第 5 章

三角関数

我々は数学 I A で

「関数とは何か」
「集合・論理とは何か」（論理的であるとはどういうことか）

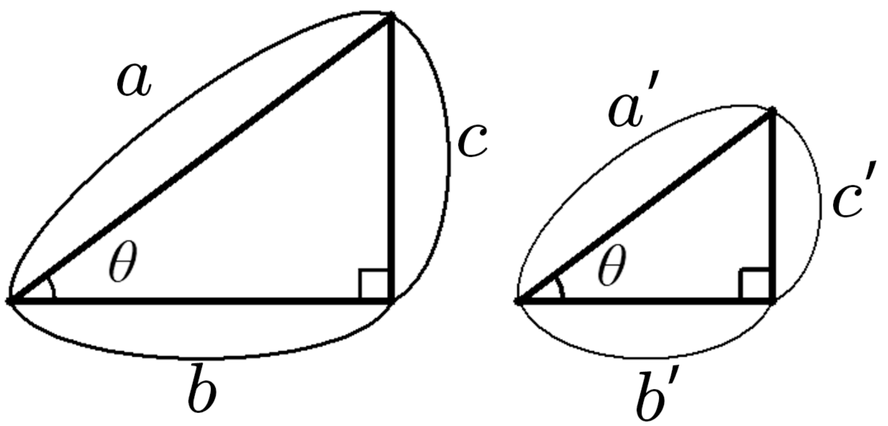
という数学的思考を学んだ．

そして，その上で，応用的な数学技術として「場合の数と確率」および「三角比」を学んだ．

さて，この章では「三角比」の拡張概念である「三角関数」について学んでいこう．

5.1　数学 I A の単元「三角比」の拡張

三角比とは，本来は直角三角形の辺の長さの比の値であった．



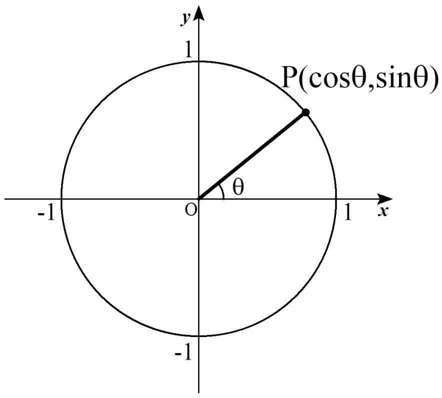
$$\sin\theta = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \cos\theta = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

このとき，直角三角形の角度のうち一つは 90° に固定されているので，残りの 2 つの角のうち 1 つの大きさが決まれば直角三角形は相似となり，辺の比は一定となる．すなわち，$\frac{c}{a}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$ はそれぞれ θ の関数[*1]と言える．

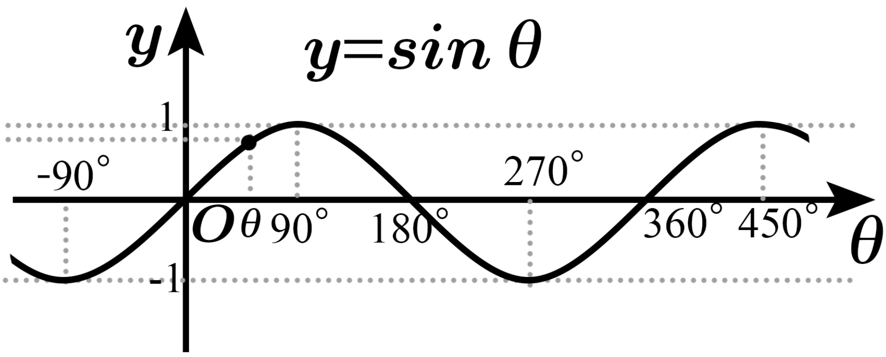
[*1] 関数とは，入力値に対して常に一定の出力値が得られるブラックボックスのことであると考えてほしい．「関数」は中国や昔の日本では「函」数と書かれている．

