高校数学IA

佐藤　秋彦

こんにちは．私は現在大学院博士課程に在籍しながら，すうがくぶんかで各種個別指導と大人向け高校数学講座を担当しています．

実験系自然科学にルーツを持つ私は，「数学は自然現象を記述するための人工言語である」という観点を大切にした授業を目指しています．自然言語（日本語やドイツ語，英語など）の学習においては，母語からの翻訳・母語への翻訳を行ったり言語の持つ歴史に思いを馳せたりしながら学ぶことで，その言語に親しみを持つことができます．それと同じく，数学の学習においてもまた，自然言語の習得と同様の方法で人工言語としての数学に親しんでいくのが王道であり最善の方法であると考えています．

外国語を学ぶことが，単に対話のツールを獲得するのみでなく，その国の文化や考え方や新しい世界の見方を獲得することにも繋がっていくように，皆さんが数学という新しい言語を学ぶことで新たな世界の見方を獲得し豊かな人生を送れるように，お手伝いします．どうぞよろしくお願いします．

2017 年 10 月
佐藤秋彦

数学を学ぶ意義とは？

- 新たな視点を獲得する
- 実生活を豊かにする

この授業ではどう学ぶのか？

数学の技法は決してパズルや思考力のトレーニングツールとして生まれたわけではない．人類の文明の進歩において，現象を記述したり問題を解決したりする必要性が生じる度に数学的技術の「発明」が為されてきたのだ．数学は，言わば，自然現象や社会現象を記述するための人工言語なのだ．例えば足し算と引き算は獲物の頭数や子供の数を管理するために生まれ（人間以外にも足し算引き算の概念を持つ動物はいる），幾何学は土地を分けたり建築物を作ったりするために生まれた．確率論は不確定な事象を記述するために生まれ，関数は入力と出力の対応関係を記述するために生まれた．

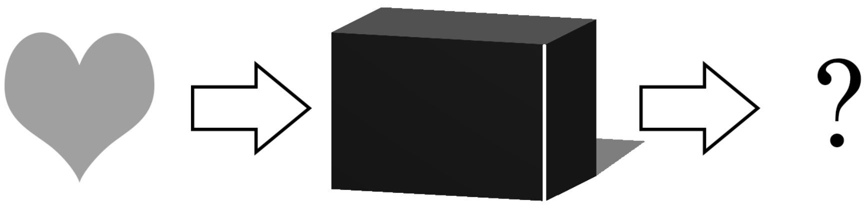
受講者の皆さんの中には，中学高校時代，数学が受験や脳トレーニング以外に何の役に立つのか分からず，学習モチベーションを維持できなかった方もいらっしゃるかもしれない．巷でも，「因数分解って将来何の役に立つのかわからない」「複素数って社会の何の役に立ってるの？」という声が聞こえてくる．そして，それらに納得のいく答が貰えた例は少ないようだ．本講座では，それらの疑問にすべて答えながら，受講者の皆さんが高いモチベーションを持って数学に取り組めるようにしたい．

第 1 章

関数・数と式

そもそも関数とは？

世の中には数々の法則があり，それらの多くはブラックボックスのようになっている．ブラックボックスとは，値を入力すると，一定のルールに従った出力が得られる箱のことだ．



ブラックボックスの性質を知ることができれば，これから入れる値に対応する出力を事前に知ることができるだろう．これが人類の生活において便利であることは言うまでもない．例えば，狩猟時代は「時刻」を入力すれば「獲物の居場所」が出力されるブラックボックスを知る者が重用されたであろうし，古代では「星の位置」を入力して「明日の運勢」を出力するブラックボックス（占星術）が求められた．中世以降は「原材料とする化学薬品」を入力して「反応後できる化合物」を出力するブラックボックスや，「大砲の発射角度」を入力して「着弾点」を出力するブラックボックスが登場した．そして現代に生きる皆さんの身の回りにも出力を知りたいブラックボックスがあると想像できる．筆者は「今月の労働時間」を入力値として「今月の賃金」を出力値とするブラックボックスに興味があるし，転職を考えている方は「勤務年数」を入力値として「退職金」を出力値とするブラックボックスが気になるであろう．

これらのブラックボックスのことを，数学用語では関数（函数）と言う．これは function の訳語であるのだが，昔は” 函” という字を使っていて，まさにブラックボックスを連想させる名称であった．

ブラックボックスでどういう処理をしているのかを知ることができたなら，入力値から出力値を予想することができる．

また，出力の値だけがわかったときに，入力値が何であったかを知ることもできる（後述するが，この作業を「方程式を解く」という）．

世間のほとんどの教科書では，まず文字式について学び，方程式について学び，最後に関数が登場するのだが，これは歴史の流れに逆らっていると言ってよい．人類は入力と出力の対応関係の法則（関数）に興味を持ち，その後でルールを明快に記述するために文字式を発明したのだ．そして，その応用として，方程式を解く方法を考えたのだ．

本講座では，歴史の流れに沿ってまずは関数から学んでいく．

1.1　関数

以上述べたように，関数とは基本的にはブラックボックスのことであるが，数学で言う関数にはルールが存在する．そのルールとは

同じ入力からは常にただひとつ (1 組) の同じ出力が得られる

という一文だけである．「関数は $f(x) = ax^2$ などという形で書けるものだけである」と制限する勝手なルールを自分で追加してしまっている方が多いが，それは関数のうちごく一部のものにすぎない[*1]．現代数学における「関数」とは，ブラックボックスのように多種多様なものなのだ．

問題 1.1　正しい文章に〇をつけ，間違った文章に×をつけよ．理由も答えよ．

1. 正方形の面積は，１辺の長さのみを入力値とする関数の出力値として表せる．
2. 入力された文字列の最初の文字を出力する仕組みがある．これは関数である．
3. 体重と体脂肪率を出力する体重計は，人間を入力値として体重と体脂肪率を出力す

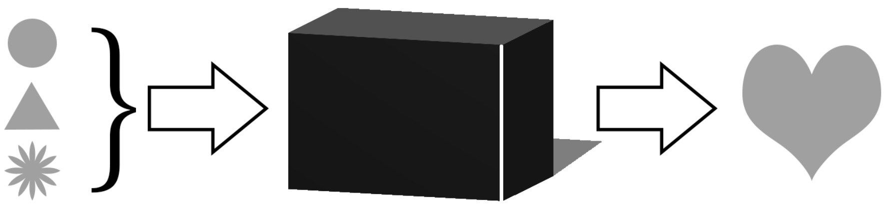
[*1] 「関数」（独：Funktion）はドイツ人数学者ライプニッツが「ある変数によって決まる値またはその対応を表す式」を表す言葉として導入したが，この定義はだんだんと一般化され，現代では写像の一種と考えられている．

る関数である.

4. 天気予報は，今日の天気や気圧配置など諸々の条件を入力値として，明日の天気を出力する関数である.
5. この教室にいる各人が今一番好きな映画は，個人名を入力値として，映画タイトルを出力値とする関数である.
6. 宝くじで獲得する金額は，宝くじを購入した枚数を入力値とする関数の出力値である.

入力値はモノの名前（例：うさぎ）でも，数値（例：100m）でもよいが，関数で定義されている値でなくてはならない．例えば，「勤務年数」を入力すると「退職金」を出力する関数に，「10 年」や「5 年」を入力することはできても「うさぎ」を入力することはできない.

また，複数の入力をしないと出力がわからない関数も存在する．例えば「受け取る保険金の額」を出力する関数を作った場合，出力のためには「掛け金」や「病名」や「治療費」など，複数の入力値を用意しなくてはならない．これを n 変数関数（n は必要な入力値の数）という[*2].



問題 1.2 関数（ブラックボックス）の例を挙げよ．何を入力して，何を出力する関数であるのかを説明せよ．また，上述のルールを守っていることを確認せよ.

問題 1.3 問題 1.2 で作成した関数は，入力値に対してどのような処理を行っているだろうか.

[*2] 変数とは，文字式の中で「後でいろいろな数を代入していいよ」とした文字のことである．関数について考える場合，「入力値」と同義と考えてよい.

関数の表記法

Function の頭文字の f を用いて，「f(入力値) = 出力値」と書く．関数がどういうものであるかは別途表記する必要がある．

例：

- $f(x) = (x$ の年齢$)$
- $f(x) = (100$ 円のリンゴを x 個買ったときの値段$)$
- $f(x) = 100 \times x$
- $f(x) = 30 + x \times 20$

いくつかの例をみたところで，数式で表せる処理を持つ関数があることに気が付いた方もいるだろう．例えば「 $f(x) = (100$ 円のリンゴを x 個買ったときの値段$)$」は日本語で記述することもできるが，「 $f(x) = 100 \times x$」と数式（いわば数学語）でシンプルに表記できる．「 $f(x) = (100$ 円のリンゴを x 個買ったときの値段$)$」と「 $f(x) = 100 \times x$」は同じことを意味している．すべての関数が数式で表せる処理を持つわけではないが，数式で表せる場合は数式で表した方が便利である．主な理由としては，入力値の代入しやすや，微分・積分といった技法の導入しやすさ等がある．

また，主にキリスト教圏では自然科学的現象を記述する関数はシンプルな数式で表せると信じられており，その信仰を元に科学者たちは法則を見出すための実験を行い，実際に多くの自然科学的現象がシンプルな数式で表されることが解明されてきた．そして，発見された法則を応用するために，（主に数式で記述できる）関数の様々な数学的な性質が研究されたのだ．

以上，関数とはどういうものかを解説した．本講座ではこれから数学語を取り扱う訓練を行う．

1.2　文字式

1.2.1　文字式の導入

「5 個のリンゴがあるところに，2 個のリンゴを加える」という操作を数学語にすると，「$5+2$」である．

では，「5 個のリンゴがあるところに，何個かわからない個数のリンゴを加える」という操作を数学語にするとどうなるであろうか．こういうときは，「何個かわからない個数」を x 個として立式し，「$5+x$」と書く．「今のところ具体的な数字は決めていないけれど，後から x を実際の数と置き換えてね」という意味である．

文字が入った式のことを文字式という．文字であっても，後から実際の数が入るので，まるで実際の数であるかのように式を書くことができる[*3]．

問題 1.4　以下の日本語で表される値を，数学語（数式）に翻訳せよ．

1. x 円のリンゴを 5 個買ったときの総額
2. 200 円のリンゴを x 個買い，100 円の箱に入れたときの総額

問題 1.5　以下の関数を，数学語で表記せよ．f を用いた関数の表記法「f(入力値) $=$ 出力値」を用いよ．

1. リンゴ 1 個の価格を入力値 (x) とし，5 個買ったときの総額を出力値とする関数
2. 200 円のリンゴを買う個数を入力値 (x) とし，200 円のリンゴ x 個を 100 円の箱に入れたときの総額を出力とする関数

日本語の文章を数学語へ翻訳した感想はいかがだっただろうか．数学とは，あくまで数が出てくる現象を簡易に表記する人工言語であることが実感できたのではないだろうか[*4]．

[*3] 実際の数でできないことは文字でもできない．例えば 0 での割り算がそれに該当する．

[*4] さらに，大学の数学や自然科学や社会学では，数学語を日本語に翻訳するトレーニングを積む．数学的技法により先に数式が獲得でき，その後で数式がどういう現象を示しているのか解釈するのだ．

1.2.2　文字式の表記ルール

数学が人工言語である以上，そこには文法が存在する．

文法 1　文字と実際の数字との掛け算符号や，文字同士の掛け算符号を省略してよい．このとき，数字を先に書く．

例 1　$5 \times x = 5x$

例 2　$x \times y = xy$

文法 2　指数を使って上手く書く．$x + x + x$ と，x を 3 回足したものを $x \times 3$，即ち $3x$ と書くように，$x \times x \times x$ のように x を 3 回かけたものを x^3 と書く．

例 1　$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

例 2　$x \times x \times x = x^3$

例 3　$2 \times x \times x \times y \times y \times y = 2x^2y^3$

文法 3　同じ文字を含み次数が同じ項同士は結合の法則を使って結合する．

例 1　$3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$

例 2　$3x^2+2x^2+6x+7x+1y+4y = (3+2)x^2+(6+7)x+(1+4)y = 5x^2+13x+5y$

文法 4　文字の次数が高い項から順番に並べる．数やいくつかの文字をかけ合わせたまとまりを文字式の項と呼ぶ．**かけ合わされている文字の個数**を，その項の**次数**と呼ぶ．例えば，$x^3 + 4x^2 + 2x + 3$ の第 1 項 x^3 の次数は 3 である．この項を「x の 3 次の項」と言う．

例 1　$2x + 3x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 3$

例 2　$3x + 2y + 4x^2 + 5+ = 4x^2 + 3x + 2y + 5$

それでは，今覚えた文法をさっそく使ってみよう．

問題 1.6　以下の式を，文法 1〜4 に従ってわかりやすくせよ．

1. $x \times 3 + x \times 5 \times x + x + 2$
2. $2 \times y + x + 1 + x \times 4 \times x \times x + x \times 5 + y \times 3 + 8$
3. $4 + y \times y \times 2 + 3 \times x \times x + 6 + y \times 5 \times y + x \times 2 \times x$

1.2.3　多項式の展開

多項式の展開には，分配の法則を用いる．

例 1　$x(x+2) = x \times x + x \times 2$

例 2　$(x+2)(x+4) = (x+2) \times x + (x+2) \times 4 = x \times x + 2 \times x + x \times 4 + 2 \times 4$[*5]

問題 1.7　以下の式を，分配の法則を用いて展開せよ．

1. $7(x+5)$
2. $2(x-6)$
3. $-3(x-4)$
4. $(x+2)(x-7)$
5. $(x-1)(x-4)$

1.3　代入計算

代入とは，文字式中の文字を実際の数字に置き換えることである[*6]．

例 1　$x+7$ に $x=2$ を代入すると　$2+7=9$

例 2　x^2+3x+1 に $x=-2$ を代入すると　$(-2)^2+3(-2)+1=-1$

[*5] まず $(x+2)$ をひとまとまりとして，分配の法則を使った．

[*6] 文字を別の文字や式に置き換えることもある．

ここで，関数 $f(x) = x + 10$ に $x = 2$ を代入してみよう．代入して計算すると，$f(2) = 2 + 10 = 12$ となる．「$f(2) = 2 + 10 = 12$」を日本語訳すると，「関数 $f(x)$ に 2 を入力すると 12 が出力される」ということを意味する．

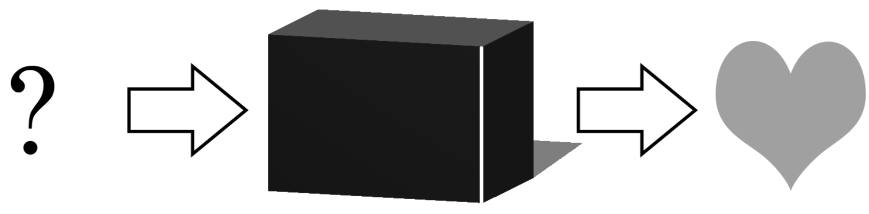
問題 1.8　以下の関数に $x = 3$ を代入し計算せよ．さらに，$x = 7$ を代入し計算せよ．

1. $f(x) = 3x + 7$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = -x^2 + 3x$
4. $f(x) = (x$ を 4 で割った余り）

1.4　方程式

1.4.1　方程式とは

前節 1.3 では，関数への入力値 x が判明したときに，どういう値を出力するか計算することを学んだ．では，与えられた関数にどういう入力をすれば目標の出力を得られるかを計算したいときはどうすればよいだろうか．



このようなケースは日常生活や産業や自然科学でもよく見受けられる．

例 1　勤務年数を入力値，退職金を出力値とする関数が与えられたときに，10 年勤めた時の退職金を計算したいこともあるが，一方で 500 万円の退職金をもらうには何年勤務すればよいかを計算したいこともあるだろう．

例 2 ダイナマイトの破壊のエネルギーは火薬量を入力値とする関数の出力値として得られることがわかっている．目標の破壊エネルギーを得るためにどれだけの火薬を用意すればよいかを算出したい．

定義 与えられた関数にどういう入力をすれば目標の出力を得られるかを考えることを「方程式を解く」と言う．

問題 1.9 実生活で方程式を解きたい例を挙げよ．（ヒント：まず得たい出力値を考え，それが何を入力値とする関数によって制御されているか考えると楽である．）

これから具体的な方程式の解き方について学んでいく．

「方程式を解く」という行為は本来とても難しく，基本的には解けないものと思っても構わない．いくつかの「解ける方程式のパターン」まで式を変形し，解（目的の出力を得るための入力）を求めるのだ．

1.4.2 1 次方程式の解き方

今ここに $f(x) = 3x + 4$ という関数があるとしよう．この関数の出力値が 7 のとき，即ち $f(x) = 7$ のとき，入力値 x はいくらになるだろうか．これを求めるのが即ち「$3x + 4 = 7$ という方程式（この場合は次数が 1 なので 1 次方程式）を解く」ということである．

方程式を解く上では，「両辺に同じ演算をしても，等式は成立する」ことを利用する．

例えば 1 次方程式

$$3x + 4 = 7 \qquad ①$$

の場合，両辺から 4 を引き，

$$3x = 7 - 4 \qquad ②$$

$$3x = 3 \qquad ③$$

両辺を 3 で割り，

$$x = 1$$

と解く．

式①から式②では，まるで①の左辺の項 4 が②では右辺に移ったかのように見えるので，①から②の操作のことを移項と言う．等号を超えて移動すると正負が逆転することに戸惑わないように，「移項」の本来の意味が「両辺から同じものを引く」ことであることをしっかりと押さえておきたい．

問題 1.10　以下の 1 次方程式を解け．

1. $2x + 1 = 5$
2. $3x - 2 = 7$
3. $x + 3 = -1$
4. $2x - 1 = x + 1$

1.4.3　簡単な 2 次方程式の解き方

2 次方程式とは，x の 2 次式で表される関数（2 次関数）の出力がわかっているときに，入力が何であったかを求める方程式である．

例 1　$x^2 = 4$
例 2　$(x-2)(x-5) = 0$
例 3　$(x-1)^2 = 4$

例 1 については，一目で解がわかるだろう．2 乗して 4 になる数は ± 2 だ．1 次方程式と違って解が 2 つあることに注意してほしい．

例 2 については，左辺を展開すると，確かに左辺は x の 2 次関数であることがわかるだろう．つまり，この等式は x の 2 次方程式である．2 つの数の積が 0 になるのは，一方が 0 のときなので，$(x-2)$ か $(x-5)$ が 0 のとき，即ち x が 2 か 5 のときこの式は成立する．

例 3 については，例 1 を思い出してほしい．この式が成立するとき，$(x-1)$ が 2 乗して 4 になるので，$x-1=\pm 2$ である．よって x は 3 か -1 のときこの式は成立する[*7]．

問題 1.11　以下の 2 次方程式を解け．

1. $x^2 = 9$
2. $x^2 = 16$
3. $x^2 = 25$
4. $(x-1)(x-4) = 0$
5. $(x-1)(x+2) = 0$
6. $x(x-2) = 0$
7. $(x-2)^2 = 4$
8. $(x-3)^2 = 9$
9. $(x+1)^2 = 4$

人間が一目で解くことができる 2 次方程式はこの 3 パターンのみである．

$\sqrt{\ }$ の導入

ここで，改めて例 1 の $x^2 = 4$ を見てみると，例 1 の答がすぐに分かる理由は右辺の数 4 が平方数（同じ数を 2 乗した数）だからだということに気づくだろう．つまり，左辺 x^2 が x を 2 乗したもので右辺も 2 あるいは -2 を 2 乗したものなので，x は 2 あるいは -2 になるというわけだ．

ところが，ここで仮に右辺が平方数でなかったらどうだろうか．もしも $x^2 = 2$ だったとしたら，平方数ではない右辺の 2 も何かの 2 乗として表せないと答を得ることはできない．そこで，平方根という新しい概念が導入されることとなった．

新しい概念の導入と聞くと厳めしい感じがするが，初めて自然数や 0 以外の数を見たときのことを覚えていないだろうか．おそらく多くの人にとっては分数や小数が初めて取り

[*7] ここでは，自然言語を多用して解答を書いた．生徒の皆さんの中には，ソースコードのように数式と必要最小限の助詞のみで書いた答案こそ美しいと誤解している方がいるかもしれないが，その考えは即刻捨てていただきたい．自然言語で表した方がわかりやすい部分は自然言語で，人工言語で表した方がわかりやすい部分は人工言語で表せばよい．かく言う筆者も初学者のころはソースコードのような答案を書こうと腐心していたが，しばらくしてそれが良い答案ではなく，私の努力は無駄であったということに気づいた．

扱う非自然数であっただろうが，導入した瞬間世界が広がった感じがしたのではないだろうか.

「これで，表せる数量が増えたぞ」

という感覚だ．あるいはより具体的に，「これで 1 ㎝と 2 ㎝の間の長さを定量することができるぞ」というものだったかもしれない．数直線上に飛び飛びに配置された 1,2,3,... の隙間に分数や少数が入り込んできたときのあの感覚だ.

数直線上にあるすべての数のことを実数と呼ぶ.

そのうち，$\mathbf{0}, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3}\cdots$ **といった数を整数**と呼ぶ．さらに，**正の整数を自然数**と呼ぶ[*8].

また，分数や小数のように，**2 つの整数の比で表せる数（例えば** $\boldsymbol{\frac{2}{3}}, \boldsymbol{\frac{9}{4}}$**，1.3，**$\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$**）を有理数**[*9]と呼ぶ.

しかし，分数と有限小数（と負の数）まで用いても，私たちは $x^2 = 2$ を満たす x を表すことはできない.

問題 1.12　$x^2 = 2$ を満たす $x = \dfrac{m}{n}$ （m，n は自然数）は存在しないことを示せ.

有理数でない実数を無理数と呼ぶ.

何とかして 2 乗して 2 になる数を表そうと考えた先人は，2 乗して x になる数のことを「x の平方根」と呼び，$\sqrt{\ }$ という記号を用いて，$x^2 = 2$ となる x のうち正の数の方を $\sqrt{2}$，負の数の方を $-\sqrt{2}$ と表記することにした．同様に，$x^2 = 3$ を満たす x のうち正の数の方は $\sqrt{3}$ ということになる．**一般に，$\boldsymbol{x^2 = y}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ のうち正の数の方を $\boldsymbol{\sqrt{y}}$，負の数の方を $\boldsymbol{-\sqrt{y}}$** と書く．$\sqrt{\ }$ は「根号」という名前の記号で，読み方は「ルート」である[*10].

