# INFORMACIÓN CUÁNTICA

PROF. DR. ANDRÉ TANUS CESÁRIO (ANDRETANUS@GMAIL.COM)

PROF. DR. TEÓFILO VARGAS

# EL CURSO:

1. REQUISITOS PREVIOS P/ ESTUDIAR INFORMACIÓN/COMPUTACIÓN CUÁNTICA
2. TEORÍA CLÁSICA DE LA INFORMACIÓN
3. TEORÍA CUÁNTICA SIN RUIDO
4. TEORÍA CUÁNTICA CON RUIDO
5. MEDICIONES Y EVOLUCIÓN
6. PROTOCOLOS CUÁNTICOS
7. ENTROPÍA CUÁNTICA
8. TEORÍA DE LA INFORMACIÓN CUÁNTICA
9. ENTRELAZAMIENTO

# CAPÍTULO 1 REQUISITOS PREVIOS P/ ESTUDIAR INFORMACIÓN/COMPUTACIÓN CUÁNTICA

1.1 REPASO DE ÁLGEBRA LINEAL

1.2 PROPIEDADES DE MATRICES

1.3 NOTACIÓN DE DIRAC

1.4 PRODUCTO TENSORIAL/TRAZA PARCIAL

# 1.1 REPASO DE ÁLGEBRA LINEAL

## ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA

UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), ES UN CONJUNTO NO VACÍO $\mathbb{V}$ JUNTO CON:

→ UNA OPERACIÓN BINARIA LLAMADA ADICIÓN:

ASIGNA CUALQUIER PAR $\vec{u}$ y $\vec{v}$ EN $\mathbb{V}$ CON UN TERCER VECTOR $\vec{u}+\vec{v}$

→ UNA FUNCIÓN BINARIA LLAMADA MULTIPLICACIÓN ESCALAR:

ASIGNA A CUALQUIER ESCALAR $a \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}$ A OTRO VECTOR $a\vec{v}$

PARA TENERMOS UN ESPACIO VECTORIAL, LOS SIGTE AXIOMAS SIGUIENTES DEBEN SATISFACERSE PARA CADA $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ y $a, b \in \mathbb{K}$

1. ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2. CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. ELEMENTO NEUTRO DE LA ADICIÓN: $\exists\ \vec{0} \in \mathbb{V},\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. ELEMENTO INVERSO DE LA ADICIÓN: $\forall\ \vec{v} \in \mathbb{V},\ \exists\ -\vec{v} \in \mathbb{V},\ \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
5. COMPATIBILIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$
6. ELEMENTO NEUTRO DE LA MULTIPLICACIÓN ESCALAR: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
7. DISTRIBUTIVIDAD $\begin{cases} a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \\ (a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v} \end{cases}$

# EL ESPACIO DE HILBERT $\mathcal{H}$ DE DIMENSIÓN $n$

- $\mathcal{H}$ ES UN ESPACIO VECTORIAL LINEAL DEFINIDO EN $\mathbb{C}$

  $a, b \in \mathbb{C}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \mathcal{H}_n \cong \mathbb{C}^n$

- $\mathcal{H}$ ES DOTADO DE UN PRODUCTO ESCALAR: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})^* \in \mathbb{C}$

  - EL PRODUCTO ESCALAR ES LINEAL CON RESPETO AL 2da POSICIÓN

$$(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{u}, \vec{w})$$

  - EL PRODUCTO ESCALAR ES ANTILINEAL CON RESPETO AL 1da POSICIÓN

$$(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a^*(\vec{u}, \vec{w}) + b^*(\vec{v}, \vec{w})$$

# BASE Y DIMENSIÓN

- UN CONJUNTO DE N VECTORES $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE, (L.I.), SI Y SOLO SI LA SOLUCIÓN DE

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \vec{v}_i = 0, \quad \text{ES} \quad a_i = 0, \ \forall\, i \in [1, N]$$

- PERO SI EXISTE UN CONJUNTO DE ESCALARES QUE NO SON TODOS CERO, ENTONCES UN VECTOR PUEDE SER EXPRESADO COMO COMBINACIÓN LINEAL DE LOS OTROS

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \vec{v}_i$$

EL CONJUNTO $\{\vec{v}_i\}$ ES DICHO LINEALMENTE DEPENDIENTE.

- LA DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL ES DADO POR EL NÚMERO MÁXIMO N DE VECTORES L.I. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N\}$.

- CUALQUIER VECTOR $\vec{v}$ DE UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN N PUEDE SER ESCRITO COMO LA COMBINACIÓN LINEAL

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} a_i \vec{v}_i \qquad \{\vec{v}_i\}_{i=1}^{N} \longrightarrow \text{UNA BASE}$$

AUNQUE EL CONJUNTO DE ESTOS VECTORES L.I. SEA ARBITRARIO, ES CONVENIENTE QUE SEAN ORTO-NORMALES, ES DECIR,

$$(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- VAMOS ASUMIR EN ESTE CURSO QUE LAS BASES SEAN ORTONORMALES Y QUE EXPANDAN TODO EL ESPACIO

- LOS COEFICIENTES $a_i$ DE LA EXPANSION $\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} a_i \vec{v}_i$, SON LLAMADOS LAS COMPONENTES DEL VECTOR $\vec{v}$ EN LA BASE. CADA COMPONENTE $a_i = (\vec{v}_i, \vec{v})$

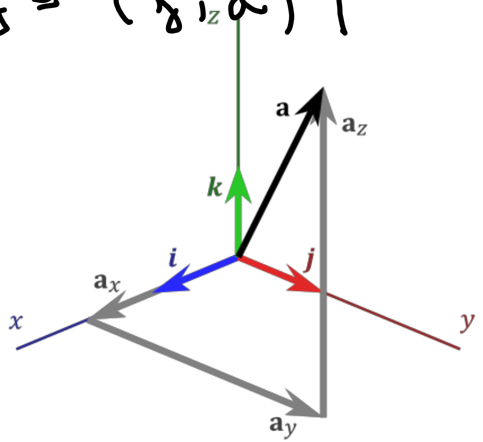
- BASE CANÓNICA $(\mathbb{R}^3)$

$a_x = (\hat{i}, \vec{a})$

$a_y = (\hat{j}, \vec{a})$

$a_z = (\hat{k}, \vec{a})$

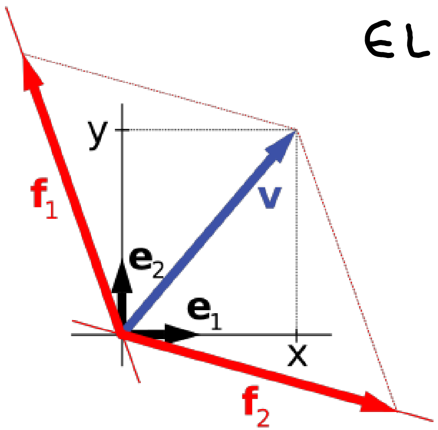
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

CON $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

# CAMBIO DE BASE (EJEMPLO EN $\mathbb{R}^2$)




EL VECTOR $\vec{v} = (x, y)$ ESCRITO EN LA BASE CANÓNICA

$$\vec{v} = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$\vec{v} = (x, y) = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2$$

EL VECTOR $\vec{v}$ TAMBIÉN PUEDE SER ESCRITO POR MEDIO DE LA BASE NO ORTONORMAL $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$

$$\vec{v} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

# OPERADORES LINEALES

- UN OPERADOR LINEAL $A$ ASOCIA CADA VECTOR $\vec{v}$ A UN OTRO VECTOR $\vec{v}'$

$$A\vec{v} = \vec{v}'$$

- **LINEALIDAD:** $A(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1 A\vec{v}_1 + \lambda_2 A\vec{v}_2$

LA ACCIÓN DEL PRODUCTO DE LOS OPERADORES $A$ Y $B$

$$(AB)\vec{v} = A(B\vec{v})$$

- ATENCIÓN: EN GENERAL $AB \neq BA$. EL CONMUTADOR DE $A$ Y $B$ ES DEFINIDO COMO: $[A,B] = AB - BA$

# REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LOS OPERADORES LINEALES

- UN OPERADOR LINEAL $A$, COMPLEJO, CON ELEMENTOS DE MATRIZ $A_{ij}$ ES UN MAPA $\{A_{ij}\}_{n\times m} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$, ESPECÍFICAMENTE

$$W_{m\times 1} = A_{m\times n} \cdot v_{n\times 1}$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$$

PODEMOS REPRESENTAR

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} j=1 & j=2 & & j=n \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ \\ \\ i=m \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- VAMOS USAR OPERADORES (MATRICES) CUADRADAS. ES DECIR, $\dim(A) = n$ SIGNIFICA QUE $A$ ES UN OPERADOR $n \times n$.

- LA TRANSPUESTA DE UN OPERADOR $A$ ES EL OPERADOR $A^T$ ESTÁ DADO POR:

$$A^T_{ij} = A_{ji}$$

EJEMPLOS:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

## OPERADORES ADJUNTOS (CONJUGADO HERMITIANO)

$\dagger$ : DAGGER → DAGA

$$A^{\dagger} = (A^{*})^{T} = (A^{T})^{*}$$

$$A^{\dagger}_{ij} = \{A^{*}_{ij}\}^{T} = A^{*}_{ji}$$

### EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\dagger} = \left\{ \begin{pmatrix} i & 2-i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{*} \right\}^{T} = \left\{ \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}^{T} = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2+i & 4 \end{pmatrix}$$

## OPERADORES HERMÍTICOS (HERMITIANOS)

→ $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$ ♡

- SON OPERADORES QUE $A^{\dagger} = (A^{*})^{T} = (A^{T})^{*} = A$.

### EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\dagger} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix}^{*} \right\}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{pmatrix} = A$$

## LA INVERSA DE UNA MATRIZ

SEA $A$ UNA MATRIZ CUADRADA DE $\dim(A) = n$. LA INVERSA DE $A$ (CUANDO EXISTE) ES DENOMINADA DE $A^{-1}$ y SATISFACE $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}$

EN QUE $\mathbb{I}$ ES LA MATRIZ IDENTIDAD

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## MATRICES NORMALES

- UNITARIA
- HERMITIANAS
- ANTI-HERMITIANAS
- POSITIVAS

SON MATRICES CUYO $[A, A^{+}] = 0 \Rightarrow AA^{+} - A^{+}A = 0 \Rightarrow AA^{+} = A^{+}A$

## MATRICES UNITÁRIAS

SON MATRICES NORMALES $U$ TAL QUE $U^{-1} = U^{+} \Rightarrow \underbrace{U^{+}}_{U^{-1}} \cdot U = UU^{+} = \mathbb{I}$

Obs.: LAS MATRICES UNITÁRIAS y HERMITIANAS SON EJEMPLOS DE MATRICES NORMALES!

## 1.3 NOTACIÓN DE DIRAC

- PAUL DIRAC INTRODUJO UNA NOTACIÓN PODEROSA, CON EL OBJETIVO DE ESTAR LIBRE DE SISTEMAS DE COORDENADAS.

- ÉL LLAMÓ AL VECTOR DE ESTADO $\psi$ POR LO QUE LLAMÓ UN VECTOR "KET": $|\psi\rangle$ (UN VECTOR COLUMNA) $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in \mathcal{H}_n \simeq \mathbb{C}^n$$

VECTOR COLUMNA

- SU CONJUGADO HERMITIANO $(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$ ES UNA FORMA LINEAL MIEMBRO DE UN ESPACIO DUAL, ESCRITA COMO UN VECTOR LÍNEA LLAMADA DE "BRA"

Si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$ $\Rightarrow$ $\langle\psi| = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)_{1\times n}$

KET $\qquad (|\psi\rangle)^\dagger \qquad$ BRA

PRODUCTO ESCALAR DE 2 VECTORES $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$(|\psi\rangle, |\varphi\rangle) = \langle\psi|\varphi\rangle$$

$$\langle\psi| = (a_1^*, a_2^*) \Rightarrow \langle\psi|\varphi\rangle \Rightarrow \underbrace{(a_1^*, a_2^*)}_{\langle\psi|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{|\varphi\rangle} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle \Rightarrow \underbrace{(b_1^*, b_2^*)}_{\langle\varphi|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{|\psi\rangle} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* \Rightarrow \langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$$

# OTRAS OBSERVACIONES

- DADO $|\psi\rangle$ y $|\chi\rangle = a_1|e_1\rangle + b_1|e_2\rangle$

$$\langle\psi|\chi\rangle = \langle\psi|\left(a_1|e_1\rangle + b_1|e_2\rangle\right) = a_1\langle\psi|e_1\rangle + b_1\langle\psi|e_2\rangle = \left(\langle\chi|\psi\rangle\right)^*$$

$$\langle\chi|\psi\rangle = \left(\langle e_1|a_1^* + \langle e_2|b_1^*\right)|\psi\rangle = a_1^*\langle e_1|\psi\rangle + b_1^*\langle e_2|\psi\rangle$$

