# 第 2 章

# 集合と論理

## 2.1　イントロダクション

この単元は高校数学カリキュラムの中で，最も日常生活で役立つものに違いない．実際，筆者が数学をしていない時間[*1]において，方程式を解かない日よりも，集合・論理について考えない日の方がずっと少ない．

しかし，日常に根差しているからと言って学習するのが易しいというわけではなく，むしろ難しい単元だと思うのだが，人生を豊かにするためにも受講者の皆さんには是非とも内容をマスターしてほしい．

筆者が特に大切だと思うのは 2.3 で扱う「論理」である．日常生活で「論理的に考えろ」「非論理的な意見」などと言うときの「論理」であるが，そもそも「論理的である」とはどういうことなのかについて分かりやすく解説するためには 2.2 で扱う集合論が必須である．

## 2.2　集合

### 2.2.1　集合の定義

集合とは，要素の集まりに名前をつけたものである．要素の数は 0 個を含む有限個でも無限個でもよい．要素の数が 0 個の集合を空集合という．

[*1] 買い物をしたり，読書をしたり，友人や家族と会話をしたりする時間である．

有限個の要素を持つ集合の例

- 1 ケタの自然数の集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- この講座の受講者の集合 $B = \{A$ さん$, B$ さん$, C$ さん・・・$, L$ さん $\}$

無限個の要素を持つ集合の例

- 10 以下の正の数の集合 $C = \{x | 0 < x \leq 10\}$
- この教科書を未来永劫にわたって読む人間の集合[*2]
  $D = \{A$ さん$, B$ さん$,$・・・$\}$

集合の表記方法には以下の 2 通りがある．

表記法 1　全ての要素を表記する方法

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

表記法 2　含まれる要素の条件を書く方法

例えば，10 以下の正の数の集合を，$C = \{x | 0 < x \leq 10\}$ と書く．

**問題 2.1**　要素の数が有限個の集合と，無限個の集合を一つずつ例示せよ．

### 2.2.2　集合の演算

#### 和集合

集合 $A$ と集合 $B$ の和集合とは，集合 $A$ か $B$ のいずれか一方または両方に属している要素の集まりのことである．$A \cup B$ と書き，“$A$ カップ $B$” と読む．

例 1

$A = \{$ 自動車免許を持っている人 $\} = \{a, b, c, d\}$,

[*2] 今年の講座が終わっても，来年この講座を受講する方が読むだろうし，まだ生まれていない人もしかるべき年齢になったら読むかも知れない．そして地球が滅んでも地球外生命体が翻訳して読んでくれる…かもしれない．上限がない以上，無限個の要素を想定するのが良い．

$B = \{$ 英検一級を持っている人 $\} = \{a, d, e, f\}$ とすると，

和集合は，

$A \cup B = \{$ 自動車免許か英検一級のうち，少なくとも一方を持っている人 $\}$

$= \{a, b, c, d, e, f\}$

例 2

$A = \{x|x > 3,\ x \in N^{*3}\}$ と $B = \{x|x \leq 7,\ x \in N\}$　($N$ は自然数)　の

和集合は，

$A \cup B = \{$ 自然数全体 $\}$

問題 2.2　以下の集合 $A$，$B$ に対して，和集合 $A \cup B$ を示せ．

1. $A = \{x|x > 3\}$　$B = \{x|x \leq 1\}$　（数直線を用いよ）
2. $A = \{$ アメリカ人男性 $\}$　$B = \{$ ニューヨーク市民 $\}$　(要素数も考えてみよ)

## 共通部分

集合 $A$ と集合 $B$ の共通部分とは，集合 $A$ と $B$ の両方に属している要素の集まりのことである．$A \cap B$ と書き，“$A$ キャップ $B$” と読む．

例 1

$A = \{$ 自動車免許を持っている人 $\} = \{a, b, c, d\}$，

$B = \{$ 英検一級を持っている人 $\} = \{a, d, e, f\}$ とすると，

共通部分は，

$A \cap B = \{$ 自動車免許と英検一級の両方を持っている人 $\}$

$= \{a, d\}$

例 2

$A = \{x|x < 3\}$ と $B = \{x|x > 1\}$ の共通部分は

$A \cap B = \{x|1 < x < 3\}$

[*3] $x \in N$ は $x$ が集合 $N$ の要素であることを表す．

問題 2.3　以下の集合 $A$，$B$ に対して，共通部分 $A \cap B$ を示せ．

1. $A = \{$ 自然数全体 $\}$　　$B = \{x | x \leq 6\}$　　（数直線を用いよ）
2. $A = \{$ アメリカ人男性 $\}$　　$B = \{$ ニューヨーク市民 $\}$　　（要素数も考えてみよ）

### 全体集合

主に複数の集合を論じるときに，その集合の要素が属する全体のことを全体集合という．厳密な定義は「2.2.5 部分集合」で解説する．

日常的に集合を論じる場合，言外に，ある範囲内の要素のみに注目していることの方が多い．会社で「技術職の集合」「30 歳以下の集合」と言う場合，ほとんどの場合「うちの社員」が全体集合である*4．

### 補集合

集合 $A$ の補集合とは，全体集合に属するが，集合 $A$ に属さない要素からなる集合であり，$\overline{A}$（や $A^c$ など）と書く．当然ながら，$A$ と $\overline{A}$ には共通部分はない．そして $A$ と $\overline{A}$ を合わせると，全体集合になる．

