Estruturas de Dados Clássicas – Grafos – Parte 1

Prof. Bárbara Quintela

barbaraquintela@pucminas.cesjf.br

CES/JF
Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora

Introdução

- Muitas aplicações necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos
- Os relacionamentos podem ser usados para responder questões como
  - Existe caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual a menor distância entre um objeto e outro?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?

Introdução

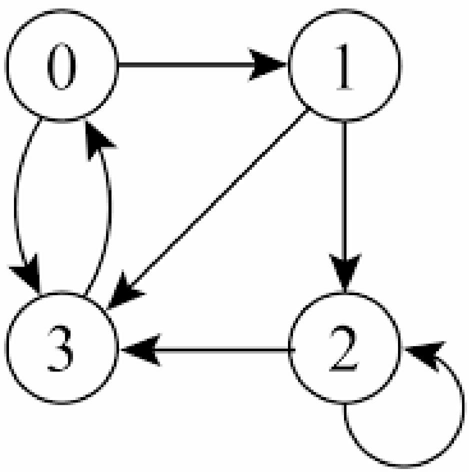
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações
- Problemas práticos que podem ser resolvidos:
  - Navegação na web;
  - Matching (casamento) entre pessoas e posições em universidades e empresas;
  - Saber qual o caminho mais curto em um planejamento para visitar região turística
  - Etc.

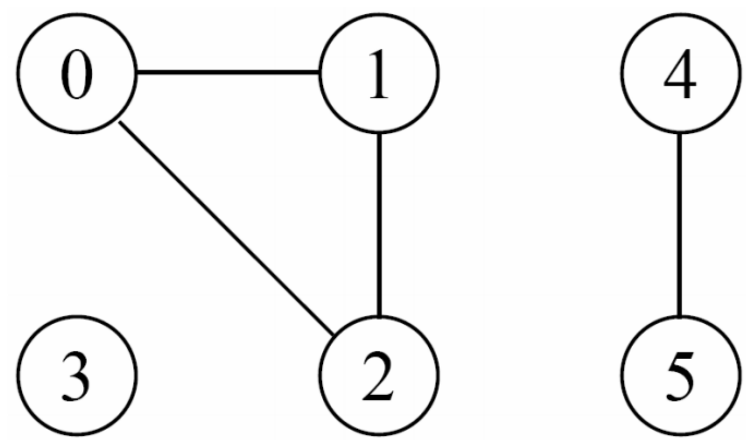
Definições Básicas

- **Grafo** – constituído de um conjunto de vértices e um conjunto de arestas conectando pares de vértices
- **Vértice** – objeto simples que pode ter nome e outros atributos
- **Grafo direcionado** – é um par (V, A) em que V é um conjunto finito de vertices e A é um conjunto de arestas com relação binária em V. Pode ter arestas de um vértice para ele mesmo (*self-loops*)
- **Grafo não-direcionado** – par (V, A) em que o conjunto de arestas é constituído de pares de vértices não ordenados. Não permite *self-loops*

Definições Básicas

Figura grafo direcionado, não direcionado





- Direcionado: V = {0,1,2,3,4,5}, A = {(0,1),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,0),(5,2)}
- Não direcionado: V = {0,1,2,3,4,5}, A = {(0,1),(0,2),(1,2),(4,5)}

Definições Básicas

Adjacência

- Se (*u*,*v*) é uma aresta no grafo G = (V,A)
- O vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*

- Quando o grafo é não direcionado a relação de adjacência é simétrica
- Ex: vértices 0 e 1 no grafo direcionado
  - 1 é adjacente a 0
  - 0 não é adjacente a 1

Definições Básicas

Grau de vértice:

- Em grafo não direcionado é o número de arestas que incidem nele
  - Ex: vértice 1 tem grau 2
  - Obs: Vertice 3 é dito **isolado** ou **não conectado**
- Em grafo direcionado o grau do vértice corresponde ao numero de arestas que **sai** dele mais o número de arestas que **chega**
  - Ex: vertice 2, chegam 2 e sai 2, grau 4

Definições Básicas

- Caminho → É uma sequência de vértices

  Definição:

