真实感图形渲染算法中高光双向反射分布函数模型的文献查阅报告

21201020 丁永誉

1. 介绍

基于物理的渲染(PBR, Physically Based Shading)是真实感图形渲染领域的重要议题, 对光与物质的交互的研究构成了基于物理的渲染的基础, 基于物理的渲染最终被归结为对沿着视线集合进入相机的辐亮度（Radiance）的计算. 本报告中的辐亮度计算不考虑参与介质(Participating Media)对辐亮度的影响, 离开物体表面的辐亮度与进入相机的辐亮度相同.

本报告主要关注局部反射现象的计算, 局部反射只依赖于入射光方向$\boldsymbol{l}$与视线方向$\boldsymbol{v}$, 局部反射可以使用双向反射分布函数(BRDF, Bidirectional Reflectance Distribution Function)进行量化, 平面反射中所使用的高光双向反射分布模型基于微面理论(Microfacet Theory)推导.

表面反射中所采用的高光双向反射分布函数模型的核心是微面理论中的法线分布函数(NDF, Normal Distribution Function)与遮蔽函数(Masking Function). 经过多年的研究与实践渲染领域的研究人员已经研发出多种高效的法线分布函数与遮蔽函数, 本报告会着重对其进行介绍.

2. 相关理论

2.1 球面坐标系(Spherical Coordinate System)

球面坐标系以坐标原点为参考点, 某一点与原点的距离用r表示, 原点到该点的向量与z轴的夹角称为天顶角(Zenith Angle), 使用θ表示, 向量在xy平面上的投影与x轴的夹角称为方位角(Azimuth Angle), 用ϕ表示, 使用(r,θ,ϕ)可以表示空间中任意一点. 球面坐标系与直角坐标系转换关系如下:

$$x = r\,sin\,\theta\,cos\,\phi\,, y = r\,sin\,\theta\,sin\,\phi\,, z = r\,cos\,\theta \qquad (2-1)$$

2.2 立体角(Solid Angle)

立体角是角度在三维空间的延伸. 角度度量平面上连续的方向集合的大小,弧度表示中使用半径为 1 的圆中与这些方向集合相交的圆弧的长度来表示弧度. 类似的, 立体角度量三维空间中连续的方向集合的大小, 使用与弧度类似的球面度(Steradians, 简称 sr)作为单位, 球面度表示这些方向集合与半径为 1 的求相交的面积的大小. 用ω

表示立体角, 微分立体角与球面坐标系有如下对应关系:

$$d\omega = sin\,\theta\, d\theta d\phi \tag{2-2}$$

2.3 切线空间(Tangent Space)

对于表面上的法线$\boldsymbol{n}$, 切线$\boldsymbol{t}$为一个与法线垂直的向量, 副切线$\boldsymbol{b}$为与二者都垂直的向量, 经过 Schmidt 正交化构成切线空间的正交基. 转换到切线空间可以有效的简化对微表面的处理过程.

2.4 辐射度量学(Radiometry)

辐射度量学负责处理对电磁辐射的测量.

2.4.1 辐射通量(Radiant Flux)

度量随时间变化的辐射能量流, 单位为瓦特(W), 使用Φ表示.

2.4.2 辐照度(Irradiance)

度量在单位面积上的辐射通量, 通过$\frac{d\Phi}{dA}$求出, 其中A代表面积, 单位为瓦特每平米(W/m^2), 使用E表示.

2.4.3 辐射强度(Radiant Intensity)

度量单位立体角上的辐射通量, 通过$\frac{d\Phi}{d\omega}$求出, 其中ω代表立体角, 单位为瓦特每球面度(W/sr), 使用I表示.

2.4.4 辐亮度(Radiance)

度量单位立体角, 单位面积上的辐射通量, 通过$\frac{d^2\Phi}{dAd\omega}$求出, 单位为瓦特每平方米每立体角$(W/m^2sr)$, 使用$L$表示.

2.5 几何光学(Geometrical Optics)

将组成物体的物点看作是几何点, 把它所发出的光线看作无数几何光线的集合, 光线的方向代表光能的传播方向. 几何光学与光的波动概念相违背, 是波动光学的近似, 不涉及光的物理本性, 从宏观上研究光的传播.

几何光学遵循三条实验定律: 光的直线传播定律, 光的独立传播定律, 光的反射定律和折射定律.

2.6 Fresnel 反射(Fresnel Reflectance)

物体的平面是不同介质的介面, 光与两种介质之间的平面的相互作用遵循 Fresnel 方程(Fresnel Equation). Fresnel 方程要求平面遵循几何光学, 也就是说平面的不规则性规模或者小于光的波长或者大于光的波长的 100 倍, 因为小于光的波长时对光不产生影响, 大于光的波长的 100 倍时不影响平面的局部平整度.

Fresnel 方程是对某种平面材质的反射率的度量, 反射率由入射光线方向$\boldsymbol{l}$与平面法线方向$\boldsymbol{n}$决定, Fresnel 方程使用$F(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})$表示, 法线方向与入射光线方向的夹角在$0°\sim90°$之间, 随着夹角增大 Fresnel 方程计算出的反射率会增大, 这种现象被称为

Fresnel 效应(Fresnel Effect).

对于以空气作为入射介质的外反射(External Reflection), 即入射介质的折射系数(Refraction Index)小于出射介质的折射系数的情况, 图形渲染中一般采用 Schlick 方程作为 Fresnel 方程的近似, 这里给出其一般化形式:

$$F(\mathbf{n},\mathbf{l}) \approx F_0 + (F_{90} - F_0)(1 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{l})^+)^p \quad (2-3)$$

($)^+$代表若括号内结果小于 0 则修改为 0. 对于非一般化的 Schlick 方程, $F_{90} = 1, p = 5$. 式中F_0是$[0,1]$上的常数, 我们假定空气的折射系数为 1, 表面材质的折射系数为n, 则F_0可以按如下方式计算:

$$F_0 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad (2-4)$$

2.7 双向反射分布函数(BRDF, Bidirectional Reflectance Distribution Function)

局部反射只依赖于入射光方向$\mathbf{l}$与视线方向$\mathbf{v}$, 局部反射可以使用双向反射分布函数进行量化,. 双向反射分布函数的定义为:

$$f(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \frac{dL_o(\mathbf{v})}{dE_i(\mathbf{l})} \quad (2-5)$$

其中$dL_o(\mathbf{v})$为反射到$\mathbf{v}$方向的微分辐亮度, $dE_i(\mathbf{l})$为来自入射光线$\mathbf{l}$方向的微分辐照度. 双向反射分布函数的图像可以如下绘制: 当固定入射光方向$\boldsymbol{l}$并旋转观察方向$\boldsymbol{v}$来进行图像的绘制时, 在球面坐标系下用θ, ϕ表示观察方向, r代表双向反射分布函数的值.