問題 2.4　以下の集合の補集合を答えよ．その際，全体集合を明確にせよ．

1. $A = \{$ アメリカ人 $\}$
2. $A = \{$ 有理数 $\}$
3. $A = \{$ 30 歳以下のアメリカ人 $\}$　　（全体集合をアメリカ人とするか，世界中の人とするかによって答えが変わることに注意せよ）

## 2.2.3　集合の可視化

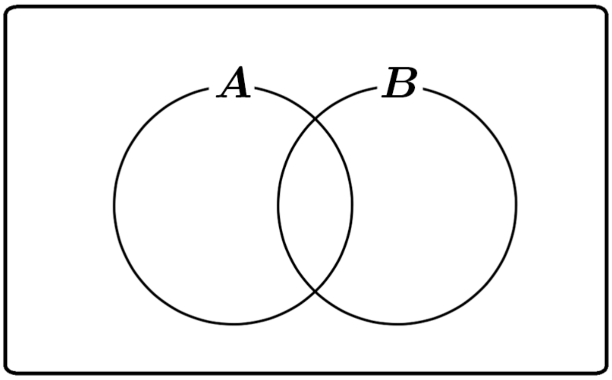
数直線により数の大小を可視化したり，グラフにより関数を可視化したりしたように，集合も可視化することができる．先にも述べたが，可視化は「数式だけで数学ができな

*4 曖昧な日常生活のみならず，数学でもたまに全体集合が表記されないことがあるのだが，そういう場合も実は全体集合が文脈的に明らかである．

い人が補助的に使う手段」ではなく，むしろ「数式を本当に理解した証」なのである．筆者も自然科学研究や数理統計において新しい数式を導いたら，可能な限り可視化している[*5]．確かに可視化には少し手間はかかるが，本講義では時間の許す限り，可視化できるものは積極的に可視化していこう．

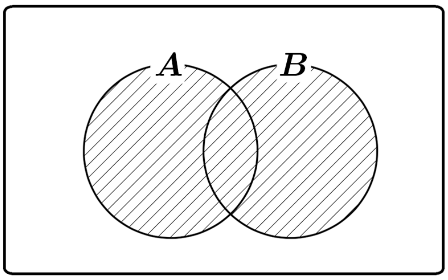
集合の可視化には，ベン図と呼ばれるいくつかの集合どうしの関係を表した図を使う．

今，集合 A と集合 B が図のように共通部分を持つとしよう．

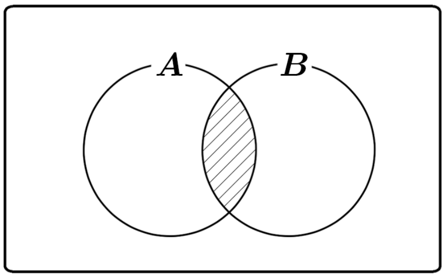



このとき $A \cup B$ と $A \cap B$ はどの部分だろうか．ベン図を使って図示してみよう．

$A \cup B$




$A \cap B$

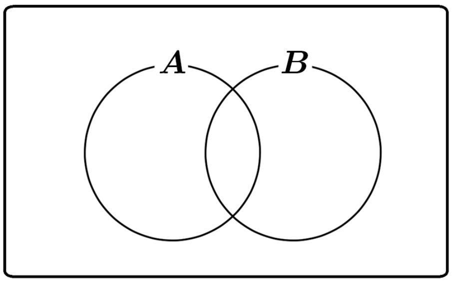



上図の斜線部分が，それぞれ，$A \cup B$ と $A \cap B$ を示している．

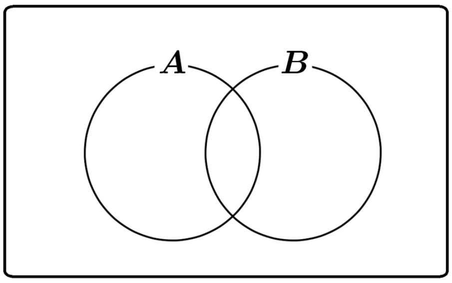
[*5] 4 次元空間を描画しないとグラフを描けないケースのように，可視化が困難だったり不可能だったりする数式も確かに存在する．そういう時も上手く工夫を凝らして，なんとかそれっぽい可視化ができないか考えるのだ．

問題 2.5　以下の集合を図示せよ．

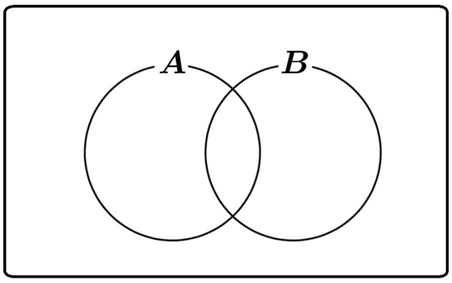
1. $\overline{A}$



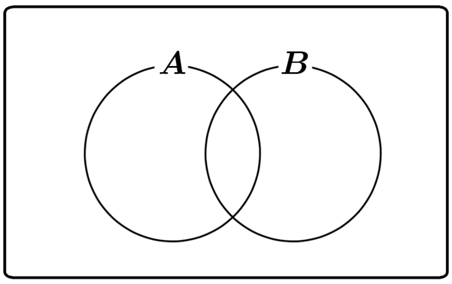

2. $\overline{B}$




3. $\overline{A} \cap \overline{B}$




4. $(\overline{A \cap B})$ [*6]




