第 2 章

総和を出す際には全体をとても細かく分割する（極限について）

前章の最後で dx をいくら小さくしても真の値と計算値との間に誤差が出てしまう問題を指摘した．しかしながら，dx が 0.1 の時よりも 0.01 のときの方が，さらに 0.001 のときの方が誤差が小さくなることも図を用いて確認した．

機械で計算する場合，dx をマシン・イプシロン[*1]以下にすることはできないが，人間は想像力を働かせて dx をどこまでも小さくすることができる．むしろ『真の値』の方を「dx を際限なく 0 に近づけていく（ただし 0 にはしない）ときに総和が近づいていく(収束する)値」と定義するのだ．では，「値が収束する」とは何か，一緒に学んでいこう．

2.1　収束・発散・振動

例題 1　x や n をどこまでも大きくしていったとき，以下の $f(x)$ 及び $\overline{X}$(標本平均）の値はどうなるだろうか？

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 100 - x^3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
4. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \sin x^\circ$
6. $\overline{X}$: 1〜6 の整数が等確率で出るサイコロを n 回振ったときの出目の平均値

*1 計算機に管理できる最も小さい数．環境にもよるが，10^{-7} 程度．

例題1の解

1. 試しに x を $10, 100, 1000, \cdots$. としていこう．$f(x)$ の値は際限なく大きくなってしまう．これを「$f(x)$ は**『発散』**する」という．

2. 試しに x を $10, 100, 1000, \cdots$. としていこう．$f(x)$ の値は際限なく小さくなってしまう．これも「$f(x)$ は**『発散』**する」という．
   このとき，x を無限に大きくすると「$-x^3$」は限りなく小さくなり，例え第1項がどんなに大きくても，「$-x^3$」の無限の小ささの前では有限な第1項の大きさは瑣末なものとなってしまう．

3. 試しに x を $10, 100, 1000, \cdots$. としていこう．$f(x)$ の値は0にどんどん近づいていく．ただし，決して0にはならない．これを「$f(x)$ は0に**『収束』**する」という．

4. 第2項は0に収束するが，第1項は3のままである．したがって，$f(x)$ は3に『収束』する．

5. $\sin x^\circ$ は周期関数であり，x がいくら大きくなっても-1から1の間を 360° 周期で行ったり来たりしている．これを「$f(x)$ は**『振動』**する」という．発散もせず，収束もしない．

6. サイコロの目がどのような分布で出るかを知るためには，そのサイコロが過去出した目とこれから先出す全ての目を知らなくてはならないが，それらを全て記録することは当然不可能である．そこで，試しに n 回だけ振ってみてサイコロそのものの性質を知る必要が生じる．「試しに n 回だけ振った結果」を，『サンプルサイズ n の標本』という．標本平均は，サンプルサイズ n を大きくしていけばいずれ期待値に近づいていく．これを**『標本平均の一致性』**という．
$$\text{期待値} = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3.5$$
   なので，収束値は3.5である．

   統計学において，サンプルを元に母集団（今回の場合，あるサイコロが未来永劫に渡って出すであろう出目）分布の性質を可能な限り正確に知ろうとすることは大きなテーマの1つである．興味を持った方は，是非すうがくぶんかの初級統計講座を受講していただきたい．そこで必要な数学的知識は数学 I A で学んだ『確率』と，今学んでいる『積分と微分』である．

2.2　極限の記号

極限と極限値

関数 $f(x)$ において，x が $x \neq a$ で a に限りなく近づくときに，$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づく場合

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} = \alpha} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x \to a} \ \text{のとき} \ \boldsymbol{f(x) \to \alpha}$$

と書き，この値 α を，x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**という．

例えば， $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ と書けば，「x を限りなく 0 に近づけるときの $f(x)$ の極限値は 3」ということだ．

x を限りなく近づけるのは特定の（有限の）実数だけではない．『関数 $f(x)$ に対して，入力値 x を限りなく大きくしていくときの出力』は

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

と書ける．同様に，x を限りなく小さくしていくときは $x \to -\infty$ と書けばよい．

ここで気を付けて欲しいのは，無限大という『**値**』は存在しないので「極限値は無限大」とは言えないということだ[*2]．例題 1 にあった発散の場合，**「正の無限大に発散する」「負の無限大に発散する」**といい，

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x \to a} \ \text{のとき} \ \boldsymbol{f(x) \to +\infty}$$

や

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x \to a} \ \text{のとき} \ \boldsymbol{f(x) \to -\infty}$$