令$L_i(\mathbf{l})$为入射光方向$\mathbf{l}$上的辐亮度, 则反射方向$\mathbf{v}$的辐亮度可以按如下方式计算:

$$L_o(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{l}\in\Omega} f(\mathbf{l},\mathbf{v})(\mathbf{n},\mathbf{l})L_i(\mathbf{l})d\mathbf{l} \quad (2-6)$$

其中$\boldsymbol{l} \in \Omega$表示在对单位半球Ω上的所有方向进行积分.

物理定律中对双向反射分布函数具有两条限制,第一条为 Helmholtz 互反性(Helmholtz Reciprocity), 入射角与反射角交换后函数值不变, 即:

$$f(\mathbf{l},\mathbf{v}) = f(\mathbf{v},\mathbf{l}) \quad (2-7)$$

第二条限制为能量守恒, 通过双向反射分布函数我们可以计算入射方向$\boldsymbol{l}$上的定向半球反射率(Directional-hemispherical Reflectance):

$$R(\mathbf{l}) = \int_{\mathbf{v}\in\Omega} f(\mathbf{l},\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{v} \quad (2-8)$$

在出射观察方向v上可以定义类似的半球定向反射率(Hemispherical-Distribution Reflectance).

$$R(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{l}\in\Omega} f(\mathbf{l},\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{l})d\mathbf{l} \qquad (2-9)$$

若双向反射分布函数严格遵守 Helmholtz 互反性, 则以上两则公式是相等的, 二者合称为定向反照率(Directional Albedo). 定向反照率用于度量光线反射的能量损失, 其值在$[0,1]$上, 若值为 0 代表能量被完全吸收或遗失, 值为 1 代表光线被完全反射. 定向反照率具有旋转对称性(Rotational Symmetry), 即它的值与$\boldsymbol{l}$或$\boldsymbol{v}$在球面坐标系下的方位角ϕ无关.

2.8 微面理论(Microfacet Theory)

对于小于一个像素的表面不规则性(Surface Irregularity)我们无法为其显示的建立模型, 故这类微几何(Microgeometry)上的双向反射分布函数是对其产生的总体反射效果构建的概率模型, 遵循几何光学. 表面上的每个点都会包含大量微表面法线将光线向不同方向弹射, 单个微表面法线的方向是随机的, 故使用概率分布建模是合理的选择. 对大多数表面来说微表面上法线的分布是连续的, 且集中在宏观表面的法线周围, 微表面法线的分布向宏观表面法线的集中程度决定了宏观表面的粗糙度(Roughness), 分布越集中粗糙度越小.

对大部分表面来说微表面法线的分布是各向同性的(Isotropic), 各个方向上观察到的现象相同, 部分表面具有各向异性(Anisotropic), 各个方向上观察到的现象不同. 少部分特殊的表面具有高度结构化的微几何, 使得这些表面具有特殊的法线分布以及可观察到的现象, 例如织物表面. 微表面具有阴影(Shadowing)与遮蔽(Masking)现象. 微表面某一部分阻止入射光线照射微表面上的另一部分称为阴影, 微表面某一部分阻挡在微表面另一部分反射的光线称为遮蔽. 在不同角度上观察到的阴影与遮蔽现象的变化的显著程度与微表面本身的构造相关联.

微表面的法线分布函数使用$D(\boldsymbol{m})$表示, 其中$\boldsymbol{m}$代表法线方向, 法线分布函数是微表面法线在微几何平面上的概率分布. 传统上法线分布函数投影到微平面上的面积为 1, 即:

$$\int_{\mathbf{m}\in\Theta} D(\mathbf{m})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})d\mathbf{m} = 1 \qquad (2-10)$$

其中$\boldsymbol{n}$为宏观表面法线. , $\boldsymbol{m}\in\Theta$代表对单位球Θ上所有方向进行积分. 不失一般性, 使得宏观表面法线为$(0,0,1)$, 则上式可修改为使用球面坐标系表示, 即:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi = 1 \qquad (2-11)$$

一般的, 对任意方向的投影也可以利用法线分布函数表示. 令投影方向为$\boldsymbol{v}$, 则投影表达式为:

$$\int_{\mathbf{m}\in\Theta} D(\mathbf{m})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})d\mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v} \qquad (2-12)$$

其中$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{m}$的值可能为负, 由于微表面的遮挡经过正负相消后可以得到正确的投影面积.

对于观察方向$\boldsymbol{v}$并非所有法线都可见, 我们通过遮蔽函数(Masking Function)$G_1(\boldsymbol{m},\boldsymbol{v})$定义微表面中所有方向为$\boldsymbol{m}$的微表面法线相对于观察方向$\boldsymbol{v}$可见的

比例. 通过遮蔽函数可以定义联合遮蔽阴影函数(Joint Masking-Shadowing Function)$G_2(\boldsymbol{l},\boldsymbol{v},\boldsymbol{m})$, $\boldsymbol{l}$表示入射光线方向, 该函数表示的是微表面上方向为$\boldsymbol{m}$的法线同时对于入射光线$\boldsymbol{l}$和观察方向$\boldsymbol{v}$可见的比例. 通过遮蔽函数投影表达式可以修改为:

$$\int_{\mathbf{m}\in\Theta} G_1(\mathbf{m},\mathbf{v})D(\mathbf{m})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})^{+}d\mathbf{m} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \qquad (2-13)$$

