高校数学 IIB

佐藤　秋彦

数学 IIB 講座へようこそ！

この数学 II B 講座の受講者の皆さんの中には，数学 I A 講座を受講していて私のことや私の高校講座に対する考えをご存知の方もいらっしゃるかも知れませんが，初めて会う方々のためにも次ページで改めて自己紹介とこの講座の“理念”について述べることにします.

2018 年 10 月
佐藤秋彦

＜略歴＞
東京大学　教養学部　基礎科学科　数理科学コース　卒業
東京大学大学院　総合文化研究科　広域科学専攻
生命環境科学系（生物物理学）修士課程修了

同　博士課程在籍

- 統計検定準 1 級取得（優秀者 S）
- 統計検定 2 級取得（優秀者 A）

＜指導科目＞
数学/統計学/機械学習/企業ゼミ

＜趣味＞
料理/模型作り/映画を観ること

数学を学ぶ意義とは？

- 新たな視点を獲得する
- 実生活を豊かにする

この授業ではどう学ぶのか？

数学の技法は決してパズルや思考力のトレーニングツールとして生まれたわけではない．皆さんが学ぶ高校数学にも背景となる“動機”と学ぶことによる“利益”があるのだ．

- 数学ＩＡで学んだ「関数」は入力から一意に出力が定まる法則に対する理解であった．世の中は関数で満ち溢れていること，そして出力値制御問題（方程式・不等式・最大最小値問題）や出力値プロット（グラフ）を学んだ．

- 「集合と論理」では我々が普段生きていく上で欠かせない“論理”とは何かを厳密に学び直した．

- 「場合の数・確率」では不確定な未来について対処する術を学んだ．

- そして「三角比」「剰余分類」では人類が眼前の問題を解決するために新たな数学的アルゴリズムを構築することを追体験した．

このように，数学ＩＡの内容は，全ての人が日常生活を少し生きやすく豊かにすること

に使えるものである[*1].

では，数学 II B で学ぶことは何だろうか．私の考えでは，数学 II B のカリキュラムは，**文系理系を問わず専門的な内容を学んだり生業にしたりする者が最低限身につけておくべき技術**という括りで選ばれている[*2]．受講者の皆さんの中には，高校時代これらの実際の活用方法がわからず学習意欲が沸かなかったり，テストで点を取れるようになったまでは良いものの後の人生で全く役に立たず，学び損になったという印象を持っていたり，という方も多いだろう．

本講座では，ただ数学 II B を学ぶにとどまらず，全ての単元で「なぜ学ぶのか」[*3]「どうやって使うのか」を含めて講義をしていくつもりだ．

[*1] あえて使わずに生きづらい人生を選択するのは賢明ではないだろう．目の前の青春を謳歌する高校生に数学が“具体的にどう役立つか”あるいは“人類の生活にどう関わっているか”を教えない数学教育では生徒の心を惹きつけられのも仕方ない．

[*2] 具体的には「積分・微分」「数列」「三角関数」「指数関数」「ベクトル」である．

[*3] 「なぜ生み出されたのか」と言い換えてもいい

第 I 部

積分をしてみよう

MEMO

これから 3 ヶ月（約 12 回）かけて積分を学んでいく．そのためには数列と微分の知識が不可欠である．適宜それらを学びながら進んでいこう．この第 I 部で我々が学ぶのは，17 世紀後半にニュートンとライプニッツがそれぞれ独自に完成した内容であり，以下の順で話を進めていく[*4]．

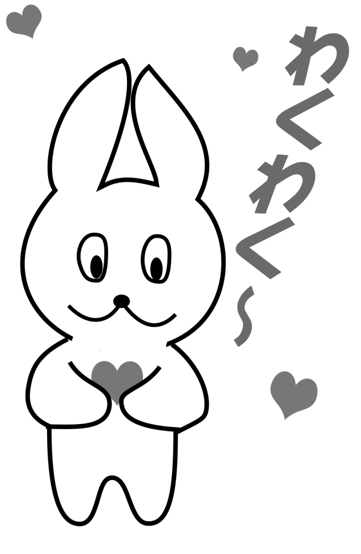
第 1 章　積分とは総和を求める足し算である
第 2 章　総和を出す際には全体をとても細かく分割する（極限について）
第 3 章　数列の総和を出す方法
第 4 章　微分とは『(関数の出力値の微小変化量）／（入力値の微小変化量)』である
第 5 章　微分を用いて積分を計算する