*6 このように，数式同様に（　）を用いて集合を表すことができる．数式同様，先に（　）の中の集合を考え，その後で（　）の外の操作（この場合は補集合をとること）を考えるのだ．

### 2.2.4　部分集合

部分集合とは，ある集合の一部分となる集合のことである．例えば { アメリカ人女性 } は { アメリカ人 } の部分集合である．{ アメリカ人 } は { 地球人 } の部分集合である[*7]．

より厳密に定義するのなら，

**集合 $A$ の任意の要素が，集合 $B$ の要素でもあるとき，集合 $A$ は集合 $B$ の部分集合である**

と書くことができる．このことを，記号を用いて書くなら

$$\forall a \in A \text{ に対して，} a \in B \text{ のとき，} A \subseteq B$$

となる．

**∀ と ∃**

「任意の○○が〜である」とは，「どの○○を選んでも〜である」という意味である．英語で言えば“any”であり非常に簡潔なので，英語に自信のある方はそちらで考えると良い[a]．記号の ∀ は any あるいは all の頭文字から取られている．

例：「任意の整数は，二乗すると負でない整数となる」

「任意の○○」と対になる言葉は，「少なくとも一つの○○に対して〜である」あるいは「〜である○○が少なくとも一つ存在する」である．英語で言えば“some”であり，やはり簡潔である．記号の ∃ は exist の頭文字から取られている．

例：「少なくとも一つの整数は，二乗すると 0 になる」

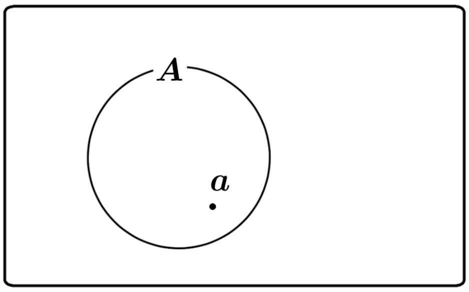
日本語にぴったり該当する概念が存在しないため学習するのは大変かもしれないが，この単元のみならず今後の数学の基礎となるのでしっかりマスターしよう．

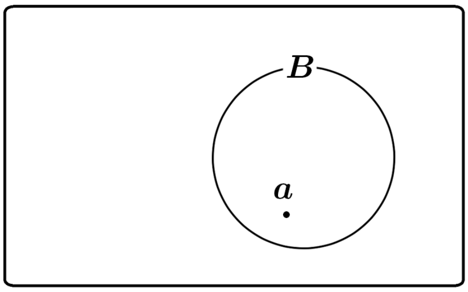
[a] むしろ，“any”という英単語を論理学的に正しく日本語で理解している人は意外と少ないだろう．一言で any を表す和語がないのだ．「全ての」が比較的近いが，「任意の」はひとつひとつ要素を取りだしてきて，条件に適合するかをチェックする意味合いである．「全ての」との違いについては「2．3 論理」の節で解説する．

[*7] 2017 年現在，アメリカは地球外に領土を持っていない．

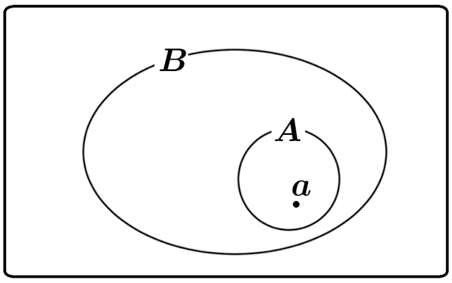
部分集合の定義を図にして理解してみよう．

１．集合 $A$ の要素ひとつに注目する．それが $B$ の要素でもあるかチェックする．

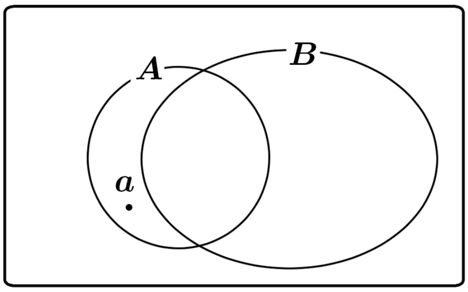



２．$A$ の任意の要素が $B$ の要素でもあるのなら，$A$ は $B$ の一部であると言ってよいだろう．




２’．逆に，$A$ の要素の中に，$B$ の要素でないものがあった場合，他の要素が $B$ の要素であったとしても $A$ は $B$ の部分集合ではない．




外延性の公理

ある集合 $A$，$B$ が，$A \subseteq B$ かつ $B \supseteq A$ ならば，$A = B$（集合 $A$ と集合 $B$ は同じ集合）である．

**全体集合**

全体集合を定義するときは，話題に上がっているすべての集合が全体集合の部分集合になるような集合を定義しなくてはならない．

**問題 2.6** 集合 $A$，$B$ の包含関係（どちらがどちらの部分集合になっているか，あるいは部分集合になっていないか）を記号で示せ．

1. $A = \{x|x > 0,\ x \in R\} = \{$ 正の実数 $\}$ （$R$ は実数）
   $B = \{x|x^2 > 0,\ x \in R\} = \{2$ 乗すると正になる実数 $\}$