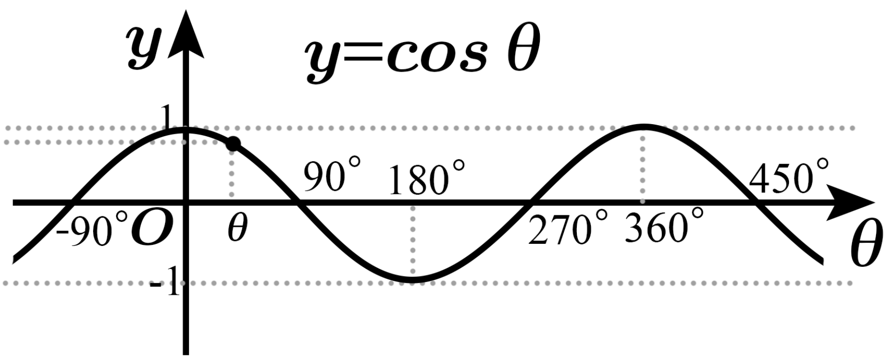
次に我々は三角比を用いた便利な定理として，正弦定理と余弦定理を導入した．正弦定理を用いれば 1 辺と 3 角の大きさから残りの 2 辺を求めることができ，余弦定理を用いれば 2 辺とその挟角の大きさから残りの 1 辺を求めることができた．これらは測量・作図に非常に便利であるが，三角比の定義より鋭角三角形に対してしか適用できなかった．

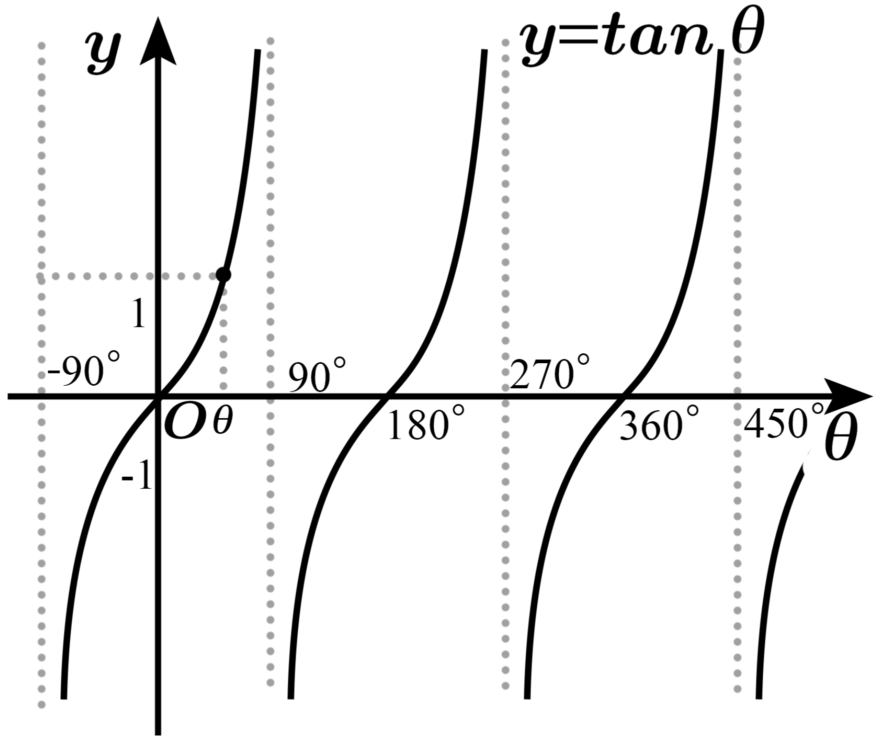
そこで我々は三角比を任意の角度 θ に対して拡張することにした．すなわち下図のように，単位円上を x 軸から半時計回りに θ 度回した点の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ と定義することにしたのであった．



このとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ と $\tan\theta$ のグラフは下図のような周期関数となる．







それでは，上述のような三角関数を文科省カリキュラムが高校数学 IIB で学ばせる意義は何であろうか？ 筆者は，三角関数を学ぶ意義は「周期関数に対して理解を深めること」であると考える．

序文にも書いたが，高校数学 IA を貫くテーマは「日常で使う数学」であり，数学 IIB を貫くテーマは「文系でも理系でも，今後専門的な勉強をする上で使う数学的知識」である，というのが筆者の解釈である．

問題 5.1　日常・ビジネス・学術・研究の場において，周期関数について論じることは多い．例を挙げよ．

ここまでに紹介したように，三角関数はシンプルな形のものしかない．しかし，実はこのシンプルな形の関数をいくつも線型結合[*2]することにより，任意の周期関数を表現すること[*3]ができるのだ！ それ故，周期関数の研究においては三角関数の理解が不可欠となる．