多くの数学の教科書では「微分・積分」という順番で書かれているが，これは歴史の流れに沿っていない．積分とはあくまで足し算であり，割り算である微分より遥かに早い段階で人類史に登場する[*5]．概念としては，積分のほうが微分よりも遥かに簡単なのだ．しかしながら，一般化された積分を解析的に求めるのは非常に難しく，第 2 章〜第 4 章の考えが必要となる．人類は積分を編み出してから解析的に計算できるようになるまで 2000 年近くかかったのだ．

それでは早速『積分とは何か』というところから話を始めていこう．

[*4] 数学 I A 講座のときからそうであったが，歴史の順を追って学ぶのが私の講座のスタイルだ．
[*5] 具体的には紀元前のエジプトの土地面積の測量である．

MEMO



第 1 章

積分とは総和を求める足し算である

心配ご無用！

本講座の受講者の方々の中には，『積分』と聞くともう「わけ分からない数学の奥義」とか「積分で挫折した」とか「$\int$ 記号の意味が分からない」とかいう方もいるかもしれない．しかし，まず『積分とは何か』をしっかり理解すれば，決して『わけ分からない』ものではなく，極論を言えば，積分とはただの足し算であり $\int$ 記号もただの足し算の略記に過ぎない，ということが分かるはずだ．

本講座では，まずは歴史の流れに沿って微分法と積分法の発想を学んでいく．

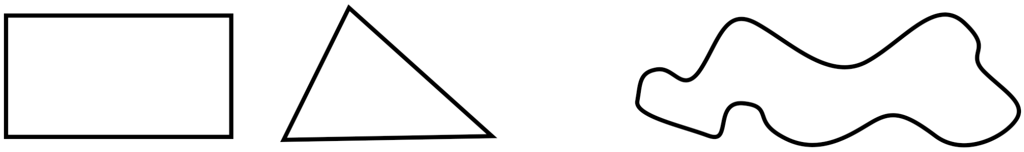
1.1　積分の歴史

大規模かつ複雑な構造を持つものに対して，何かしらの総和を求める欲求は紀元前からあった．

「この国には何人の人が住んでいるのか？」（人数の総和）
「この国の国民は全部でいくらの貯金を持っているのか？」（金額の総和）
「この町の広さはどれだけなのだろうか？」（面積の総和）

などなど，他にも様々な例があるだろう．ここでは，イメージするのが最も容易な『面積の総和』について考えていこう．

図 1 に示すように，(a) のような長方形や三角形の土地の面積を求めることは容易である．しかし，積分が生まれたエジプトのナイル河沿いの地域では，度重なる洪水で土地の形は (b) のようにぐにゃぐにゃになっている．定期的に起きるナイルの氾濫で土地の仕切りが流されてしまう以上，どの人がどれだけの広さの土地を持っていたかを管理しておく必要がある．氾濫後土地を区切り直す際に，洪水前と形は変わっても同じ広さを確保するためだ．



(a) 長方形や三角形の土地　　(b) ぐにゃぐにゃの土地

図 1　色々な形の土地

問題 1.1　図 1(b) の土地の面積を当時の技術で測量する方法を考案せよ．あなたならどうする?

ぐにゃぐにゃの土地の面積を求めるのは難しいが，長方形や三角形の土地の面積を求めることは容易である．そこで，ぐにゃぐにゃの土地の面積を求めるには，

1. ぐにゃぐにゃの土地全体を，杭とロープを用いて長方形や三角形に分割し，
2. それぞれの長方形や三角形の面積を測量して記録し，
3. それらの数を足し算すればよい．

実際の面積と僅かな誤差（図 2 の黒塗りの部分）はあるが，細かく分割すればするほど誤差は小さくなる．この考え方を**区分求積法**という．

(a) 長方形に分割　　(b) 三角形に分割

図 2　ロープで分割した土地

これが積分の考え方の基本である．

では，今したことを少し数学らしく記述してみよう．土地全体の面積の総和は，数学記号を用いて以下のように記述するこができる．

$$\sum_{\text{土地全体}} \text{微小三角形の面積} \qquad \ldots(\text{式 } 1)$$

仮にそれぞれの微小三角形の面積に 1〜100 番の番号をつけるなら，

$$\sum_{i=1}^{100} \text{第 } i \text{ 三角形の面積} \qquad \ldots(\text{式 } 2)$$

と記述することもできる．

$\sum$ は Sum（総和）の S に対応するギリシャ文字であり，「$\sum$ 記号の上下にある範囲で $\sum$ 記号の右側にあるものを全て足す」という意味である．(式 1) は「土地全体の中にある微小三角形を全部足す」という意味であり，(式 2) は「i を 1 から 100 まで増やしながら右側のものを足す」すなわち「第 1 三角形の面積 + 第 2 三角形の面積 + 第 3 三角形の面積 + $\cdots$ + 第 100 三角形の面積」を意味する[*1]．

この方法のポイントは 3 つある．

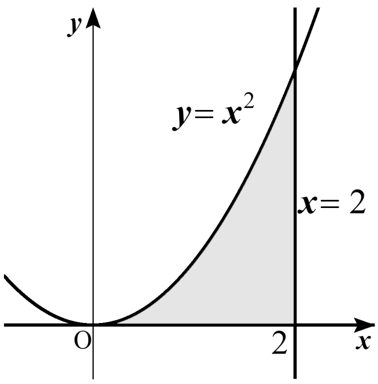
1. 重複無く分割すること
2. 可能な限りスキマ無く分割すること
3. 一つ一つが面積を求めやすい形に分割すること

である．土地を三角形に分割する際に，三角形が重なり合ってしまうと，本来の全体の面積よりも三角形の和の方が重なりの分だけ大きくなってしまうし，逆にスキマがあると，本来の全体の面積よりも三角形の和の方がスキマの分だけ小さくなってしまう．そして，三角形以外の図形，すなわち四角形（ただし長方形は除く）や五角形などに分割すると，「計算しやすい形に分割してから足す」という本来の目的を達することができない．実は，この 3 点をクリアする分割というのは結構難しく訓練を要する．

では，以下の問題を考えてみよう．

[*1] i はプログラミングをする方にとってはお馴染みだろう．Iteration（繰り返し）の頭文字である．

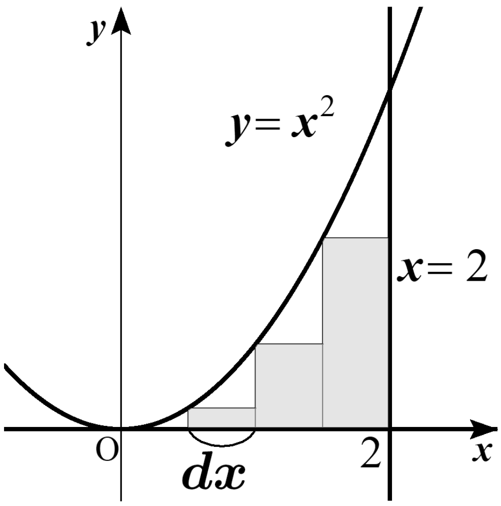
例題　$y = x^2$ と x 軸と $x = 2$ とで囲まれる領域の面積を求める．その際，どのような分割を行えばよいだろうか．ただし，あなたはエジプトの高官なので『掛け算をする役人と足し算をする役人』*2を自由に使うことができる．



例題の解

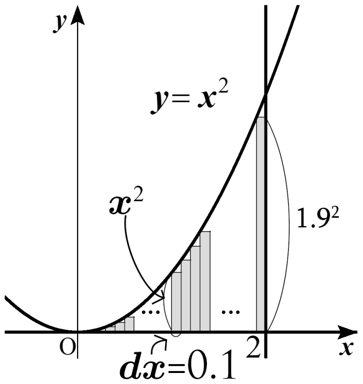
我々が簡単に求められる面積は，長方形か三角形くらいのものである．今回は長方形に分割することにしよう．

長方形の面積は『底辺 × 高さ』で求められるので，求める領域を以下のように底辺の幅 dx を定数として同じ幅の長方形に分割する．



*2 現代でいうと関数機能のない Excel である．

$dx = 0.1$ のとき，領域は 20 個の長方形に分割される．このように分割した場合，座標 x から始まる長方形の高さは x^2 であり，底辺は dx である．



したがって求める面積は

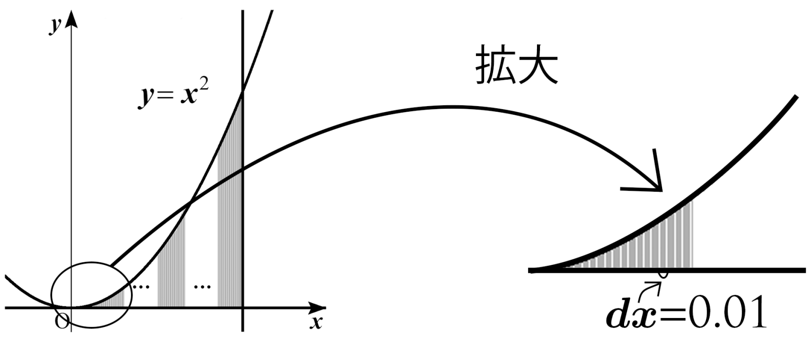
$0.1 \times (0.1 \times 0)^2 + 0.1 \times (0.1 \times 1)^2 + 0.1 \times (0.1 \times 2)^2 + \cdots + 0.1 \times (0.1 \times 19)^2$