2. $A = \{$ 動物 $\}$
   $B = \{$ 脚があるもの $\}$

3. $A = \{2,\ 3,\ 4\}$
   $B = \{x|(x-2)(x-3)(x-4) = 0\}$

### 2.2.5 ド・モルガンの定理

ド･モルガンの定理とは以下のものである．

**ド・モルガンの定理**

1 $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2 $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

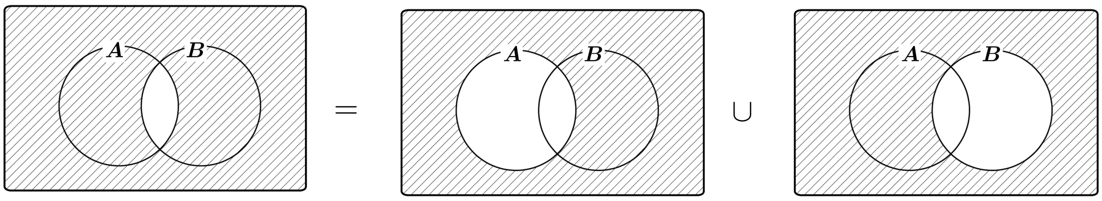
1’ $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$

2’ $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

このままでは分かりづらいので，ベン図を用いて解説する．

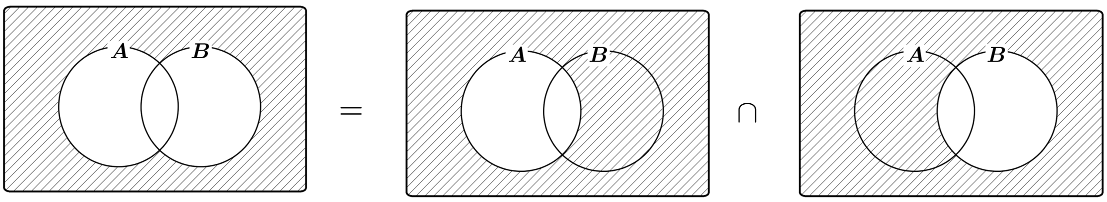
1，2 については

1



$\overline{(A \cap B)}$　　$\overline{A}$　　$\overline{B}$

2



$\overline{(A \cup B)}$　　$\overline{A}$　　$\overline{B}$

となる．

これらを日本語で解釈すると，1 は「『$A$ かつ $B$』」に属さない要素からなる集合は，$A$ でないか $B$ でないかの一方または両方である」となり，2 は「『A と B の和集合』に属さない要素からなる集合は，$A$ でなくかつ $B$ でもない」ということになる．

1'，2' については，ベン図を描けないので日本語で意味を解釈しよう．

1' は「『$A_1$ と $A_2$ と ... と $A_n$ の和集合』に属さない要素からなる集合は，$A_1$ でなく $A_2$ でなく ...$A_n$ でない」となり，2' は「『$A_1$ かつ $A_2$ かつ ... かつ $A_n$』に属さない要素からなる集合は，$A_1$ でないか $A_2$ でないか ...$A_n$ でないかの和集合である」ということになる．

1'，2' は日本語にしてもいまひとつ意味（あるいは定理のありがたみ）が分からないだろう．ド・モルガンの定理が真に輝くのは論理の問題を考える時である．現時点では，「そういうものがある」程度に抑えておいてもらいたい．

キーワードは“部分否定”と“全体否定”である．

## 2.3　論理

### 2.3.1　命題

命題とは，客観的に真偽を判定できる文章のことである．

例えば，「犬は哺乳類だ」は命題であり，真である．また，「猫は爬虫類だ」も命題であり，偽である．一方で「うさぎはかわいい」は主観的な判断なので命題ではない．

**問題 2.7**　以下の文章が命題か命題でないかを判定せよ．命題であるなら，真偽も答えよ．

1. $a > 0$，$b > 0$ ならば $ab > 0$ である．
2. $ab = 0$ ならば $a = b = 0$ である．
3. 今は円高である．
4. 2017 年は 2016 年に比べて円高である．
5. 一門にあらざらん者はみな人非人なるべし[*8]．

**問題 2.8**　命題の例を 1 つ挙げよ．

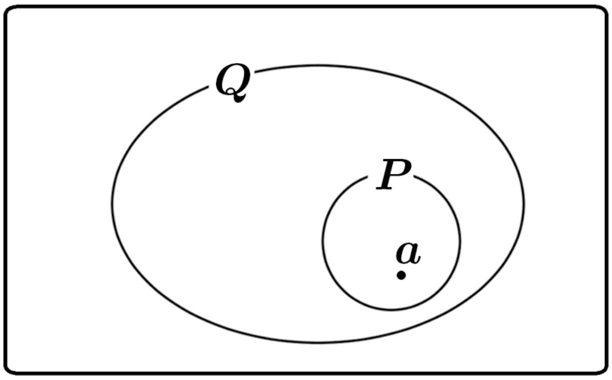
### 2.3.2　「$p$ ならば $q$ である」とはどういうことか

いよいよ論理の解説に入る．論理というのは基本的には「$p$ ならば $q$」の連続で成り立っている．まずは，基本ユニットである「$p$ ならば $q$」を集合論的な考えで解説する．今後，条件 $p$ を満たす要素の集合を $P$，条件 $q$ を満たす要素の集合を Q と書く．

