第 4 章

積分の計算

この章では第 3 章で学んだ微分の考え方を活かして，第 1，2 章で導入した「積分」を計算しよう．

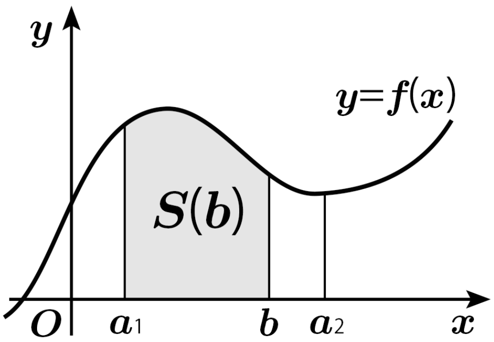
$\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$ の値を具体的かつ（近似計算ではなく）厳密に求めるのだ．

ただし，この高校数学 IIB 講座では，$f(x)$ が 1 変数の多項式の場合に限定する．

4.1　積分の計算方法

それでは，さっそく計算方法を示そう．

今，a_1 を定数として，$S(b) = \displaystyle\int_{a_1}^{b} f(x)\,dx$ と置く．これは，下図の斜線部分の面積に該当する．

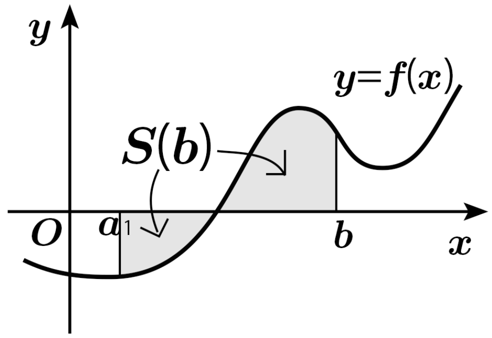


b の位置をずらすことによって，斜線部の面積は大きくなったり小さくなったりするのがわかるだろう．これは斜線部分の面積 S が積分区間の終わり b の関数であることに他ならない．関数 $S(b)$ さえ求めれば，我々が求めたかった

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$$

の値は，$S(b)$ に $b = a_2$ を代入して計算した $S(a_2)$ に他ならない．

また，$fx < 0$ となる領域の面積は -1 倍して足すことになる．なぜなら，積分とはあくまで「$f(x)\,dx$ の総和」なので，$f(x)$ が負となる x においては，-1 倍しないと負の値が足されることになってしまうからである．



ここで突然だが，関数 $S(b)$ を b で微分してみよう．

微分の定義より，

$$\frac{d\,S(b)}{db} = \lim_{db\to 0}\frac{S(b+db)-S(b)}{db} \qquad \text{(式 1)}$$

である．

ここで，右辺の分子 $S(b+db)-S(b)$ について考えてみると，これは，$S(b)$ の定義より

$$S(b+db)-S(b) = \int_a b+dbf(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

となる．ここで，積分の定義を振り返ってみると，

$$= \int_b^{b+db} f(x)\,dx$$

となる．

このとき db が極めて小さい場合，右辺の分子の積分区間では $f(x)$ はほとんど変わらないとみなせるため，

$$\text{右辺の分子} = f(b)\,db$$

とできる．

したがって，式 1 の右辺は，$\boldsymbol{\frac{f(b)\,db}{db} = f(b)}$ に収束する[*1]．

よって，

$$\frac{dS(b)}{db} = f(b)$$

[*1] あくまで関数 $S(b)$ が微分可能であるという状況に限定している．また，例によって極限値に関する厳密な証明は省略する．

我々の目標は関数 $S(b)$ を求めることである．したがって，ここで関数 $f(b)$ は既知なので，「微分すると $f(b)$ になる関数」[*2]を探し当てれば $S(b)$ が求められる．

具体例で見てみよう．

例題 1　$f(x)=x^2$，$a_1=2$，$a_2=5$ のとき，$\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$ を求めてみよう．

例題 1 の解

このとき，$S(b)=\displaystyle\int_{a_1}^{b} f(x)\,dx$ は，$S(b)=\dfrac{1}{3}b^3+C$　(C は定数[*3]) という形で表される関数であることになる．なぜなら，微分すると b^2 となる関数は $\dfrac{1}{3}b^3+C$ だからだ．

ただし，$S(a_1)=0$ なので，

$$\frac{1}{3}{a_1}^3+C=0$$

よって

$$C=-\frac{1}{3}{a_1}^3=-\frac{1}{3}\times 2^3=-\frac{8}{3}$$

となる．

したがって，

$$S(b)=\frac{1}{3}b^3-\frac{8}{3}$$

となる．

今，求めたいのは $S(a_2)$ なので，$b=a_2=5$ を代入して，

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx=\frac{1}{3}\times 5^3-\frac{8}{3}=\frac{117}{3}=39$$

である．

[*2] 微分すると $f(b)$ になる関数のことを「$f(b)$ の原始関数」という．

問題 4.1　以下の多項式関数の原始関数を求めよ．積分定数 C を忘れぬよう気をつけよ．

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
6. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
7. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

問題 4.2　以下の $f(x)$，a_1，a_2 について，$\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$ を求めよ．

1. $f(x) = 1,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
2. $f(x) = x,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
3. $f(x) = x^2,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
4. $f(x) = x^3,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
5. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
6. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$
7. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 4,\quad a_1 = 2,\quad a_2 = 5$