微表面可以使用高度场(Heightfield)来表示, 即微表面上每个点表示的是其相对于宏观表面的高度. 使用$P^1(h)$表示微表面上的高度分布, 对高度求梯度可以将高度分布转化为斜率分布$P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}})$, 其中$(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}}) = \nabla h$. 斜率分布是归一化的, 即:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}})dx_{\tilde{m}}\,dy_{\tilde{m}} = 1 \qquad (2-14)$$

将式(2-11)与上式比较可以得到:

$$D(\theta,\phi)\cos\theta\sin\theta\,d\theta d\phi = P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}})dx_{\tilde{m}}dy_{\tilde{m}} \qquad (2-15)$$

通过空间立体几何的知识可以得到法线$\omega_m = (x_m,y_m,z_m)$与斜率的关系:

$$(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}}) = \left(-\frac{x_m}{z_m},-\frac{y_m}{z_m}\right) = -\tan\theta_m\,(\cos\phi_m\,,\sin\phi_m) \qquad (2-16)$$

其中θ_m与ϕ_m为转化为球面坐标系后的参数. 相反的, 我们同样可以得到如下斜率与法线的关系:

$$\omega_m = \frac{(-x_{\tilde{m}},-y_{\tilde{m}},1)}{\sqrt{x_{\tilde{m}}^2+y_{\tilde{m}}^2+1}} \qquad (2-17)$$

计算球面坐标系空间转化为斜率空间的 Jacobi 行列式, 可以得到:

$$dx_{\tilde{m}}dy_{\tilde{m}} = \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}d\theta d\phi \qquad (2-18)$$

由此可以进一步修改式(2-15)为:

$$D(\mathbf{m}) = D(\theta,\phi) = \frac{P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}})}{\cos^4\theta} \qquad (2-19)$$

3. 高光双向反射分布函数模型(Specular BRDF Model)

3.1 单次弹射高光双向反射分布函数模型(Single-Bounce Specular BRDF Model)

不考虑光线在微表面内的多次弹射产生的出射光线, [2]中推导出该情况下双向反射分布函数可表示为:

$$f(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{m}\in\Omega} f_{\mu}(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{m}) G_2(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{m}) D(\mathbf{m}) \frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{l})^+}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}|} \frac{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})^+}{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|} d\mathbf{m} \qquad (3-1)$$

其中$f_{\mu}(\boldsymbol{l},\mu,bfm)$表示发现方向为$\boldsymbol{m}$的微表面上的微表面双向反射分布函数. 由于不考虑多次弹射, 使用这种方式推导出的双向反射分布函数会有一定能量损失, 但是由于可以直接应用法线分布函数与遮蔽函数而被广泛采用. 我们认为所有微平面都是光滑 Fresnel 镜面, 此时只有法线方向$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}}{2}$的微表面可以成功将方向为$\boldsymbol{l}$的入射光反射到视线方向$\boldsymbol{v}$上, 利用该性质[3]中推导出的微表面高光双向反射分布函数为:

$$f_{\mu}(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{m}) = \left\|\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{l}}\right\| \frac{F(\mathbf{l},\mathbf{h})\delta_{\mathbf{h}}(\mathbf{m})}{|\mathbf{l}\cdot\mathbf{h}|} = \frac{F(\mathbf{l},\mathbf{h})\delta_{\mathbf{h}}(\mathbf{m})}{4|\mathbf{l}\cdot\mathbf{h}|^2} \qquad (3-2)$$

其中$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}}{2}$, $F(\boldsymbol{l},\boldsymbol{h})$为 Fresnel 方程, $\delta_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{m})$为 Dirac delta 函数. $\left\|\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{l}}\right\| = \frac{1}{4|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{h}|}$是反射变换的 Jacobi 行列式的值, 由[3][4]分别给出几何与代数证明. 上述两式合并可得高光双向反射分布函数为:

$$f_{spec}(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \frac{F(\mathbf{l},\mathbf{v})G_2(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{h})D(\mathbf{h})}{4|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}||\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|} \qquad (3-3)$$

当绘制高光双向反射分布函数的图像时, 图像往往集中在使得$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{v}}{\mathbf{2}}$的观察方向$\boldsymbol{v}$处, 图像呈叶片状, 我们称之为高光波瓣(Specular Lobe). 高光双向反射分布函数的结果与对遮蔽函数与法线分布函数的选择有关.

3.1.1 遮蔽函数(Masking Function)

[2]中对多种遮蔽函数进行讨论, 并证明出所讨论的遮蔽函数中只有 Simth 遮蔽函数[5]同时满足式(2-13)与法线-遮蔽独立性(Normal-Masking Independence), 即$G_1(\mathbf{m},\mathbf{v})$的值不依赖于$\mathbf{m}$, 只需满足$\mathbf{m}\cdot\mathbf{v} > 0$即可. 本报告只对 Simth 遮蔽函数进行讨论.

假设微表面是非自相关的, 即某一点的法线方向与邻近点的法线方向不相关, 法线方向为微表面上某一点的局部特征, 该点反射的光线在微表面另一处被遮蔽是该点的远距离特征, 局部特征与远距离特征相互独立, 故遮蔽函数可以按如下方式表示:

$$G_1(\mathbf{m},\mathbf{v}) = G_1^{local}(\mathbf{m},\mathbf{v}) G_1^{distant}(\mathbf{v}) \qquad (3-4)$$

其中$G_1^{local}(\mathbf{m},\mathbf{v}) = \chi^+(\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})$, 即 Heaviside 函数, 二者点积为正时值为 1, 否则为 0, $G_1^{distant}(\mathbf{v})$代表在观察方向$\boldsymbol{v}$上法线被遮挡的概率, 它与法线方向无关. 此时式(2-13)可修改为:

$$\int_{\mathbf{m}\in\Theta} G_1^{local}(\mathbf{m},\mathbf{v}) G_1^{distant}(\mathbf{v}) D(\mathbf{m})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})^+ d\mathbf{m} = G_1^{distant}(\mathbf{v}) \int_{\mathbf{m}\in\Omega} D(\mathbf{m})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m}) d\mathbf{m} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \qquad (3-5)$$

由此可以推导出:

$$G_1^{distant}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\int_{m\in\Omega} D(\mathbf{m})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m}) d\mathbf{m}} \qquad (3-6)$$

