Actividad 6

Carolina Valenzuela Córdova

1 de Marzo de 2016

1. Descripción del fenómeno

Un péndulo simple es un modelo que utiliza herramientas matemáticas diseñadas para considerar un sistema aislado e ideal.
La ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo no es fácil de resolver ni tiene soluciones elementales, pero al idealizar el ambiente donde se encuentra el péndulo a estudiar podemos decir que el ángulo es muy pequeño, de ahí decimos que

$$\sin\theta \approx \theta$$

y entonces nuestra ecuación diferencial se modifica a

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

teniendo como solución

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

De igual manera, para el periodo obtenemos la expresión

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sin embargo, para ángulos mayores que el ángulo pequeño utilizado en las aproximaciones anteriores, se puede invertir la ecuación para la velocidad angular obtenida en el método de energía.

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

y después integrando para un ciclo completo:

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0)$$

, o dos veces para el medio ciclo

$$T = 2t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0)$$

, o cuatro veces un cuarto de ciclo

$$T = 4t(\theta_0 \to 0)$$

, lo que nos lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

Nótese que esta integral diverge a medida que θ_0 se acerca a la vertical

$$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty$$

así que en realidad el péndulo nunca podrá llegar a estar completamente vertical. Convencionalmente, un péndulo cercano a su máximo puede tomar un largo tiempo arbitrario para caer.

2. Actividad

Para esta actividad se solicitó que encontráramos una gráfica de error relativo $\frac{T}{T_0}$ similar a la figura 3 del artículo consultado Pendulum (mathematics) [1]. Esto lo pudimos realizar con la función scipy.integrate.quad de la biblioteca de funciones para inegrar de Scipy.
Fue necesario evaluar la integral

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

y lo hicimos a través de dicho comando, así como también generando un ciclo para iterar y obtener valores que nos permitieran hacer una gráfica semejante a la del artículo. También se nos solicitó demostrar que esta integral definida diverge a medida que el ángulo inicial tiende a π, tomando un tiempo infinito en llegar a π o moverse de π.

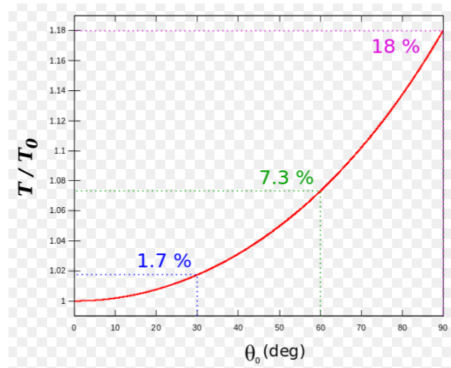

Figura 1: Gráfica 3 del artículo Pendulum (mathematics)[1]

2.1. Resultados

A continuación se presenta el código y la gráfica que se obtuvo tratando de reproducir la antes mencionada.

```
#Paquetirijillos
import numpy as np
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sp
import matplotlib as mpl


fig = plt.figure()
g = 9.8
# Vectorsillos
x=[]
Ts=[]
i = 0 # Contadorsillo

while (i<=90):
i=i+1
theta0 = (i*np.pi)/180
l = 1
```

```
f = lambda x: 1/np.sqrt
(np.cos(x) - np.cos(theta0))

#Integralijilla
F, erri = integrate.quad
(f,0,theta0)
T = 4 * np.sqrt(l/g) *
(1/np.sqrt(2)) * F

x.append(i)
Ts.append(T)
Ths = 2*np.pi*np.sqrt(l/g)
T = Ts/Ths
#Estúpuida gráfica hermosa
plt.xlabel('Angulo')
plt.ylabel('Error relativo')
plt.plot(T)
plt.show()
```

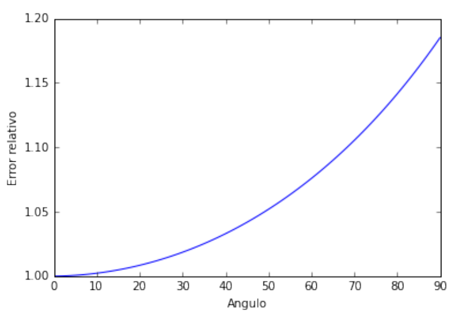

Figura 2: Gráfica obtenida en la Actividad 6

Para demostrar que la integral diverge de la manera antes mencionada, fue necesario únicamente graficar el periodo para ángulos arbitrarios T contra las variaciones del ángulo θ, obteniendo de esta manera la siguiente gráfica:

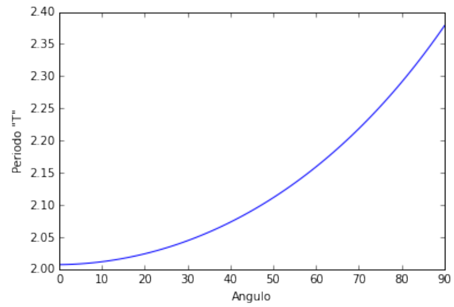

Figura 3: Observando la divergencia

Nótese que la gráfica nos muestra una divergencia a medida que θ va tendiendo a π.

3. Conclusión

Fue interesante aprender una manera mucho más eficiente y rápida de resolver integrales de forma numérica que en Física son necesarias para describir fenómenos muy comunes como el del péndulo.
Cabe destacar que hasta el momento solo habíamos sido capaces de resolver problemas de este modelo con la idealización de las circunstancias, sobre todo considerando solo ángulos pequeños. Por ello, este nuevo aprendizaje se considera como muy importante para resolver y describir modelos muy recurrentes en la Física.

Referencias

[1] Wikipedia, $https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum$