Solução do Desafio da Semana
Séries Temporais I - Data: 5 de novembro de 2025.

Nome: Caroline de Oliveira Costa

Matrícula: 2023101189

DESAFIO 3

Considere o processo $\{X_t\}$ com a seguinte representação (com prob. 1):

$$X_1 = W_1; \quad X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad t = 2, 3, \ldots,$$

onde $\{W_t\}$ é um processo de ruído branco com média 0 e variância σ_W^2 e $|\phi| < 1$.

(i) O processo $\{X_t\}$ é estacionário? Justifique;

(ii) Calcule a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}$;

(iii) Calcule o valor limite de $\gamma_X(0)$ e $\rho_X(h)$, $h \geq 0$, quando $t \to \infty$. Comente;

(iv) Aplique um fator de correção na representação do processo em $t = 1$, i.e., considere

$$X_1 = \frac{W_1}{\sqrt{1 - \phi^2}}.$$

Repita os itens *i* e *ii*.

Solução

—

(i) O processo $\{X_t\}$ é estacionário? Justifique.
Sabemos que:

$$X_1 = W_1, \quad X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad t = 2, 3, \ldots$$

Expandindo recursivamente:

$$X_2 = \phi X_1 + W_2 = \phi W_1 + W_2,$$
$$X_3 = \phi X_2 + W_3 = \phi(\phi W_1 + W_2) + W_3 = \phi^2 W_1 + \phi W_2 + W_3.$$

De forma geral:

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j W_{t-j}.$$

Como $E[W_t] = 0$, temos:

$$E[X_t] = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j E[W_{t-j}] = 0, \quad \forall t.$$

A variância é:

$$Var(X_t) = E[X_t^2] = \sum_{j=0}^{t-1} (\phi^j)^2 Var(W_{t-j}) = \sigma_W^2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j}.$$

A soma é uma série geométrica finita:

$$Var(X_t) = \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}.$$

Como $Var(X_t)$ depende de t, o processo **não é estacionário**. Entretanto, se $|\phi| < 1$, então:

$$\lim_{t\to\infty} Var(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2},$$

mostrando que, assintoticamente, o processo tende a uma forma estacionária.

—

(ii) Função de autocorrelação do processo $\{X_t\}$

Pela definição,

$$\gamma_X(h) = Cov(X_{t+h}, X_t), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Usando a relação recursiva $X_{t+h} = \phi X_{t+h-1} + W_{t+h}$:

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= Cov(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t)\\ &= \phi\, Cov(X_{t+h-1}, X_t) + Cov(W_{t+h}, X_t).\end{aligned}$$

Como W_{t+h} é independente de X_t, o segundo termo é nulo, e obtemos:

$$\gamma_X(h) = \phi\gamma_X(h-1).$$

Aplicando essa relação recursivamente:

$$\gamma_X(h) = \phi^h\gamma_X(0), \quad h \geq 0.$$

Sabemos que $\gamma_X(0) = Var(X_t) = \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}$, logo:

$$\boxed{\gamma_X(h) = \phi^h \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}.}$$

A função de autocorrelação é dada por:

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\sqrt{Var(X_{t+h})Var(X_t)}} = \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}}.$$

Note que $\rho_X(h)$ depende de t, logo o processo não é estacionário em sentido estrito.

—

(iii) Limite de $\gamma_X(0)$ e $\rho_X(h)$ quando $t \to \infty$

Como $|\phi| < 1$:

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_X(0) = \lim_{t\to\infty} \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.$$

Substituindo este valor na expressão da autocovariância:

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_X(h) = \phi^h \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.$$

E para a autocorrelação:

$$\lim_{t\to\infty} \rho_X(h) = \lim_{t\to\infty} \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}} = \phi^h.$$

Comentário: Embora o processo inicial não seja estacionário, o efeito da condição inicial $X_1 = W_1$ desaparece à medida que t cresce, e o processo converge para um processo estacionário com variância constante e autocorrelação que depende apenas de h.

—

(iv) Aplicando o fator de correção em $t = 1$
Agora, considere a nova condição inicial:

$$X_1 = \frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}}.$$

Expandindo recursivamente:

$$X_t = \phi^{t-1}\frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + \sum_{j=0}^{t-2}\phi^j W_{t-j}.$$

Calculando a média:

$$E[X_t] = \frac{\phi^{t-1}}{\sqrt{1-\phi^2}}E[W_1] + \sum_{j=0}^{t-2}\phi^j E[W_{t-j}] = 0.$$

Agora, para a variância:

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= Var\left(\phi^{t-1}\frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + \sum_{j=0}^{t-2}\phi^j W_{t-j}\right) \\
&= \frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2}Var(W_1) + \sum_{j=0}^{t-2}\phi^{2j}Var(W_{t-j}) \\
&= \sigma_W^2\left(\frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} + \sum_{j=0}^{t-2}\phi^{2j}\right).
\end{aligned}$$

Resolvendo a soma geométrica:

$$\sum_{j=0}^{t-2}\phi^{2j} = \frac{1-\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2},$$

logo:

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= \sigma_W^2\left(\frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} + \frac{1-\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2}\right) \\
&= \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $Var(X_t)$ é constante, e o processo é **estacionário**.

—

Função de autocovariância e autocorrelação para o processo corrigido
Como antes,

$$\gamma_X(h) = \phi^h\gamma_X(0), \quad h \geq 0,$$

e agora:

$$\gamma_X(0) = Var(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.$$

Logo:

$$\boxed{\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|h|}.}$$

E a função de autocorrelação:

$$\boxed{\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \phi^{|h|}.}$$

—

Conclusão geral

- Sem correção ($X_1 = W_1$): o processo não é estacionário, mas tende à estacionariedade conforme $t \to \infty$.
- Com correção ($X_1 = \frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}}$): o processo é estacionário desde o início, com

$$Var(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}, \quad \gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}, \quad \rho_X(h) = \phi^{|h|}.$$