この際，注意してほしいことが 3 つある.

まず第一に，$x^2 = 2$ となる x は 2 つあるということだ．$\sqrt{2}$ だけでなく，$-\sqrt{2}$ も $x^2 = 2$ を満たす.

第二に，$\sqrt{\ }$ の中身は正のみを考える．x^2 が負となる実数 x は存在しない.

第三に，$\sqrt{\ }$ を導入したからと言ってすべての無理数が表せるわけではないということ

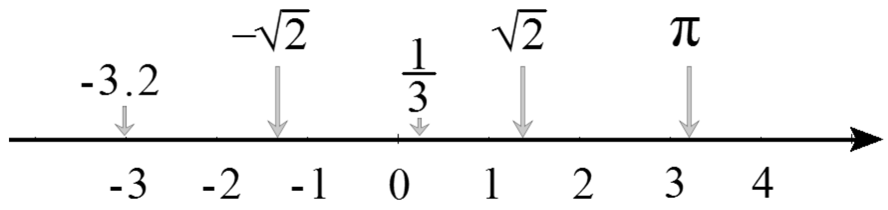
[*8] 自然数の厳密な定義は非常に難解であるので，本講義では「物体の数として使う数」程度にざっくり捉えておく．平方根の概念を用いた無理数表記が生まれたのが紀元前 5 世紀ごろであるのに対して，整数の厳密な定義に人類が着手したのは 19 世紀であることからもその難しさが伝わるであろう．整数さえ認めてしまえば，有理数や無理数，平方根の定義はたやすいことは本文に示した通りだ.

[*9] 整数も有理数である．その整数と 1 との比である.

[*10] 名前と読み方が違うのは，「＝」の名前が「等号」，読み方が「イコール」であるのと同様である.

だ．例えば円周率は無理数であるが，$\sqrt{\ }$ を用いても表せない．

下の図は，実数全体の数直線のイメージである．



問題 1.13　以下のそれぞれの数に該当する属性（①実数　②有理数　③無理数　④整数　⑤自然数）を全て選べ．

$1000 \qquad -254 \qquad 1.8 \qquad -5.1 \qquad \sqrt{13} \qquad -\sqrt{7} \qquad \frac{7}{2} \qquad -\frac{4}{2} \qquad \pi \qquad 0$

それでは，平方根という新たに獲得した概念を用いて，例 1 や例 2 のような形で右辺が平方数でない方程式について考えてみよう．

問題 1.14　以下の 2 次方程式を解け．

1. $x^2 = 5$
2. $x^2 = 7$
3. $(x-1)^2 = 2$
4. $(x+2)^2 = 3$

いかがだっただろう．平方根の導入によって解ける方程式が一気に増えたことが実感できたのではないだろうか．

それでは，上述の「一目で解くことができる 3 つのパターン」に属さない 2 次方程式

- $x^2 - 3x = 9$

- $x^2 - 2x + 1 = 0$
- $2x^2 + 7x + 2 = 0$

などはどうやって解けばよいのだろうか？

1.4.4　2 次方程式の解き方（因数分解）

まずは例 2 のような形にする方法を考える．例 2 の形とは，式と式の積が 0 になっている形である．そのためには，まず全ての項を左辺に移し，右辺を 0 にし，その後に左辺を式と式の積の形にしていく．この，「式と式の積の形に直す」作業を「因数分解」と呼ぶ．因数分解は，謂わば「展開」の逆の作業だが，展開が根気強く取り組めば必ずできるのに比べると，因数分解の方がはるかに難しい．時計をバラバラにするのは簡単だが，バラバラの部品を時計に組み立てるのは難しいのと同じことだ．

2 次方程式を解くための因数分解には，簡単な順に以下の 3 つのパターンがある．

- $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
- $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$
- $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

たった 3 つのパターンではあるが，このように変形できるとすぐに気が付くようになるには練習が必要だ．まずは右辺から左辺へと展開する練習を繰り返すとコツがつかめてくる．

問題 1.15　上記の 3 つのパターンの因数分解の式の右辺を展開し，左辺になることを確認しよう．

1. $(x + a)^2$
2. $(x - a)^2$
3. $(x + a)(x + b)$

問題 1.16　以下の方程式を，左辺を因数分解することによって解け．

1. $x^2+6x+9=0$
2. $x^2-4x+4=0$
3. $x^2+5x+6=0$

1.4.5　2 次方程式の解き方（平方完成）

今度は例 3 のような「解ける形」に式を変形して解を求めよう．この変形は「平方完成」という方法である．

先ほどの問題で，「因数分解による解き方」を用いて，$x^2+6x+9=0$ という方程式を $(x+3)^2=0$ と変形して解いたことを思い出して欲しい．それではこれが $x^2+6x+5=0$ だったらどうだろう．これを見たとき，「ああ，残念．5 じゃなくて 9 だったら $(x+3)^2$ にできたのになあ.」と思わないだろうか．それならもう無理やりにでも $(x+3)^2$ を作ってしまおうというのが「平方完成」だ．以下，手順を見ていこう．

まず，この方程式の左辺の中の x^2 と $6x$ という項は $(x+3)^2$ を展開した x^2+6x+9 の中にある項だなと目星を付ける．

$$\underline{x^2}+\underline{6x}+5=0$$

そこで無理やり左辺の中に x^2+6x+9 を作ってみるが，本当は 9 ではなくて 5 なので -4 しておく．

$$x^2+6x+9-4=0$$

-4 は邪魔なので右辺に移項する．

$$x^2+6x+9=4$$

左辺を因数分解して

$$(x+3)^2=4$$

こうなると，$(x+3)$ が 2 乗すると 4 になる数，つまり 2 か -2 だと分かる．したがって，

$$\begin{cases} x+3=2 \quad \text{ならば} \quad x=-1 \\ x+3=-2 \quad \text{ならば} \quad x=-5 \end{cases}$$

という答が得られる．

このように左辺の中に 2 乗すなわち「平方」の形を完成させるので，この方法は「平方完成」と呼ばれている．

さっそく練習してみよう．

問題 1.17　以下の方程式を，平方完成することによって解け．

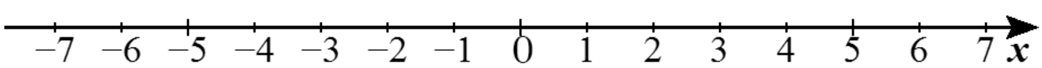
1. $x^2 - 6x + 5 = 0$　（ヒント：$(x-3)^2$ を作る）
2. $x^2 + 4x - 5 = 0$　（ヒント：$(x+2)^2$ を作る）
3. $x^2 - 2x - 1 = 0$　（ヒント：$(x-1)^2$ を作る　$\sqrt{\ }$ を使う）
4. $x^2 + 6x + 4 = 0$　（ヒントなし！）

数学の問題を解く上で，「この形だったら楽に解けるのになぁ」という形をイメージするのは頻繁に登場するテクニックである．

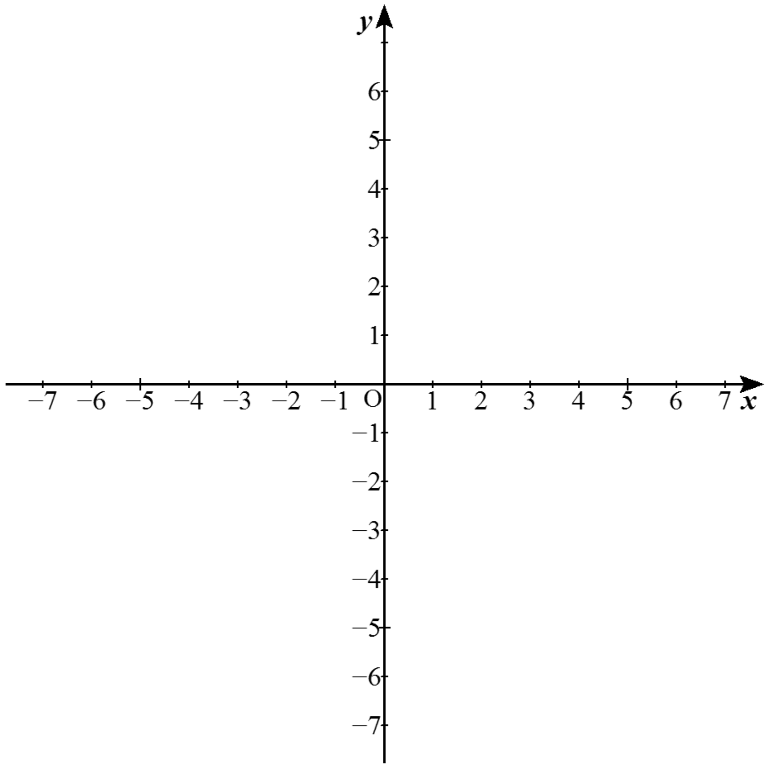
1.5　関数の可視化

1.5.1　座標とグラフ

さて，前節で数直線を紹介したが，数直線とは直線上に数に対応する点を描いて，物差しのように大小関係を把握する表現方法である．



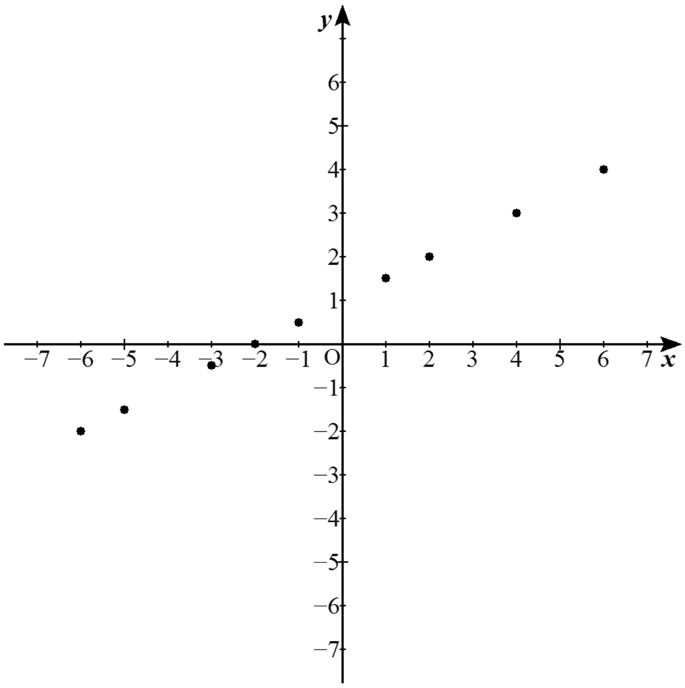
数直線を拡張した概念として，平面座標というものが発明された．これは，本来 2 つの値を特性として持つデータ（例：地図上の点は緯度と経度という 2 つの値を特性として持つ）を可視化するために導入された概念である．