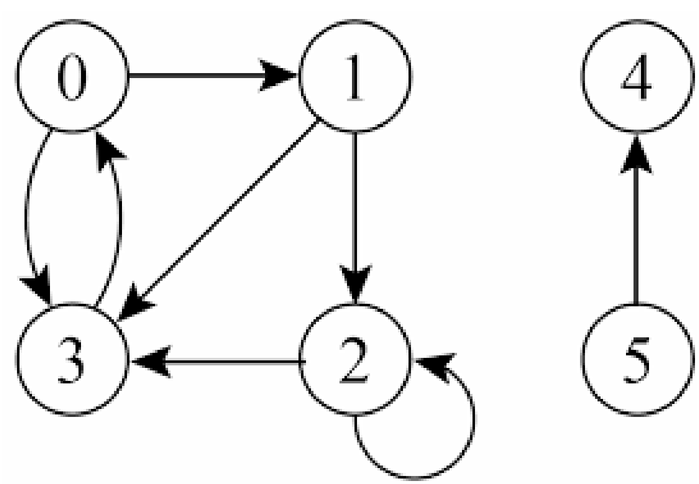
- **Caminho** de **comprimento** *k* de um vértice *x* a um vértice *y* em um graf G = (V,A) é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$ e (v_{i-1},v_i) pertencem a A para i = 1, 2, …, k.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele

Definições Básicas

- Se existe caminho c de x a y então y é alcançável a partir de x via c
- Um caminho é simples se todos os vértices são distintos

  Ex: caminho (0,1,2,3) é simples comprimento 3

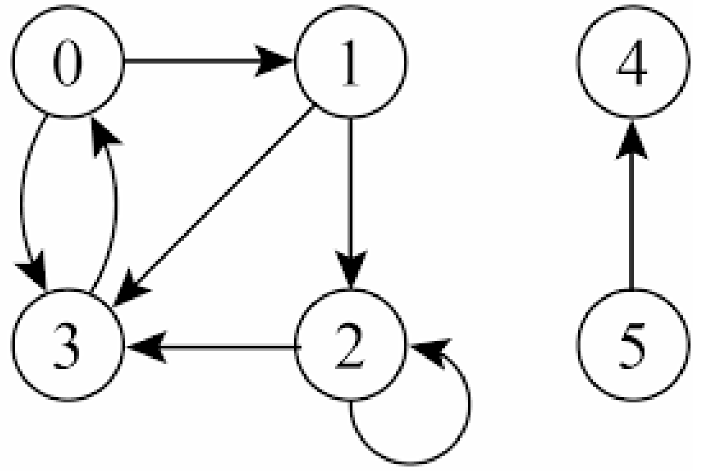
  caminho (1,3,0,3) não é simples



Definições Básicas

- Em um grafo direcionado, um caminho forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e contém pelo menos uma aresta
- Ciclo simples → se vértices são distintos
  - Ex: self-loop é um ciclo de tamanho 1

