだ．例えば「巨大化」を唱えればパワーが 3，タフネスが 3 上がり，「次元の歪曲」を唱えればパワーが 3 上がり，タフネスが 3 下がることになる．

したがって，5/5 の「シヴ山のドラゴン」に +3/−3 の修正を与える「次元の歪曲」を唱えれば，「シヴ山のドラゴン」はパワー 8，タフネス 2，すなわち 8/2 になるというわけだ．

このゲームは 1993 年生まれで，昨年 25 周年を迎えた．ファンの年齢も子供から大人まで幅広い．30 歳の著者も 20 年ほど前にこのゲームに出会い，非常に長い付き合いをしている．

前置きが長くなったが，ここで幼き日の著者とマジックとベクトルについてのエピソードを紹介しようと思う．

12 歳ごろの著者はすでにこのゲームの大ファンで，小学校や中学校の友人と日々「勝つための戦略」の研究に余念がなかった．

マジックにおいて，ゲームに使うカードの束（デッキ）に使うカードはプレイヤーが選択することができる．つまり，デッキの構築からすでにゲームは始まっているのだ．当然ながら強いカードと弱いカードとがあり，プレイヤーはカードの強さを正しく評価しなければならない．そのためにはまず，クリーチャー

や呪文の強さの可視化や数学的システム化が必要だと幼き日の著者著者佐藤少年は考えたのだった．

例えば，パワー 4，タフネス 2 のクリーチャーのことを，マジックプレイヤーは省略して「4/2（「ヨン・ニ」と発音)」と呼ぶ．クリーチャーの話題において，先に「4」といえばその数は必ずパワーを表し，後に「2」といえばその数は必ずタフネスを表すのだ．この表現法はいわばマジックプレイヤー同士のお約束であり，皆このフォーマットを守って会話することによって，いちいち「パワー 4，タフネス 2」と言わないでも簡潔に意思疎通をすることができる．

著者は，当時佐藤少年がこのパワー・タフネスの表現に対して，「これはまるで，xy 座標における $(4, 2)$（やはり「ヨン・ニ」と発音する）のようだ」と感じたことを記憶している．そしてその瞬間，様々なクリーチャーたちが xy 平面座標ならぬパワー・タフネス平面座標の上にいるものと理解できたのだ．

佐藤少年は，さらに，$+3/+3$ の修正を受けた 4/2 のクリーチャーが 7/5 になることを，「$(4, 2)$ にある点が $(7, 5)$ に移動した」と置き換え，$+3/+3$ の修正は $+3/+3$ だけ座標を変える要素なのではないかと考えるに至った．

当時の佐藤少年はベクトルという言葉を知らなかったが，現在の著者の知識で言えば，これは「ベクトル」，すなわち $(+3, +3)$ のベクトルと呼ぶべきである！

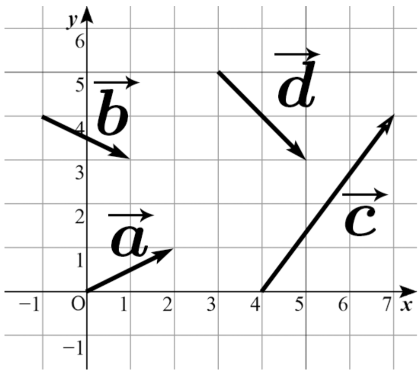
7.6.1　ベクトルの成分と演算

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ の a_1 を $\vec{a}$ の x 成分，a_2 を $\vec{a}$ の y 成分という．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，三平方の定理より，大きさは

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

問題 7.8　図ののベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分で表し，それぞれの大きさを求めよ



問題 7.9　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ とする．p.83 に示した定理 1〜3 を適宜用いて，以下のベクトルを成分で表せ．また，その大きさを求めよ．

1. $\vec{a}+\vec{b}$
2. $\vec{a}-\vec{b}$
3. $2\vec{a}+3\vec{b}$
4. $2\vec{b}-\vec{a}$

問題 7.10　$\vec{a} = (1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ -1)$ とする．以下のベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

