Solução do Desafio da Semana

Séries Temporais I - Data: 6 de novembro de 2025.

Nome: Caroline de Oliveira Costa

Matrícula: 2023101189

DESAFIO 4

Considere o processo $\{Y_t\}$ com a seguinte representação:

$$Y_t = X_t + Z_t, \tag{1}$$
$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad |\phi| < 1, \tag{2}$$

onde $\{Z_t\}$ é um processo de ruído branco com média 0 e variância σ_Z^2 e $\{W_t\}$ é um processo de ruído branco com média 0 e variância σ_W^2. Suponha que X_t e Z_s sejam não correlacionados para todo t e s.

O processo Y_t é estacionário de segunda ordem? Em caso afirmativo, calcule a sua função de autocorrelação.

Solução

1. Estacionariedade de X_t

O processo X_t definido em (2) é um modelo autorregressivo de ordem 1, ou AR(1):

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t.$$

Expandindo recursivamente:

$$X_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi W_{t-1} + W_t = \phi^3 X_{t-3} + \phi^2 W_{t-2} + \phi W_{t-1} + W_t.$$

Por indução:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}.$$

Essa soma converge se, e somente se, $|\phi| < 1$, pois $\phi^j \to 0$ quando $j \to \infty$. Logo, X_t é uma combinação linear convergente de ruídos brancos e, portanto, é **estacionário de segunda ordem**. Com isso, confirma-se que $E[X_t]$, $\mathrm{VAR}(X_t)$ e $\mathrm{COV}(X_t, X_{t-h})$ são constantes em torno do tempo.

2. Esperança de X_t

Tomando a esperança em (2):

$$E(X_t) = \phi E(X_{t-1}) + E(W_t).$$

Como $E(W_t) = 0$ e, sob estacionariedade, $E(X_t) = E(X_{t-1}) = \mu_X$:

$$\mu_X = \phi \mu_X \Rightarrow \mu_X(1-\phi) = 0 \Rightarrow \boxed{E(X_t) = 0.}$$

3. Variância de X_t

Aplicando $Var(X_t) = Var(\phi X_{t-1} + W_t)$ e usando a independência de X_{t-1} e W_t ($\text{COV}(X_{t-1}, W_t) = 0$):

$$Var(X_t) = \phi^2 Var(X_{t-1}) + Var(W_t).$$

Denotando $Var(X_t) = \sigma_X^2$ (constante sob estacionariedade):

$$\sigma_X^2 = \phi^2 \sigma_X^2 + \sigma_W^2 \Rightarrow \sigma_X^2(1-\phi^2) = \sigma_W^2 \Rightarrow \boxed{Var(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.}$$

4. Função de autocovariância de X_t

Para calcular:

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E[X_t X_{t-h}] - E(X_t)E(X_{t-h}).$$

Como $E(X_t) = 0$, segue $\gamma_X(h) = E[X_t X_{t-h}]$. Substituindo as séries:

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= E\left[\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-h-k}\Big)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \phi^j \phi^k \, E\big[W_{t-j} W_{t-h-k}\big]. \end{aligned}$$

Como $\{W_t\}$ é ruído branco com variância σ_W^2, vale

$$E[W_{t-j} W_{t-h-k}] = \begin{cases} \sigma_W^2, & \text{se } t-j = t-h-k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A condição $t - j = t - h - k$ é equivalente a $k = j - h$. Portanto, na dupla soma só há contribuição quando $k = j - h$ e, além disso, é necessário que $k \geq 0$ e $j \geq 0$.

Considere primeiro $h \geq 0$. A igualdade $k = j - h \geq 0$ implica $j \geq h$. Assim:

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \sum_{j=h}^{\infty} \phi^j \phi^{j-h} \, \sigma_W^2 = \sigma_W^2 \phi^h \sum_{j=h}^{\infty} \phi^{2(j-h)} \\ &= \sigma_W^2 \phi^h \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{2m} \qquad \text{(fazendo } m = j-h\text{)} \\ &= \sigma_W^2 \phi^h \cdot \frac{1}{1-\phi^2}, \end{aligned}$$

onde usa-se a soma geométrica $\sum_{m=0}^{\infty} \phi^{2m} = 1/(1-\phi^2)$, válida pois $|\phi| < 1$.

Para $h < 0$ usa-se a simetria da autocovariância $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$. Portanto, para todo inteiro h tem-se:

$$\boxed{\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\, \phi^{|h|}, \qquad |\phi| < 1.}$$

5. Componente Z_t

Como $\{Z_t\}$ é ruído branco:

$$E(Z_t) = 0, \quad Var(Z_t) = \sigma_Z^2, \quad Cov(Z_t, Z_{t-h}) = \begin{cases} \sigma_Z^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

6. Esperança e variância de Y_t

Da definição $Y_t = X_t + Z_t$:

$$E(Y_t) = E(X_t) + E(Z_t) = 0,$$

e, como X_t e Z_t são não correlacionados:

$$Var(Y_t) = Var(X_t) + Var(Z_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2.$$

Portanto:

$$\boxed{E(Y_t) = 0, \qquad Var(Y_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2.}$$

7. Função de autocovariância e autocorrelação de Y_t

$$\gamma_Y(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h}) = Cov(X_t + Z_t, X_{t-h} + Z_{t-h}).$$

Como X_t e Z_t são não correlacionados:

$$\gamma_Y(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) + Cov(Z_t, Z_{t-h}).$$

Logo:

$$\boxed{\gamma_Y(h) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2, & h = 0, \\ \dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|h|}, & h \neq 0. \end{cases}}$$

A função de autocorrelação é:

$$\rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \dfrac{\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}}{\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2}, & h \neq 0. \end{cases}$$

8. Tipo de estacionariedade de Y_t

O processo Y_t é **estacionário de segunda ordem**, pois a média, variância e autocovariância são constantes no tempo. Entretanto, ele **não é necessariamente estacionário forte**, pois isso requer que a distribuição conjunta de (Y_t, Y_{t-h}) seja invariante no tempo, o que só ocorre se os ruídos W_t e Z_t forem gaussianos.

9. Conclusão

$$
\boxed{
\begin{aligned}
E(Y_t) &= 0, \\
Var(Y_t) &= \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2, \\
\gamma_Y(h) &= \begin{cases} \dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2, & h = 0, \\ \dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}, & h \neq 0, \end{cases} \\
\rho_Y(h) &= \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \dfrac{\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}}{\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2}, & h \neq 0, \end{cases} \\
& Y_t \text{ é estacionário de segunda ordem, mas não necessariamente forte.}
\end{aligned}
}
$$