第 8 章

数列

これから学ぶ数列とはどういうものか，例示できない人は少ないだろう．

例えば，小学校の算数でも登場する

$$1, 4, 7, 10, 13, \cdots$$

というように 3 ずつ増えていく数字の列（等差数列）などが好例である．

また，脳トレや電車広告のクイズで，

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, \boxed{}, 38, \cdots$$

$$3, 4, 6, 9, 13, \boxed{}, 24, \cdots$$

といった数列の規則を見抜いて空欄を埋めよ，という問題を目にすることもあるだろう．

実は，著者は子供の頃この手のクイズが嫌いで，「この最初の部分だけから$\boxed{}$を想像するなんて馬鹿らしい」「$\boxed{}$は 15，数字は佐藤くんが虫歯の治療をした年齢を並べたもの」などと，クイズに対して斜に構えていた．大人になった今でも，この手のクイズには今ひとつノれないでいる．

実際，数列の定義とは，**「数が有限個あるいは無限の自然数個並んでいる」**であり，**規則があるかどうかは関係ない**のだ．

$$12, 24, 36, 48, \cdots$$

と常に 12 ずつ増えていく数字の並びも数列であるし，

$$3, 5, 8, 9, 7, 9, 2, \cdots$$（円周率の小数点以下 9 桁目以降を 1 桁ずつ並べたもの）

もまた立派な数列である．

しかし，高校数学や大学数学で数列を学んでみると，数列はただの IQ テストや車内広告のネタで終わるような技術でないことがすぐに理解できる．微積の章では「なんとなく」の理解で済ませてしまった極限も数列を使うと非常にシンプルかつクリアに表記できるし，条件や経験を元に未来の予測を行うこともできる．具体的な使い方の解説はあとで行うとして，まずは数列の初歩から学んでいこう．

8.1　数列とは

受講者の皆さんはお気づきかもしれないが，数列とは

入力値が自然数(0 や負数を含むこともある）に限定された関数

に他ならない．

入力値は「数列の何番目であるか」で，出力値がその値であるということだ．

問題 8.1　数列が関数の定義を満たしているかどうかを考えよ．

8.2　数列の表記

数列全体を表すときには $\{a_n\}$ と書き，数列の k 番目（第 k 項という）は a_k と書く．

例題 1　等差数列とは，第 k 項と第 $k+1$ 項の差が常に一定[*1]である数列のことである．

等差数列 $\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$

の第 k 項 a_k はいくつだろうか？

例題 1 の解

第 1 項が 1 で，第 k 項に至るまで 2 を $k-1$ 回足すので，

$$a_k = 1 + 2(k-1) = 2k - 1$$

問題 8.2　等比数列とは，第 k 項と第 $k+1$ 項の比が常に一定[*2]である数列のことである．

等比数列 $\{a_n\} = \{3, 6, 12, 24, 48, \cdots\}$

の第 k 項 a_k はいくつだろうか？

[*1] この値のことを「公差」という．
[*2] この値のことを「公比」という．

問題 8.3　以下の数列の，第 k 項を k の関数として表記せよ．

1. 第 1 項が 4，公差が 9 の等差数列
2. 第 1 項が 3，公差が-2 の等差数列
3. 第 1 項が 7，公比が 3 の等比数列
4. 第 1 項が 5，公比が 0.8 の等比数列
5. 第 1 項が a_1，公差が d の等差数列
6. 第 1 項が a_1，公比が r の等比数列

問題 8.4　今，第 4 項が 7，公差が 3 の等差数列 $\{a_k\}$ がある．

1. a_1 を求めよ．
2. a_k を求めよ．（k の関数として表わせ，という意味である．）

問題 8.5　今，第 3 項が 98，公比が 7 の等比数列 $\{a_k\}$ がある．

1. a_1 を求めよ．
2. a_k を求めよ．（k の関数として表わせ，という意味である．）

問題 8.6　入力値が自然数（あるいは非負整数）に限定されている関数の例を挙げよ．

8.3　数列の和

積分の章で学んだが，数列の和の表記方法を学んでおこう．

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

と書くことで，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を意味する．

$\sum$ 記号は，「i の値を下に書いてある数字から上に書いてある数字まで 1 ずつ増やしながら，$\sum$ 記号の右側の数式を計算し，それらの総和を求める」という意味である．

問題 8.7　$\sum$ の線形性を示せ．つまり以下の 1，2 を示せば良い．

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

問題 8.7 で示した線形性により，等差数列や等比数列の総和を簡単に求めることができる．なぜなら，等差数列 $\{a_k\}$ において初項（最初の項）を a とすると，第 k 項は $a + d(k-1) = d\,k + (a-d)$ と表せるため，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = d\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(a-d)$$

と変形できる．右辺第 2 項は $(a-d)$ を n 回足しているだけなので，$n(a-d)$ である．したがって，右辺第 1 項を求めれば良いことになる．

例題 2 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ を n を用いて書け.