問題 5.2

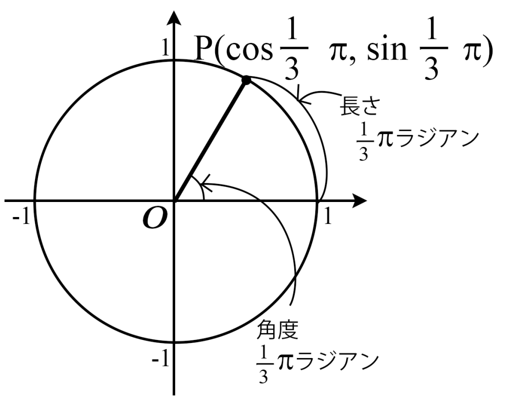
1. $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフを描け．（θ は $[-720^\circ,+720^\circ]$ で考えよ．）
2. $y=\sin(\theta-30^\circ)$ のグラフを描け．
3. $y=\sin 2\theta$ のグラフを描け．
4. $y=\sin 2(\theta-30^\circ)$ のグラフを描け．

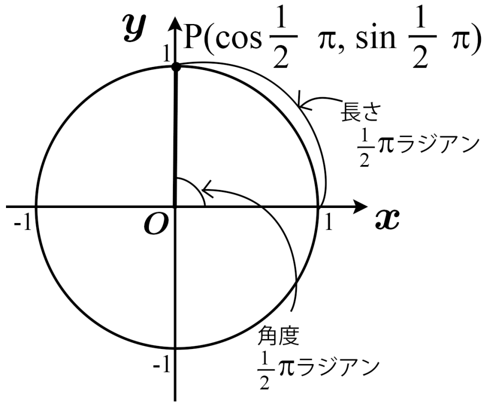
5.2　ラジアン

今まで角度を測る際には度数法を用いて 1 周を 360° としていた．しかしながら，これから先は弧度法を用いて 1 周の角度を 2π ラジアンとすることにする．

たとえば，90° は $2\pi\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\pi$，135° は $2\pi\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}\pi$ となる．

これは，x 軸をその角度だけ時計回りに回転させた際の，半直線と単位円との交点の軌跡の長さでもある．





*2 それぞれを定数倍して足し算すること

*3 フーリエ級数展開

問題 5.3　以下の角度を，ラジアンで表記せよ．必要に応じて作図してみよ．

1. 30°

2. 45°

3. 60°

4. 120°

5. 270°

6. 180°

問題 5.4　以下の角度を図示せよ．

1. $\frac{1}{4}\pi$

2. $\frac{4}{5}\pi$

3. 3π

4. $\frac{11}{4}\pi$

5. $\frac{8}{3}\pi$

5.3　加法定理

三角関数の入力値を足した場合，出力値はどうなるだろうか．

例えば $\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi)$ はいくらだろうか？　$\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるが，$\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\pi) = \sin\frac{1}{3}\pi + \sin\frac{1}{4}\pi$ でないことは明白だろう．

正しくは，

$$\sin(x+y) = \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y$$

である．また，

$$\cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$$

も成立する．

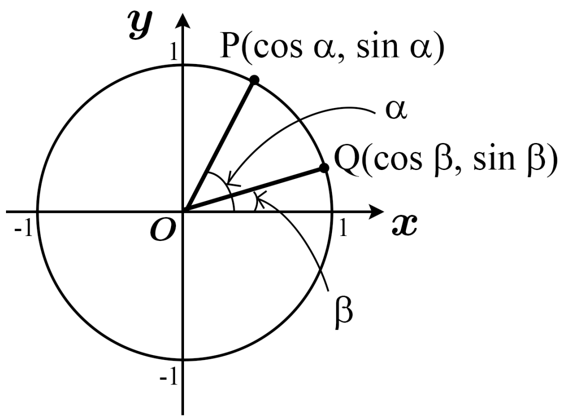
加法定理の証明

まず，次の式が成り立つことを証明する．

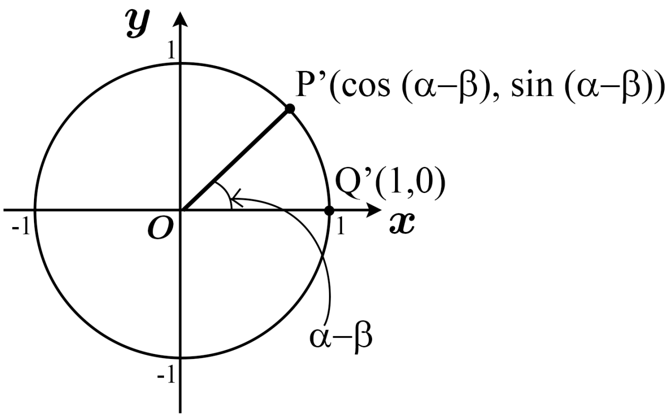
$$\cos(x-y) = \cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y$$

下の図のように，単位円周上に 2 点 $P(\cos\ \alpha, \sin\ \alpha)$，$Q(\cos\ \beta, \sin\ \beta)$ をとると，