である．$\sum$ 記号を用いるなら

$$\sum_{i=1}^{20} 0.1 \times (0.1 \times (i-1))^2$$

となる．このとき，左から i 番目の長方形の面積が $0.1 \times (0.1 \times (i-1))^2$ であることに注意して欲しい．あとは，役人たちに各項を計算させて足し算させればよい．

下に示すように，dx が小さくなればなるほど，求めるべき領域の真の面積と長方形の分割とのスキマが減っていくのが分かるだろう．しかし，項が多くなるため，人件費が嵩んでしまう（精度と手間がトレードオフになってしまう）ことに注意せよ．



計算結果を以下に示す．

表 1　20 分割 ($i = 1〜20$)

i	area
1	0.000
2	0.001
3	0.004
4	0.009
5	0.016
⋮	
16	0.225
17	0.256
18	0.289
19	0.324
20	0.361

長方形の面積の総和は　2.47

表 2　200 分割 ($i = 1〜200$)

i	area
1	0.000000
2	0.000001
3	0.000004
4	0.000009
5	0.000016
⋮	
196	0.038025
197	0.038416
198	0.038809
199	0.039204
200	0.039601

長方形の面積の総和は　2.6467

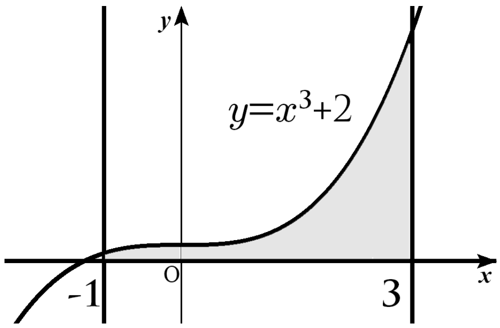
表 3　2000 分割 ($i = 1〜2000$)

i	area
1	0.000000000
2	0.000000001
3	0.000000004
4	0.000000009
5	0.000000016
⋮	
1996	0.003980025
1997	0.003984016
1998	0.003988009
1999	0.003992004
2000	0.003996001

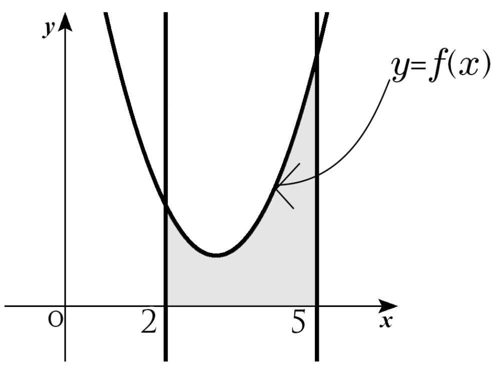
長方形の面積の総和は　2.664667

では，実際に分割をして式を立てる練習をしてみよう．

問題 1.2　曲線 $y = x^3 + 2$，x 軸，$x = -1$，$x = 3$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

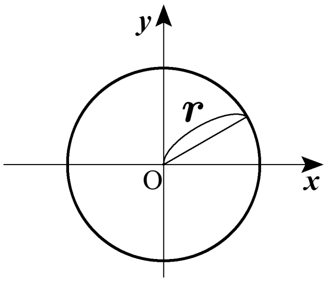


問題 1.3　区分求積法を用いると，多くの関数 $f(x)$ について，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，$x = 2$，$x = 5$ とで囲まれる領域の面積を求められる．以下の曲線ｙ＝ｆ（ｘ）について，その面積の式を書いてみよ．



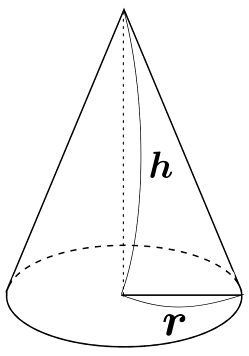
問題 1.4　問題 3 では，「多くの関数 $f(x)$」と書き，「任意の関数 $f(x)$」とは書かなかった．区分求積法では面積が求められない，あるいは誤差が大きくなりすぎて実用に適さないような $f(x)$ を例示せよ．

