

Separarea soluțiilor ecuațiilor algebrice și transcendente. Metoda biseecției

Ganaciuc Carolina, cl. 12 T

Profesor: Guțu Maria

Chișinău 2018

Scopul:

- ▶ Recunoașterea prezenței soluțiilor unei ecuații algebrice sau transcendente pe un interval dat;
- ▶ Separarea intervalelor domeniului de definiție a unei funcții $f(x)$, care vor conține exact o soluție a ecuației $f(x)=0$;
- ▶ Utilizarea algoritmilor de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente prin metoda bisecției;
- ▶ Elaborarea programelor de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente prin metoda bisecției.

Obiective:

- ▶ Definirea noțiunilor de ecuație algebrică și transcendentă;
- ▶ Definirea teoremei pentru calculul soluțiilor unei ecuații;
- ▶ Definirea metodei biseecției;
- ▶ Studiarea algoritmilor de calculare a soluțiilor ecuațiilor;

Definiții:

- ▶ Dacă funcția $f(x)$ are forma unui polinom sau poate fi adusă la această formă, ecuația $f(x)=0$ se numește **algebrică**.
- ▶ În caz contrar-când $f(x)$ nu este una polinomială-, ecuația se numește **transcendentă**.
- ▶ Fie dată ecuația $f(x)=0$, $f(x)$ fiind definită și continuă pe un oarecare interval $a \leq x \leq b$.
- ▶ Orice valoare ε , pentru care expresia $f(\varepsilon)=0$ este adevărată, se numește **zerou** al funcției $f(x)$ sau **soluție** a ecuației $f(x)=0$.

Teoremă:

- Dacă funcția $f(x)$, continuă pe segmentul $[a, b]$, primește la extremitățile lui valori de semn diferit ($f(a) \cdot f(b) < 0$), atunci pe acest segment există cel puțin un punct ε , astfel încât $f(\varepsilon) = 0$. Dacă pe $[a, b]$ există derivata $f'(x) = 0$, continuă, care are un semn constant, atunci ε este o soluție unică a ecuației $f(x) = 0$ pe acest segment.

Etapele de rezolvare

- ▶ În cazul, când ecuatia algebrica sau transcendentă are o structura simplă, soluțiile ei pot fi determinate exact și relativ ușor. Dacă însă structura ecuației este complicată, procedura de determinare a soluțiilor devine destul de anevoioasă.
- ▶ Rezolvarea unei ecuații algebrice se divide în două etape:
 - ❖ 1. Separarea intervalelor pe care ecuația are o singură soluție și
 - ❖ 2. Micsorarea pe cât mai mult posibil a fiecarui din aceste intervale

Metoda analitică

- ▶ Pentru separarea analitică a soluțiilor vor fi folosite proprietățile derivatei. Dacă soluțiile ecuației $f'(x)=0$ pot fi ușor calculate, atunci, pentru a separa soluțiile $f(x)=0$, este necesar:
- ▶ 1. să se determine soluțiile distincte $a \leq x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_n \leq b$ ale ecuației $f'(x)=0$;
- ▶ 2. considerând $a=x_0$ și $b=x_{n+1}$, să se calculeze valorile $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n+1})$. Segmentele $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, \dots, n$, pentru care $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ vor conține câte cel puțin o soluție a ecuației $f(x)=0$.

Metoda grafică

- ▶ O altă posibilitate de separare a rădăcinilor ecuației $f(x)=0$ este cercetarea directă a graficului funcției $f(x)$. Pentru construcția acestuia pot fi folosite atât aplicații software specializate, cât și programe simple, elaborate cu ajutorul instrumentelor unui limbaj de programare.
- ▶ Separarea grafică a soluțiilor unei ecuații pe un segment dat poate fi realizată și local, cu ajutorul unei aplicații de calcul tabelar. Este suficient să se construiască un tabel cu 2 coloane. Prima coloană va reprezenta o divizare a segmentului în segmente elementare de lungimi egale. Cea de-a doua coloană va conține o formulă care calculează valoarea funcției $f(x)$ pentru valorile respective din prima coloană. În baza datelor din coloana cu valorile $f(x)$ se construiește o diagramă liniară, care reprezintă graficul funcției analizate.

Metoda bisecției

- ▶ Metoda bisecției este o metodă de determinare a soluțiilor ecuațiilor algebrice și transcendente. Aceasta metodă presupune determinarea punctului de mijloc “c” al segmentului [a,b], apoi calculul valorii $f(c)$ după un anumit algoritm.
- ▶ Dacă $f(c) = 0$, atunci “c” este soluția exactă a ecuației. În caz contrar soluția este căutată pe segmentele [a,c] , [c,b]. Dacă $f(a) \times f(c) > 0$, atunci soluția este căutată în continuare pe segmentul [a1, b1], a1 primește valoarea “c” iar b1 valoarea “b”. În caz contrar, a1 primește valoarea “a”, iar b1 - valoarea “c”.

Algoritmul de calcul pentru un nr.prestabilit “n” de divizări consecutive:

- ▶ Pasul 0: Inițializare: $i \leftarrow 0$.
- ▶ Pasul 1: Determinarea mijlocului segmentului $c \leftarrow (a+b)/2$.
- ▶ Pasul 2: Reducerea segmentului ce contine solutia: daca $f(c) = 0$, atunci solutia calculata este $x=c$. SFIRSIT In caz contrar, daca $f(a) \times f(c) > 0$, atunci $a \leftarrow c$; b $\leftarrow b$, altfel $a \leftarrow a$; b $\leftarrow c$.
- ▶ Pasul 3: $i \leftarrow i+1$. Daca $i = n$, atunci solutia calculata este $x=(a+b)/2$. SFIRSIT.In caz contrar ,se revine la pasul 1.

Algoritmul de calcul pentru o precizie ε data:

- Pasul 1: Determinarea mijlocului segmentului $c \leftarrow (a+b)/2$.
- Pasul 2: Daca $f(c) = 0$, atunci solutia calculata este $x=c$. SFIRSIT. In caz contrar, daca $f(a) \times f(c) > 0$, $a \leftarrow c$; $b \leftarrow b$, altfel $a \leftarrow a$; $b \leftarrow c$.
- Pasul 3: Daca $|b-a| < \varepsilon$, atunci solutia calculata este $x=(a+b)/2$. SFIRSIT. In caz contrar , se revine la pasul 1.

Concluzie

- Metoda biseecției reprezintă una dintre cele mai simple metode de determinare a unei soluții a unei ecuații. Astfel, consider că metoda biseecției este una dintre cele mai ușoare și eficiente metode de determinare a soluțiilor ecuațiilor algebrice și transcendente.

Date bibliografice

- ▶ <http://www.scriub.com/stiinta/matematica/SEPARAREA-SOLUTIILOR-ECUATILO1341314420.php>
- ▶ <http://www.creeaza.com/referate/matematica/Metoda-bisectiei-injumatatirii172.php>
- ▶ <https://www.slideshare.net/anaconovalov/metoda-bisectiei-42697270>

Mulțumesc pentru
atenție!!!