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos\ \beta - \cos\ \alpha)^2 + (\sin\ \beta - \sin\ \alpha)^2 \\ &= 2 - 2\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\sin\ \alpha\ \sin\ \beta \quad \dots(1) \end{aligned}$$



次に，この 2 点 P，Q を原点の周りに $-\beta$ だけ回転した点をそれぞれ P'，Q' とすると，$P'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$，$Q'(1,0)$ となる．



ここで三角形 $OP'Q'$ に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} P'Q'^2 &= OP'^2 + OQ'^2 - 2\cdot OP'\cdot OQ'\cdot\cos(\alpha-\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha-\beta) \qquad \ldots(2) \end{aligned}$$

よって，(1)(2) より $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta$ が示された．

すると，$\cos(-\beta)=\cos\beta$ また $\sin(-\beta)=-\sin\beta$ であることから，この式の両辺の β を $-\beta$ に置き換えると，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta$$

同様に，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ また，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ であることから，この式の両辺の α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ に置き換えると

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta$$

が示される．

証明終わり

問題 5.5　以下の角度 θ の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を求めよ.

1. $\theta = \dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{1}{4}\pi$

2. $\theta = \dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{1}{6}\pi$

3. $\theta = \dfrac{1}{4}\pi + \dfrac{1}{6}\pi$

問題 5.6　$\sin\dfrac{1}{12}\pi$ を求めよ.

ヒント：以下を使え.

$$\cos\frac{1}{6}\pi = \cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{12}\pi\right) = \cos^2\frac{1}{12}\pi - \sin^2\frac{1}{12}\pi$$

$$\sin^2\frac{1}{12}\pi + \cos^2\frac{1}{12}\pi = 1$$

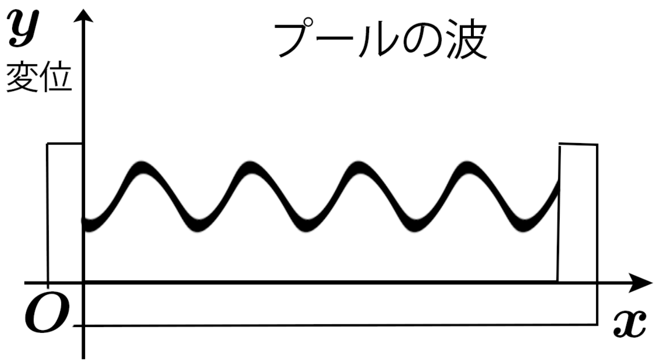
ここではっきり言っておくが，三角関数の加法定理は問題 5.5 や問題 5.6 のような求めにくい角度を求めるための**便利公式に過ぎないもの…ではない!!**

ここで，周期関数の代表的な例である，波動について考えてみよう．

5.4　波動

5.4.1　波動の立式

一直線上の媒質[*4]があるとする．媒質の振動による変位を考えてみよう．



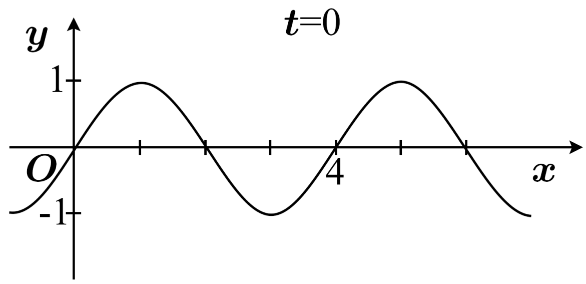
問題 5.7　変位は座標と時刻の関数であることを，（関数とは入力が決まると，出力が一意に定まるブラックボックスであることを知っている）高校 1 年生 に分かるように説明せよ．