例題 2 の解

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

ここで,

$$S_n + S_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$
$$2S_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1)$$

$\because$ 足し算は可換

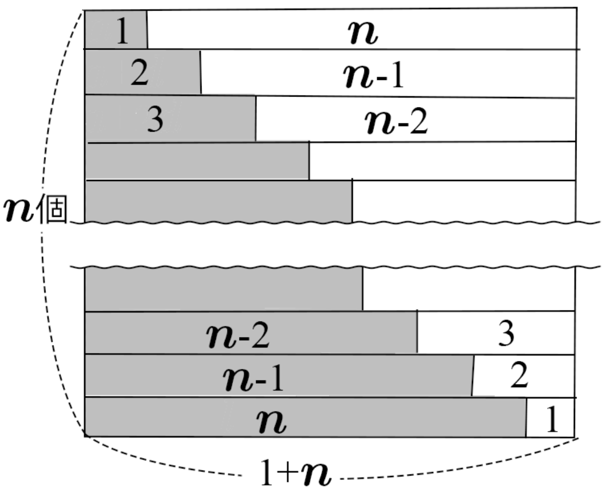
$$= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \cdots + (n + 1)$$

$\because$ 足し算は結合を入れ替えても結果が同じ

$$= (1 + n) \times n$$

よって

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2}$$



問題 8.8 等比数列 a_n の総和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を考える．第 1 項は a，公比は r とする．

1. S_n を $\sum$ 記号を用いず，a と r のみを用いて書いてみよ．

2. $r\,S_n$ を同様に書いてみよ．

3. $r\,S_n - S_n$ を計算し，Sn を求めよ．(r が 1 か 1 でないかによって結果が異なることに注意せよ．)

問題 8.9 以下の数列の和を求めよ．

1. 初項 5，末項 55，項数 10 の等差数列

2. 初項 60，末項-4，項数 9 の等差数列

問題 8.10　以下の数列の和を求めよ．

1. 初項-10，公差 4，項数 10 の等差数列

2. 初項 80，公差-4，項数 15 の等差数列

3. 初項 3，公比 2，項数 10 の等比数列

4. 初項 4，公比 3，項数 5 の等比数列

問題 8.11　1 から 100 までの自然数の和，偶数の和，奇数の和をそれぞれ求めよ．

問題 8.12　数列 2，22，222，2222，$\cdots$ の第 n 項を n の式で表せ．

ヒント：$a_n = 2(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{n-1})$ であることに注目すると，

(　　) 内は，初項 1，公比 10，項数 n の公比数列である．

8.4　数列の総和の応用

数列は数限りなく多様なものを考えることができるので，和を求められる数列は，等差数列や等比数列など，ごく少数のものに限られている．

そのごく少数のものの中から，ひとつ取り上げてみよう．

例題 3　等式 $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ を利用して，次の和を求めよ．

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

例題 3 の解

等式 $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ を利用して S を書き直すと，

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

すると，隣り合う間の項が次々と消えていくので

$$= 1 - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n}{n+1}$$

となる．

この例のように

$$\sum\{(k\ の式) - (k-1\ の式)\}$$

の形に上手く変形して，打ち消しあうものを消していくというのは，$\sum$ の計算でよく使われる考え方である．

8.5　数学的帰納法

「数学的帰納法」は数列に限って使われるテクニックではないのだが，ここで紹介しておく．

例えば先程の**例題 2** の「$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ を n を用いて書け．」という問題について考えるとする．

解を求めた後，検算のために実際に n の値を 1，2，3，4，$\cdots$ と変更しながら実験すると良いことは既に伝えた．

しかし，今度は先程の「階段を上下ガッチャンコ」みたいなスマートな方法が思いつかなかったと想定してみよう．その場合もやはり $n = 1$，2，3，4 くらいまで実験してみるのが良い．

