第 4 章

三角比

ここまでの章では，現代数学の基礎となる関数・集合・確率を学んできた．そして本章は基礎から一歩応用に進んだ章である．文科省のカリキュラムにおいて，三角比の章では学生に何を学ばせようとしているのだろうか？ 私の想定する答えは，今まで身につけた基礎を用いて「**問題解決のためのシステムを構築すること**」である．

三角比のシステムは，21 世紀に暮らす我々が一から構築するまでもなくとっくの昔に完成されており，システム構築のモチベーションとなった日常生活における幾何学的な問題は既に解決されている．

しかし，完成されたシステムのみを覚えるのは良い学習であるとは言えない．どのようにして先人たちが問題を解決するためのシステムを構築したのかを学んでおかないと，いざ皆さんが各々の問題を解決しようという時にそのためのシステムを構築できないだろう．発明に至った背景や考え方を学ぶことは，次の発明に繋がるのだ．

4.1　先人たちは直角三角形の辺の長さを求めたかった

直角三角形の 2 辺の長さがわかっているとき，我々はピタゴラスの定理を用いて 2 次方程式を解くことで残りの 1 辺の長さを求めることができる．しかし，わかっているのが直角三角形の 1 辺の長さと 2 角の大きさのときには，ピタゴラスの定理を用いて 2 次方程式を解くことでは残りの辺の長さを求めることはできない．そのため，このケースでは三角比という新しいシステムを導入する必要があるのだ．

この三角比を応用すれば，直角三角形の 3 辺の長さがわかったときに，3 角の大きさを求めることもできる．

4.2　三角比の定義 ver 1.0

中学数学の復習になるが，2 つの三角形が相似である十分条件はそれぞれの三角形の 2 つの角の大きさが同じであることだった．

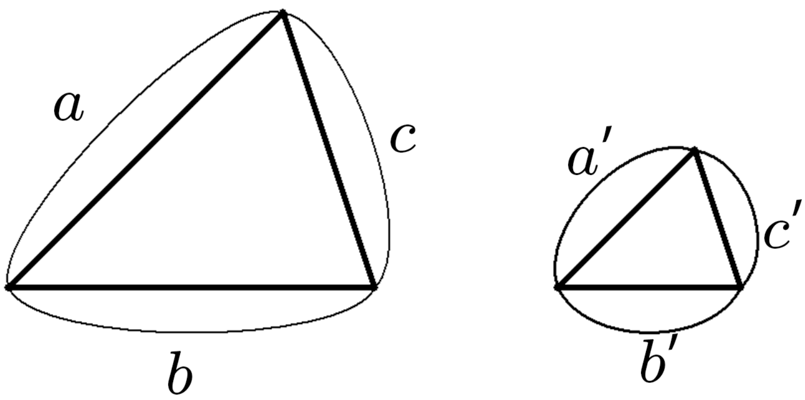
問題 4.1　「2 つの平面図形が相似である」ことの定義を答えよ．

2 つの三角形が相似である時，それぞれの対応する辺の長さの比は等しい

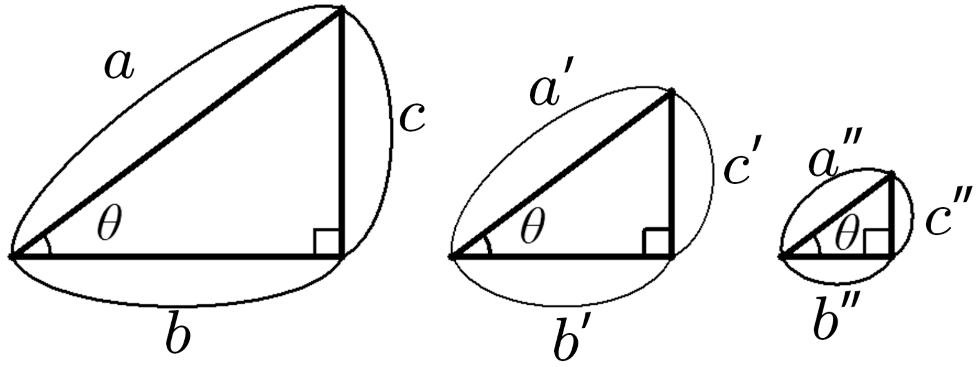
$$a : a’ = b : b’ = c : c’$$

また，2 つの三角形が相似である時，3 辺の比は等しい

$$a : b : c = a’ : b’ : c’$$



直角三角形の相似に話を限定しよう．直角でない角 1 つが θ であるすべての三角形は相似条件を満たすため相似である．



このとき，

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} = \frac{c''}{a''}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} = \frac{c''}{b''}$$

であり，それぞれを $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ と呼ぶ．これらをまとめて三角比という．

問題 4.2　以下の三角比が何を意味しているのか，図を描いて説明せよ．その後三角比を求めよ．また，4．5．についてはおよその値を記せ．

1. $\cos 30^\circ$　$\sin 30^\circ$　$\tan 30^\circ$
2. $\cos 45^\circ$　$\sin 45^\circ$　$\tan 45^\circ$
3. $\cos 60^\circ$　$\sin 60^\circ$　$\tan 60^\circ$
4. $\cos 0.00001^\circ$　$\sin 0.00001^\circ$　$\tan 0.00001^\circ$
5. $\cos 89.9999^\circ$　$\sin 89.9999^\circ$　$\tan 89.9999^\circ$

問題 4.3　三角比の定義を用いて，以下の性質を示せ．

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
2. $\sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

4.3　三角比は，θ の関数と言えるのではないか

「角度 θ さえ決まれば三角比が一意に定まる」ということは，

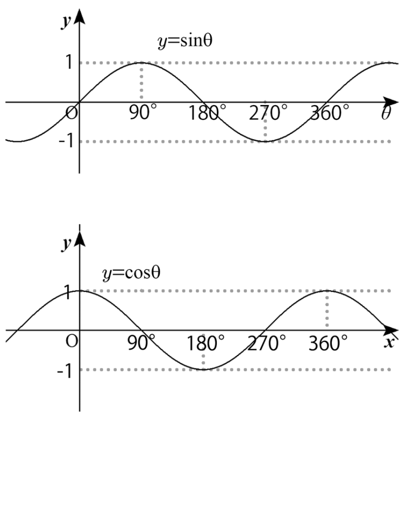
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad や \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

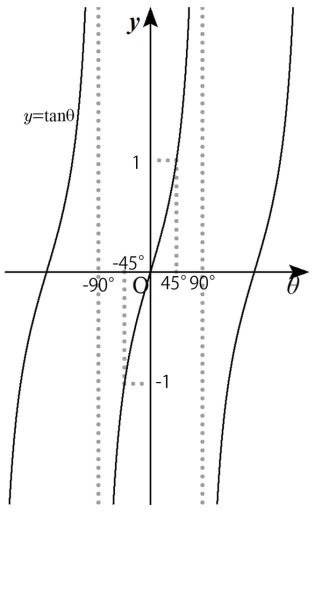
のように実際の数字を書けるものはもとより，$\sin 22^\circ$ のような実際の数字では表現しづらいものもひとまとまりの文字定数のように扱うことができるということである．つまり，三角形の辺の長さが $3\sin 32^\circ$ と分かれば，長さは一つの値に特定できる（長さを求められる）ということだ．辺の長さが「$3\sin 32^\circ$(cm)」と言うのは，「10 cm だ」とか「5.32 cm だ」というのと何も変わらない．気分的には落ち着かないだろうが，設計図や答案や報告書には堂々と「$3\sin 32^\circ$(cm)」と書いてよいのだ．

実際に設計図を元に材料を切りだす段階では，次ページのような三角比表を適宜参照して近似値を求めればよい．

$\sin\theta$ は関数であるが，出力値が入力値の多項式の形で表される関数（$y = x^2 + 3x + 5$ など）ではない．そのため入力値 θ を用いてその都度計算することは非常に困難であり，古代より三角比表という入力出力の対応表が用いられていたようである．

また，三角比が θ の関数であるということを特に意識するときには「三角関数」と呼ぶ[*1]．





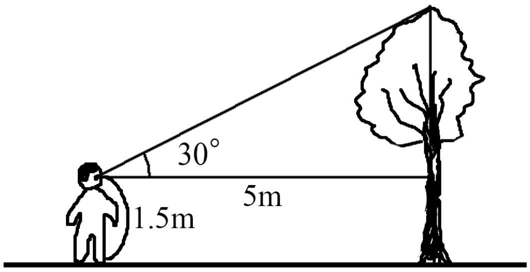
*1 高校 1 年のカリキュラムでは三角比が θ の関数であることはあまり意識されず，高校 2 年であらためて「三角関数」として登場する．しかしながら，入力値 θ に対する出力値の表が古代ギリシャやインドで使用されていた以上，「三角比」という概念が生まれた時点でそれが θ の関数であることが理解・利用されていたことは明白である．したがって，カリキュラムを組む上での時間的な制約を無視するならば，「三角比」「三角関数」と単元を分けることはナンセンスであると言えよう．

三角関数表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	― ― ―

4.4　三角比の実用

例題　あるところに高い樹があった．その樹の高さを調べたい．しかし，樹に登って巻き尺を垂らすのは困難であるため，以下の図のような測定を行った．



身長 1.5m の観測員が樹の根元から 5m 離れた場所に立ち，樹のてっぺんを見つめたところ，仰角は 30° であった．

樹の高さは何 m だろうか？

1. 三角比を用いて回答せよ．
2. 小数点以下第 1 位までの近似値を求めよ．

例題の解

$$\frac{（樹の高さ - 1.5）}{（根元から観測員までの距離）} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

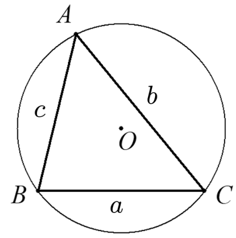
今，根元から観測員までの距離は 5m である．
したがって，樹の高さは

$$5 \tan 30^\circ + 1.5 \ (\mathrm{m})$$

である．これを計算して四捨五入すると約 4.4m となる．

4.5 三角比を用いた便利な定理

4.5.1 正弦定理



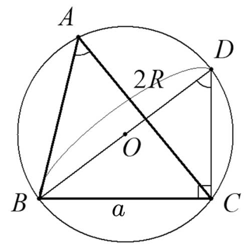
半径 R の円に内接した三角形 ABC に対して，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

である．

正弦定理の証明

B から外接円の中心 O を通る直径を引き，他の一端を D とすると，円周角の性質により



$$\angle D = \angle A \qquad \ldots (1)$$

また，BD は直径なので

$$BD = 2R$$

直径と円周角の関係から

$$\angle BCD = 90°$$

以上を $\triangle BCD$ のサインに用いると

$$\sin D = \frac{BC}{DB} = \frac{a}{2R}$$

(1) より $\sin D = \sin A$ なので

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

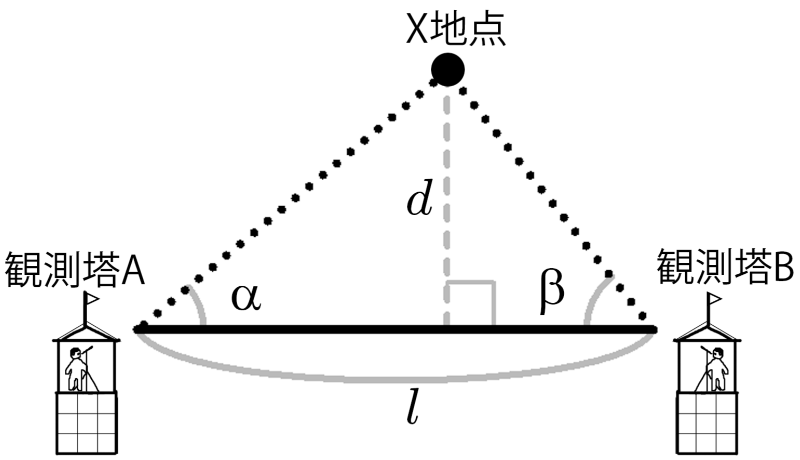
これを変形すると

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が得られる．$\angle B$ および $\angle C$ についても同様である． 証明終

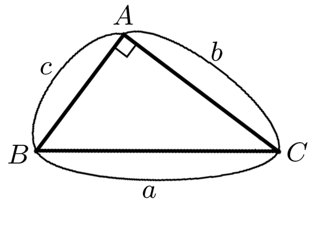
この定理は，遠くのものの距離を図る際に便利である．

問題 4.4　図は，人間が歩ける道路と，歩いて行けない場所にある X 地点を上空から見た図である．正弦定理を用いて，X 地点が道路からどれだけ離れているか（距離 d）を計算してみよう．



1. α, β, l が簡単に測定可能であることを確認せよ．
2. $\triangle AXB$ の $\angle X$ の大きさを求め，正弦定理より辺 AX，BX を α, β, l を用いて表わせ．
3. d を α, β, l を用いて表わせ．
4. $\alpha = 75°$，$\beta = 60°$，$l = 100\text{m}$ のとき，d を計算せよ．

4.5.2　余弦（コサイン）定理

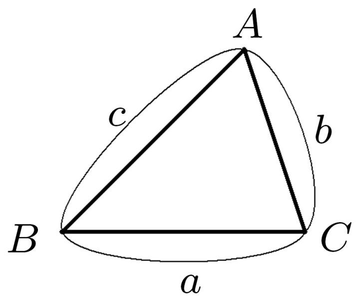


ピタゴラスの定理は，直角三角形の直角を挟む 2 辺の長さから残りの 1 辺の長さを求める手段であった．

$$a^2 = b^2 + c^2$$

余弦（コサイン）定理はその拡張版であり，三角形の直角でない角を挟む 2 辺の長さから残りの 1 辺の長さを求める手段である．

余弦定理　三角形 ABC に対して，



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \ldots(1)$$

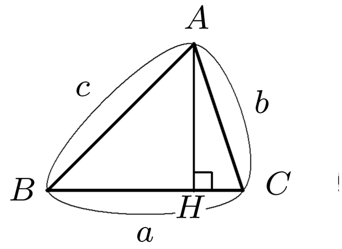
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \qquad \ldots(2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \ldots(3)$$

である．

余弦定理の証明　その１

A から BC に下ろした垂線の足を H とおくと，



$$a = CH + BH = b\cos C + c\cos B \qquad \ldots(1)’$$

が得られる．また，同様にして

$$b = c\cos A + a\cos C \qquad \ldots(2)’$$

$$c = a\cos B + b\cos A \qquad \ldots(3)’$$

が得られる．

(1)’ から (1) を導くために，(1)’ の $\cos B$ と $\cos C$ を消去することを考える．

まず (1)’ $\times\, a$ − (3)’ $\times\, c$ で $\cos B$ を消去すると

$$a^2 - c^2 = ab\cos C - bc\cos A$$

ここから (2)’ $\times\, b$ を引き $\cos C$ を消去すると

$$a^2 - c^2 - b^2 = -2bc\cos A$$

よって

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

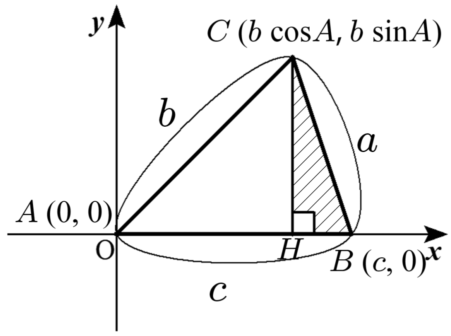
が得られる．(2) および (3) についても同様である．　証明終

余弦定理の証明　その２

三角形 ABC に対して，図のように座標軸を定めると，頂点 A，B，C，および，C から x 軸に下した垂線の足 H の座標はそれぞれ

$$A(0,0) \quad B(c,0) \quad C(b\cos A, b\cos C) \quad H(a\cos C, 0)$$

斜線の $\triangle CBH$ に注目すると，
ピタゴラスの定理より



$$CB^2 = BH^2 + CH^2$$

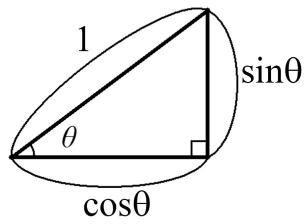
これに

$$CB = a$$
$$BH = c - b\cos A$$
$$CH = b\sin A$$

を代入して

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A \\ &= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \end{aligned}$$

ここで，斜辺の長さが 1 の直角三角形で三角比を考えると，他の 2 辺の長さはそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$ である．
すると，ピタゴラスの定理より



$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

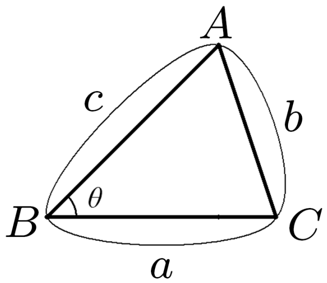
したがって，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であり，これを上式に代入して整理すると

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

が得られる．(2) および (3) についても同様である．　　証明終

また，3 辺の長さが分かっているとき，余弦定理を用いて角を求めることができる．例えば，辺の長さ a，b，c が分かっていれば，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を用いて $cosA$ が，$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ を用いて $\cos B$ が，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ を用いて $\cos C$ が求められる．その後，三角比表を用いて $\cos\theta$ から θ を求めればよい．

問題 4.5　3 辺の長さがそれぞれ a，b，c の三角形 ABC がある．

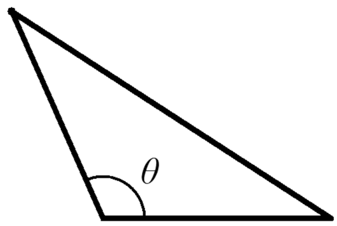


1. 上図の θ を辺長 a，b，c を用いて表せ．
2. $a = 6$，$b = 7$，$c = 8$ のとき，θ の値を求めよ．

4.6　三角比の拡張

ここまで，鋭角（0° より大きく，90° より小さい角）についてのみ三角比を定義してきた．なぜなら，現時点での三角比の定義は直角三角形の仰角に対応した辺の長さの比であり，三角形の内角和が 180° であるため仰角は 90° を超えられないからである．しかし，正弦定理や余弦定理において，$\sin A$ や $\cos\theta$ の A や θ が鈍角（90° より大きく，180° より小さい角）の場合にもこれらの定理が成立するようにしたい．

例えば

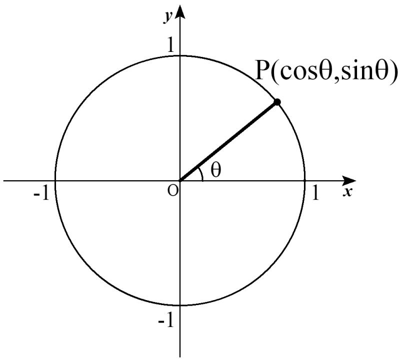


$\theta = 110^\circ$

などである．

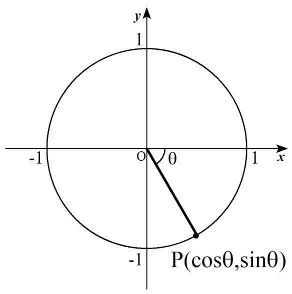
そのためにはまず $90°$ 以上の角の三角比を定義する必要がある．

ここで，任意の θ $(0° < \theta < 90°)$ に対して点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ を考えると，点 P は下の図のように原点を中心とする半径 1 の円周上に存在する．いや，むしろ，「まず半径 1 の円を描き，x 軸の正の部分が θ だけ反時計回りに回った半直線を引くと，円とその半直線との交点 P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ となると」言った方がよいかもしれない．

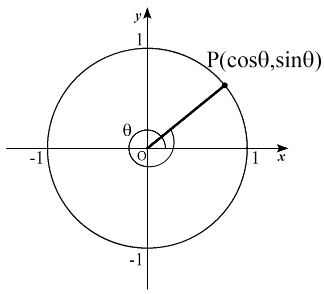


この事実を用いて，$\cos\theta$ 及び $\sin\theta$ の定義を「半径 1 の円を描き，x 軸の正の部分が θ だけ反時計回りに回った半直線と円との交点の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とする」と更新する．これを用いれば 0 を含む任意の θ について三角比を定義することができるようになる[*2]．

θ が負の値をとるときには，半直線 OP を時計回りに回せばよい．また，θ が $360°$ を越える場合は，半直線 OP を反時計回りに 1 周（あるいは複数周）を超えて回せばよいことになる．



$\theta = -60°$

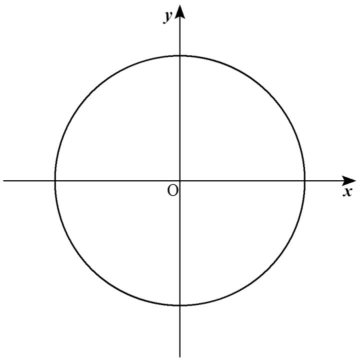


$\theta = 400°$

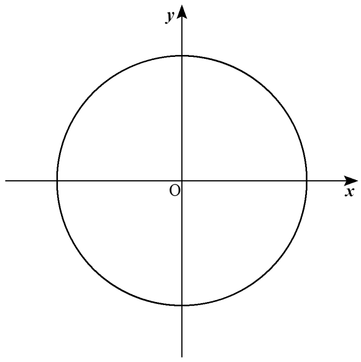
*2 「旧定義の ◯◯ には〜〜という性質がある．そこで，『〜〜を満たすもの』を ◯◯ の新定義とする」というタイプの定義の拡張は数学ではとてもよく用いられ，これにより広い範囲での定義ができるようになる．具体的には $n!$ (自然数の階乗) を拡張して，1.5! などの正の実数の階乗を定義したり，3^n（自然数乗）を拡張して，3^i などの複素数乗を定義したりするときだ．

問題 4.6　xy 平面に点 $P(\sin\theta, \cos\theta)$ を記入せよ．その後，適宜三角比表を参照して三角比を求めよ．

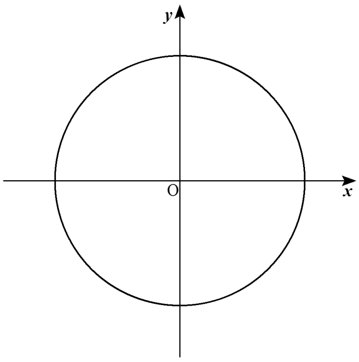
1.　$\theta = 120^\circ$



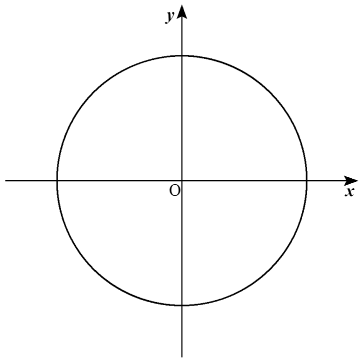
2.　$\theta = 180^\circ$



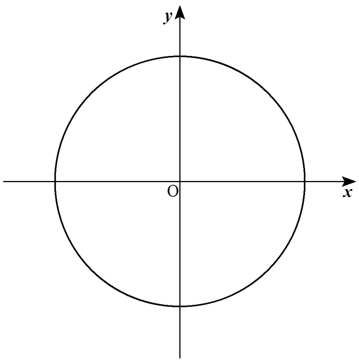
3.　$\theta = 225^\circ$



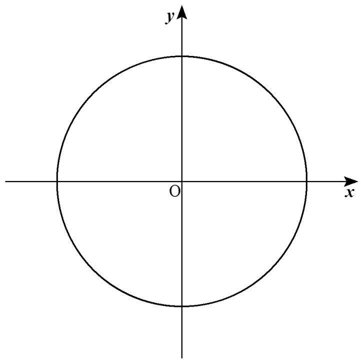
4.　$\theta = 390^\circ$



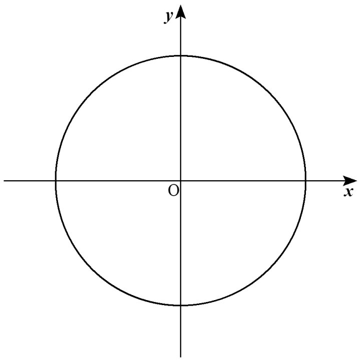
5.　$\theta = 90^\circ$



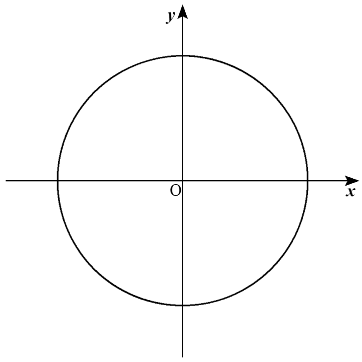
6.　$\theta = 0^\circ$



7.　$\theta = 95^\circ$



8.　$\theta = 220^\circ$



問題 4.7　前問の各 θ に対して，$\tan\theta$ も求めよ．$\tan\theta$ の定義は，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ である．

問題 4.8　以下は三角比に関する定理である．図を用いて証明せよ．

1. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

2. $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

3. $\sin(\theta + 90^\circ) = \cos\theta$

4. $\cos(\theta + 90^\circ) = -\sin\theta$

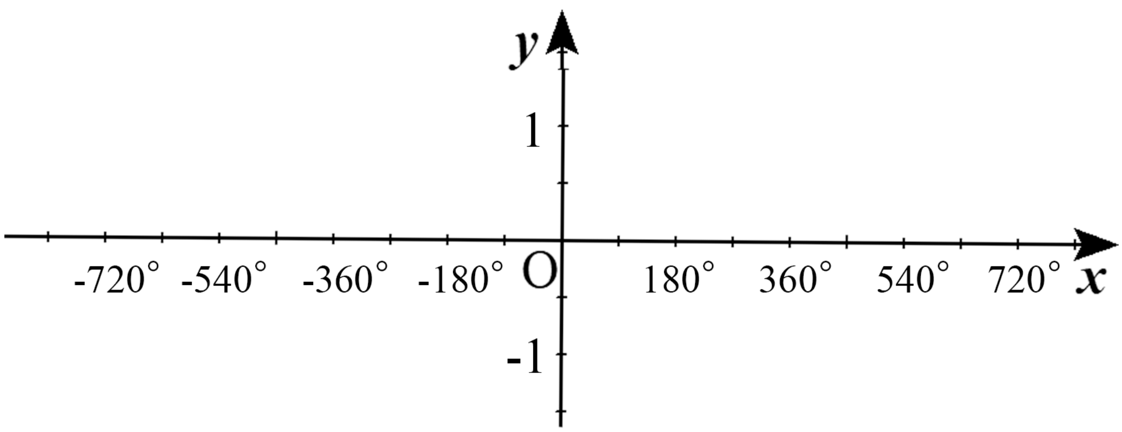
5. $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$