将微表面表示为高度场, [2]中将该式从法线空间变换到斜率空间, 推导得出:

$$G_1^{distant}(\mathbf{v}) = \frac{1}{1 + \Lambda(\mathbf{v})} \quad (3-7)$$

令$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为θ_o, $\Lambda(\mathbf{v})$的表达式为:

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \frac{1}{\cot\theta_o}\int_{\cot\theta_o}^{\infty}(x_{\tilde{m}} - \cot\theta_o)P^{2-}(x_{\tilde{m}})dx_{\tilde{m}} \quad (3-8)$$

其中 $P^{2-}(x_{\tilde{m}})$为斜率分布关于$x_{\tilde{m}}$的边缘分布. 通过上述推导的结果我们得到 Smith 遮蔽函数:

$$G_1(\mathbf{m}, \mathbf{v}) = \frac{\chi^+(\mathbf{m}\cdot\mathbf{v})}{1 + \Lambda(\mathbf{v})} \quad (3-9)$$

通过遮蔽函数可以推导出联合阴影遮蔽函数, [2]中对多种联合阴影遮蔽函数进行了讨论与分析. 最自然的推导结果如下:

$$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m})G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m}) \quad (3-10)$$

该函数需要进一步改进. 首先考虑入射方向$\boldsymbol{l}$观察方向$\boldsymbol{v}$的方向相关性. 考虑如下情况: 若$\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{v}$相同, 则此时我们所期望的应该是$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m}) = G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m})$, 但式(3-10)得出的结果为$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = G_1^2(\mathbf{l}, \mathbf{m})$. 我们使用单位球上的球面坐标系$(1, \theta, \phi)$表示方向向量. 当入射方向与出射方向的方位角之差相等时, $G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m})$应与$G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m})$和$G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m})$的最小值相等, 故联合遮蔽阴影函数被修改为:

$$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = \lambda(\phi)G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m})G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m}) + \left(1 - \lambda(\phi)\right)min\left(G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m}), G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m})\right) \quad (3-11)$$

其中ϕ为入射光方向与观察方向的方位角的差, [6][7]分别给出如下两种$\lambda(\phi)$表达式:

$$\lambda(\phi) = 1 - e^{-7.3\phi^2} \quad (3-12)$$

$$\lambda(\phi) = \frac{4.41\phi}{4.41\phi + 1} \quad (3-13)$$

其次考虑高度相关性. 将微表面表示为高度场, [3]中推导出某一高度$\boldsymbol{h}$对于观察方向$\boldsymbol{v}$可见的概率为:

$$G_1^{distance}(\mathbf{v}, h) = \left(\int_{-\infty}^{h} P_1\left(h'\right)dh'\right)^{\Lambda(\mathbf{v})} \quad (3-14)$$

其中$P_1(h)$为高度分布. 则微表面对于观察方向$\boldsymbol{v}$可见的概率可以表示为:

$$G_1{}^{distant}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1{}^{distance}(\mathbf{v}, h) P_1(h) dh = \frac{1}{1 + \Lambda(\mathbf{v})} \tag{3-15}$$

这与式(3-7)的推导结果相同. 令在高度h上的遮蔽函数为$G_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}, h)$, 则在高度$h$上的联合阴影遮蔽函数通过式(3-10)和 Smith 遮蔽函数可表示为:

$$\begin{aligned} G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}, h) &= G_1(\mathbf{l}, \mathbf{m}, h) G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m}, h) \\ &= G_1^{local}(\mathbf{l}, \mathbf{m}) G_1^{distance}(\mathbf{l}, h) G_1^{local}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) G_1^{distance}(\mathbf{v}, h) \\ &= \chi^+(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) \left(\int_{-\infty}^{h} P_1\left(h'\right) dh \right)^{\Lambda(\mathbf{l})} \chi^+(\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) \left(\int_{-\infty}^{h} P_1\left(h'\right) dh \right)^{\Lambda(\mathbf{v})} \\ &= \chi^+(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) \chi^+(\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) \left(\int_{-\infty}^{h} P_1\left(h'\right) dh \right)^{\Lambda(\mathbf{l}) + \Lambda(\mathbf{v})} \end{aligned} \tag{3-16}$$

对上式在高度分布上求积分,得:

$$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}, h) P_1(h) dh = \frac{\chi^+(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) \chi^+(\mathbf{v} \cdot \mathbf{m})}{1 + \Lambda(\mathbf{v}) + \Lambda(\mathbf{l})} \tag{3-17}$$

上式被称作 Smith 高度相关阴影遮蔽函数, 该函数在实践中得到广泛应用. [2]中将方向相关性与高度相关性相结合, 得到如下结果:

$$G_2(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = \frac{\chi^+(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m}) \chi^+(\mathbf{v} \cdot \mathbf{m})}{1 + max\left(\Lambda(\mathbf{l}), \Lambda(\mathbf{v})\right) + \lambda(\phi)\, min\left(\Lambda(\mathbf{l}), \Lambda(\mathbf{v})\right)} \tag{3-18}$$

容易看出遮蔽函数与法线分布函数相关.

3.1.2 法线分布函数(Normal Distribution Function)

法线分布函数对所渲染的表面的外观具有重要影响, 它决定了高光的大小与形状, 影响材质表面粗糙度的观感以及其它微小的视觉效果, 如高光是具有明显的边界还是被光晕所包围. 本报告中所有法线分布函数均使用高度场描述微表面.

法线分布函数可分为各向同性(Isotropic)法线分布函数与各项异性(Anisotropic)法线分布函数. 二者的区别在于各向同性法线分布函数的粗糙度只由一个参数α控制, 使用球面坐标系表示时法线分布函数与方位角ϕ无关; 而各向异性法线分布函数的粗糙度由α_x, α_y两个参数控制, 其中α_x为在切线空间中沿切线方向的粗糙度, α_y为在切线空间中沿副切线方向的粗糙度, 法线分布函数与方位角ϕ有关.

同时法线分布函数可以分为形状无关(Shape-Invariant)法线分布函数与形状相关(Shape-Variant)法线分布函数. [2]中对形状无关性的定义如下: 修改法线分布函数的粗糙度参数等价于对法线分布函数进行拉伸. 各向同性形状无关法线分布函数对应的斜率分布函数可以写为如下形式:

$$P^{22}(x_{\tilde{m}}, y_{\tilde{m}}) = \frac{1}{\alpha^2} f\left(\frac{\sqrt{x_{\tilde{m}}^2 + y_{\tilde{m}}{}^2}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{tan\,\theta_m}{\alpha}\right) \quad (3-19)$$

其中θ_m为斜率对应的法线在球面坐标系中的天顶角. 显然可以看出对α的修改相当于对函数的拉伸, 同时参数$\frac{1}{\alpha^2}$对拉伸后的分布进行归一化, 保持在定义域上的积分结果为 1. 利用式(2-19)可以将斜率分布函数转化为法线分布函数:

$$D(\mathbf{m}) = \frac{\chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}{\alpha^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^4} g\left(\frac{\sqrt{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2}}{\alpha(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}\right) \quad (3-20)$$

对于 Smith 遮蔽函数, 一般的各向同性法线分布函数得到的Λ与光线方向和粗糙度参数有关, 而若法线分布函数具有形状无关性, 将上式代入式(3-8), 经推导后可以简化为一个参数, 该参数定义如下:

$$a = \frac{1}{\alpha\, tan\,\theta_o} = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\alpha\sqrt{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2}} \quad (3-21)$$

θ_o为$\mathbf{v}$与$\boldsymbol{n}$的夹角. 此时Λ被转化为:

$$\Lambda(a) = \int_a^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a}-1\right) f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy \quad (3-22)$$

各向异性形状无关法线分布函数对应的斜率分布函数可以写为如下形式:

$$\begin{aligned} P^{22}(x_{\tilde{m}}, y_{\tilde{m}}) &= \frac{1}{\alpha_x\alpha_y} f\left(\sqrt{\frac{x_{\tilde{m}}^2}{\alpha_x^2} + \frac{y_{\tilde{m}}^2}{\alpha_y^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_x\alpha_y} f\left(tan\,\theta_m\sqrt{\frac{cos^2\phi_m}{\alpha_x^2} + \frac{sin^2\phi_m}{\alpha_y^2}}\right) \end{aligned} \quad (3-23)$$

转化为法线分布函数:

$$D(\mathbf{m}) = \frac{\chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}{\alpha_x\alpha_y(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^4} g\left(\frac{\sqrt{\frac{(\mathbf{t}\cdot\mathbf{m})^2}{\alpha_x^2} + \frac{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})^2}{\alpha_y^2}}}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}\right) \quad (3-24)$$

其中$\boldsymbol{t},\boldsymbol{b}$为切线空间中的切线方向与副切线方向. 当$\alpha_x = \alpha_y$时该式退化为各向同性法线分布函数. 任何各项异性法线分布函数都可以通过在斜率空间x轴方向拉伸$\frac{\alpha_x}{\alpha_y}$转换为各向同性法线分布函数, 此时拉伸后的表面的粗糙度参数$\alpha^{prime} = \alpha_y$, 观察方向在$\boldsymbol{v}$该空间中被拉伸为$\boldsymbol{v}' = \left(\frac{\alpha_x}{\alpha_y}x_o, y_o, z_o\right)$, 对应的$\frac{1}{tan\,\theta'_o} =$

$\frac{z_o}{\sqrt{\frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2}x_o^2+y_o^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_x^2}{\alpha_y^2}cos^2\phi_o+sin^2\phi_o}\,tan\,\theta_o}$, 由此各向同性法线分布函数对应的Λ的参数可以修改为:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{\alpha' \tan\theta_o'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{cos^2\phi_o\alpha_x^2 + \sin^2\phi_o\,\alpha_y^2}\tan\theta_o} \\ &= \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\alpha_x^2(\mathbf{t}\cdot\mathbf{v})^2 + \alpha_y^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})}} \\ &= \frac{1}{\alpha_o\tan\theta_o} \end{aligned} \quad (3-25)$$

其中α_o被称为投影到观察方向的粗糙度. 除了直接使用两个参数α_x,α_y来替代一个参数α之外, 各向异性法线分布函数也具有其他参数化形式. [8]引入各向异性参数k_{aniso}, 其参数化方式如下:

$$\begin{aligned} k_{aspect} &= \sqrt{1-0.9k_{aniso}} \\ \alpha_x &= \frac{\alpha^2}{k_{aspect}} \\ \alpha_y &= \alpha^2 k_{aspect} \end{aligned} \quad (3-26)$$

式中0.9的作用是将α_x,α_y的纵横比限制为最大$10:1$. [9]中提出另一种参数化方式:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha^2\left(1+k_{\{aniso\}}\right) \\ \alpha_y &= \alpha^2\left(1-k_{\{aniso\}}\right) \end{aligned} \quad (3-27)$$

3.1.2.1 各向同性法线分布函数

首个被提出的微表面模型中所使用的法线分布函数为 Beckmann 法线分布函数[10], 其对应的斜率分布函数定义如下:

$$P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}}) = \frac{1}{\pi\alpha^2}e^{-\frac{x_{\tilde{m}}^2+y_{\tilde{m}}^2}{\alpha_b{}^2}} \quad (3-28)$$

显然它是形状无关的. 法线分布函数形式为:

$$D(\mathbf{m}) = \frac{\chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}{\pi\alpha_b^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^4}e^{\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2-1}{\alpha_b^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2}} \quad (3-29)$$

由于形状无关, 故经推导 Smith 遮蔽函数中的Λ可以写为:

$$\Lambda(a) = \frac{erf(a)-1}{2} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}e^{-a^2} \quad (3-30)$$

其中误差函数$erf(a)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-x^2}\,dx$. [3]中提出一种上式的近似函数:

$$\Lambda(a)=\begin{cases}\frac{1-1.259a+0.396a^2}{3.535a+2.181a^2}, & x<1.6\\ 0, & x\geq 1.6\end{cases}\qquad(3-31)$$

[11]中提出了 Blinn-Phong 法线分布函数, 早年得到广泛应用, 它的表达式如下:

$$D(\mathbf{m})=\chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\frac{\alpha_p+2}{2\pi}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^{\alpha_p}\qquad(3-32)$$

Beckmann 法线分布函数的α_b与上式的α_p具有如下转换关系:

$$\alpha_p=2\alpha_b^{-2}-2\qquad(3-33)$$

Blinn-Phong 法线分布函数不具有形状不变性, 故无法给出Λ的解析形式, [3]推荐使用 Beckmann 中的Λ代替.

