第 6 章

指数関数・対数関数

前章に続いて，この章でも新しい関数を導入する．

6.1　指数

指数というのは，数の右肩に書かれていて，「その数を何回掛け算するかを表す回数」である．例えば，

$$3^2 = 3 \times 3$$
$$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$

である．

ここで，以下の定理が成立する．

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad (n,\ m \text{ は自然数}) \qquad (\text{式 } 1)$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (\text{式 } 2)$$
$$(a^n)^m = a^{mn} \qquad (\text{式 } 3)$$

問題 6.1　上の 3 つの定理を証明せよ．

問題 6.2　以下の計算を電卓を使わずに概算せよ．ただし，$2^{10} \fallingdotseq 10^3$，$5^{10} \fallingdotseq 10^7$ を用いてよい．

1. 2^{11}
2. 2^9
3. 2^{30}
4. 5^9
5. 5^{12}
6. $2^3 \times 5^{14}$

6.2　指数関数と指数の拡張

指数関数とは，

$$f(x) = 6^x$$

のように，定数の指数を入力値として x 乗した値を出力値とする関数である．

今まで指数の定義とは，**その数を何回掛け算したか**であった．
しかし，このままでは指数関数 $f(x)$ は x が自然数のときしか定義することができない．すなわち $3^{0.2}$ や 3^{-1} を定義することができないのだ[*1]．

そこで，まずは指数の定義を拡張する必要がある．
定義の更新・拡張は三角関数でも行ったが，定義の更新・拡張の際には

既存の定理が成立し続けるようにする

ことが大事である

6.2.1　0 乗と $-n$ 乗

まずは $a^0 \quad (a > 0)$ の定義を行う．(式 1) が成立し続けて

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$

となるような定義が好都合である．
上の式の右辺の指数を計算すると，右辺は a^n となる．すると $a^0 = 1$ のとき，等式が成立する．したがって，

$$\boldsymbol{a^0 \overset{\mathrm{def}}{=} 1}$$

次に $a^{-1} \quad (a > 0)$ の定義を行う．0 乗と同様に (式 1) が成立するようにするためには

$$a^{-1} \times a^1 = a^{-1+1}$$

*1 0.2 回掛け算したり -1 回掛け算したりすることはできない．

である必要がある．

このとき，

$$\begin{aligned} a^{-1} \times a^{1} &= a^{-1+1} \\ &= 1 \quad (a^{0}\text{の定義より}) \\ \text{よって}\quad a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{6.1}$$

と変形できるため，

$$\boldsymbol{a^{-1} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{a}}$$

と定義すれば (式 1)，(式 2) を崩すことなく a^{-1} を定義することができる．

また，a^{-n} 乗は (式 3) を崩さないように

$$\boldsymbol{a^{-n} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{a^{n}}}$$

と定義すれば良い．

問題 6.3　以下を計算せよ．

1. $a^5 \times a^3$
2. $a^2 \times a^{-4} \times a^3$
3. $(a^3)^2$
4. $a^2 \times (a^3)^{-2}$
5. $a^2 \div a^4$
6. $a^3 \div a^{-3}$
7. $a^4 \times a^{-2} \div a^2$
8. $(ab)^2$
9. $(ab)^3 \times (a^2b)^{-3}$
10. $2^4 \times 6^4 \div 12^3$

6.2.2　$\dfrac{1}{n}$ 乗

つぎに，$a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$ を，(式 3) を満たすように気をつけて定義する．そのためには

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}\times n} = a$$

を満たす必要があるので，**$a^{\frac{1}{n}}$ は「n 乗すると a になる数」**すなわち $\sqrt[n]{a}$ （「a の n 乗根」と読む）とする．

今後は，例えば「3 乗すると a になる数」のことは $a^{\frac{1}{3}}$ と書くことにする．理由は言うまでもなく，この章の最初で紹介した (式 1)〜(式 3) を使う上で，$a^{\frac{1}{n}}$ の方が n 乗根という書き方よりも便利だからである．

また，この定義と (式 3) を用いて，$a^{\frac{m}{n}}$ も定義することができる．これは単に $(a^{\frac{1}{n}})^m$ を表している．

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \overset{\mathrm{def}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^m}$$

以上で指数関数 $f(x) = a^x$ は，入力値が有理数の範囲まで定義できるようになった．

また，任意の実数は有理数を無限の個数足したものなので，指数関数 $f(x) = a^x$ は入力値が実数の範囲まで定義できるものとする[*2]．

問題 6.4　以下の計算をせよ．

1. $4^{\frac{3}{2}}$
2. $25^{-\frac{1}{2}}$
3. $8^{\frac{2}{3}}$
4. $27^{-\frac{4}{3}}$
5. $64^{\frac{3}{2}}$
6. $64^{\frac{2}{3}}$
7. $4^{1.5}$