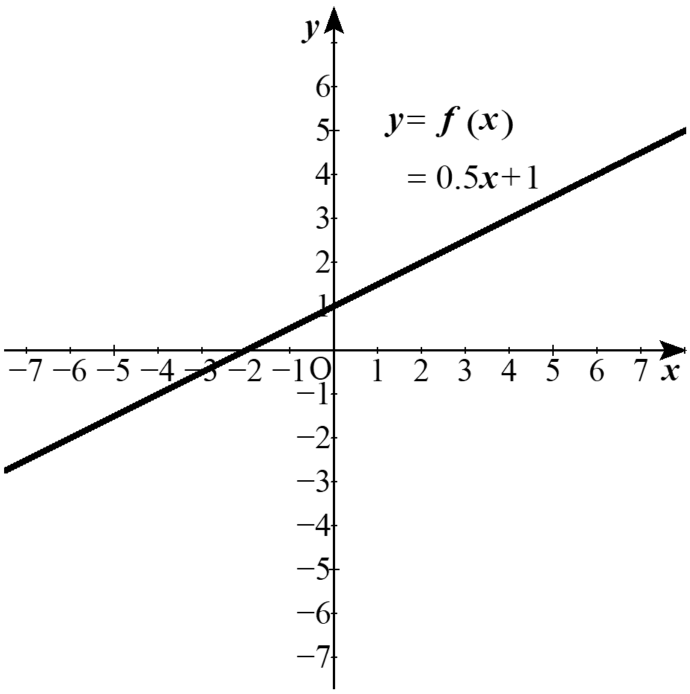
これを 1 変数関数の対応関係に応用することができる．

1 変数関数は，1 つの入力値に 1 つの出力値が対応している．そこで，横軸に入力値をとり，縦軸にそれに対応する出力値をとることで入力出力の対応関係を示す点を記入（プロット）していく．この点の集まりをグラフと言う[*11]．

*11 ここでは数直線上に表せる入力値と出力値をもつ関数についてのみ考える．



入力値・出力値が連続値を取る場合，実際には 1.001，1.0002，…なども入力できるので，対応関係を表す点の間を補う必要がある．

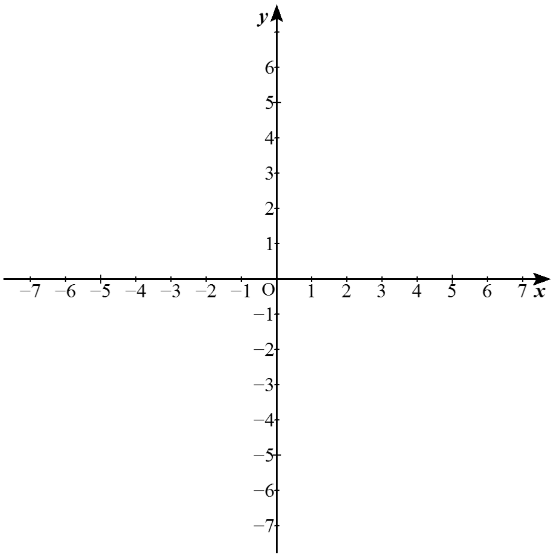


問題 1.18　以下の関数のグラフを描け．グラフを描けない場合はその理由を述べよ．

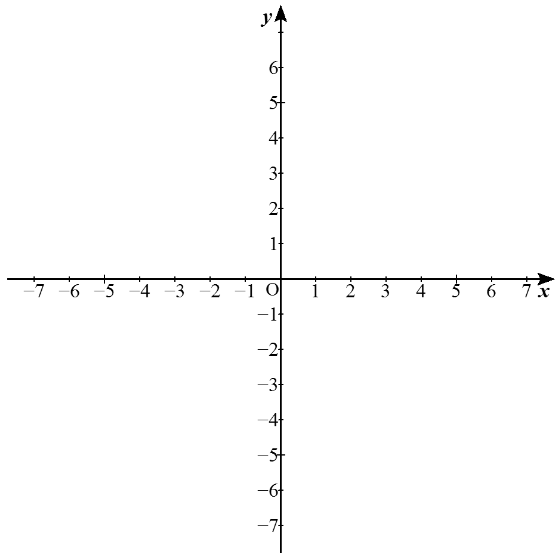
1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) =$（x を 3 で割った余り）
3. $f(x) =$（A 君の x 歳のときの身長と体重）
4. $f(x) = x^2$

4 のグラフは滑らかな曲線になるように描こう．この曲線を放物線という．ボールを投げた時に，ボールの軌跡が宙に描く図形に相似である．

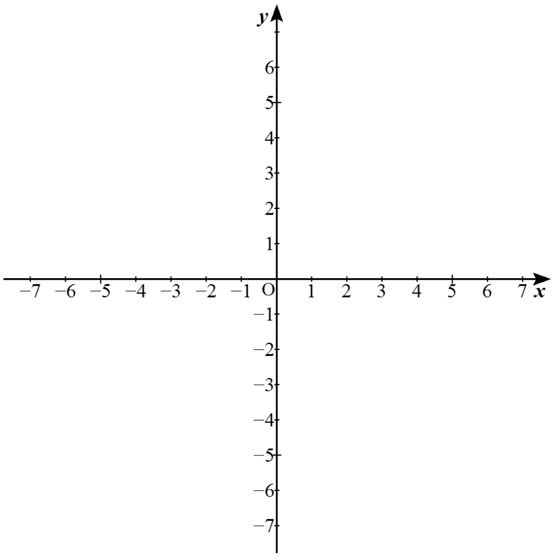
1.



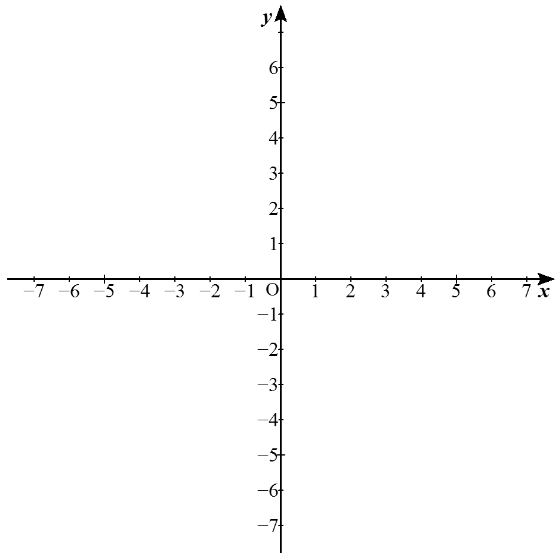
2.



3.



4.



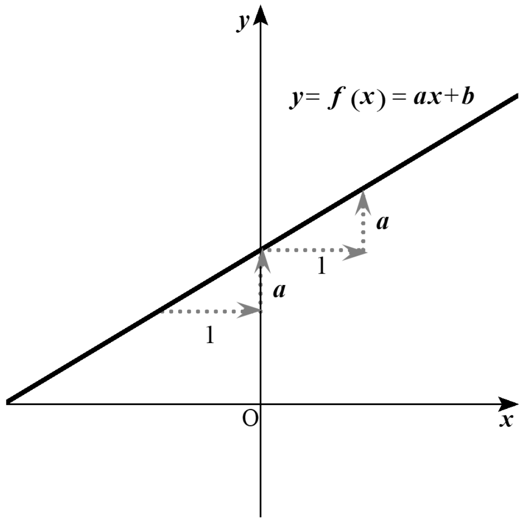
1.5.2　1 次関数のグラフの傾き

1 次関数は一般に $f(x) = ax + b$ の形で表される．

今，入力値 x が 1 増えたら，出力値はいくつ増えるだろうか．

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \{a(x+1) + b\} - \{ax + b\} \\ &= ax + a + b - ax - b \\ &= a \end{aligned}$$

これは，x の値に依存しない[*12]．1 次関数において，入力値が 1 増えたときの出力の増分のことを $f(x)$ の“傾き”あるいは“勾配”と呼ぶ [*13]．1 次関数のグラフを描くときにはこの“傾き”の概念を使うと描きやすい．



まず，通る点を決め，そこから入力値 $+1$ ごとに，出力値を $+a$ していけば良いのだ．

また，$x = 0$ のとき，$f(0) = b$ となる．これを $f(x)$ の y 軸切片と呼ぶ．グラフ化したときに，y 軸とグラフが交わる座標が $(0, b)$ だからである．

[*12] 増分が x に依存しないのは 1 次関数または定数関数の場合のみである．一般に，入力値を 1 増やしたときの出力値の増分は x 依存的である．例えば，$f(x) = x^2$ の入力値が 1 増えたときの出力値の増分を考えてみよう．

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= (x+1)^2 - x^2 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

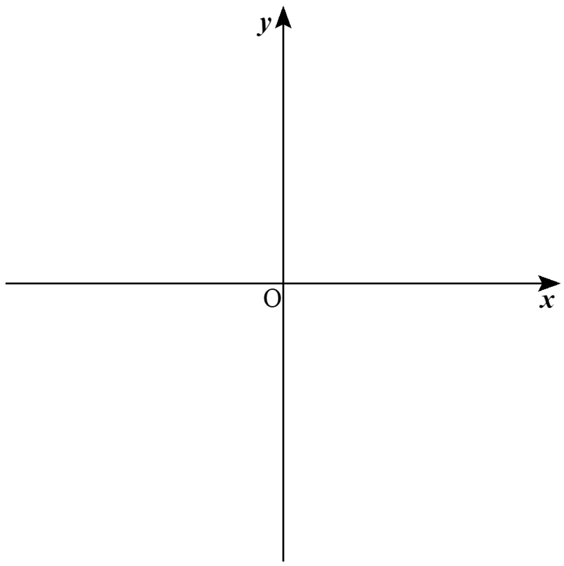
$x = 2$ から入力値を 1 増やしたときの出力変化は $2 \times 2 + 1 = 5$ であるが，$x = 5$ から入力値を 1 増やしたときの出力変化は $2 \times 5 + 1 = 11$ である．

[*13] 今回は 1 変数 1 次関数のみで勾配を定義したが，実際はより多くの関数に対して定義可能である．より詳細な話は，弊社の「数学 II B 講座」や「微分積分入門」で行う．

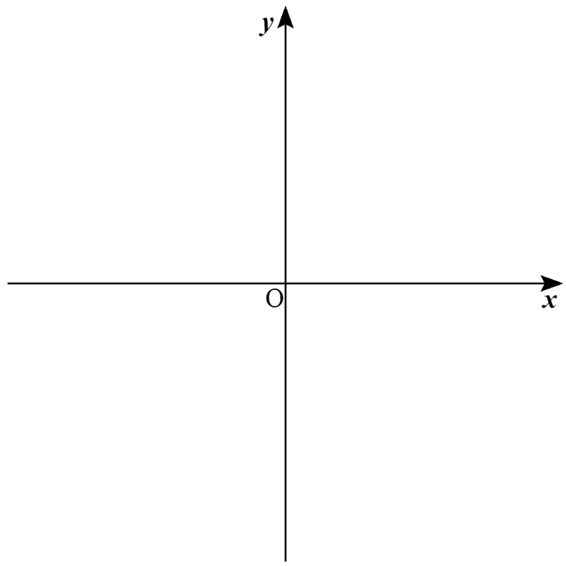
問題 1.19　以下の関数をグラフにせよ.