[12][3]分别独立的提出了同一种法线分布函数, 后者将其命名为 GGX 法线分布函数, 而由于前者的工作更早故又被称为 Trowbridge-Reitz 法线分布函数. 本报告中称之为 GGX 法线分布函数, 它被当今渲染相关领域广泛使用. 它所对应的斜率分布函数表达式如下:

$$P^{22}(x_{\tilde{m}},y_{\tilde{m}})=\frac{1}{\pi{\alpha_g}^2\left(1+\frac{x_{\tilde{m}}^2+y_{\tilde{m}}^2}{{\alpha_g}^2}\right)^2}\qquad(3-34)$$

显然它具有形状不变性. 其对应的法线分布函数如下:

$$D(\mathbf{m})=\frac{\chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\alpha_g^2}{\pi\left(1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2(\alpha_g^2-1)\right)^2}\qquad(3-35)$$

由形状不变性推导出的Λ为:

$$\Lambda(a)=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}{2}\qquad(3-36)$$

该式具有简单的表达式, 且a^2可以避免a中根号的计算. [13]观察到将上式与式(3-17)结合并应用到式(3-3)可以通过分子分母相消简化式(3-3). 简化结果如下:

$$\frac{G_2(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{h})}{4|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}||\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|}\Rightarrow\frac{0.5}{\mu_o\sqrt{\alpha^2+\mu_i^2(1-\alpha^2)}+\mu_i\sqrt{\alpha^2+\mu_o^2(1-\alpha^2)}}\qquad(3-37)$$

其中$\mu_i=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{l})^+,\mu_o=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^+$. 将式(3-36)带入 Simth 遮蔽函数, 可

以得到:

$$G_1(\mathbf{v}) = \frac{2\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha^2)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}} \qquad (3-38)$$

令插值函数为 $lerp(x_0,x_1,t)=(1-t)x_0+tx_1$,[14]中利用 $\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha^2)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}=\sqrt{lerp(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v},1,\alpha^2)}\approx lerp(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v},1,\alpha)$ 进一步对 GGX 法线分布函数的 Smith 遮蔽函数进行近似:

$$G_1(\mathbf{v}) \approx \frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})(2-\alpha)+\alpha} \qquad (3-39)$$

[15]中利用上式求出其对应的Λ, 代入式(3-3)对其进一步简化得:

$$\frac{G_2(\mathbf{l},\mathbf{v},\mathbf{h})}{4|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}||\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|} \approx \frac{0.5}{\mathrm{lerp}(2|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}||\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|,|\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}|+|\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|,\alpha)} \qquad (3-40)$$

在实际应用中, GGX 法线分布函数相较于 Beckmann 法线分布函数它所生成的高光具有更明显的光晕, 这与自然条件下的光照相符合, 这一性质促进了 GGX 法线分布函数的流行.

在实际应用中从业者更期望对法线分布函数能更好的适应各种需求, 不要求严格基于物理. 为了对法线分布函数的形状进行更多的控制, [8]提出了 GTR(Generalized Trowbridge-Reitz)法线分布函数. 其表达式如下:

$$D(\mathbf{m}) = \chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\frac{k(\alpha,\gamma)}{\pi\left(1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2(\alpha^2-1)\right)^\gamma} \qquad (3-41)$$

可以看出 GTR 法线分布函数将 GGX 法线分布函数中的 $\left(1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2(\alpha_g^2-1)\right)^2$ 的指数项修改为可以调整的参数γ. $k(\alpha,\gamma)$为积分归一化因数, 对$\frac{1}{\left(1+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2(\alpha^2-1)\right)^\gamma}$进行半球上的积分求得其表达式如下;

$$k(\alpha,\gamma) = \begin{cases} \frac{(\gamma-1)(\alpha^2-1)}{\left(1-(\alpha^2)^{(1-\gamma)}\right)}, & \gamma\neq 1 \text{ 且} \alpha\neq 1 \\ \frac{(\alpha^2-1)}{ln(\alpha^2)}, & \gamma = 1 \text{ 且} \alpha\neq 1 \\ 1, & \alpha = 1 \end{cases} \qquad (3-42)$$

其中第二, 三种情况分别为第一种情况在对应处的极限值. 当$\gamma=2$时, GTR 法线分布函数与 GGX 法线分布函数相等. 然而, GTR 法线分布函数不满足形状不变性, 使得其 Smith 联合遮蔽阴影函数的求解较为困难. [16]中通过求得特定γ值的 Simth 联合遮蔽阴影函数, 利用插值给出任意γ值上的 Smith 联合遮蔽阴影函数. 此外, 修改 GTR 法线分布函数中的α与γ参数对整体表面粗糙度和高光光晕的影响不够直观.

受 GTR 法线分布函数的启发, [17]利用 t 分布提出了 t 法线分布函数. 其对应的一般化的斜率分布函数为:

$$P^{22}(x_{\tilde{m}}, y_{\tilde{m}}) = \frac{(C-1)B}{\pi\left(1 + B\left(x_{\tilde{m}}^2 + y_{\tilde{m}}^2\right)\right)^C} \qquad (3-43)$$

其中B, C为控制分布函数形状的参数. [17]中令$B = \frac{1}{\alpha^2(\gamma-1)}, C = \gamma$, 显然此时 t 斜率分布具有形状不变性. 转换到法线空间, 得到的最终的 t 法线分布函数为:

$$D(\mathbf{m}) = \chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\frac{(\gamma-1)^\gamma \alpha^{(2\gamma-2)}}{\pi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^4\left((\gamma-1)\alpha^2 + \frac{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2}{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2}\right)^\gamma} \qquad (3-44)$$

利用形状不变性求出的 Smith 遮蔽函数中的Λ为:

$$\Lambda(a) = \frac{\Gamma\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)\sqrt{\pi}}\left(\frac{(\gamma-1)^\gamma}{2\gamma-3}S_1^\gamma(a) + \sqrt{\gamma-1}S_2^\gamma(a)\right) - \frac{1}{2} \qquad (3-45)$$

$$S_1^\gamma(a) = \frac{\left((\gamma-1)+a^2\right)^{\frac{3}{2}-\gamma}}{a} \qquad (3-46)$$

$$S_2^\gamma(a) = a \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-a^2}{\gamma-1}\right) \qquad (3-47)$$

其中$\Gamma(x)$为 Gamma 函数, ${}_2F_1$为 Gauss 超几何函数. t 法线分布函数在保持形状不变性的同时具有和 GTR 法线分布函数类似的利用调整参数控制分布的形状的能力.