[*2] 例えば $3.1415\cdots = 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \cdots$ という具合である．有理数を有限個足した数を入力する場合に定義可能であるからといって，無限個足しても定義可能である保証はないが，ここでは定義可能であると認めて先に進むことにしよう．

問題 6.5　(式 1)〜(式 3) を用いて，以下の計算をせよ．(指数を足し算するのか掛け算するのか注意せよ．)

1. $\left((125)^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
2. $\left(\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$
3. $8^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{12}}$
4. $16^{\frac{1}{3}} \div 16^{\frac{1}{12}}$
5. $2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{12}}$
6. $8^{\frac{1}{3}} \times 25^{1.5}$
7. $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{9}$
8. $(\sqrt[3]{2})^2 \times \sqrt[6]{4}$
9. $(\sqrt[4]{3})^3 \times (\sqrt[3]{3^2})^2 \div \sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$

6.2.3　指数関数の挙動

指数関数の挙動を見るために，指数関数をグラフにしてみよう．

問題 6.6　以下の関数のグラフを描け．

1. $y = 2^x$

2. $y = x^2$

3. $y = 3^x$

4. $y = 1.01^x$

5. $y = 0.5^x$

6. $y = 2^{x-3} - 5$

指数関数 $f(x) = a^x$ は，$a > 1$ のとき単調増加し，$a = 1$ のとき常に 1 の恒等関数であり，$0 < a < 1$ のとき単調減少する．

また，指数関数 $f(x) = a^x\,(a > 1)$ は「爆発的に（とんでもないスピードで）増加していく」ことが知られている．これは，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty \quad (a > 1, n \in N) \qquad \bigstar$$

を意味する．

問題 6.7　★ 印の式　$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty \quad (a > 1, n \in N)$ を以下の手順で示してみよう．

1. x を上回らない整数を $[x]$ と書く．このとき，$a^{[x]} < a^x$ であることを示せ．

   これにより，$\lim_{x\to\infty} \frac{a^{[x]}}{x^n} = \infty \quad (a > 1, n \in N)$ を示しさえすれば ★ 式が示されることがわかる[*3]．

2. $a = 1 + r$ とおき，$a^{[x]}$ を展開せよ．二項定理を使え．

3. ★ 式を x^n で約分してみよ．そして，各項の収束や発散について議論し，★ 式全体の発散を示せ．

問題 6.8　日常生活やビジネス・自然現象において，指数関数に従う現象の例を挙げよ．

[*3] ある関数 $f(x)$ よりも常に小さい値を出力する関数が発散することを示せば，それより大きい $f(x)$ も発散することを示したことになる．「小さいものすら発散するなら，いわんや大きいものをや」である．この考え方を「追い出しの原理」と言う．

6.3　対数関数

6.3.1　対数とは何か

問題 6.8 で，指数関数的な現象が日常生活で頻繁に登場していることを学んだ．この節では対数とは何かを学んでいこう．

対数とは以下の定義に従う値である．

定義：

$\boldsymbol{\log_a b}$ ($\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0}$) とは　$\boldsymbol{a}$ を何乗すると $\boldsymbol{b}$ になるかを意味する実数である

この値を $\boldsymbol{a}$ に対する $\boldsymbol{b}$ の対数という

$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

例　$\log_{10} 1000 = 3$ （$\because$ 10 を 3 乗すると 1000 になるから)

$\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$ （$\because$ 2 を −2 乗すると$\dfrac{1}{4}$になるから)

問題 6.9　以下の対数を求めよ．

1. $\log_2 8$
2. $\log_3 81$
3. $\log_2 32$
4. $\log_2 1$
5. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$
6. $\log_2 \dfrac{1}{16}$
7. $\log_{10} 0.001$

問題 6.10

1. $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ を用いて，$\log_{10} 2000$ を概算せよ．

   ヒント：$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ は，$2 = 10^{0.3010}$ を意味する．では，$2000 = 2 \times 10^3$ は 10 の何乗だろうか？
2. $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.3771$ を用いて，$\log_{10} 3000000$ を概算せよ．
3. $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ を用いて，$\log_{10} 500$ を概算せよ．

問題 6.11

1. しばしば年収 1,000,000 円台を「年収 7 桁」，10,000,000 円台を「年収 8 桁」と言うが，年収 100 万円と 500 万円と 900 万円は同じ「7 桁」であっても生活水準は全く違うだろう．そこで，「年収 x 桁」の概念を拡張したい．どのように定義すればよいだろうか？ 対数を使って考えてみよ．
2. 1．の定義に基づけば，年収 100 万円・500 万円・900 万円・2000 万円はそれぞれ「年収何桁」だろうか．