1. $f(x) = 3x + 4$
2. $f(x) = 20x - 80$
3. $f(x) = -2x + 4$

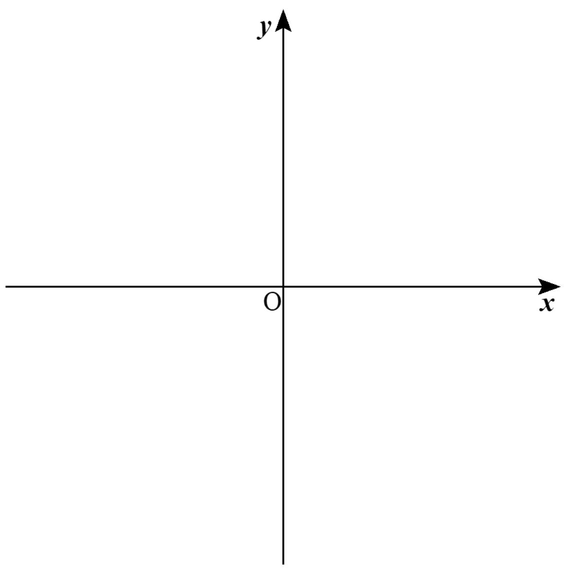
1.



2.



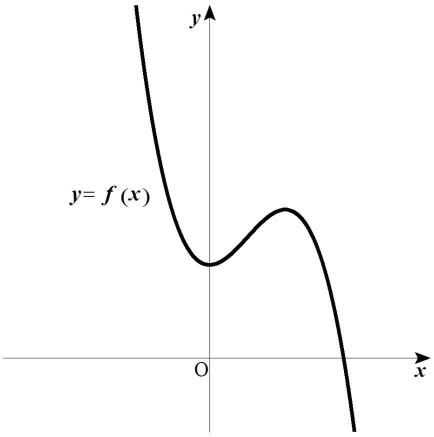
3.



1.5.3　関数のグラフの定数倍

突然だが，次の問について考えてみて欲しい．

今，ある関数 $f(x)$ の入力値を横軸，出力値を縦軸とするグラフがある．

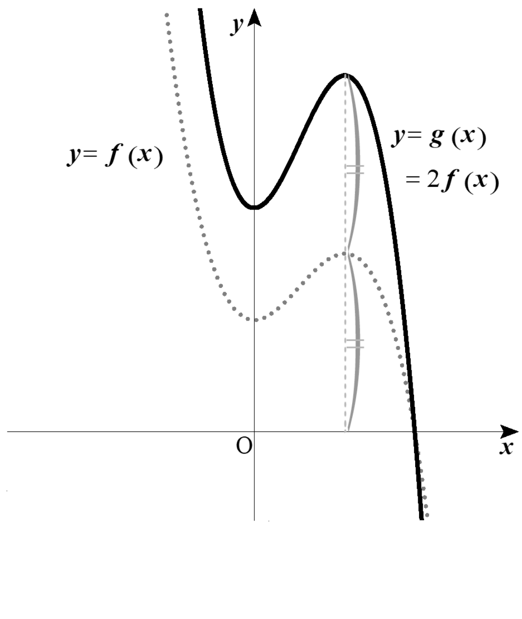


では，この座標平面に，別の関数 $g(x) = 2f(x)$ を描いてみよう．
そのためにまず，$g(x) = 2f(x)$ を日本語訳してみよう．

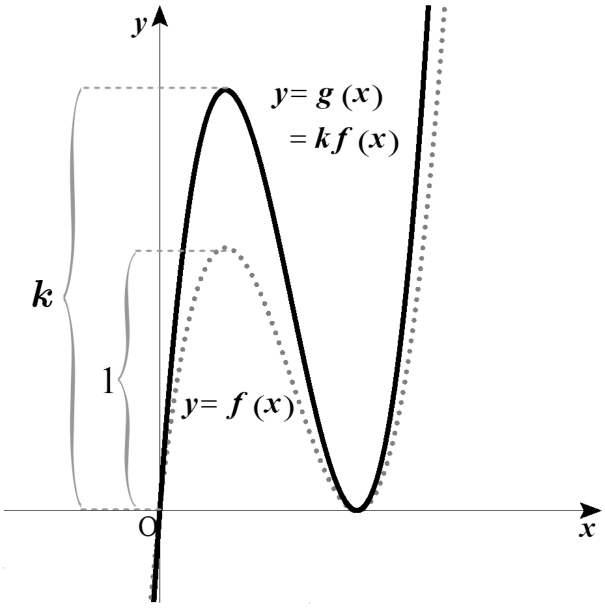
この式は，「関数 g にある値 x を入力した出力は，関数 f に同じ値 x を入力したときの 2 倍の出力をする」ということだ．例えば，$g(3) = 2f(3)$ である．これは，関数 g に 3 を入力した出力と，関数 f に 3 を入力した出力の 2 倍が一致することを表す式である．

この文章をグラフにすると右のようになる．

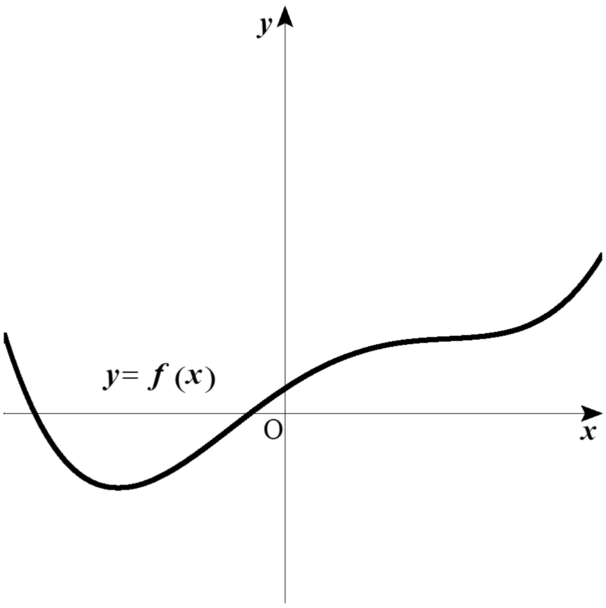
確かに，任意の x の入力に対して，関数 g の出力は関数 f の出力の 2 倍となっている．



一般に，$f(x)$ をもとに $g(x) = kf(x)$ を描くときは，任意の x の入力に対して出力値を k 倍すればよい．

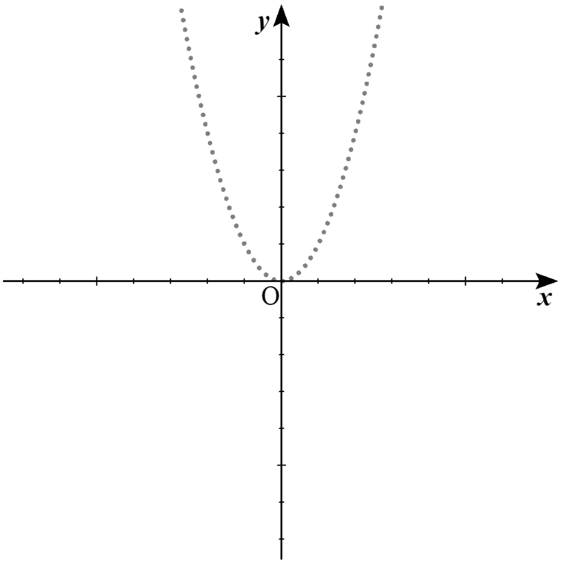


問題 1.20　図の $y = f(x)$ を元に，$y = g(x) = 2f(x)$ 及び $y = h(x) = -f(x)$ を作図せよ．

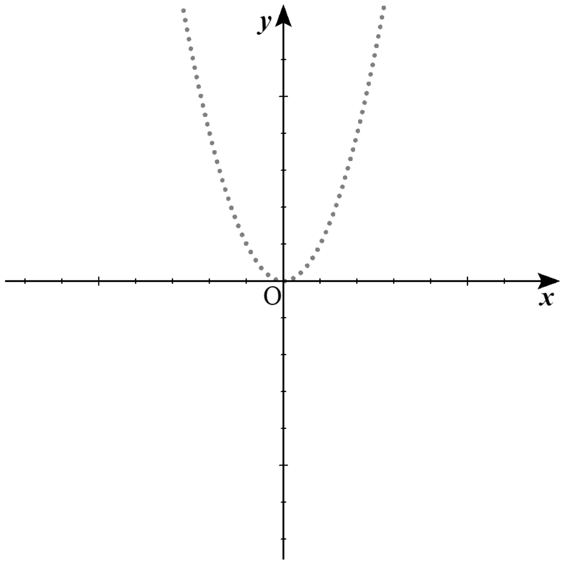


問題 1.21　以下の関数のグラフ $y = f(x)$ を作図せよ．その際，**問題 1.18** で描いた $y = f(x) = x^2$ のグラフを思い出してほしい．

1. $y = f(x) = 3x^2$



2. $y = f(x) = -2x^2$

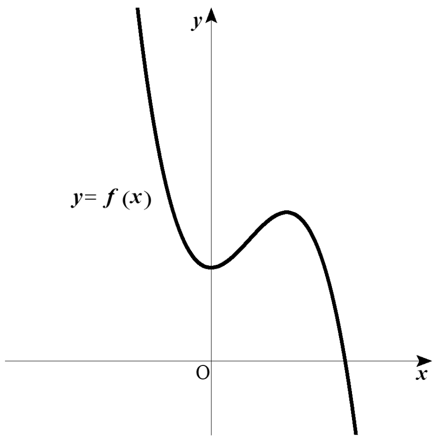


1.5.4　関数のグラフの平行移動

x 軸方向の平行移動

今度は，以下の問について考えてみて欲しい．

ある関数 $f(x)$ の入力値を横軸，出力値を縦軸とするグラフがある．



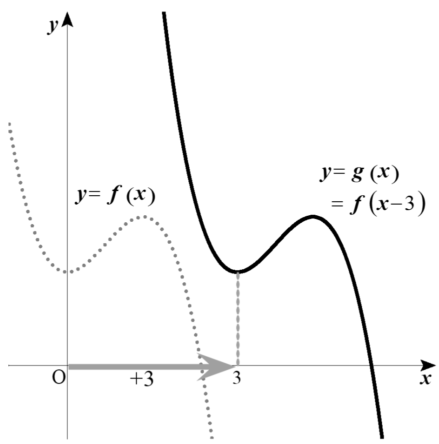
では，この座標平面に，別の関数 $g(x) = f(x-3)$ を描いてみよう．

そのためにまず，$g(x) = f(x-3)$ を日本語訳してみよう．

「関数 g にある値 x を入力したとき，関数 f に x より 3 小さい数を入力したときと同じ出力をする」ということだ．例えば，$g(5) = f(5-3) = f(2)$ である．これは，関数 g に 5 を入力した出力と，関数 f に 2 を入力した出力が一致することを表す式である．

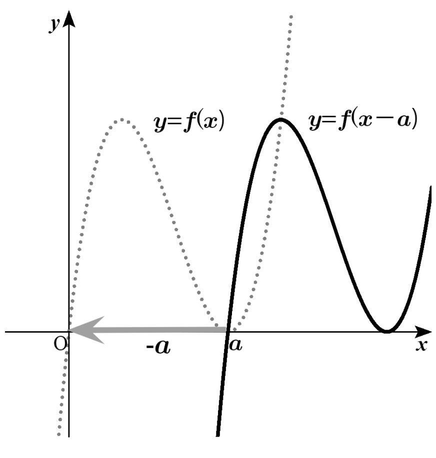
言い換えるなら，「関数 f に入力するときより 3 多い値を入力して初めて同じ出力を得られる」ということになる．