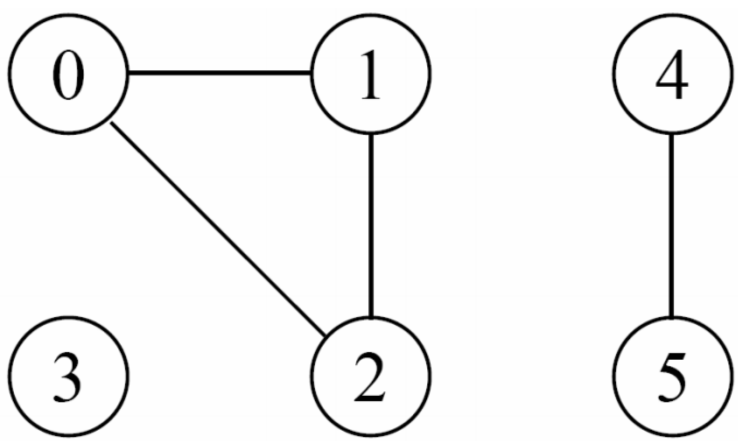
Caminho (0,1,2,3,0) forma um ciclo



Definições Básicas

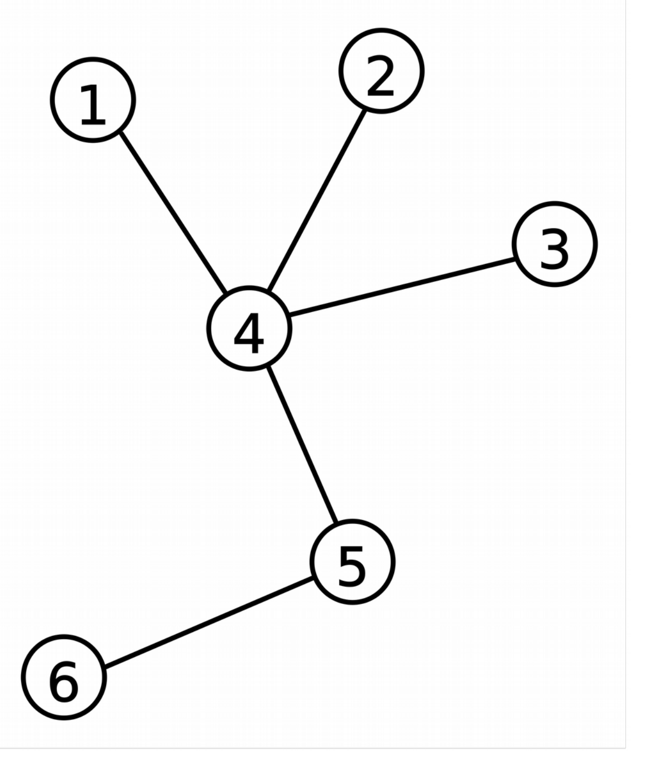
- Em um grafo não direcionado, um caminho forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e contém pelo menos três arestas
- Ciclo simples → se vértices são distintos

  Ex: caminho (0,1,2,0) é um ciclo



Definições Básicas

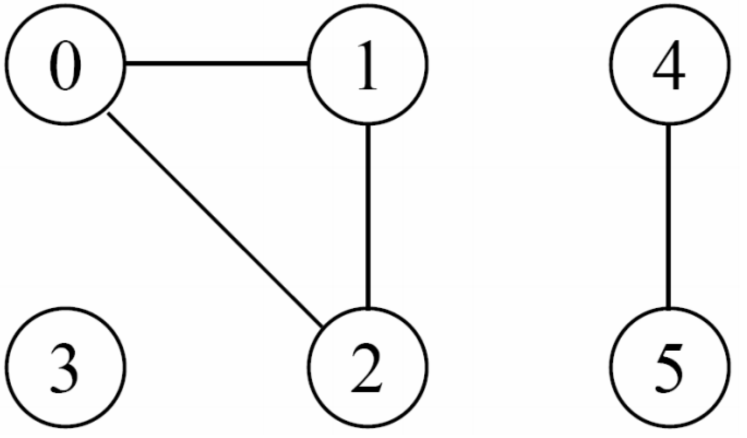
- Grafo **acíclico** - não contém ciclos
- Ex: árvores são grafos acíclicos



Definições Básicas - Conectividade

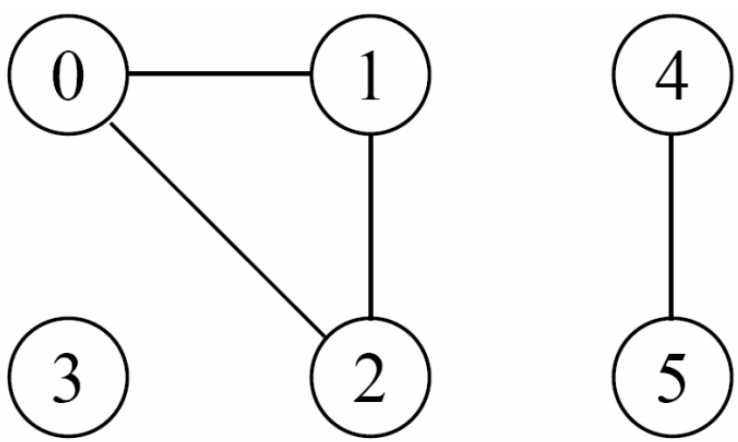
- Um grafo não direcionado é **conectado** se cada par de vértices está conectado por um caminho
- Componentes conectados são conjuntos de vértices sob a relação “é alcançável a partir de”
  - Ex: o grafo abaixo tem três componentes