問題 1.5　半径 r の円の面積を求めよ．但し，円周は円の直径の π 倍であることを用いてよい．（著者は求積可能な分割方法を 2 つ考えた．）

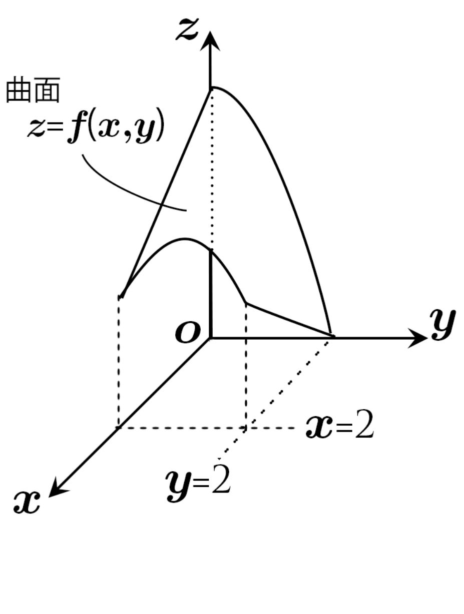


さて，ここまでは，平面を分割して個々の面積を求めて足すことで全体の面積を求めたが，同様に，立体も分割して個々の体積を求めて足すことで全体の体積を求めることができる．

問題 1.6　底面の半径が r，高さが h の円錐の体積を求めよ．



問題 1.7　正値を取る 2 変数関数 $f(x,y)$ がある．曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面・yz 平面・zx 平面・平面 $x=2$・平面 $y=2$ で囲まれる領域の体積を求めよ．



1.2　区分求積法は『面積』や『体積』のみに使える技ではない

『求積法』という単語は，面積や体積のみを求めるものであるというイメージを抱かせるが，実は，

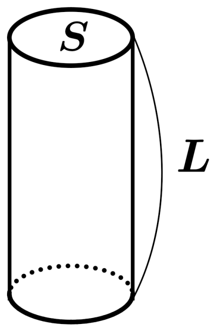
細かく分けて足すのは，面積や体積とは限らない

そこで，次は，全体の質量を求めるために

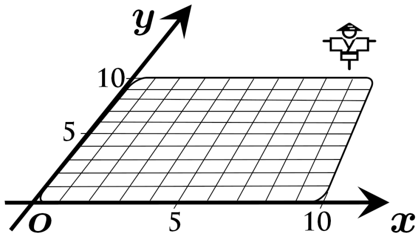
1. 対象物を細かく分け，
2. 細かく分けたものの各々の質量を求め，
3. 最後に細かく分けたものの質量の総和を求めてみよう．

問題 1.8　古代に製造されたとある鉄柱は，地面に深い穴を掘ってそこに溶けた鉄を流し込むことで製造された．しかし，鉄の精製が荒いため，深度によって密度が異なっている．密度が深度 h の関数 $\rho(h)$ で表せると仮定すると，下図の鉄柱の質量はいくらだろうか？ ただし，$\rho(h)$ は h によって急激な変化はしないものとする．

ヒント：鉄柱を分割せよ！



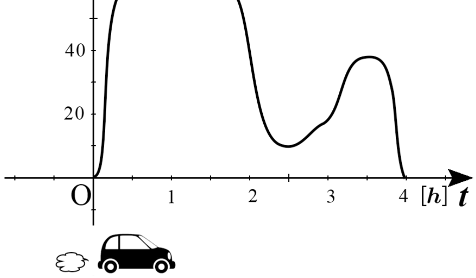
問題 1.9　佐藤君の所有する水田では，面積辺りの米の取れる量は水田の位置座標の関数 $m(x,y)$ で表される*3．佐藤君の水田から取れる米の量はどれだけだろうか？



さらにまた，分割されるものが形ある「モノ」とは限らない．

問題 1.10　車というものは，多くの場合等速で走っているわけではない．1 度のドライブの間にも時速は時間変化する（すなわち時刻の関数である）．そのグラフが以下である．この車の時刻 $0 \sim 4[h]$ の走行距離は何 km か求めよ．

ヒント：時間を微小時間 dt に区分せよ．



---

*3 日当たりや水の流れや栄養などの要因があるのだろう．

ここまで，足し算の立式を練習してきた．

積分の考え方は「全体を求めるために**分けて足す**」に尽きる．したがって受講者の皆さんは既に積分の第一歩を習得したと言えよう．

ただ，問題が 2 つある．

1. どんなに細かく分けても発生してしまう誤差
2. 計算の手間

である．

この 2 つを同時に解決するヒントのひとつが次章で学ぶ『極限』である．