ヒント：$s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s, t$ は実数$)$ とおく．

1. $\vec{c} = (4,\ 5)$

2. $\vec{d} = (2,\ -2)$

3. $\vec{p} = (-2,\ 8)$

4. $\vec{q} = (-4,\ 4)$

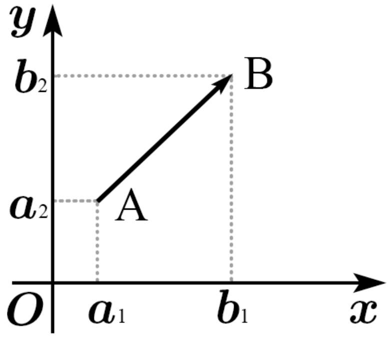
7.6.2　ベクトルの成分と座標

下の図のように，2 点 A，B に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

である．



問題 7.11　以下の点 A，B に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ．

1. $\mathrm{A} = (0,\,0)$，$\mathrm{B} = (1,\,2)$

2. $\mathrm{A} = (-2,\,-1)$，$\mathrm{B} = (-1,\,-2)$

3. $\mathrm{A} = (2,\,-3)$，$\mathrm{B} = (0,\,0)$

4. $\mathrm{A} = (1,\,0)$，$\mathrm{B} = (-1,\,2)$

問題 7.12　点 $\mathrm{A} = (1,\,2)$ を始点とする $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が以下の成分を持つとき，点 B の座標を求めよ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,\,2)$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\,5)$

3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\,-4)$

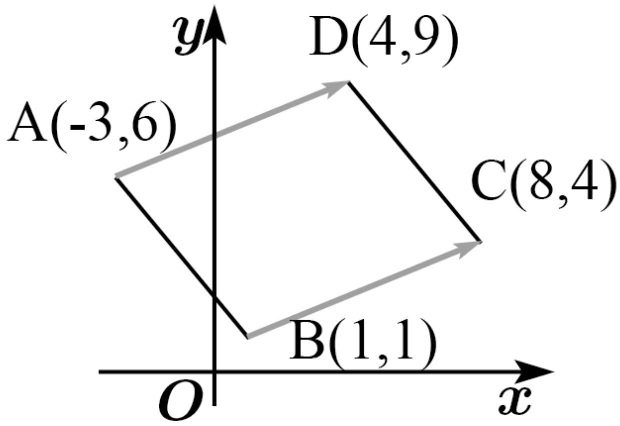
4. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\,-2)$

以上のようにベクトルの成分を考えると，図形の問題もベクトルに置き換えることができる．

例題 1　4 点 $A = (-3, 6)$，$B = (1, 1)$，$C = (8, 4)$，$D = (4, 9)$ を頂点とする四角形が平行四辺形であることを，ベクトルを用いて示せ．

例題 1 の解

向かい合う 2 つの辺が平行で同じ長さの四角形は平行四辺形となることを用いて示していこう．



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= (4-(-3),\ 9-6)\\ &= (7,\ 3)\\ \overrightarrow{BC} &= (8-1,\ 4-1)\\ &= (7,\ 3)\end{aligned}$$

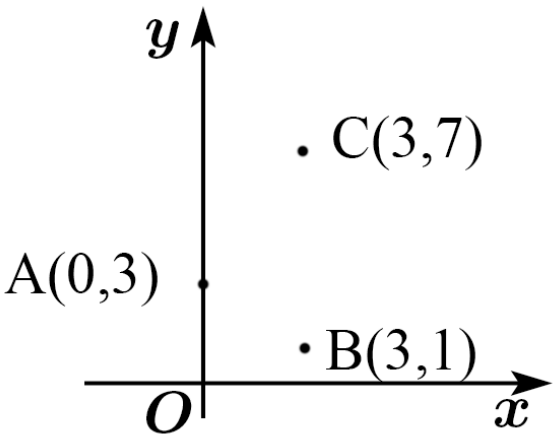
ゆえに

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

よって，四角形 ABCD は平行四辺形である．

証明終わり

問題 7.13　3 点 A，B，C を 3 つの頂点とする平行四辺形は 3 通り考えられる．3 通りそれぞれの場合について，第 4 の頂点の座標を求めよ．



問題 7.14　以下の 3 点が，それぞれ同一直線状にあるかどうかを，ベクトルを用いて示せ．

ヒント：3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が平行な場合，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k があるとき．

1. (3, 4)，(4, 7)，(6, 13)

2. (0, 1)，(1, 4)，(3, 10)