- COMENTARIO: Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\psi\rangle$ ES UN Ket, $\lambda|\psi\rangle = |\lambda\psi\rangle$ ES UN Ket. EL BRA ASOCIADO A $|\lambda\psi\rangle$ ES $\langle\lambda\psi| = \lambda^*\langle\psi|$

- $\langle\psi|\psi\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$, $\langle\psi|\psi\rangle = 0$ Si, y solo si, $|\psi\rangle = 0$

- ESTADOS ORTOGONALES

$|\psi\rangle$ y $|\varphi\rangle$ SON ESTADOS ORTOGONALES si $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$

- ESTADOS ORTONORMALES

$|\psi\rangle$ y $|\varphi\rangle$ SON ESTADOS ORTONORMALES si $\begin{cases} \langle\psi|\varphi\rangle = 0 \\ \langle\psi|\psi\rangle = 1 \\ \langle\varphi|\varphi\rangle = 1 \end{cases}$

- NORMA N DE UN VECTOR (TAMAÑO)

$N = \| |\psi\rangle \|_2 = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$

EJEMPLO: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\langle\psi| = (a_1^*, a_2^*)$

$$\langle\psi|\psi\rangle = (a_1^*, a_2^*)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_1^* + a_2 a_2^* = |a_1|^2 + |a_2|^2$$

$$N = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$$

→ NORMALIZAR UN ESTADO ES HACERLO DE TAMAÑO 1

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \frac{|\psi\rangle}{N}$$

EJEMPLO: NORMALIZAR EL ESTADO $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$|\psi'\rangle = \dfrac{|\psi\rangle}{N}$, $\quad N = \sqrt{1^2 + |i|^2} = \sqrt{2}$. AHORA $|\psi'\rangle = \dfrac{|\psi\rangle}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

ESTÁ NORMALIZADO

- **OPERADORES LINEALES**

$$A\vec{v} = \vec{v}' \quad \Rightarrow \quad A|v\rangle = |v'\rangle$$

EN NOTACIÓN DE DIRAC

$$(A|v\rangle)^{\dagger} = (|v'\rangle)^{\dagger} \qquad \langle v|A^{\dagger} = \langle v'|$$

- **LOS PRODUCTOS EXTERNOS SON OPERADORES**

$|\psi\rangle\langle\varphi|$ ES UN OPERADOR, PORQUE

$|\psi\rangle\langle\varphi|$

$$(|\psi\rangle\langle\varphi|)|\chi\rangle = |\psi\rangle\langle\varphi|\chi\rangle$$

$$|\psi\rangle\langle\varphi|\chi\rangle = a\cdot|\psi\rangle$$

$$\begin{cases} \text{CON } a \in \mathbb{C} \\ \text{y } a = \langle\varphi|\chi\rangle \end{cases}$$

- <u>PROYECTORES</u>

SEA $|\psi\rangle$ UN KET NORMALIZADO, ES DECIR, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$
UN PROYECTOR ES UN OPERADOR $P_\psi$ DEFINIDO COMO $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ Y QUE RESPETAN

$$P_\psi^2 = P_\psi$$

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ TIENE ESTA PROPIEDAD, PORQUE $P_\psi^2 = P_\psi P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \cdot |\psi\rangle\langle\psi|$

$$P_\psi^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi$$

$\langle\psi|\psi\rangle \to$ 1 (NORMALIZADO)

UN PROYECTOR $P_\psi|\varphi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = b\cdot|\psi\rangle$ CON $b = \langle\psi|\varphi\rangle$

- <u>OBSERVACIÓN</u>: $\left(|\varphi\rangle\langle\psi|\right)^\dagger = |\psi\rangle\langle\varphi|$ $\qquad (P_\psi)^\dagger = \left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)^\dagger = P_\psi$

# TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

- EN UM ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA, SEA A UN OPERADOR

  - HERMÍTICO
  - UNA MATRIZ CUADRADA

ENTONCES EXISTE UNA BASE ORTONORMAL QUE CONSISTE EN LOS VECTORES PRÓPRIOS DE A. LOS VALORES PRÓPRIOS (AUTOVALORES) CORRESPONDIENTES SON REALES

$$A|v\rangle = \lambda \cdot |v\rangle \qquad (1)$$

$|v\rangle$ → AUTOVECTOR DE A

$\lambda$ → AUTOVALOR CORRESPONDIENTE

SI $\underbrace{A = A^{+}}_{\text{HERMITIANO}} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

PARA SOLUCIONAR LA ECUACIÓN (1), $A \cdot |v\rangle - \lambda \mathbb{I} \cdot |v\rangle = 0$

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \cdot |v\rangle = 0$$

UN SISTEMA LINEAL SOLO TIENE SOLUCIONES NO TRIVIALES CUANDO

$$\det\{(A - \lambda \mathbb{I})\} = 0$$

EJEMPLO: SEA $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. DETERMINAR SUS AUTOVALORES y AUTOVECTORES

$$A - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\{A - \lambda \mathbb{I}\} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 1$$

$1 - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0$

$1 - \lambda = -1 \Rightarrow \lambda = 2$

P/ $\lambda_1 = 2$, $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$ $(A - \lambda_1 \mathbb{I})|v_1\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix} \quad x = y$$

$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ NORMALIZADO: $N = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ REVISANDO: $A|v_1\rangle = \lambda_1|v_1\rangle$, $A|v_1\rangle = 2|v_1\rangle$

$$A|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \lambda_1|v_1\rangle$$

P/ $\lambda_2 = 0$, $|v_2\rangle = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$, $A|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle \Rightarrow (A - \lambda_2 \mathbb{I})|v_2\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} w + z = 0 \\ w + z = 0 \end{cases} \qquad w = -z \text{ , Si } z = 1$$

$$|v_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad N = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

REVISANDO: $A|v_2\rangle = \lambda_2|v_2\rangle$ , $A|v_2\rangle = 0|v_2\rangle = 0$

$$A|v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \lambda_2 |v_2\rangle$$

## REPRESENTACIÓN MATRICIAL

DE VECTORES $\qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} a_i |i\rangle$ CON $\{|i\rangle\}$

UNA BASE ORTONORMAL

$$\langle i|\psi\rangle = a_i$$

$$\langle 1|\psi\rangle = a_1$$

• PERO, LOS COEFICIENTES $a_i$ DE LA EXPANSION $\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} a_i \vec{v}_i$, SON LLAMADOS LAS COMPONENTES DEL VECTOR $\vec{v}$

EN LA BASE $\vec{v}_i$ CADA COMPONENTE ERA $a_i = (\vec{v}_i, \vec{v})$

$$\mathbb{I} \cdot |v\rangle = \left( \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| v\rangle \quad = \sum_{i=1}^{n} \langle i|v\rangle |i\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle = |v\rangle$$

★ SI $\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$ ES UNA BASE COMPLETA P/ $\mathcal{H}_n$, $\mathbb{I} = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|$ RELACIÓN DE CIERRE

• LAS COMPONENTES DEL VECTOR $|v\rangle$ EN LA BASE ORTONORMAL $\{|i\rangle\}$ SON

$a_i = \langle i|v\rangle$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|v\rangle \\ \langle 2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle n|v\rangle \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$\langle\psi| = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)_{1\times n} = (\langle\psi|1\rangle, \langle\psi|2\rangle, \ldots, \langle\psi|n\rangle)$$

- Si $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i|i\rangle$ y $|\chi\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i|i\rangle$

$$\langle\psi|\chi\rangle = (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

## REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE OPERADORES

$$A = \mathbb{I}\cdot A\cdot\mathbb{I} = \Big(\sum_{i=1}^{n}|i\rangle\langle i|\Big)A\Big(\sum_{j=1}^{n}|j\rangle\langle j|\Big) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} A_{ij}|i\rangle\langle j|$$

con $A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$ los elementos de matriz

$$\underbrace{\langle i|\,A\,|j\rangle}_{\langle i|A|j\rangle}$$

$$
A = \begin{array}{c|cccc}
 & j=1 & j=1 & \cdots\cdots & j=n \\
\hline
i=1 & & & & \\
i=2 & & & & \\
\vdots & & & & \\
i=n & & & &
\end{array}
\quad
A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & & & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{CON} \qquad A_{ij} = \langle i | A | j \rangle
$$