上述の**問題 6.11** は一見するとただのお遊びのようだが，実は統計や経済学を学ぶ上で非常に重要なテクニックである．年収や経済規模は，単位が円のままでは左に裾の長い分布をするのだが，「桁数」にした場合には正規分布に近づくことが知られているため，一旦対数を取った方が統計処理を行いやすいのだ[*4]．

[*4] 桁数（対数）を取った結果が正規分布に従うような分布を「対数正規分布」という．物流の量や所得などは対数正規分布に従うことが多い．

6.3.2　対数に関する便利な定理

以下の定理を示そう．

定理

$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$ に対して，

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad (\text{式}\ 1)$$

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad (\text{式}\ 2)$$

この 2 つは非常に有用な定理である．

「なんだ，底が同じじゃないと使えないじゃないか」と言われそうだが，現実社会では底は殆どの場合固定されているので心配はいらない．2 倍 2 倍で増えていくものなら 2 の何乗かが大事だし，それ以外の場合は 10 の何乗かが大事であるため，他の底と混在することは殆どないのだ．

底の変換については，実用性はともかくとして，簡単にできるので後述の演習問題で練習することにする．

問題 6.12　以下の手順に沿って (式 1) を示せ．

1. $a^x = a^y$ $(a > 0)$ は，$x = y$ の必要十分条件であることを示せ．
2. $a^{\text{左辺}} = a^{\log_a xy}$ および $a^{\text{右辺}} = a^{\log_a x + \log_a y}$ を計算せよ．
3. 2．で計算した 2 つが等しいことを示し，1．を用いて左辺＝右辺を示せ．

問題 6.13　問題 **6.12** を参考にして (式 2) を示せ．

この 2 つの定理は単に計算をしたり数学の試験を解いたりするのに役立つのみならず，多くの専門分野でも役立つだろう．具体的な例は以下のコラムや演習問題で示す．

コラム： 定理 (式 1) に関する発展的内容

定理の (式 1) に注目して欲しい．左辺は x と y の積 xy が含まれるが，右辺には xy が含まれないことに注意せよ．そして，積よりも和の方が演算として楽になりがちであることも思い出して欲しい．以下に例を示そう．

1 から 120 の自然数のうち，秘密裏に選ばれたある 1 つの自然数を佐藤くんが特定するゲームを考えて欲しい．佐藤くんが数字を見事当てると賞品が貰える．そして佐藤くんには現金を出してヒントを買う権利が与えられている．

今，佐藤くんが全く無知の状態で，「偶奇を教えてもらう」というヒントを 1 万円で買えるとする．偶奇を教えてもらえば答えを半分，すなわち 60 個の自然数に絞り込めるわけである．

そうすると，「4 で割った余りを教えてもらう」というヒントは答えを 30 個の自然数に絞り込むので，半分に絞り込んで更に半分に絞り込むという意味で 1 万円 +1 万円=2 万円が妥当であろう．

同様に「8 で割った余りを教えてもらう」というヒントは 1 万円＋ 1 万円＋ 1 万円＝ 3 万円だ．

では，「5 で割った余りを教えてもらう」というヒントはいくらだろうか？

答えは「「半分に割る」という操作何回分か」なので $\log_2 5 \fallingdotseq 2.3$ 万円である．つまり，「元の数の 5 分の 1 に絞り込める情報」の価値は「2.3 万円」なのである．

$\dfrac{1}{n}$ に絞り込み，さらに $\dfrac{1}{m}$ に絞り込むという操作をした場合，$\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{nm}$ に絞りこめるわけだが，このときの情報の値段は「$\dfrac{1}{n}$ に絞り込む値段 $+\dfrac{1}{m}$ に絞り込む値段」なのである．$\dfrac{1}{n}$ に絞り込む「情報の価値」[a]を $\log_2 n$ と定義しておくと，$\dfrac{1}{n}$ に絞り込む情報の価値と $\dfrac{1}{m}$ に絞り込む情報の価値の和は一発で $\dfrac{1}{nm}$ に絞り込む情報の価値と同一になる．

[a] **情報量**という．単位は bit

問題 6.14　次の計算をせよ．

1. $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$
2. $\log_{10} 20 - \log_{10} 2$
3. $\log_5 75 - \log_5 15$
4. $\log_6 18 + \log_6 2$
5. $\log_2 \dfrac{1}{2}$
6. $\log_8 \dfrac{1}{2}$
7. $\log_2 \sqrt[3]{4}$

6.3.3　対数関数の挙動

では，対数関数のグラフを描いてみよう．

問題 6.15　以下の関数のグラフを描け．

1. $f(x) = \log_{10} x$

2. $f(x) = \log_2 x$

3. $f(x) = \log_2(x-3)$

4. $f(x) = \log_{0.5} x$

底が 1 より大きい対数関数は単調増加する．したがって，2 つの正の実数 x，y の大小と $\log_{10} x$，$\log_{10} y$ の大小は一致する．