7.6.3　ベクトルの成分と内積

p.81 の 7.4 では，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ と定義した．

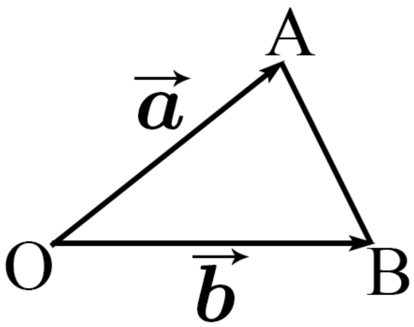
では，内積を成分で表すとどうなるだろうか．

内積と成分　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta\,(0<\theta<\pi)$ とし，始点 O を定め，

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \angle\mathrm{AOB}=\theta$$

とする．



$\triangle$OAB に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta \qquad \ldots(1)$$

が得られる．式 (1) は $\theta=0$，π のときにも成り立つ．

ここで，

$$\mathrm{AB}^2=|\mathrm{AB}^2|=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$\mathrm{OA}^2=|\mathrm{OA}^2|=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$$

$$\mathrm{OB}^2=|\mathrm{OB}^2|=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2$$

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

なので，式 (1) に代入して，

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2}\Big(\big((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)\big) - \big((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\big)\Big)\\ &= a_1b_1 + a_2b_2\end{aligned}$$

この等式は，$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときにも成り立つ．

問題 7.15 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ．

1. $\vec{a} = (1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ -1)$
2. $\vec{a} = (-2,\ 3)$，$\vec{b} = (4,\ 1)$
3. $\vec{a} = (1,\ -2)$，$\vec{b} = (5,\ 3)$
4. $\vec{a} = (2,\ -1)$，$\vec{b} = (1,\ 3)$

また，内積の式を

$$cos\,\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \qquad \text{ただし } 0 < \theta < \pi$$

と変形すると，ベクトルの成分から 2 つのベクトルのなす角が求められる．

問題 7.16 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ．

1. $\vec{a} = (-1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ -1)$
2. $\vec{a} = (2,\ 4)$，$\vec{b} = (-1,\ 3)$
3. $\vec{a} = (-1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b} = (\sqrt{3},\ 3)$

ここで，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直のとき，$\theta = \dfrac{\pi}{2} = 0$ なので，

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{ならば} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

逆に，$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\cos\theta = 0$ となるのは $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときに限るので，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ならば} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

が成り立つ．

問題 7.17　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ．

1. $\vec{a} = (1,\, 2)$，$\vec{b} = (t + 1,\, -t)$

2. $\vec{a} = (1 - 2t,\, 3)$，$\vec{b} = (1,\, 2t + 1)$

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるのは，$\theta = 0$ で同じ向きに平行のときと，$\theta = \pi$ で反対の向きに平行なときである．このとき，$\cos\theta = 1$ または $\cos\theta = -1$ なので，ベクトルの平行については次のことが成り立つ．

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \ \text{または}\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

これを成分を用いて表すと

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

となる．

例題 2　「$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0$」が成り立つことを示せ.

例題 2 の解

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \quad \iff \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}| \quad \iff \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

より,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

両辺を展開して

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2 = a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$$

整理すると

$$a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 = 0$$

よって,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = 0$$

ゆえに,

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

したがって,

$$\vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{b} \iff a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

証明終わり

問題 7.18　以下のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，t の値を定めよ．

1. $\vec{a} = (1,\, 2)$，$\vec{b} = (t,\, 1-t)$

2. $\vec{a} = (1,\, t)$，$\vec{b} = (t+2,\, 3)$

コラム： 内積の使い方

ベクトルの演算を学ぶ過程で，「足し算」「引き算」とすらすらと進んでいき，次に「掛け算っぽいもの」として「内積」の定義が出てくると，はて？ と悩む人がほとんどではないだろうか．そして，内積を用いると以上に述べたようにコサイン θ を出して角度を求められると分かると，なるほど，妙な定義だけれど角度を求められて便利なのだなと自分を納得させたのではないだろうか．

数学 1b の講座のときから繰り返し述べてきたが，数学は「こういうものを定義すると便利」の積み重ねで出来ている．したがって，仮に定義しても役に立たないものを定義してしまったとしても，そういうものは時の流れとともに淘汰されていく．

その中で生き残っている「内積」である！ これを単に角度求めるツールとして片づけてしまうのはもったいない．

例えば，「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の x 成分は同じ」という日本語を数学語に表現したいとすると，

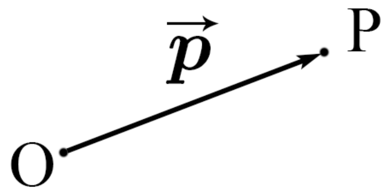
$$\vec{a} \cdot (1,\, 0) = \vec{b} \cdot (1,\, 0)$$