今，$P$ が $Q$ の部分集合であるとする．（これを図示してみよ）

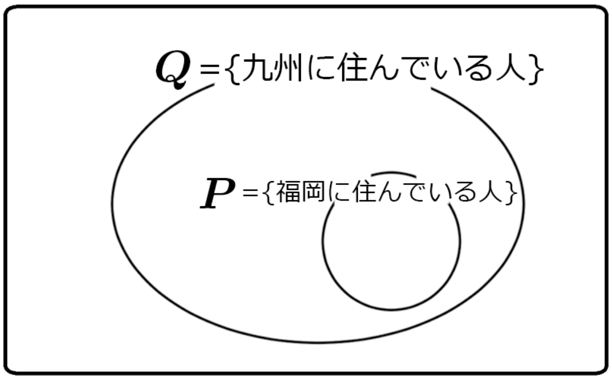
[*8] いわゆる「平家にあらずんば人にあらず」である．

このとき，ある要素 $a$ が $P$ の要素であるということは，$a$ が $P$ の丸の中にあるということである．




$Q$ の円は $P$ の円を含む円であるため，$P$ の円の中にあるということは，自動的に $Q$ の円の中にあるということになる[*9]．これを指して「$p$ ならば $q$」「$p \Rightarrow q$」と言うのだ．

例 1　集合 $P = \{$ 福岡に住んでいる人 $\}$ と集合 $Q = \{$ 九州に住んでいる人 $\}$ は，$P \subset Q$ の関係を持つ．福岡に住んでいる人（要素）は皆，九州に住んでいる人（要素）でもあるからだ．このとき，「福岡に住んでいるならば九州に住んでいる」と言える．



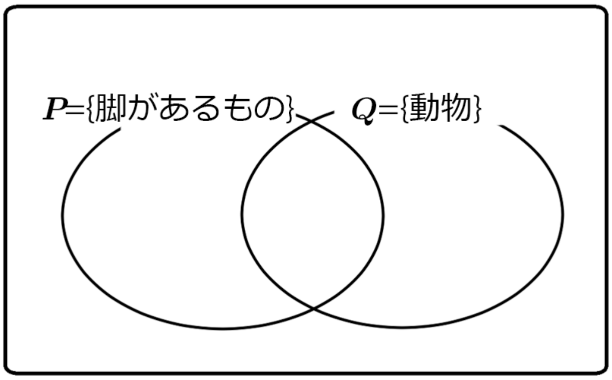

しかし，$Q \subset P$ ではないので，九州に住んでいるからといって福岡に住んでいるとは限らない．

[*9] 部分集合の定義からも明らかである．

例 2　　集合 $P=\{x|x>4\}$ と集合 $Q=\{x|x^2>9\}$ は，$P\subset Q$ の関係を持つ．このとき，$p$ ならば $q$ である．つまり，「$x>4$ ならば $x^2>9$」と言える．

**問題 2.9**　上の例をベン図を用いて説明せよ．

例 3　　集合 $P=\{$ 脚があるもの $\}$ と集合 $Q=\{$ 動物 $\}$ の包含関係はどうなっているだろうか．図示してみよう．




したがって，$p\Rightarrow q$ でも $q\Rightarrow p$ でもない．

**問題 2.10**　以下の集合 $P$，$Q$ の包含関係を図示せよ．命題 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$ はそれぞれ成立しているだろうか？ 集合 $P$，$Q$ の $\{\quad\}$ 中の条件文がそれぞれ条件 $p$，$q$ である．

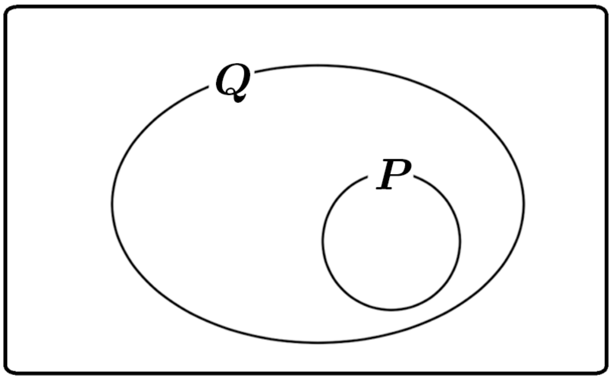
1. $P=\{(x,y)|x=0\}$
   $Q=\{(x,y)|xy=0\}$

2. $P=\{x|x=3\}$
   $Q=\{x|x^2=9\}$

3. $P=\{(x,y)|x=y=0\}$
   $Q=\{(x,y)|x^2+y^2=0\}$

### 2.3.3　必要条件と十分条件

今，$p \Rightarrow q$ とする．このとき，集合 $P$，$Q$ を図示すると $P \subseteq Q$ である．




図を見て明らかであるように，$P$ の要素であればその時点で $Q$ の要素でもあることが確定する（つまり，$q$ であるには，$p$ でありさえすれば十分である）．これを指して，$p$ は $q$ の**十分**条件であるという．

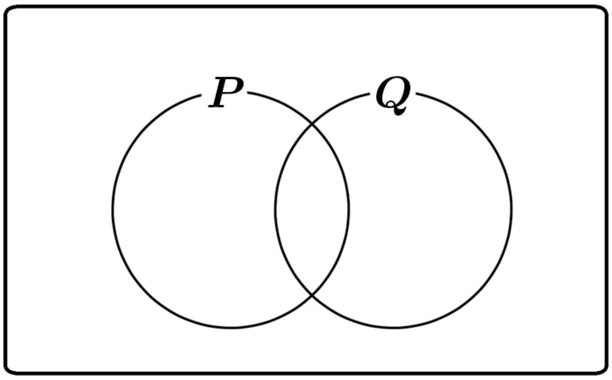
一方で，$Q$ の要素であることは $P$ の要素であることに必要不可欠である．これを指して，$q$ は $p$ の**必要**条件であるという．