と表す．

[*2] したがって，極限で無限大に発散する問題で「極限値を求めよ」とは書けないはずであるが，このうっかりミスは入試などでもときおり見かける．

また，x をある値 a に近づける際に，a よりも大きい方から近づけることも小さい方から近づけることもできる．例えば x を $0.1, 0.01, 0.0001 \cdots$. と上から 0 に近づける場合，$\dfrac{1}{x} \to +\infty$ となり，一方，x を $-0.1, -0.01, -0.0001 \cdots$ と下から 0 に近づける場合，$\dfrac{1}{x} \to -\infty$ となる．

一般に x を a より大きい値から a に近づけるときの極限を『右側極限（右の極限)』，a よりも小さい値から a に近づけるときの極限を『左側極限（左の極限)』といい，それぞれ $\lim_{x \to a+0} f(x)$ ， $\lim_{x \to a-0} f(x)$ と書く．

極限値の定義では，$x \to a$ では x は a にどのように近づいてもよいので，

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = \alpha} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)} \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{x \to a}\text{のときの極限値は無い}$$

ということには十分に注意して欲しい．

例題 2 以下の極限を求めよ．極限がない場合（すなわち，右側極限と左側極限が異なる場合）は，それぞれを示せ．

1. $\lim_{x \to 0} x^2 + 1$
2. $\lim_{x \to 2} x + 4$
3. $\lim_{x \to -1} \dfrac{1}{x+1}$
4. $\lim_{x \to 0} f(x)$　　$f(x)$ は x が整数なら 1，そうでなければ 0 を出力する関数
5. $\lim_{x \to 1} f(x)$　　$f(x)$ は x の小数点以下を切り捨てた値を出力する関数

例題 2 の解

1. x^2 は 0 に収束するので，全体は 1 に収束

2. x は 2 に収束するので，全体は 6 に収束

3. 右側極限は，$x = -0.99, -0.9999, -0.999999 \cdots$．と x を-1 に近づけていくことなので，分母は $0.01, 0.0001, 0.000001 \cdots$．と 0 に近づく．したがって
$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty$$
左側極限は，$x = -1.01, -1.0001, -1.000001 \cdots$ と x を-1 に近づけていくことなので，分母は $-0.01, -0.0001, -0.000001 \cdots$ と 0 に近づく．したがって
$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty$$
したがって，極限はない．

4. グラフを描くとわかりやすい．0 に限りなく近い数は 0 ではないので，**整数ではない**．したがって右側極限も左側極限も 0 となり，極限値は 0.

5. これもグラフを描くとわかりやすい．右側極限は 1，左側極限は 0.99 であれ 0.9999 であれ 1 に満たないため切り捨てられて 0．したがって，極限はない．

基本は，代入すれば極限値が出るのだが，3．のように，本来取れない入力値に限りなく近いものを入力できることは，極限の強みの 1 つである[*3].

問題 2.1　以下の極限を求めよ．上から近づけた際の極限（『右側極限』）と下から近づけた際の極限（『左側極限』）が異なる場合は，それぞれを求めよ．

1. $\lim_{x \to 1}(3x-1)$

[*3] 「$x = 0$ 以外なら任意の実数値取っていいよ」と言われたときに，「今，任意の実数って言いましたよね？じゃあ $0.000000\ldots1$ を 入力しま〜す！！」と言うことができる．子供の屁理屈のようだが，数学では歓迎するべきことだ．

2. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{(x-1)(x+3)}$

3. $\displaystyle\lim_{x \to 90^\circ} \tan x$

4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

6. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

2.3 不定形

関数 $f(x) = x^2$ と $g(x) = x$ を考える．このとき，

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \bigl(f(x) - g(x)\bigr)$

2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \bigl(-f(x) + g(x)\bigr)$

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

4. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)^2}$

をそれぞれ求めるとする．

$f(x)$ や $g(x)$ の**それぞれの極限を求めた後**で引き算や割り算をしようとすると $\infty - \infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ を計算することになってしまう．これでは，「どんな数よりも大きい数からどんな数よりも大きい数を引いたらどうなる」「どんな数よりも大きい数とどんな数よりも大きい数の比はいくつか」という問いになってしまい，まるで『矛盾』の故事のようで答えが出ないだろう．これらのような $\infty - \infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ となってしまう形を指して**『不定形』**という．極限値を求めるときには，不定形にならないように気をつけなくてはならない[*4]．