[18]利用指数幂分布提出了指数幂法线分布函数, 它具有与 t 法线分布函数类似的性质. 其对应的斜率分布函数为:

$$P^{22}(x_{\tilde{m}}, y_{\tilde{m}}) = \frac{p}{\pi\alpha^2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}e^{-\left(\frac{x_{\tilde{m}}^2+y_{\tilde{m}}^2}{\alpha^2}\right)^p} \qquad (3-48)$$

其中p控制分布函数的峰度(Kurtosis). 显然其具有形状不变性, 法线分布函数为:

$$D(\mathbf{m}) = \chi^+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\frac{p}{\pi\alpha^2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^4}e^{-\left(\frac{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})^2}{\alpha^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})}\right)^p} \qquad (3-49)$$

由其形状不变性计算出的Λ为:

$$\Lambda(a) = \frac{p}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\int_a^\infty \int_{-\infty}^\infty (x-a)e^{-(x^2+y^2)^p}\,dxdy \qquad (3-50)$$

3.1.2.2 各向异性法线分布函数

利用式(3-23)和式(3-25)可以很方便的将形状不变各向异性法线分布函数及其 Smith 遮蔽函数中的Λ的参数转化为各向异性的形式, 本报告中不再列出上述形状不变各向同性法线分布函数转化为各向异性的表达式.

3.1.3 多高光波瓣(Multiple Specular Lobe)

除使用日趋复杂的法线分布函数这一方法以外, 使用多高光波瓣来更好的与所测量的材质相匹配也成为一种解决方案. [19]中首次提出这种方法, [20]中对该方法进行实验并发现对很多材质来说加入第二个高光波瓣可以极大地提升对实际材质拟合的效果. [21]添加了一个完整的粗糙高光(Roughspecular)高光波瓣来对材质呈现的效果进行进一步调整, 即它具有独立且完整的可调整的参数. 然而, 直接添加多个高光波瓣会造成观察方向接收的能量大于入射方向传入的能量, 尤其是在观察方向与宏观法线夹角较大的情况下. [9]添加了由两个 GGX 法线分布函数线性混合后得到的高光波瓣, 采用该方法只需要使用粗糙度参数与混合参数即可, 并且保持能量守恒.

3.2 多重弹射双向反射分布函数模型(Multiple-Bounce BRDF Model)

单次弹射双向反射分布函数模型带来的能量损失会造成渲染结果偏暗, 尤其是对于粗糙度较大的情况, 因为粗糙度较大时每个微表面中集成了更多的细节, 使得多重弹射发生的概率增大. 我们需要通过能量补足(Energy Compensation)来取得更好的渲染结果.

如前文所提到的, 对定向反射率的计算可以度量双向反射分布函数的能量损失, 由于其旋转不变性, 我们将其改写为如下形式(以半球定向反射率为例, 定向半球反射率同理):

$$\begin{aligned} R(\mu_o) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i,\theta_o,\phi_i)\cos\theta_i\,d\theta_i d\phi_i \\ &= 2\pi\int_0^1 f(\mu_i,\mu_o)d\mu_i \end{aligned} \quad (3-51)$$

对其进行余弦归一化, 得:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{\int_{v\in\Omega} R(\mathbf{v})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{v}}{\int_{v\in\Omega}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})d\mathbf{v}} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^1 R(\mu)\mu d\mu}{\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mu d\mu d\phi} \\ &= 2\int_0^1 R(\mu)\,\mu d\mu \end{aligned} \quad (3-52)$$

[22]中提出利用余弦归一化的定向反照率, 通过在原有双向反射分布函数的基础上添加一个新的双向反射分布函数波瓣来得到一个定向反照率为 1 的双向反射分布函数的方法. 该双向反射分布函数定义如下:

$$f_{ms}(\mathbf{l},\mathbf{v}) = f_{ms}(\mu_i,\mu_o) = \frac{\big(1-R(\mu_i)\big)\big(1-R(\mu_o)\big)}{\pi(1-\bar{R})} \quad (3-53)$$

该双向反射分布函数的半球定向反射率为:

$$
\begin{aligned}
R_{ms}(\mu_o) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 f_{ms}(\mu_i,\mu_o)\mu_i d\mu_i d\phi_i \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{\big(1-R(\mu_i)\big)\big(1-R(\mu_o)\big)}{\pi(1-\bar{R})}\mu_i d\mu_i \\
&= 2\frac{1-R(\mu_o)}{1-\bar{R}}\int_0^1 \big(1-R(\mu_i)\big)\mu_i d\mu_i \\
&= 2\frac{1-R(\mu_o)}{1-\bar{R}}(1-\bar{R}) \\
&= 1-R(\mu_o)
\end{aligned}
\qquad (3-54)
$$

容易看出与原友定向反照率相加的结果为 1. 定向反照率很难给出解析式, 需要将固定参数上的结果预先计算, 使用时执行插值. [9]经过实验得出存储一个32×32的表即可满足要求, 以单精度浮点数存储只需要 4KB 的空间.