例　　集合 $P = \{$ 福岡に住んでいる人 $\}$ と集合 $Q = \{$ 九州に住んでいる人 $\}$ は，$P \subset Q$ の包含関係，即ち $p \Rightarrow q$ の関係を持つ．このとき，福岡に住んでいる人であることは，九州に住んでいる人であることの十分条件であるといえる．また，九州に住んでいる人であることは，福岡に住んでいる人であることの必要条件である．

今，$P = Q$ とする．このとき，$P \subseteq Q$ かつ $Q \subseteq P$ である（外延性の公理）．

このとき，$p$ は $q$ の必要条件であり，$p$ は $q$ の十分条件でもある．$q$ は $p$ の必要条件であり，$q$ は $p$ の十分条件でもある．これを指して，「$p$ は $q$ の必要十分条件」「$q$ は $p$ の必要十分条件」という．

また，$P$，$Q$ が $P \subseteq Q$ でも $Q \subseteq P$ でもないとき（下図のような包含関係を持つとき），$p$ は $q$ の必要条件でも十分条件でもない．




**問題 2.11**　“$p$ は $q$ の必要条件でも十分条件でもない”という数学語を日本語で説明せよ．

**問題 2.12**　問題 2.10 における $p$ と $q$ がそれぞれ何条件か答えよ（「$p$ は $q$ の○○条件」という形で答えよ）．

**問題 2.13**　$p$ が $q$ の「必要条件」，「十分条件」，「必要十分条件」，「必要条件でも十分条件でもない」例をそれぞれ一つずつ挙げよ．「必要条件」，「十分条件」については，それが「十分条件」，「必要条件」でもあるかどうか判定せよ．

### 2.3.4　「または」と「かつ」(和集合・共通部分に似た概念)

「条件 $p$ と条件 $q$ が同時に成立する」という条件を $p \wedge q$ と書く．$p \wedge q$ を満たす要素全体の集合は $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ である．

また、「条件 p または条件 q の少なくとも一方が成立する」という条件を $p \vee q$ と書く．$p \vee q$ を満たす要素全体の集合は $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$ である．

### 2.3.5　否定

ある条件 $p$ が満たされている時には必ず満たされない条件がある．その条件を「$p$ の否定」といい，$\neg p$ と書く．その条件を満たす要素の集合を $\overline{P}$ と書く．

さて，受講者の皆さんは，一方に入るともう一方には必ず入らない関係を持つペアについて最近学習したのを覚えているだろうか．そう，「2.2　集合」で紹介した補集合である．ある要素が集合 $A$ に含まれる時には集合 $\overline{A}$ には含まれず，集合 $A$ に含まれない時には集合 $\overline{A}$ に含まれるのだった．

問題 2.14　以下の条件 $p$ の否定を求めよ．

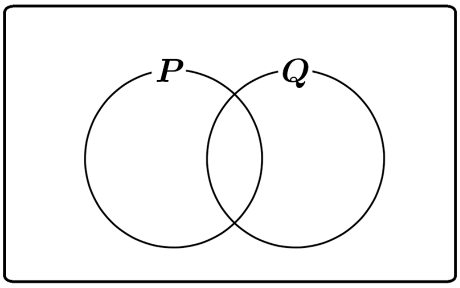
1. $p : x > 3$
2. $p$ : 福岡に住んでいる
3. $p : x$ は有理数

基本的に $\neg p$ は何か？ という問の答えは「$p$ でない」となってしまうので，あまり問題のバリエーションが作れない．難しいのはここからなので，心して聞いて欲しい．

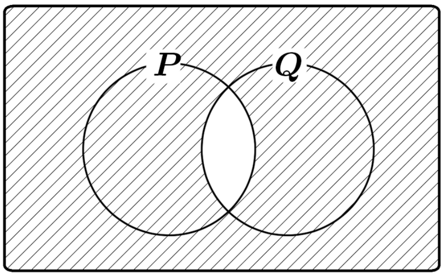
**例題** 条件 $p \wedge q$ の否定[*10]は何であろうか？

例題の解

ここでも可視化が有効手段である．
まず，$p$ を満たす要素の集合 $P$，$q$ を満たす要素の集合 $Q$，$p \wedge q$ を満たす要素の集合 $P \cap Q$ をベン図にする．




$\neg(p \wedge q)$ を満たす要素は，$\overline{(P \cap Q)}$ である．




$\overline{(P \cap Q)}$ は $\overline{P} \cup \overline{Q}$ である（ド･モルガンの定理を思い出そう）．$\overline{P}$ の要素であるということは，$p$ の否定を満たすということであり，$\overline{Q}$ の要素であるということは，$q$ の否定を満たすということである．したがって，$\overline{P} \cup \overline{Q}$ の要素であるということは，$p$ の否定を満たすか，$q$ の否定を満たすかのどちらか一方または両方であるということに他ならない．

