Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Licenciatura en Física

Física computacional

2016-1

Actividad 9: Aproximación al cálculo del periodo del péndulo

Carolina Valenzuela Córdova

1 de Mayo de 2016

Índice

1. Descripción de la actividad

Para esta actividad, se nos solicitó realizar una demostración, basada en un artículo de péndulo en Wikipedia, en el cual se desarrollaba la integral que resolvimos en la actividad anterior. Para ser más precisos, consistió en demostrar que el periodo del péndulo obtenido a través de la integral obtenida anteriormente, se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\theta_0^2+\frac{11}{3072}\theta_0^4+\frac{173}{737280}\theta_0^6+\frac{22931}{1321205760}\theta_0^8+\frac{1319183}{951268147200}\theta_0^{1}0+...)$$

Así que con la ayuda de Maxima, utilizado como herramienta matemática, fue posible pasar de la integral anteriormente resuelta a esa expresión.
Además, se nos solicitó reproducir una gráfica sobre los errores relativos del periodo, la cual se encuentra anexa al artículo de Wikipedia propuesta por el Profesor.
A continuación se presenta el procedimiento respectivo a cada actividad.

2. Procedimiento

2.1. Gráfica de errores relativos

Para la construcción de esta gráfica fue necesario basarnos en una expresión que se menciona en las instrucciones para la actividad. Aquí se presenta el código que nos arrojó la gráfica:

```
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

#Parametrillos

g = 9.806
l = 1.00
n = 500
radianesagrad = 180.0/np.pi
epsilon = 0.001
```

```
#Valores de theta

theta0 = np.linspace(epsilon, np.pi-epsilon, n)

#Arreglillos

Integral = [0 for i in range(n)]
Integral0 = [0 for i in range(n)]
periodonnum = [0 for i in range(n)]
sine = [0 for i in range(n)]
e1 = [0 for i in range(n)]



#Periodo para angulillos pequeños

periodot = 2.0*(np.pi)*(np.sqrt(l/g))

#Error

L = 2
for i in range(L):
for j in range(0,n):

fac1 = float(math.factorial(2*(i)))
fac2 = float((2**(i)*math.factorial(i))**2)
sine[j] = np.sin(theta0[j]/2)**(2*(i))
Integral[j] = ((fac1/fac2)**2)*sine[j]
Integral0[j] = Integral0[j] + Integral[j]
periodonnum[j] = 2.0*(np.pi)*(np.sqrt(l/g)*Integral0[j])
e1[j] = (periodonnum[j]/periodot)-1


plot.plot(theta0, e1, 'r',label='T2')
plt.xlim(0,np.radians(180))
plt.ylabel("Error Relativo")
```

```
plt.title("Error relativo usando una serie de potencias")
plt.legend(loc='best')
plt.show()
plt.grid()
```

y la gráfica obtenida fue la siguiente:

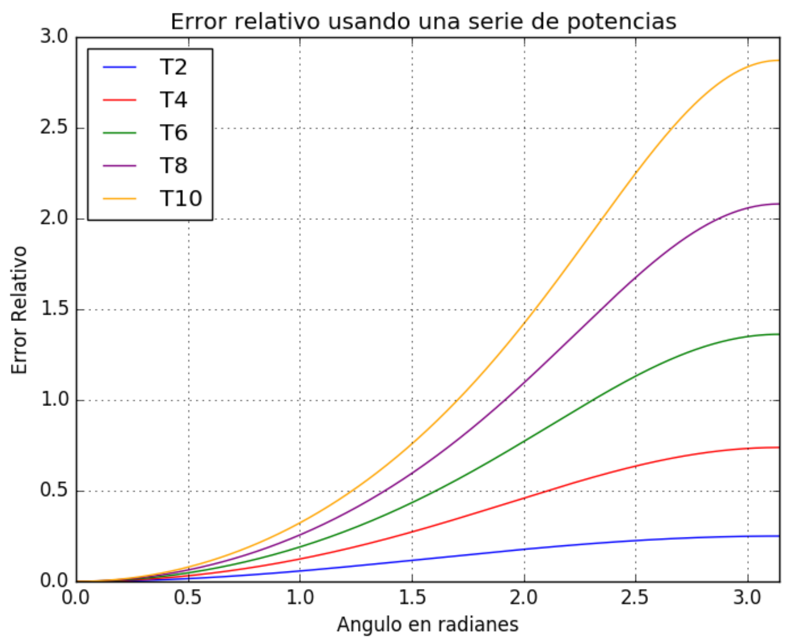

Figura 1: Gráfica de errores relativos

2.2. Demostración

- Definimos una función F que depende de un parámetro k:

```
/* Funcioncilla F que depende de un parametrillo k */

F1(k) := 1/sqrt(1-(k*sin(u))**2);
```

$$(\%o1)\mathrm{F1}\left(k\right) := \frac{1}{\sqrt{1-\left(k\sin\left(u\right)\right)^2}}$$

- Después realizamos una expansión a través de una serie de Taylor para aproximar:

```
/* Desarrollo en seriecilla de F por Taylor*/

taylor(1/sqrt(1-k^2*sin(u)^2),u,0,8);
```

$$(\%o2)/T/1+\frac{k^2\,u^2}{2}+\frac{\left(9\,k^4-4\,k^2\right)\,u^4}{24}+\frac{\left(225\,k^6-180\,k^4+16\,k^2\right)\,u^6}{720}+\frac{\left(11025\,k^8-12600\,k^6+3024\,k^4-64\,k^2\right)\,u^8}{40320}+...$$

- Definimos otra función, dada como una expansión similar a la obtenida en el paso anterior:

```
/* Definimos otra funcioncilla F2 como la expansion en serie anterior */

define(F2(k), %);
```

$$(\%o3)/T/\mathrm{F2}\left(k\right):=1+\frac{k^2\,u^2}{2}+\frac{\left(9\,k^4-4\,k^2\right)\,u^4}{24}+\frac{\left(225\,k^6-180\,k^4+16\,k^2\right)\,u^6}{720}+\frac{\left(11025\,k^8-12600\,k^6+3024\,k^4-64\,k^2\right)\,u^8}{40320}+...$$

- Definimos el seno del ángulo θ

```
/* Definimos al seno del angulillo theta  */

define(x(%theta), sin(%theta));
```

$$\mathrm{x}\left(\theta\right):=\sin\left(\theta\right)$$

- Integramos la segunda función propuesta de 0^o a 90^0

```
/* Integramos la funcioncilla F2(k) desde cero a 90 grados */

expand(integrate(K2(k),u,0,%pi/2));
```

$$(\%o5)\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(k\right)}{2}$$

- Sustituimos $\sin(\theta)$ en esta integral:

```
/* Sustituimos en la integralilla anterior el seno de theta */

subst(x(%theta/2), k, %);
```

$$\frac{\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2}$$

- Factorizamos $\pi/2$:

```
/* Factorizamos pi/2 de la expresioncilla anterior */

% *2/%pi;
```

$$(\%o7)\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

- Ahora definimos una función que solo dependa del ángulo θ:

```
/* Definimos ahora una funcioncilla F
 que depende solo del angulillo theta */

define(F(%theta),expand(%));
```

$$\mathrm{F}\left(\theta\right) := \mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

- Por último, definimos la función T del periodo del péndulo:

```
/* Finalmente definimos la funcioncilla del periodijillo */

define(T(%theta),(2*%pi)*sqrt(l/g)*(F(%theta)));
```

$$\mathrm{T}\left(\theta\right) := 2\,\pi\,\mathrm{K2}\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$