

おまけの章：合同式

第一章「関数」で、「自然数を入力値として、入力値を 5 で割った余りを出力値とする関数」について話をした。この章では剰余について理解を深めよう。

問題 5.1 全ての自然数を、5 で割った余りが何かにより分類せよ。

例えば 8 と 13 は共に 5 で割った余りが 3 である。これを、8 と 13 は「5 を法として合同」といい、「 $8 \equiv 13 \pmod{5}$ 」と書く。問題 5.1 で分かるように、 N で割った余りが a である類は、差が N の等差数列である。

合同式（剰余による分類）の便利な使い方のひとつに、「 N 回置きに〇〇する」「 N 個置きに〇〇する」というものがある。実際に多くのプログラミング言語で「剰余を返す」記号が用意されている*1。

また、 r を N で割った余りの定義を

$$\text{余り} = r - N \times [r/N]$$

とすれば、実数全体について合同式を定義できるようになる。（ただし、 $[r/N]$ を $\frac{r}{N}$ を超えない最大の整数とする。 N は自然数。）

このとき、 $-3 \equiv 4 \pmod{7}$ $1.5 \equiv 6.5 \pmod{5}$ などと書ける。

*1 例えば C 言語や Python では「 $7\%5$ 」が「7 を 5 で割った余り」を意味する。

問題 5.2 全ての整数を，4 で割った余りが何かにより分類せよ．

問題 5.3 以下は 2018 年 2 月のカレンダーで土曜日と日曜日には “Holiday” を，それ以外には “Weekday” を返すための Python コードである．空欄①②を埋めよ．なお，2 月 1 日は木曜日である．

Python コード例

```
for i in range(28)          # 28 日分繰り返すことを宣言

date=i+1                    # i を 0 から 27 まで変えながら繰り返すので i+1 が日付となる

if (date)%[ ① ] ==[ ② ]:   # i+1 がどのような条件のとき Holiday か？
    print('Holiday')

else:                        # 条件を満たさないときには Weekday である
    print('Weekday')
```

上の例を見て，プログラミング未経験の受講者の方は戸惑われたかも知れない．しかし，数学同様，プログラミングも自然言語の翻訳だと考えれば対処できるのではないだろうか．剰余分類は初歩的な例であるが，数学を学べば学ぶほど，できるプログラミングの幅も広がっていくことになる．

では，次の問題を考えてみよう．

例題 1 3^{100} の 1 の位の数は何だろうか？ (mod 10 で考えよ．)

このような問題を解くにはどうしたらいいだろうか．

我々はまだ、 N を法とする合同式に関する演算に対する知見がない。そこで、演算を可能にするために以下の定理を証明しよう。

定理 1 $a \equiv b, c \equiv d \pmod{N}$ のとき, $a + c \equiv b + d \pmod{N}$

定理 2 $a \equiv b, c \equiv d \pmod{N}$ のとき, $a - c \equiv b - d \pmod{N}$

定理 3 $a \equiv b, c \equiv d \pmod{N}$ のとき, $a \times c \equiv b \times d \pmod{N}$

定理 4 $a \equiv b, c \equiv d \pmod{N}$ のとき, $\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \pmod{N}$ とは限らない.

問題 5.4 定理 1 ～ 4 のうち, 必要なものを用いて, 例題 1 を解いてみよう.