問題 5.7 にあるような，波による変位 y は $y = f(x, t)$ と書くことにする．

ここで，まずは測定を開始する瞬間（$t = 0$ とする）の波について考える．つまり，写真を撮って，その波を三角関数の式で表せば良いのだ．

[*4] 振動や波動が伝わる物質のこと

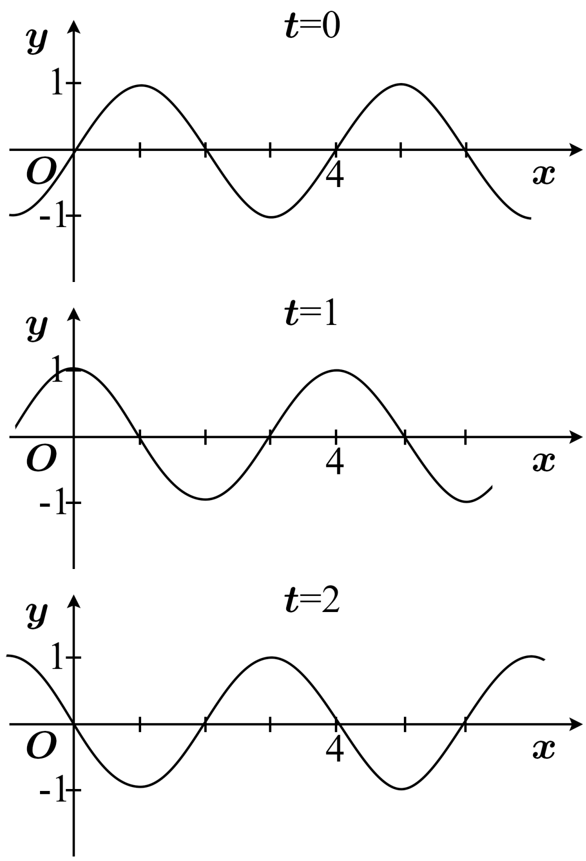
問題 5.8 時刻 $t=0$ の波の様子を写真に収めた．この図の波を三角関数の式で表わせ．



さらに時間経過により，波が移動することを考えてみよう．

波が速度 $v\,[\mathrm{m/s}]$ で動いている場合，時刻 t における座標 x の変位は，時刻 0 における座標 $x-vt$ の変位が時間 t をかけてやってきたものと解釈できる．

問題 5.9 上の文章を数学語にすることで，問題 5.8 の波が秒速 3m で動いている場合の波の変位を，「座標と時刻の関数 $f(x,t)$」の形で表記せよ．



以上のプロセスにより，場所と時刻を指定することで波の変位を出力する 2 変数関数を作ることが出来た．

早速，値を代入してみよう．

問題 5.10

1. $t = 10$ の瞬間の波の形の式とグラフを示せ．横軸に座標 x，縦軸に変位を描け．

2. $x = 7$ の地点における変位の時間変化をグラフに示せ．横軸に時刻 t，縦軸に変位を描け．

5.4.2　波の合成【発展】

複数の波が同じ媒質に作用するとき，媒質の変位は単純にそれぞれの波による媒質の変位の和となることが知られている．水面が作るいわゆる「波」だけでなく，光や音も波なので同様に合成ができる．他にも景気循環の「波」などにもこの性質を仮定して議論することがある．

波の合成を数式で表し，より深く理解するためには三角関数の加法定理を使うのだ．

問題 5.11　【発展】

今，$y = \sin\dfrac{2\pi}{4}(x-3t)$ で表される波があるとする．ここに，逆方向に進行する波 $y = \sin\dfrac{2\pi}{4}(x+3t)$ を同時に発生させたとする．2 つの波の合成波による媒質の変位は 2 つの波の変位の和であるとして， 合成波を式で表わせ．（ヒント：三角関数の加法定理）

問題 5.12　【発展】

同様に，$y = \sin\dfrac{2\pi}{4}(x-3t)$ で表される波と $y = \sin\dfrac{2\pi}{4}(x+4t)$ で表される波の合成波を式で表わせ．

5.5　三角関数の積を和に変換する

5.3 節では，$\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の積で表した．

この節では，$\sin\alpha\,\cos\beta$ や $\sin\alpha\,\sin\beta$ を $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ を用いて表してみよう．

例題　$\sin\alpha\,\cos\beta$ を $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ などの線型結合で表わせ．

例題の解

$\sin\alpha\,\cos\beta$ は，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$ を加法定理で変換したものに出てきたことを思い出そう．

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta && \text{(式 1)} \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\,\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta && \text{(式 2)} \end{aligned}$$

この (式 1) と (式 2) から $\cos\alpha\,\sin\beta$ を消したいので，(式 1) と (式 2) の両辺をそれぞれ足し合わせると

$$\text{左辺和} = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\,\cos\beta = \text{右辺和}$$

したがって，

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}\bigl\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\bigr\}$$

問題 5.13　同様に，$\cos\alpha\,\cos\beta$ と $\sin\alpha\,\sin\beta$ を $\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ などの線型結合で表わせ．

この節の内容は，三角関数の加法定理と違って，現時点で即座に役に立つものではないように思える．三角関数の微分・積分を考える上で非常に有用な変換であることは間違いないのだが，この変換そのものが日常生活で直接役立つことは稀である．なぜなら，三角関数の積で表される形で数式化される現象というものが日常生活ではあまりないからだ．