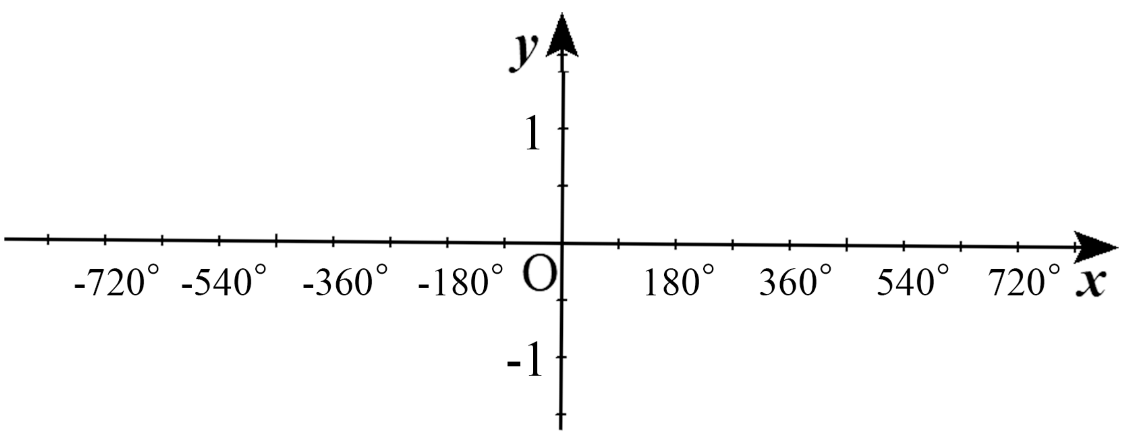
6. $\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$

7. $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

8. $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

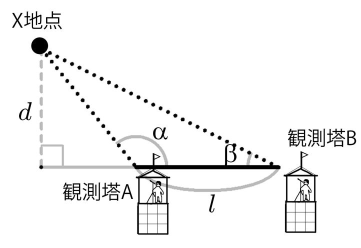
問題 4.9　以上の定理を用いて，$y = \sin x$ 及び $y = \cos x$ のグラフを描け．$(-720^\circ \leq x \leq +720^\circ)$





4.7　拡張された三角比の定義を用いた正弦定理・余弦定理

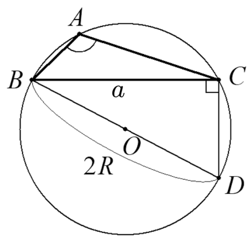
鈍角三角形に対しても正弦定理が成立することを示そう．もしも，鈍角三角形に対しても正弦定理が成立するのなら，**問題 4.2** のケースで，いずれかの角が鈍角でも同様の測定を行うことができることになる．



鈍角三角形での正弦定理の証明

半径 R の円に内接した三角形 ABC に対して，

B から外接円の中心 O を通る直径を引き，他の一端を D とすると，外接円を持つ四角形の性質により



$$\angle A + \angle D = 180°$$

したがって

$$\angle D = 180° - \angle A \qquad \ldots(1)$$

また，BD は直径なので

$$BD = 2R$$

以上を $\triangle BCD$ のサインに用いると

$$\sin D = \frac{BC}{DB} = \frac{a}{2R}$$

(1) および**問題 4.6** で確認した $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$ より

$$\sin D = \sin(180° - A) = \sin A = \frac{a}{2R}$$

これを変形すると

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が得られる．$\angle B$ および $\angle C$ についても同様である．　証明終

問題 4.10　鈍角三角形に対して，余弦定理を証明せよ．（ヒント　xy 直交座標軸上に鈍角三角形を置いてみよう．）