この文章をグラフにすると右のようになる．

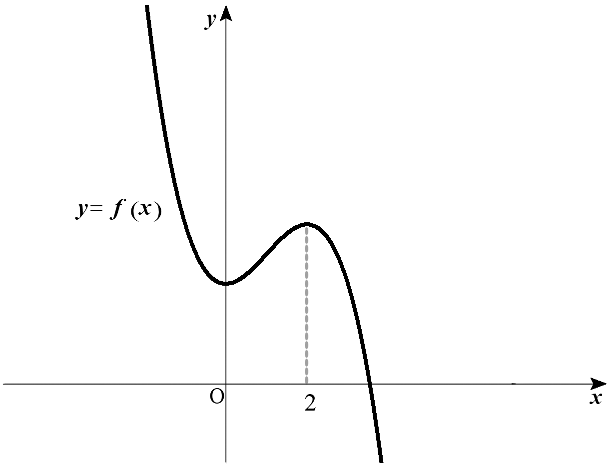


確かに，f と同じ出力を得るために，3 多い入力値を入力している．

一般に，$f(x)$ をもとに $g(x) = f(x-a)$ を描くと以下のようになる．



問題 1.22　図の $y=f(x)$ を元に，$y=g(x)=f(x+2)$ 及び $y=h(x)=f(x-3)$ を作図せよ．

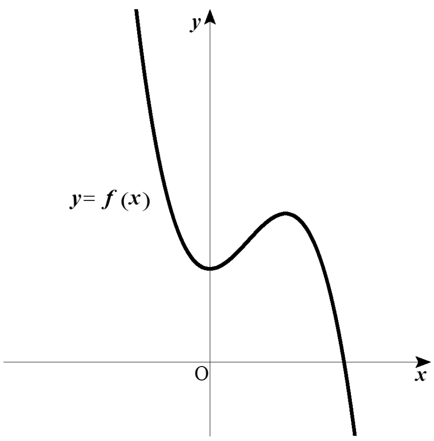


問題 1.23　$y=f(x)$ を x 軸方向に $+5$ 平行移動したグラフが示す関数 $g(x)$ は何であるか？ また，$f(x)=3x^2+5x-3$ のとき，$g(x)$ はどのような関数か答えよ．

y 軸方向の平行移動

ここでもまずは問題を考えてみよう．

ある関数 $f(x)$ の入力値を横軸，出力値を縦軸とするグラフがある．

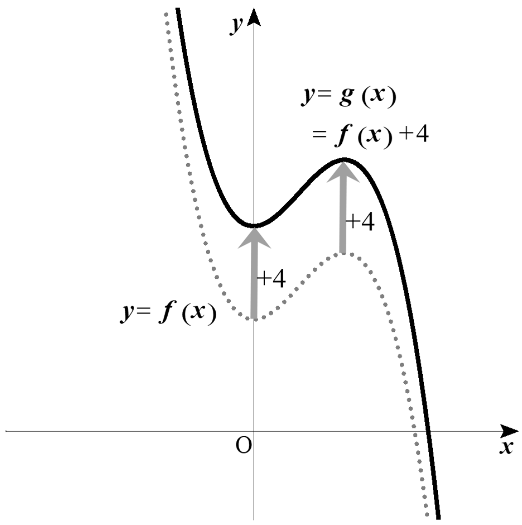


では，この座標平面に，別の関数 $g(x)=f(x)+4$ を描いてみよう．

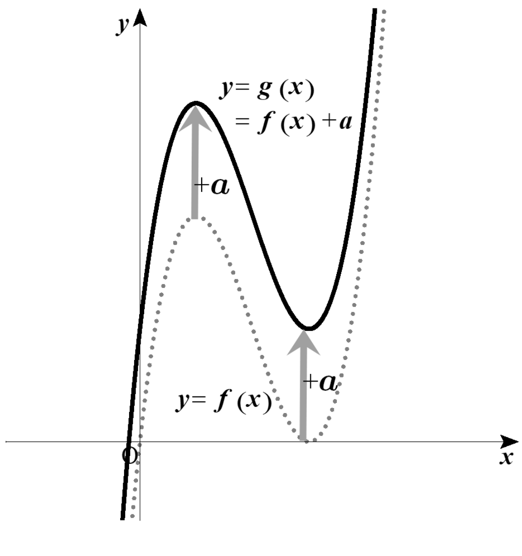
そのためにまず，$g(x)=f(x)+4$ を日本語訳してみよう．

この式は，「関数 g にある値 x を入力した出力は，関数 f に同じ値 x を入力した出力に 4 を加えたものである」ということを意味する．

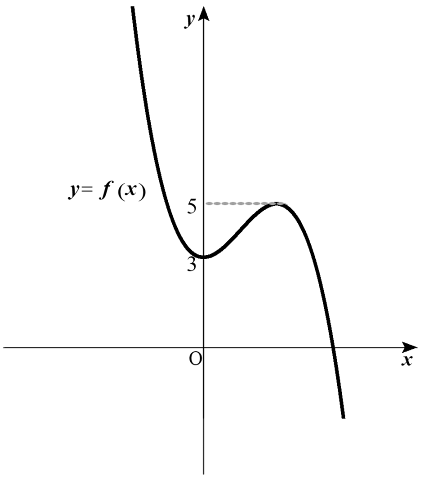
関数のグラフは，横軸に入力値をとり，そのときの出力値を縦軸にとった点の集合である．同じ入力値に対して，出力値が関数 f から 4 増えた関数 g のグラフは，下図のように関数 f のグラフを縦軸方向に $+4$ 平行移動させたものとなる．



一般に，$y=f(x)$ のグラフをもとに $y=g(x)=f(x)+b$ を描くときは，$y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に $+b$ 平行移動すればよい．



問題 1.24　図の $y = f(x)$ を元に，$y = g(x) = f(x) + 3$ 及び $y = h(x) = f(x) - 6$ を作図せよ．



問題 1.25　$y = f(x)$ を y 軸方向に +5 平行移動したグラフが示す関数 $g(x)$ は何であるか？ また，$f(x) = 3x^2 + 5x - 3$ のとき，$g(x)$ はどのような関数か答えよ．

1.5.5　2 次関数のグラフの描き方

ある現象を説明する関数を可視化するためにグラフを描きたくなることがあるだろう．今更言うまでもないかもしれないが，可視化はプレゼンテーションの基本である．また，自分自身で現象の考察を行う上でも非常に重要なプロセスである．

もしも我々がコンピュータなら，関数を可視化するのは簡単である[*14]．最初に述べたように，関数のグラフとは入力値を横軸・出力値を縦軸にとった点を結んだものであるため，入力値を 0.01 刻みで変化させながら，その時の出力値を算出し，直交座標上に点を描いていけばよいのだ．しかし，人間がその手法をやろうとすると，シンプルな 2 次関数 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ を可視化するのでさえ一苦労である．そこで，我々人間は 1 つだけ描ける 2 次関数の形を覚えておき，それを定数倍・平行移動することで目的の 2 次関数を描くのだ．

[*14] 例えば Wolfram alpha というサイトなどがある．2 個以下の変数を持つ関数を記入してエンターキーを押すと，関数のグラフを書いてくれる．インターフェースも美しいので，是非一度使ってほしい．

「1 つだけ描ける 2 次関数の形」とは，他でもない $y = x^2$ である．

例　$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフを描きたいと思う．

この $f(x)$ を平方完成すると，$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ である．

これは，

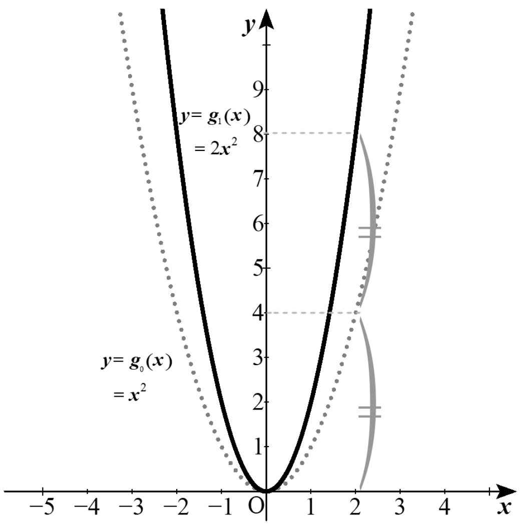
① $g_0(x) = x^2$ の出力を 2 倍して $g_1(x) = 2x^2$ にして，

② それを x 方向に $+1$ 平行移動させ $g_2(x) = 2(x-1)^2$ にして，

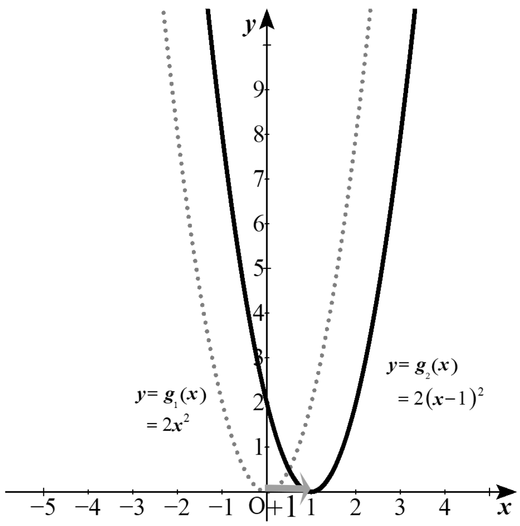
③ そこから y 方向に $+3$ 平行移動させて $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ にしたものである．