- RECORDA QUE $w_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$ ? EN LA NOTACIÓN DE DIRAC

$$|w\rangle = A |v\rangle$$

$$\mathbb{I} |w\rangle = \mathbb{I} A \mathbb{I} |v\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| w\rangle = \left( \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| \right) A \left( \sum_{j=1}^{n} |j\rangle\langle j| \right) |v\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i = \langle i | w \rangle \\ A_{ij} = \langle i | A | j \rangle \\ v_j = \langle j | v \rangle \end{array} \right.$$

p/ $A_{n \times n} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \langle 1|w\rangle \\ \langle 2|w\rangle \\ \vdots \\ \langle n|w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|A|1\rangle & \cdots & \cdots \\ \vdots & \langle i|A|j\rangle & \\ \vdots & & \ddots \\ \langle 1|A|n\rangle & & \langle n|A|n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 1|v\rangle \\ \langle 2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle n|v\rangle \end{pmatrix}$$

## OPERADOR UNITARIO, REPRESENTACIÓN EN PRODUCTO EXTERNO

$$U = \sum_{i=1}^{n} |a_i\rangle\langle b_i| \qquad \text{CON } \{|b_i\rangle\} \text{ UNA BASE ORTONORMAL}$$

$$|a_i\rangle = U|b_i\rangle$$

$$\begin{cases} |a_i\rangle = \left(|a_1\rangle\langle b_1| + |a_2\rangle\langle b_2| + \cdots + |a_i\rangle\langle b_i| + \cdots |a_n\rangle\langle b_n|\right)|b_i\rangle = |a_i\rangle \\ \text{PORQUE} \quad \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij} \end{cases}$$

- $\{|a_i\rangle\}$ TAMBIÉN ES UNA BASE ORTONORMAL

$$\langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij} = \langle b_i|\mathbb{I}|b_j\rangle = \langle b_i|U^{\dagger}\cdot U|b_j\rangle = \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$$

- $$U^{\dagger}\cdot U = \sum_{i,j} |b_i\rangle\underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle b_j| = \sum_i |b_i\rangle\langle b_i| = \mathbb{I} = UU^{\dagger} = \sum_{i,j} |a_i\rangle\underbrace{\langle b_i|b_j\rangle}_{\delta_{ij}}\langle a_j| = \sum_j |a_j\rangle\langle a_j|$$

# 1.4 PRODUCTO TENSORIAL/TRAZA PARCIAL

## TRAZA DE UN PROYECTOR

SEA $|\psi\rangle$ UN ESTADO $\quad |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = 1$

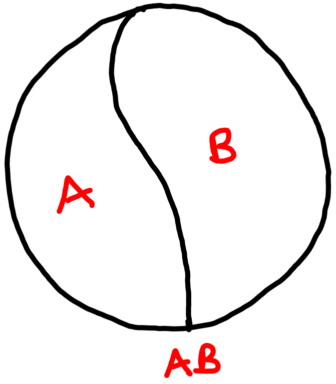
$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & a_1 a_2^* & a_1 a_3^* & \dots & a_1 a_n^* \\ a_2 a_1^* & |a_2|^2 & a_2 a_3^* & \dots & a_2 a_n^* \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n a_1^* & a_n a_2^* & a_n a_3^* & \dots & |a_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(P_\psi) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_{i=1}^{n} \langle i|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^* = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = 1$$

## TRAZA DE UN OPERADOR

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle i|A|i\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$ (SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL)

## SISTEMAS COMPUESTOS



1.15) $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ y $\langle u| = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$

$a^* = \bar{a}$

$$\rho_{AB} = |u\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4) = \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 & u_1\bar{u}_4 \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_3 & u_2\bar{u}_4 \\ u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 & u_3\bar{u}_4 \\ u_4\bar{u}_1 & u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_3 & u_4\bar{u}_4 \end{pmatrix}_{AB}$$