$n = 1$ のとき　$S_1 = 1$
$n = 2$ のとき　$S_2 = 1 + 2 = 3$
$n = 3$ のとき　$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$n = 4$ のとき　$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

この時点で，「あ！ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ かも！」と勘付いたとしよう．

この法則が成立するかどうか検証するのに，もちろん現代においてはコンピューターを用いて $n = 10000$ くらいまで一瞬で計算することができ，厳密に証明されたわけではないが「この法則は日常使いの範囲では正しい」とまで言えるだろう．

つまり帰納的に法則を見出したわけだ．

では，この法則が任意の n に対して成立することを示すためにはどうすればよいだろうか．実は，

「$n = 1$ のとき正しいこと」

「$n = k$ のとき正しかったとしたら $n = k + 1$ のときも正しいこと」

の 2 つだけ示せば良い．

これを日本語で言うなら，

「1 のときこの法則は成立」

「$k = 1$ のとき成立するなら $k = 1 + 1 = 2$ のときも成立」

「$k = 2$ のとき成立するなら $k = 2 + 1 = 3$ のときも成立」

$$\vdots$$

と全ての自然数について法則が成立することが「成立する」ということだ[*3].

では，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2}$ を帰納法で示そう．

証明

(1) $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 1,\ \text{右辺} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

となるので法則は成立.

(2) $n = k$ のときこの法則が成立するとしたら，

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

このとき

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

となり，$n = k + 1$ であっても成立.

(1)，(2) より，全ての自然数について成り立つ．　証明終わり

[*3] $+1$ を繰り返していく方法で全ての自然数についてカバーできるのは，自然数そのものの定義に基づいている．

8.6　漸化式

数列を考える際に，1 つ前の状態を元に次の状態を決めるルールがわかっていることがある．

例えば,「今期の売上は前期の売上の 1.1 倍に 10 万円を足した額である」という法則があったとする．

このとき，n 期の売上を a_n(単位：万円) とおくと，この法則は

$$a_{(n+1)} = 1.1\ a_n + 10$$

と書ける．

もちろんこれだけでもかなり便利なのだが，数列らしく $a_n = f(n)$ の形で書いたほうが便利なケースもある．

この節では，漸化式[*4]で記述された現象を $a_n = f(n)$ の形で記述し直すことを学ぶ.

問題 8.13　漸化式の形で記述される現象を挙げてみよ．すなわち，a_{n+1} を，a_1 から a_n までのうちのいくつかを用いて記述できるケースである．

a_{n+1} を記述するのに 1 つ前の項である a_n のみを用いる場合を「1 次の漸化式」，2 つ前まで用いる場合を「2 次の漸化式」，…，m 個前まで用いる場合を「m 次の漸化式」という．

漸化式を n の関数の形に書き直すのは非常に難しく，元の漸化式の形よりも簡潔に書き表せるケースは稀である[*5].

[*4] 数列の各項を，それ以前の項の関数として定める等式

[*5] 高校数学の問題でいつもきれいに書き表せるのは，そうなる漸化式のみを問題にしてくれているからである．

問題 8.14　等差数列 $\{2, 5, 8, 11, \cdots\}$ を漸化式で表わせ.

問題 8.15　等比数列 $\{3, 6, 12, 24, \cdots\}$ を漸化式で表わせ.

問題 8.16　以下の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ.

1. $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2$

2. $a_1 = 3$，$a_{n+1} = a_n - 2$

3. $a_1 = 4$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}$

4. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n$

5. $a_1 = 3$，$a_{n+1} = -2a_n$

6. $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n$
ヒント：a_n は a_1 に 1 から $n-1$ までの和を加えることになる．

我々が漸化式を見てパッと元の数列が浮かぶのはこのくらいである．他の漸化式を見た際は，なんとかしてこの形に帰着させるのだ．

例題 4　漸化式

$$a_{n+1} = 2\,a_n + 1 \qquad \text{(式 1)}$$

を満たす数列の，第 n 項 a_n を求めよ．

例題 4 の解

$a_n - \alpha$ を b_n とおく．ただし，$\{b_n\}$ が $b_{n+1} = 2\,b_n$ となるように，α を上手く設定する．

$a_{n+1} - \alpha = 2\,(a_n - \alpha)$ としたとき，
$a_{n+1} = 2\,a_n - 2\alpha + \alpha$ であり，
(式 1) の右辺定数項より，