と，さらりと表現できる．いかにも「数学のできる人」感が漂う．

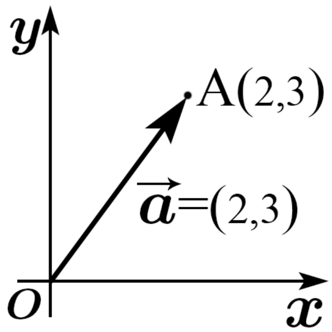
興味のある人は確認してみよう．

7.7　位置ベクトル

ベクトルの始点を固定して考えると，任意の点 P の位置を $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって定めることができる．



例えば，点 A(2, 3) の位置ベクトルは $\vec{a} = (2, 3)$ である[*5]．



したがって，中学数学の幾何などでよく出題される座標を求める問題は，この位置ベクトルで考えることができる．

学生時代に幾何が嫌いだった方々の中には，「幾何の問題は，ひらめかなければ終わりだから」という理由の方も多いと思う．こういうとき，この位置ベクトルを使って考えると，多少（というか，かなり）面倒な式にはなるが，取り敢えず式を立てて解くことができる．ひらめかないからと言って諦めるよりは，面倒でも計算すれば解けるのはありがたいときもある．

以下，ざっと見ていこう．

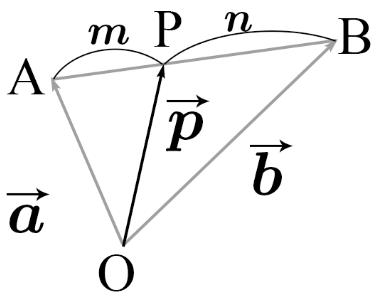
[*5] 点の座標と同じ表記になるので便利な一方，混同しやすいので注意が必要である．

7.7.1　ベクトルで表す内分点

例題 1　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) *6に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点はどこか.

例題 1 の解

下図のように求める内分点を P とする.



点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\end{aligned}$$

よって，

$$\vec{p} = \frac{n\,\vec{a}+m\,\vec{b}}{m+n}$$

特に，線分 AB の中点の位置ベクトルは，$m=n$ なので

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

である.

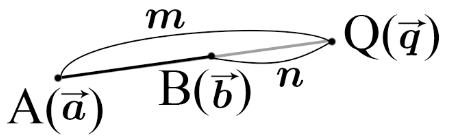
*6 位置ベクトルが $\vec{p}$ の点 P を P($\vec{p}$) と表す.

7.7.2 ベクトルで表す外分点

例題 2 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点はどこか．

例題 2 の解

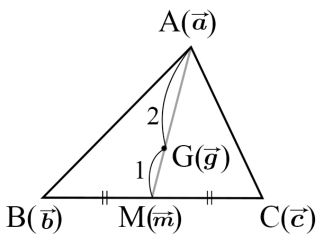
下図のように，求める外分点を Q とする．



点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned}
\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= \vec{a} + \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a}) \\
&= (1 - \frac{m}{m-n})\,\vec{a} + \frac{m}{m-n}\,\vec{b} \\
&= \frac{m-n-m}{m-n}\,\vec{a} + \frac{m}{m-n}\,\vec{b} \\
&= \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}
\end{aligned}$$

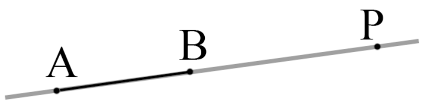
問題 7.19 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ に対して，△ABC の重心 $\mathrm{G}(\vec{g})$ の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