$\rho_A = ?$ $\rho_B = ?$

a) $\rho_B = tr_A[\rho_{AB}] = tr_A[|u\rangle\langle u|]$

$$\rho_B = \sum_i (\langle i|_A \otimes \mathbb{I}_B)\, \rho_{AB}\, (|i\rangle_A \otimes \mathbb{I}_B)$$

$$\langle 0| \otimes \mathbb{I} = (1\cdot\mathbb{I} \quad 0\cdot\mathbb{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

$$|0\rangle \otimes \mathbb{I} = (\langle 0|\otimes\mathbb{I})^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$\langle 1| \otimes \mathbb{I} = (0\cdot\mathbb{I} \quad 1\cdot\mathbb{I})$$

$$\langle 1| \otimes \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

$$|1\rangle \otimes \mathbb{I} = (\langle 1|\otimes\mathbb{I})^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$\rho_B = tr_A[|u\rangle\langle u|] = \sum_{i=0}^{1} (\langle i|_A \otimes \mathbb{I}_B)\, \rho_{AB}\, (|i\rangle_A \otimes \mathbb{I}_B) = (\langle 0|\otimes\mathbb{I})|u\rangle\langle u|(|0\rangle\otimes\mathbb{I}) + (\langle 1|\otimes\mathbb{I})|u\rangle\langle u|(|1\rangle\otimes\mathbb{I})$$

VAMOS A HACER ESTE PRODUCTO PRIMERO

$$\rho_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}}_{4\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{4\times 2} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}}_{4\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{4\times 2} =$$

$$\rho_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 \end{bmatrix}}_{4\times 2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}}_{4\times 2}$$

ESTE PRODUCTO

ESTE PRODUCTO

$$\rho_B = \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rho_B = tr_A[|\mu\rangle\langle\mu|] = \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 + \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_2 + \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 + \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_2 + \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\rho_B = tr_A[|\mu\rangle\langle\mu|] = tr_A\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \hline \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{array}\right) \right\}$$

b) $\rho_A = tr_B[|u\rangle\langle u|] = \sum_i (\mathbb{I}_A \otimes \langle i|_B)\, \rho_{AB}\, (\mathbb{I}_A \otimes |i\rangle_B)$

$$\mathbb{I} \otimes \langle 0| = \begin{bmatrix} 1\cdot(1\ 0) & 0\cdot(1\ 0) \\ 0\cdot(1\ 0) & 1\cdot(1\ 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

$$\mathbb{I} \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$\mathbb{I} \otimes \langle 1| = \begin{bmatrix} 1\cdot(0\ 1) & 0\cdot(0\ 1) \\ 0\cdot(0\ 1) & 1\cdot(0\ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

$$\mathbb{I} \otimes |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

$$\rho_A = tr_B[|u\rangle\langle u|] = \sum_i (\mathbb{I}_A \otimes \langle i|_B)\, \rho_{AB}\, (\mathbb{I}_A \otimes |i\rangle_B) = \mathbb{I}\otimes\langle 0|u\rangle\langle u|\mathbb{I}\otimes|0\rangle + \mathbb{I}\otimes\langle 1|u\rangle\langle u|\mathbb{I}\otimes|1\rangle$$

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4} \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}_{4\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 2} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4} \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_3 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_3 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_3 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_3 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}_{4\times 4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_3 \\ \mu_2\bar{\mu}_1 & \mu_2\bar{\mu}_3 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_3 \\ \mu_4\bar{\mu}_1 & \mu_4\bar{\mu}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_2 & \mu_1\bar{\mu}_4 \\ \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_3\bar{\mu}_2 & \mu_3\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_A = \begin{bmatrix} \mu_1\bar{\mu}_1 & \mu_1\bar{\mu}_3 \\ \mu_3\bar{\mu}_1 & \mu_3\bar{\mu}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_2\bar{\mu}_2 & \mu_2\bar{\mu}_4 \\ \mu_4\bar{\mu}_2 & \mu_4\bar{\mu}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\rho_A = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_3 \\ u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_4 \\ u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_4 \end{bmatrix} =$$

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\left[|u\rangle_{AB}\langle u|\right] = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 + u_2\bar{u}_4 \\ u_3\bar{u}_1 + u_4\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 + u_4\bar{u}_4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\left[|u\rangle\langle u|\right] = \mathrm{tr}_B\left\{\left(\begin{array}{cc|cc} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 & u_1\bar{u}_4 \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_3 & u_2\bar{u}_4 \\ \hline u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 & u_3\bar{u}_4 \\ u_4\bar{u}_1 & u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_3 & u_4\bar{u}_4 \end{array}\right)\right\}$$