$$-2\alpha + \alpha = 1$$

よって $\alpha = -1$ と設定すればよい．

このとき，$b_{n+1} = 2b_n$ となるので，$\{b_n\}$ は初項 $a_1 + 1 = 4$，公比 2 のただの等比数列である．

したがって，

$$b_n = 4 \times 2^{n-1}$$

よって，

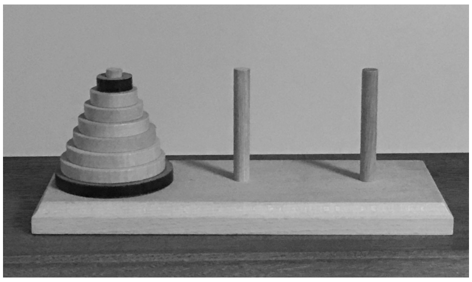
$$a_n = b_n - 1 = 4 \times 2^{n-1} - 1$$

問題 8.17　以下の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ．
ヒント：例題 4. と同様に，$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ となる α を求める．

1. $a_1 = 5$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$

2. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 1$

ところで，「ハノイの塔」というパズルをご存じだろうか．写真のように n 枚（写真では 8 枚）の円板が上のものほど小さくなるように重なっている．



これを，以下のルールで隣の棒に移すのである．

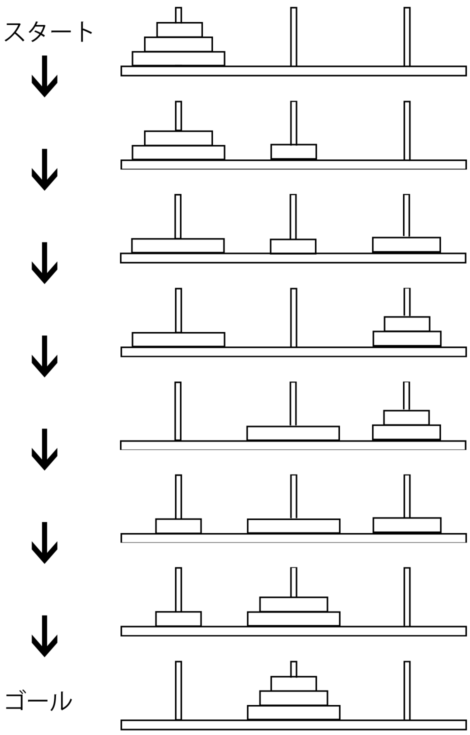
ルール 1　1 回の動作で 1 枚しか動かせない

ルール 2　3 本の棒以外のところに円板を置くことはできない

ルール 3　小さい円板の上に大きい円板を置くことはできない

以下，ハノイの塔について考えてみよう．

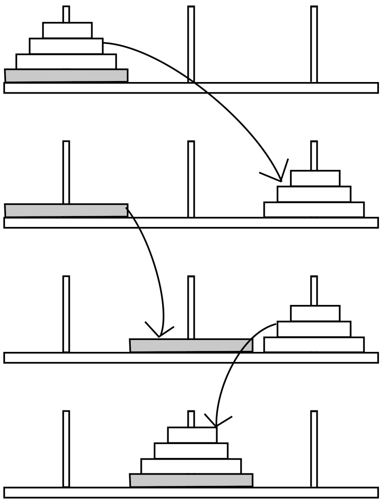
今，仮に円板が 3 枚だとすると，以下のように 7 手で隣の棒に移すことができる．



例題 5　n 枚の円板から成るハノイの塔を隣の棒に移すのに何手かかるか．漸化式を立て，さらに一般項を求めよ．

例題 5 の解

試しに，円板の数を先ほどより 1 枚増やして 4 枚にしてみる．すると，以下のように，まず，上の 3 枚を右端の棒に移して，それから新たに加わった 1 枚（灰色の円板）を移し，再びその上に 3 枚を移すことになる．



すなわち，3 枚移すのにかかる手数を a_3，4 枚移すのにかかる手数を a_4 とすると，

$$a_4 = a_3 + 1 + a_3$$

である．

したがって，n 枚移す手数を a_n とすると

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$$

という式が立てられる．

これを例題 3 の手順で変形すると，

$$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$$

また，明らかに $a_1 = 1$ である．

よって，数列 $\{a_n + 1\}$ は，初項が $a_1 + 1 = 2$，公比が 2 の等比数列であり，

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 2^n - 1$$