この結果を式にすると，

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$$

ということになる．

[*10] 例えば，「福岡に生まれて，かつ今東京に住んでいる」という条件の否定などである．

**問題 2.15**　脚注 10 で言及した，「福岡に生まれて，かつ今東京に住んでいる」という条件の否定は何だろうか？

**問題 2.16**　以下の表を埋めよ．条件を満たしているときには○，そうでないときは × を記入せよ[*11]．

| | 福岡生まれ<br>神奈川在住の鈴木 | 鹿児島生まれ<br>東京在住の田中 | 福岡生まれ<br>東京在住の佐藤 | 鹿児島生まれ<br>神奈川在住の高橋 |
|---|---|---|---|---|
| 福岡生まれである | | | | |
| 東京在住である | | | | |
| 福岡生まれであり，<br>かつ東京在住である | | | | |
| 福岡生まれでないか，<br>東京在住でないか，<br>その両方である | | | | |

**問題 2.17**　条件 $p \vee q$ の否定は何であろうか？ 例題と同様に，ベン図を描いて説明せよ[*12]．

以上で，２つの条件 $p$，$q$ に対して

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q) \quad \text{および}$$
$$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

であることを確認した．

この証明にはド・モルガンの定理 1，2 を使ったが，1'，2' を用いて複数の条件 $p$，$q$，$r$r に対して　$\neg(p \wedge q \wedge r) = (\neg p) \vee (\neg q) \vee (\neg r)$ や $\neg(p \vee q \neg r) = (\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r)$ を示

[*11] この問題の狙いは，表の下 2 行がお互いに否定の関係になっていることを確認することである．一方が必ず○で，もう一方が × であることを確認して欲しい．

[*12] 例えば，「福岡に生まれたか，または東京に住んでいる」という条件の否定は何だろうか？

すこともできる．これらの結果も「（論理の）ド・モルガンの定理」と呼ぶことにしよう．

ここで，ド・モルガンの定理 1', 2' が無限個の集合についても適用できるものとする[*13]．このとき，以下の問いを考えてもらいたい．

**例題**　関数全体の集合を考える．関数に対する条件「任意の実数 $x$ に対して，$f(x) > 0$ である」の否定は何だろうか？

**例題の解**

「任意の実数 $x$ に対して $f(x) > 0$ である」という条件は，
「($x = 1$ に対して $f(x) > 0$）$\wedge$（$x = 1.01$ に対して $f(x) > 0$）$\wedge$（$x = \sqrt{2}$に対して $f(x) > 0$）$\wedge$（$x = 2$ に対して $f(x) > 0) \wedge \ldots$」
ということである．

ド・モルガンの定理より，

$$\begin{aligned}&\neg\Big((x = 1 \text{ に対して } f(x) > 0) \ \wedge\ (x = 1.01 \text{ に対して } f(x) > 0)\\&\qquad \wedge\ (x = \sqrt{2}\text{に対して } f(x) > 0)\ \wedge\ (x = 2 \text{ に対して } f(x) > 0)\ \wedge \ldots\Big)\\&= \neg(x = 1 \text{ に対して } f(x) > 0)\ \vee\ \neg(x = 1.01 \text{ に対して } f(x) > 0)\\&\qquad \vee\ \neg(x = 2 \text{ に対して } f(x) > 0)\ldots\end{aligned}$$

となる．右辺は，「少なくとも 1 つの $\neg(x =$ ナントカに対して $f(x) > 0)$ を満たす」という条件である．

$\neg(x =$ ナントカに対して $f(x) > 0)$ は，$(x =$ ナントカに対して $f(x) \leq 0)$ という条件に他ならない．

従って，条件「任意の実数 $x$ に対して，$f(x) > 0$ である」の否定は「少なくとも 1 つの実数に対して，$f(x) \leq 0$ である」ということになる．

記号を用いて書くと，

$$\neg(\forall x \in \mathbf{R} \text{ に対して } f(x) > 0) = (\exists x \in \mathbf{R} \text{ に対して } f(x) \leq 0)$$

となる．

[*13] 任意の有限個数の条件でド・モルガンの定理が成立するからと言って，無限個でも成立することは自明ではない．ここでは成立するものと認めて先に進むことにする．あるいは，ド・モルガンの定理を集合の「公理」として認めてしまおう．

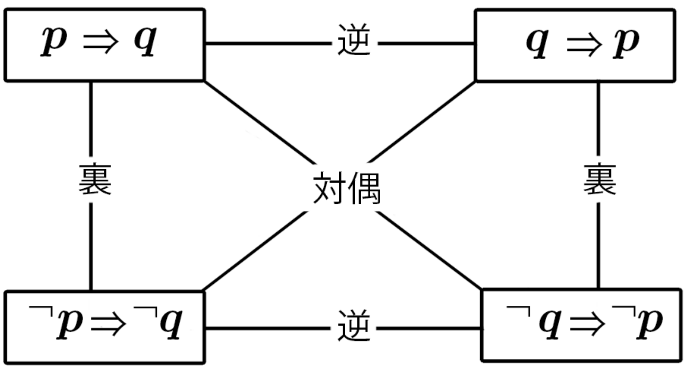
**問題 2.18**　関数全体の集合を考える．関数に対する条件「ある実数 $x$ に対して，$f(x) > 0$ である」の否定は何だろうか？

**問題 2.19**　以下の条件の否定を考えよ．

1. 私は任意の（全ての）太宰治作品が好きだ．
2. この中に少なくとも 1 人 Mac ユーザーがいる．
3. 任意の実数の組 $(x, y)$ に対して，$f(x, y) = 0$ である．
4. 少なくとも 1 つの実数の組 $(x, y)$ に対して，$g(x, y) = 3$ である．