如果需要向上述双向反射分布函数中添加 Fresnel 项, 那么此时会产生能量的吸收或传导, 不要求定向反照率的和为 1. [23]中提出如下假设: 经过多重散射后能量被扩散, 此时只需要利用余弦归一化的 Fresnel 项和定向反照率即可. 类似于定向反照率, 我们得到如下余弦归一化的 Fresnel 项:

$$
\bar{F} = 2\int_0^1 F(\mu)\mu d\mu \qquad (3-55)
$$

已知反射后各个观察角度的平均散失能量占比为$1-\bar{R}$, 多重散射后的能量占比为$\bar{F}\bar{R}$, 经过k次弹射的能量在其中的占比为$\bar{F}^k(1-\bar{R})^k$, 得到如下多重弹射 Fresnel 值;

$$
F_{ms} = \frac{1}{1-\bar{R}}\bar{F}\bar{R}\sum_1^\infty \bar{F}^k(1-\bar{R})^k = \frac{\bar{F}^2\bar{R}}{1-\bar{F}(1-\bar{R})} \qquad (3-56)
$$

其中$1-\bar{R}$为归一化因子. 将该式与式(3-53)结合得到最终结果:

$$
f_{ms}(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \frac{\bar{F}^2\bar{R}}{\pi(1-\bar{R})\big(1-\bar{F}(1-\bar{R})\big)}\big(1-R(\boldsymbol{l})\big)\big(1-R(\boldsymbol{v})\big) \qquad (3-57)
$$

利用一般化的 Schlick 方程我们可以给出$\bar{F}$的解析形式;

$$
\bar{F} = \frac{2p^2F_{90}+(3p+1)F_0}{2p^2+3p+1} \qquad (3-58)
$$

通过使用$f_{spec}(l,v)+f_{ms}(l,v)$我们可以获得能量补足后的渲染效果, 避免了因不考虑多重弹射而造成的渲染结果过暗现象.

参考文献

[1] T. Akenine-Möller, E. Haines, N. Hoffman, A. Pesce, M. Iwanicki, S. Hillaire, *Real-Time Rendering* Fourth Edition, pp. 293-347.

[2] Heitz, Eric, “Understanding the Masking-Shadowing Function in Microfacet-Based BRDFs,”

Journal of Computer Graphics Techniques, vol. 3, no. 4, pp. 48–107, 2014.
[3] Walter, Bruce, Stephen R. Marschner, Hongsong Li, and Kenneth E. Torrance, "Microfacet Models for Refraction through Rough Surfaces," *Rendering Techniques 2007*, Eurographics Association, pp. 195–206, June 2007.
[4] An illumination model for a skin layer bounded by rough surfaces. In *Rendering Techniques 2001: 12th Eurographics Workshop on Rendering* (June 2001), pp. 39-52.
[5] Smith, Bruce G., "Geometrical Shadowing of a Random Rough Surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 15, no. 5, pp. 668–671, Sept. 1967.
[6] Ashikhmin, Michael, Simon Premoˇze, and Peter Shirley, "A Microfacet-Based BRDF Generator," in *SIGGRAPH '00: Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 67–74, July 2000.
[7] van Ginneken, B., M. Stavridi, and J. J. Koenderink, "Diffuse and Specular Reflectance from Rough Surfaces," *Applied Optics*, vol. 37, no. 1, Jan. 1998.
[8] Burley, Brent, "Physically Based Shading at Disney," *SIGGRAPH Practical Physically Based Shading in Film and Game Production course*, Aug. 2012.
[9] Kulla, Christopher, and Alejandro Conty, "Revisiting Physically Based Shading at Imageworks," *SIGGRAPH Physically Based Shading in Theory and Practice course*, Aug. 2017
[10] Beckmann, Petr, and André Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon Press, 1963.
[11] Blinn, James F., "Models of Light Reflection for Computer Synthesized Pictures," *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH '77 Proceedings)*, vol. 11, no. 2, pp. 192–198, July 1977.
[12] Trowbridge, T. S., and K. P. Reitz, "Average Irregularity Representation of a Roughened Surface for Ray Reflection," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 65, no. 5, pp. 531–536, May 1975.
[13] Lagarde, Sébastian, and Charles de Rousiers, "Moving Frostbite to Physically Based Rendering," *SIGGRAPH Physically Based Shading in Theory and Practice course*, Aug. 2014.
[14] Karis, Brian, "Real Shading in Unreal Engine 4," *SIGGRAPH Physically Based Shading in Theory and Practice course*, July 2013.
[15] Hammon, Earl, Jr., "PBR Diffuse Lighting for GGX+Smith Microsurfaces," *Game Developers Conference*, Feb.–Mar. 2017.
[16] Dimov, Rossen, "Deriving the Smith Shadowing Function for the GTR BRDF," Chaos Group White Paper, June 2015.
[17] Ribardière, Mickaël, Benjamin Bringier, Daniel Meneveaux, and Lionel Simonot, "STD: Student's t-Distribution of Slopes for Microfacet Based BSDFs," *Computer Graphics Forum*, vol. 36, no. 2, pp. 421–429, 2017.
[18] Holzschuch, Nicolas, and Romain Pacanowski, "A Two-Scale Microfacet Reflectance Model Combining Reflection and Diffraction," *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2017)*, vol. 36, no. 4, pp. 66:1–66:12, July 2017.
[19] Cook, Robert L., and Kenneth E. Torrance, "A Reflectance Model for Computer Graphics," *Computer Graphics (SIGGRAPH '81 Proceedings)*, vol. 15, no. 3, pp. 307–316, July 1981.
[20] Ngan, Addy, Frédo Durand, and Wojciech Matusik, "Experimental Analysis of BRDF Models," in *16th Eurographics Symposium on Rendering*, Eurographics Association, pp. 117–126, June–July 2005.
[21] Hery, Christophe, and Junyi Ling, "Pixar's Foundation for Materials: PxrSurface and PxrMarschnerHair," *SIGGRAPH Physically Based Shading in Theory and Practice course*, Aug. 2017.
[22] Kelemen, Csaba, and Lázló Szirmay-Kalos, "A Microfacet Based Coupled Specular-Matte BRDF Model with Importance Sampling," in *Eurographics 2001—Short Presentations*,

Eurographics Association, pp. 25–34, Sept. 2001
[23] Jakob, Wenzel, Eugene d'Eon, Otto Jakob, and Steve Marschner, "A Comprehensive Framework for Rendering Layered Materials," *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2014)*, vol. 33, no. 4, pp. 118:1–118:14, July 2014.