7.8　ベクトル方程式

次に，位置ベクトルを用いて直線を表すことについて考えてみよう．

「点 P が直線 AB 上にある」とはどういうことだろうか．



これは，まず原点 O から点 A まで行き，そこから AB を何倍かしたら点 P に行き着くということである．

逆に，点 A から AB を何倍かしても点 P に行き着かないとしたら，点 P は AB 上にないことになる．

すなわち，

点 P が直線 AB 上にある $\iff$ 点 A から AB を何倍かすると点 P に行き着く

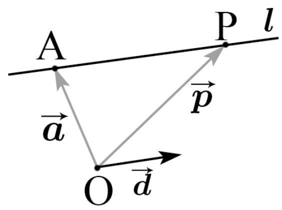
ということである．

それでは，そのような直線をベクトルを用いて表してみよう．

7.8.1　方向ベクトル

点 A を通り $\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線 l 上の点 P について

$$\vec{p} = \vec{a} + t\,\vec{d} \quad (t \text{ は実数}) \qquad \cdots (1)$$



が成り立ち，また，

式 (1) が成り立つとき，点 P は直線 l 上にある

ことになる．

式 (1) を，直線 l のベクトル方程式といい，t を媒介変数，$\vec{d}$ を方向ベクトルという．

7.8.2　2 点を通る直線のベクトル方程式

冒頭の例に戻り，2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を通る直線を l とすると，l は点 A($\vec{a}$) を通り，方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ である．

したがって，式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-t)\vec{a} + t\,\vec{b}\end{aligned}$$

となる．

すなわち，異なる 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を通る直線のベクトル方程式は

$$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\,\vec{b} \qquad (t \text{ は実数})$$

となる．

7.8.3　円のベクトル方程式

では，位置ベクトルを用いて円を表すとどうなるだろう．

座標平面上で，点 A($\vec{a}$) を中心とする半径 r の円を円 A とすると，

$$\boxed{\text{点 P が円 A 上にある} \iff |\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = r}$$

である．

したがって，

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

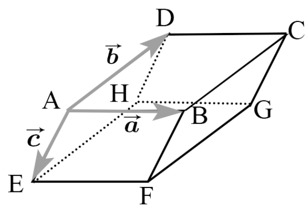
が円 A のベクトル方程式である．

7.9　空間ベクトル

以上，平面のベクトルについて詳しく説明してきたが，**7.5** で述べたように，ベクトルの次元は 2 次元でなくても構わない．

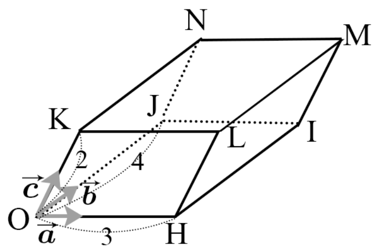
その中でも，我々になじみ深い 3 次元，すなわち，空間のベクトルについて見てみると，2 つのベクトル同士の演算は 2 次元平面内と同じである．

問題 7.20　平行六面体 ABCD-EFGH がある．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ として，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



1. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

問題 7.21　図のように，$\mathrm{OH}=3$，$\mathrm{OJ}=4$，$\mathrm{OK}=2$ の平行六面体があるとする．
$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ となるように OH，OJ，OK 上にそれぞれ点 A，B，C をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



1. $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

7.9.1 平面ベクトルと空間ベクトル

前述のように，空間ベクトルでも平面ベクトルと同じように演算ができた．
内積，内分点，外分点，ベクトル方程式などについても同様である．

すなわち，空間ベクトルにおいても，

内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\theta$$

内分点

$$\vec{p} = \frac{n\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m+n}$$

外分点

$$\vec{p} = \frac{-n\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m-n}$$

直線のベクトル方程式

$$\vec{p} = (1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$$

円の方程式

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

など，平面ベクトルと全く同じに表すことができる．

いや，むしろ，同じに表せるようにベクトルというものを作ってくれていると言うべきだろう．

ただし，言うまでもないが，成分で表すと，2 次元では x 成分と y 成分の 2 つだったものが，3 次元では x 成分，y 成分，z 成分の 3 つになる．

したがって，$\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ とすると，

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

であり，内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

などとする必要がある．

問題 7.22　2 つのベクトル $\vec{a} = (1,\, -3,\, 2)$，$\vec{b} = (-2,\, 3,\, -1)$ について，次のベクトルの成分を示せ．

1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{b}$
3. $2\vec{a} + 3\vec{b}$

問題 7.23　3 点 $\mathrm{O}(0,\, 0,\, 0)$，$\mathrm{A}(1,\, 2,\, 1)$，$\mathrm{B}(3,\, 1,\, -1)$ がある．次のベクトルの成分と大きさを求めよ．

1. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

2. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

3. $-3\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

問題 7.24　以下のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と，両ベクトルのなす角を求めよ．

1. $\vec{a} = (1,\ 2,\ 2)$，$\vec{b} = (1,\ 0,\ 1)$

2. $\vec{a} = (1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b} = (-2,\ 2,\ 4)$

3. $\vec{a} = (-3,\ 1,\ 2)$，$\vec{b} = (2,\ -3,\ 1)$

MEMO