### 2.3.6　命題の逆・裏・対偶

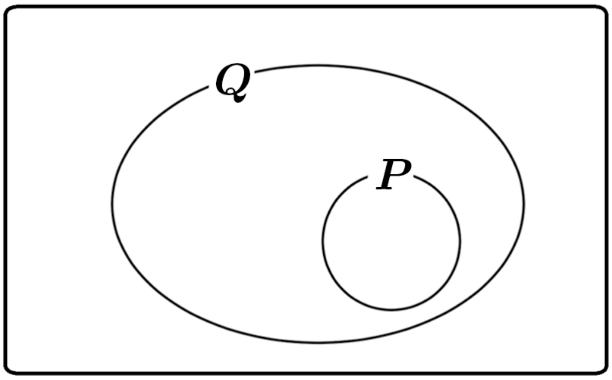
命題 $p \Rightarrow q$ ($p$ ならば $q$) がある．
「命題 $p \Rightarrow q$ の逆」とは，命題 $q \Rightarrow p$ ($q$ ならば $p$) である．
「命題 $p \Rightarrow q$ の裏」とは，命題 $\neg p \Rightarrow \neg q$ ($p$ でないならば $q$ でない) である．
「命題 $p \Rightarrow q$ の対偶」とは，命題 $\neg q \Rightarrow \neg p$ ($q$ でないならば $p$ でない) である．




**問題 2.20**　「カラスならば黒い」という命題の逆・裏・対偶を答えよ．

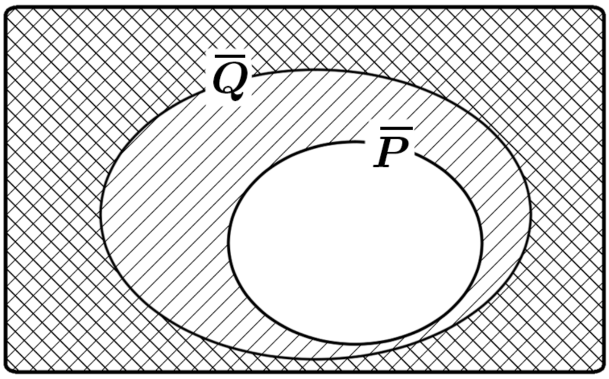
今，命題 $p \Rightarrow q$ が真であったとしよう．

$p$ を満たす要素の集合 $P$ と $q$ を満たす要素の集合 $Q$ の包含関係は $P \subseteq Q$ である．




このとき，$P = Q$ でない限り，$Q \subseteq P$ ではない．したがって，$p \Leftrightarrow q$ でない限り，$q \Rightarrow p$ ではない*14．

次に，$\neg p$ を満たす集合 $\overline{P}$ と $\neg q$ を満たす集合 $\overline{Q}$ の包含関係を考える．




$\overline{Q} \subseteq \overline{P}$ したがって，$\neg q \Rightarrow \neg p$ となる．つまり，**元の命題が真ならば，対偶も真である．**

また，$\overline{P} = \overline{Q}$（$P = Q$）でない限り，$\overline{P} \subseteq \overline{Q}$ ではない．したがって，$p \Leftrightarrow q$ でない限り，$\neg p \Rightarrow \neg q$ ではない*15．

ある命題が真であることを証明したい時に，その対偶が真であることを証明することの方が楽であることや，ある命題が分かりづらくとも，その対偶は分かりやすく真偽判断がしやすいことがよくある．正確に対偶を考えられるようになろう．

*14 「逆は必ずしも真ならず」というやつである．

*15 あえて言うなら，「裏は必ずしも真ならず」である．

問題 2.21　以下の命題は真である．このことを命題の対偶を用いて証明せよ．($n$，$a$，$x$，$y$ は実数）

1. $n^2$は偶数 $\Rightarrow n$ は偶数
2. $a^2$が 3 の倍数 $\Rightarrow a$ は 3 の倍数
3. $n^3+n^2+n$ が奇数 $\Rightarrow n$ は奇数
4. $x+y>0 \Rightarrow x>0$ または $y>0$

以上で集合と論理に関する章を終了する．

私が中学生・高校生のころ，この単元を苦手としている級友が多かったうえ，私自身しっかり理解できるまでにかなりてこずった印象があったので，今回の数学 1 A 講座ではそれなりの覚悟を決めて教壇に立っていた．開講当初の予定では，この章は 2017 年中には踏破できない高山だと思っていたのだ．しかしながら，受講者の皆さんが想像をはるかに上回る脚力で追いついてきてくださったので，私もここ数週間は教材作成に追われて嬉しい悲鳴だった．学ぶ者の自然言語能力にかなり依存する内容である分，大人になってから学ぶと中学高校時代に学ぶよりもスムーズに習得できる単元なのかもしれない．

補足：背理法

第 1 章で，$\sqrt{2}$ が無理数であることを示した際に，$\sqrt{2}$ が有理数だとすると矛盾が生じることを示した．これは，有理数の集合は無理数の集合の補集合である（有理数であるという条件は無理数であるという条件の否定である）ため，$\sqrt{2}$ が有理数の集合の要素でないことを示すことがそのまま無理数の集合の要素であることになったのだ．