作図する際も，この手順をたどる．

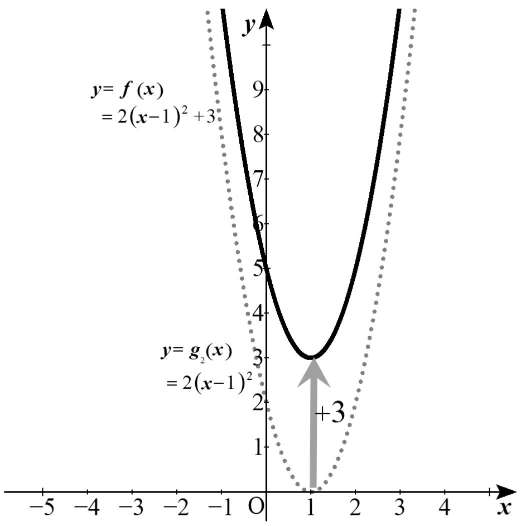
①



②



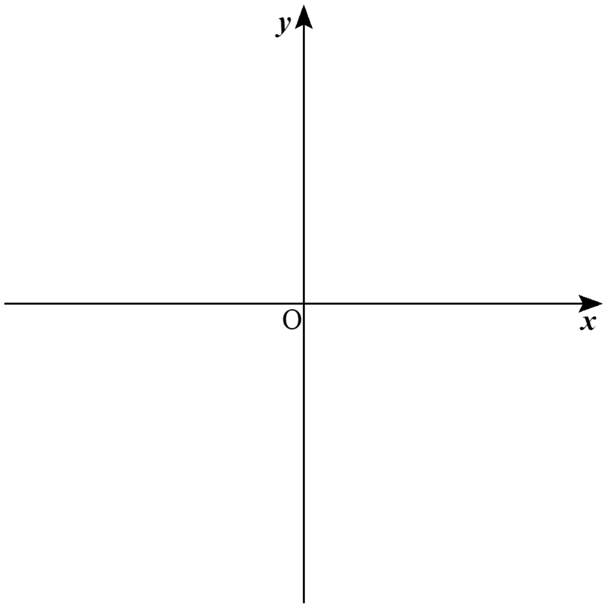
③



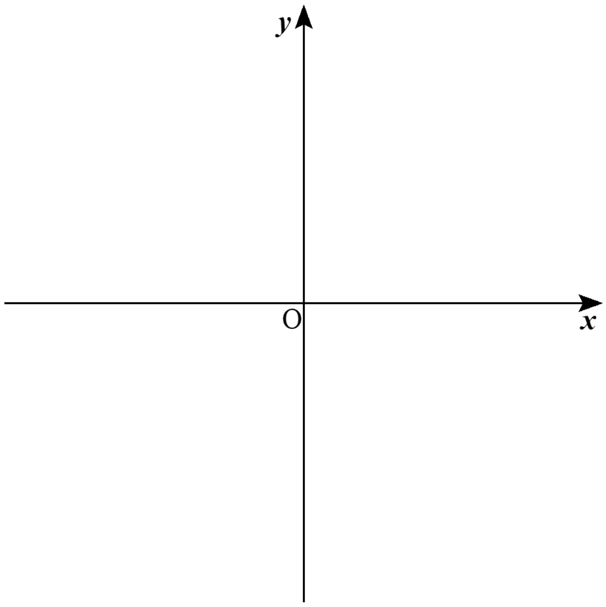
慣れてくると，②と③をひとまとめにして $(+1, +3)$ 方向に平行移動させる」と考えられるようになるだろう．

問題 1.26　以下の 2 次関数のグラフを描け．（ヒント：まずは平方完成）

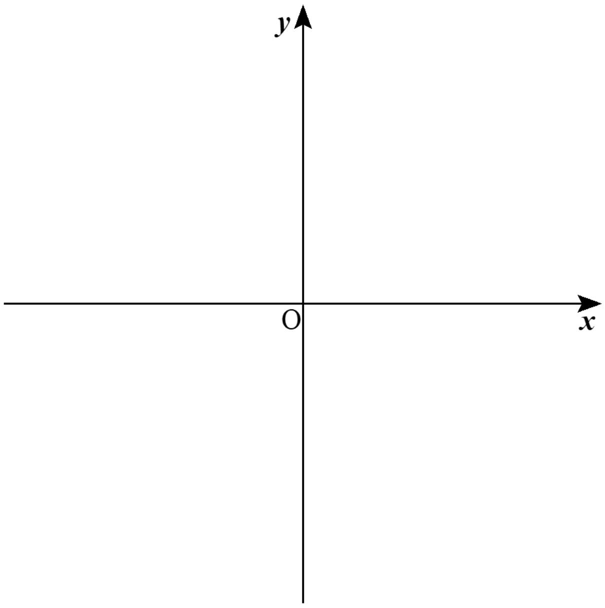
(1)　$f(x) = x^2 + 2x + 4$



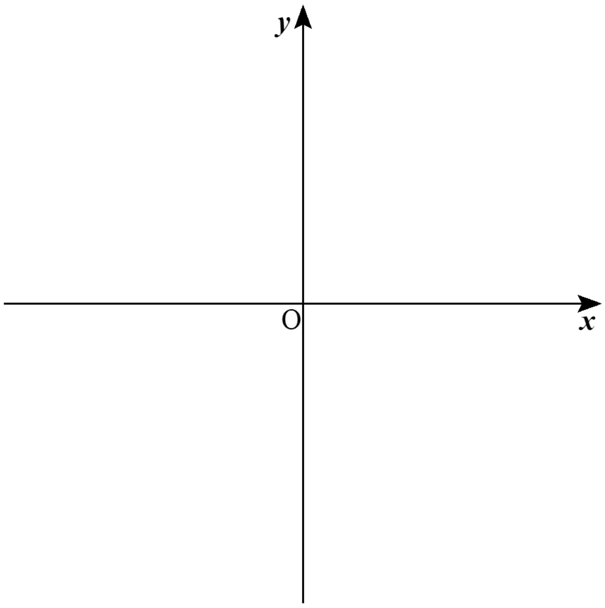
(2)　$f(x) = x^2 + 5x + 7$



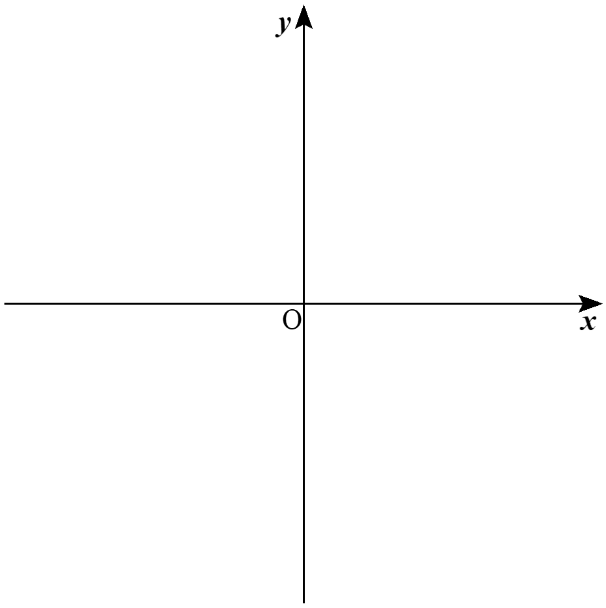
(3)　$f(x) = 2x^2 + 6x + 2$



(4)　$f(x) = -x^2 + 4x - 4$



(5)　$f(x) = -2x^2 + 6x + 3$

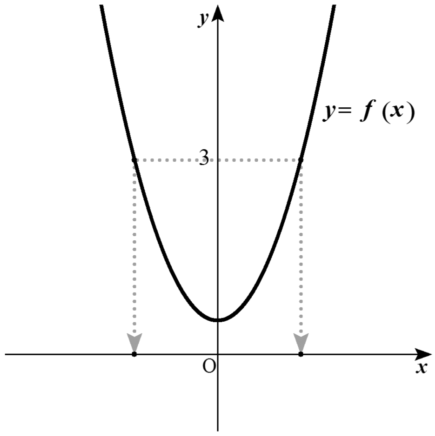


1.5.6　グラフを用いた方程式の解釈

グラフを利用すれば，方程式の解についても一目瞭然である．

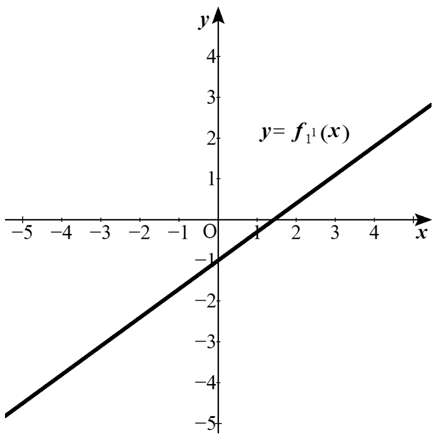
「$f(x) = 3$ となる方程式を解け」という数学語を日本語にすると，「$f(x)$ の出力が 3 となる入力値は何であるか」となる．

この日本語に従って，$f(x)$ の入力出力対応表（グラフ）を描こう．そして，出力が 3 になっている場所を探し，その時の入力値を調べよう．具体的な値はグラフからは読み取れないが，解が 2 つあることは見て取れる．

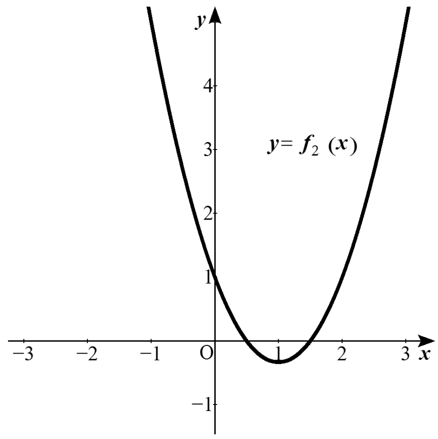


問題 1.27　以下の方程式はいくつの解を持つか．但し，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ はグラフで示したとおりである．

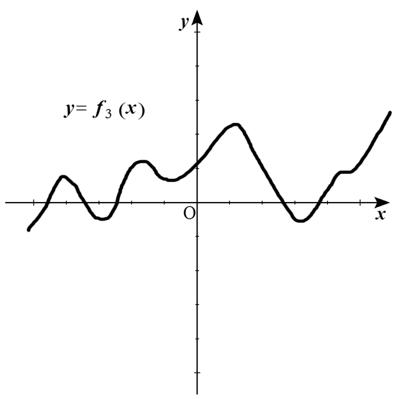
1.　$f_1(x) = 2$



2.　$f_2(x) = -1$



3.　$f_3(x) = 0$



1.6　不等式

1.6.1　不等式とは

「不等式を解く」とは，関数の出力がある値以上・以下・より大・より小となるような入力値の範囲を調べることである．

例 1　　今，家に 8 ℓ のジュースがある．ジュースを x ℓ 買うとしたとき，ジュースの合計量を出力する関数は $f(x) = x + 8$ である．ジュースが 12 ℓ より多くなるには，ジュースを何 ℓ より多く買えばよいだろうか？

例 1 の解

「$f(x)$ の出力が 12 ℓ より多い」という日本語を数学語に翻訳すると

$$x + 8 > 12$$

これを満たす x は $x > 4$ である．

例 2　　1 ℓ 130 円のガソリンを x ℓ 買う．このときの総額を出力する関数は $f(x) = 130x$ である．1300 円以下で買えるガソリンは何 ℓ 以下だろうか？

例 2 の解

「$f(x)$ の出力が 1300 円以下である」という日本語を数学語に翻訳すると

$$130x \leq 1300$$

これを満たす x は $x \leq 10$ である．

問題 1.28　日常生活において不等式を解くことがある．関数の入力値が何であり，出力値が何であるかを明確にした上で例示せよ．

1.6.2　移項を用いた一次不等式

方程式の場合とほぼ同様に，移項を用いて一次不等式を解くことができる．例として，

$$5x + 3 > 8$$

という不等式を考えてみる．
不等式の両辺に同じものを足しても，両辺の大小関係は変化しない．
そこで，両辺に -3 を足すと，

$$5x + 3 - 3 > 8 - 3$$

$$5x > 5$$

不等式の両辺に，同じ正の数を掛けても，両辺の大小関係は変化しない．
そこで，両辺に $\dfrac{1}{5}$ を掛けると，

$$\frac{5x}{5} > \frac{5}{5}$$

$$x > 1$$

となる．

問題 1.29　以下の 1 次不等式を解け．

1. $3x + 5 > 32$
2. $5x - 2 \geq 13$
3. $3x - 2 < 11$
4. $8x + 1 \leq 31$

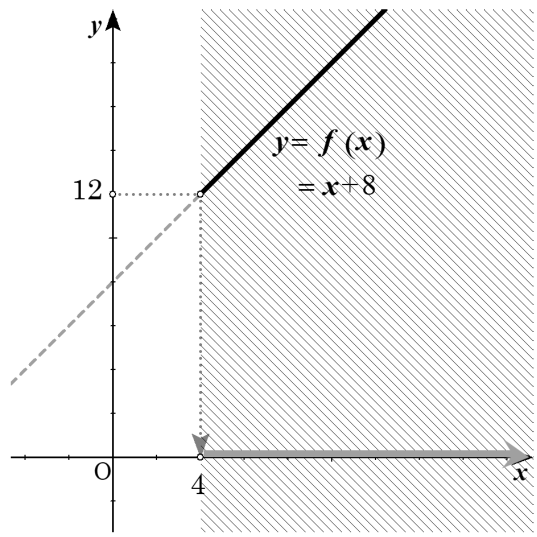
問題 1.30　先ほど「不等式の両辺に，同じ正の数を掛けても，両辺の大小関係は変化しない．」と書いた．では，不等式の両辺に，同じ負の数を掛けた場合，両辺の大小関係はどうなるか考えよ．具体的には，$5 > 3$ や，$-4 > -10$ や，$3 > -2$ に対して，両辺にそれぞれ -1 を掛けて，大小関係がどうなるか調べてみよう．