[*4] $\infty + \infty$ や $\infty \times \infty$ は不定形ではなく，やはり「どんな数よりも大きな数」だ．

問題 2.2　$f(x) = x^2$，$g(x) = x$ とする．

このとき以下の極限値を求めよ．（ヒント：lim の中身が不定形にならないように式変形せよ）

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x) - g(x)\bigr)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\bigl(-f(x) + g(x)\bigr)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)^2}$

ここで大事なのは，「式変形をして lim の中身が不定形でない $\infty + \infty$ や $\infty \times \infty$ などの形になるようにすると上手く行く」というテクニックである．数学 I A から継続して受講されている方の中には，私が数学の授業において『テクニック』や『裏技』というものの導入を嫌っていることを知っている方も多いと思うが，『不定形』という概念は間違いなく私が嫌っていそうな『裏技』に分類される．しかし，17 世紀の数学を追体験している我々にとっての極限の理解はこれが限界である．極限について述べるとき，「x がある値に限りなく近づく」という説明は『限りなく』という極限を意味する言葉を用いた自己言及的で曖昧なものであるが，17 世紀の数学者たちも極限の厳密な定義を発明しておらず，「どんな実数よりもその数に近い（ただしその数自身ではない)」とか「どんな数よりも大きい」などというように大雑把に捉えていた．極限が自己言及的でなく厳密に定義されたのは，実に 19 世紀になってからのことである[*5]．

また，$\infty - \infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$ と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$ のように，一見すると $\dfrac{0}{0}$ となるものも不定形である．$\dfrac{\infty}{\infty}$ のとき同様に，先に式変形をしてから極限を考えよう．

[*5] 理系大学生が 1 年生の最初に学び，大学数学の難しさを思い知ることになる『**ε - δ 論法**』である．カール・テオドル・ヴィルヘルム・ワイエルシュトラス（ドイツ，Karl Theodor Wilhelm Weierstraß）により 1860 年に完成した．

問題 2.3　以下の極限を求めよ．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4+1}{x^2}$

2.4　関数が $\boldsymbol{x=a}$ で連続であるということ

定義：$x=a$ が関数 $f(x)$ の定義域にあって，$f(x)$ が以下の等式を満たすとき，

　　「**関数 $\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x=a}$ で連続である**」という．

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

すなわち，その定義域内の a の値に対して極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し，

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

が成り立つときである．

これは，以下の図 1a のように，$x\to a$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}$ が $f(a)$ と一致することを意味している．図 1b は $\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)\neq\lim_{x\to a+0}f(x)$ なので $f(x)$ は $x=a$ で連続でなく，図 1c は $\displaystyle\lim_{x\to a-0}=\lim_{x\to a+0}\neq f(a)$ なのでやはり $f(x)$ は $x=a$ で連続でない．

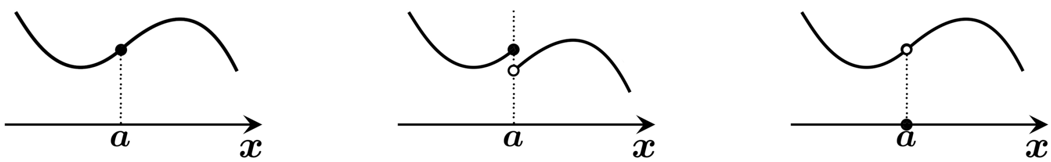

図 1a　　図 1b　　図 1c

また，定義域内の任意の実数 a に対して「関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である」とき，「**関数 $f(x)$ は連続な関数である**」という．

問題 2.4　連続な関数と不連続な関数の例を 2 つずつ挙げよ．

さて，ここまで話したところで，話を積分に戻そう．

第 1 章で積分は dx を小さくすればするほど（全体を細かく分割すればするほど）正確に全体の値を求めることができることを説明した．ならば，**$\boldsymbol{dx}$ を上から限りなく $\mathbf{0}$ に近づければ積分値は真の値に収束する**のではないだろうかというアイデアが浮かぶ．dx は正の値でなくてはならないが，右側極限を考えるとき dx は常に 0 より大きい実数であるので多分問題ないだろうと考えることにする．ここでの懸念事項は，$dx \to 0+0$ のとき，全体の値（dx の関数である）はちゃんと収束してくれるのか？ ということになる．

極限値が存在するかしないかはひとまず置いて，区間 $[a, b]$ を N 分割して個々に計算した和 $\displaystyle\sum_{j=0}^{\mathrm{N}}\{f\big(a+dx(j-1)\big)\times dx\}$ の $dx \to 0+0$ の極限を

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書くことにする．

問題 2.5　第 1 章の問題に登場した積分を，$\int$ を用いて表記せよ．

MEMO