そう，不等式の両辺に，同じ負の数を掛けた場合，両辺の大小関係は逆転するのだ．

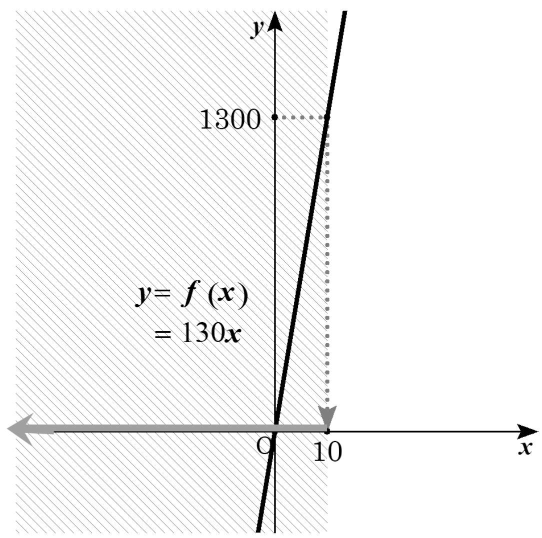
1.6.3　グラフを用いた不等式の解釈

さて，ここまで不等式を移項を用いて解いてきたが，実はそれぞれの関数をグラフにすれば一目瞭然である．

最初の例では，まず出力値が 12 より大きくなるような入力値の範囲を図示し，ちょうど $f(x)=12$ となるような入力値を求め，x の範囲を具体的に示せばよい．



2 番目の例では，まず出力値が 1300 以下になるような入力値の範囲を図示し，ちょうど $f(x)=1300$ となるような入力値を求め，x の範囲を具体的に示せばよい．



1.6.4 2次不等式

2次関数は，一般には $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ の形で表されるが，グラフを描いたり方程式を解いたりするときには平方完成された $f(x) = a'(x - b')^2 + c'$ の形で表した方が便利であった．

さて，ここで2次関数の表記にはもう一つメジャーなものがあったことを思い出してほしい．下に示したような，2つの1次式の積の形式だ．

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

この形式は，$f(x) > 0$ や $f(x) < 0$ といった2次不等式を解く上で非常に有用である．

では，$f(x) > 0$ となる入力値 x はどのような値だろうか？（この問い掛けは，「2次不等式 $f(x) > 0$ を解け」と同義である）

まずは個々の1次式 $(x + 1)$ と $(x - 3)$ の正負について考えよう．

$x + 1$ は $x < -1$ で負，$x = -1$ で0，$x > -1$ で正，
$x - 3$ は $x < 3$ で負，$x = 3$ で0，$x > 3$ で正となる．

x の値の範囲	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

$f(x) > 0$ となるのは，$(x + 1)$ と $(x - 3)$ の正負が同じであるときだ．

x の値の範囲	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$(x + 1)(x - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

従って，$x < -1$ 及び $3 < x$ の範囲で $f(x) > 0$ となる．

問題 1.31 では，$f(x) < 0$ となる x の範囲を求めてみよう．

問題 1.32　以下の 2 次不等式を解け．

1. $(x-3)(x+5)<0$
2. $(x-1)(x+6)>0$
3. $3(x-2)(x-4)>0$
4. $-(x-2)(x-3)>0$

1.6.5　グラフを用いた 2 次不等式の解釈

1 次不等式同様，2 次不等式もグラフで解釈すると明快である．

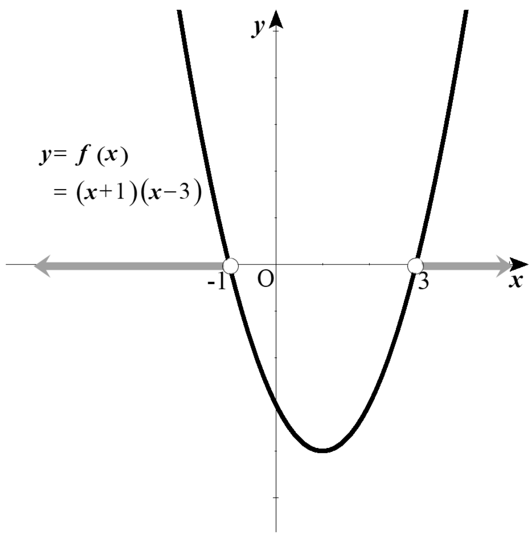
$$f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)>0$$

を考えてみよう．これは，

$$f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

のグラフを描いて，出力値が正になっている範囲を求めればよい．

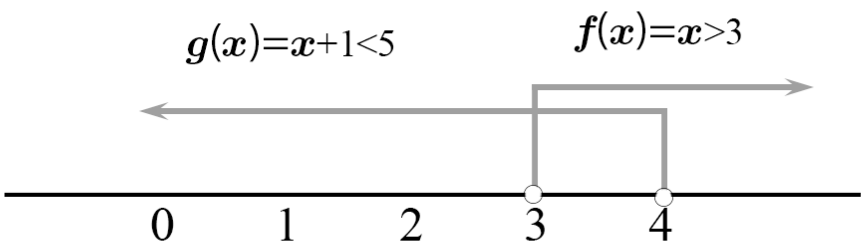
グラフを描く時，今までどおり平方完成を行ってもよいが，$(x+1)(x-3)=0$ の解が $x=-1$ と $x=3$ であり，$y=f(x)$ が下に凸型の放物線を描くことからグラフの概形を描くこともできる．



1.6.6　連立不等式

方程式の場合と異なり，2 つ以上の不等式が同時に成立する入力値が存在する場合は多い．

$f(x) = x > 3$ かつ $g(x) = x + 1 < 5$ となる入力値 x の範囲を求めてみよう．数直線を用いると分かりやすい．



上図に示された通り，$f(x) > 3$ と $g(x) > 5$ を同時に満たす x の範囲は $3 < x < 4$ である．

このように，複数の不等式が同時に成立する入力値の範囲を求める問題を連立不等式と呼ぶ[*15]．

それぞれの式が成立する入力範囲を別個に聞いているのではなく，2 式が同時に成立する入力範囲を聞いているのだという意味を込めて，下のように 2 式を $\{$ でまとめる．

$$\begin{cases} f(x) = x > 3 \\ g(x) = x + 1 < 5 \end{cases}$$

間違っても，「少なくともどちらか一方が成立する x の範囲」ではないことに気をつけて欲しい．

[*15] 複数の方程式が同時に成立する入力値を求める問題を連立方程式と呼ぶ．これは 2 変数関数を扱うので少し難しい．

例 1

$$\begin{cases} f(x, y) = x + y = 3 \\ g(x, y) = 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

例 2

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + 3y = 5 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - x = 7 \end{cases}$$

問題 1.33　日常生活において連立不等式を解くことがある．それぞれの関数の入力値が何であり，出力値が何であるかを明確にした上で例示せよ．

問題 1.34　以下の連立不等式を解け．それぞれの不等式が成立する範囲を数直線状に書き，共通する範囲を答えればよいのだ．

1. $$\begin{cases} f(x) = x + 4 > 0 \\ g(x) = x - 8 < 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f(x) = x + 4 < 0 \\ g(x) = x - 8 < 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} f(x) = x + 4 < 0 \\ g(x) = x - 8 > 0 \end{cases}$$

1.6.7　AND と OR

「連立」が “AND”，即ちすべての式が同時に成立する入力値の範囲を意味することは理解できただろうか．

一方で，1.6.4 節と 1.6.5 節で，2 次不等式 $(x+1)(x-3) > 0$ の解として，$x < -1$，$3 < x$ を得たときには，「x が -1 より小さいか，**または** (OR)，3 より大きいときに $(x+1)(x-3) > 0$ が成立する」ということを意味していた．

ここで，AND と OR に気を付けながら以下の 2 つの連立不等式を解いてほしい．

例 1

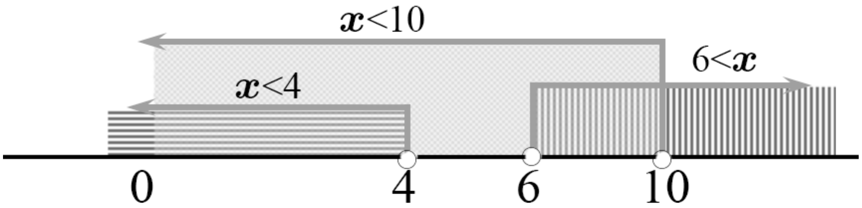
$$\begin{cases} x < 10 \\ x < 4 \\ 6 < x \end{cases}$$

例 2

$$\begin{cases} x < 10 \\ (x-4)(x-6) > 0 \end{cases}$$

例 1 の解

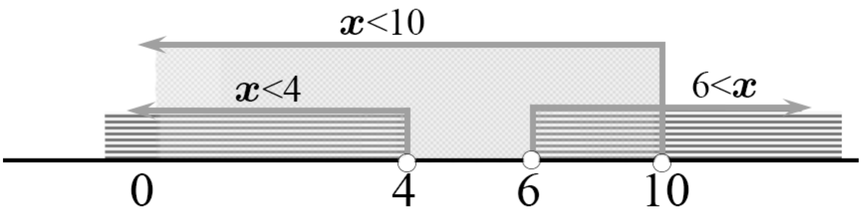
例 1 の連立不等式が意味するものは，$x < 10$　AND　$x < 4$　AND　$6 < x$ である．



数直線上にそれぞれの範囲を記入したものが上図である．3 つの式が同時に成立する入力値は存在しない．

例 2 の解

例 2 の連立不等式が意味するものは，$x < 10$　AND　$(x < 4$　OR　$6 < x)$ である．



数直線上にそれぞれの範囲を記入したものが上図である．すべての条件が同時に成立する入力値は $x < 4$　OR　$6 < x < 10$ である．

では，今まで学んだ不等式の知識を総動員して以下の問題を解いてみよう．

問題 1.35　以下の連立不等式を解け.

1. $\begin{cases} x - 3 \leq 8 \\ -3x < 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x-3)(x+2) < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2(x+3)(x-2) > 0 \\ (x+1)(x-5) < 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -(x+6)(x+1) < 0 \\ (x+3)(x+2)(x-3) < 0 \end{cases}$