    {0,1,2},{4,5} e {3}



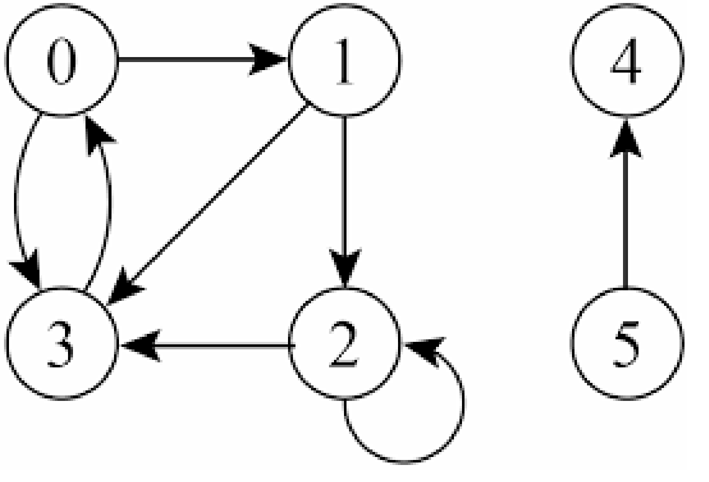
Definições Básicas - Conectividade

- Um grafo não direcionado é **conectado** se ele tem exatamente um componente conectado
- Cada vértice é alcançável a partir de qualquer outro vértice



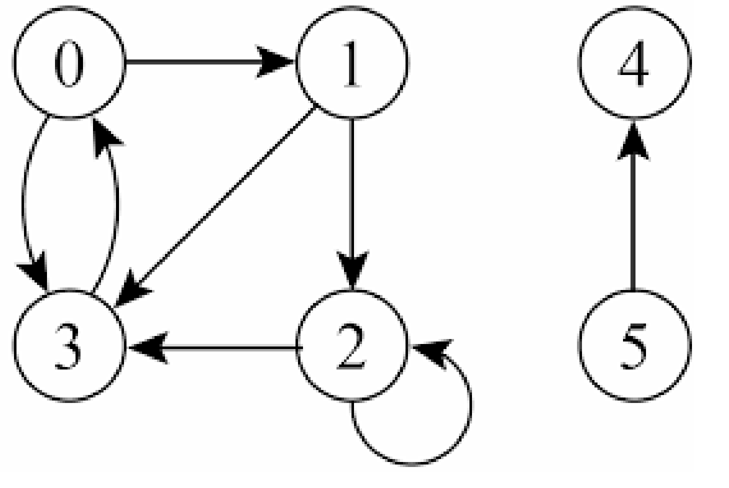
Definições Básicas - Conectividade

- Um grafo direcionado é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro
- Componentes fortemente conectados de um grafo direcionado são os conjuntos de vértices sob a relação “são mutuamente alcançáveis”



Definições Básicas - Conectividade

- Ex: {0,1,2,3}, {4} e {5} são componentes fortemente conectados
- {4,5} não é pois vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4



- Um grafo direcionado fortemente conectado tem apenas um componente fortemente conectado

O Tipo Abstrato de Dados Grafo

- Conjunto de operações associado a uma estrutura de dados Operações comuns:
  - GVazio(Grafo) : cria grafo vazio
  - InsereAresta(V1,V2,Peso,Grafo): insere uma aresta no grafo
  - ExisteAresta(V1,V2,Grafo): retorna verdadeiro se aresta (V1,V2) está presente
  - RetiraAresta(V1,V2,Peso,Grafo): retira aresta do grafo
  - LiberaGrafo(Grafo): libera espaço ocupado
  - ImprimeGrafo(Grafo): Imprime um grafo

O Tipo Abstrato de Dados Grafo

- Outras operações frequentes para obter lista de vertices adjacentes independente da representação:
  - ListaAdjVazia(v, Grafo): retorna verdadeiro se lista de adjacentes de v for vazia
  - PrimeiroListaAdj(v,Grafo): retorna endereço do primeiro vertice na lista de adjacentes
  - ProxAdj(v,Grafo,u,peso,aux,FimListaAdj) : retorna vertice u apontado por aux da lista de adjacentes de v, bem como o peso relacionado a aresta. Ao retornar, aux aponta para o próximo vertice da lista e FimListaAdj retorna verdadeiro se o final da lista foi encontrado.

O Tipo Abstrato de Dados Grafo

- Existem duas representações usuais para grafos:
  - **Matrizes** de adjacências
    - Usada para descobrir rapidamente se existe arco conectando dois vértices
    - Usada quando o grafo é denso ($|A| \sim |V|^2$)
  - **Listas** de adjacências
    - Muito utilizada pois oferece representação mais compacta de grafos esparsos ($|A| << |V|^2$)

Matrizes de adjacência

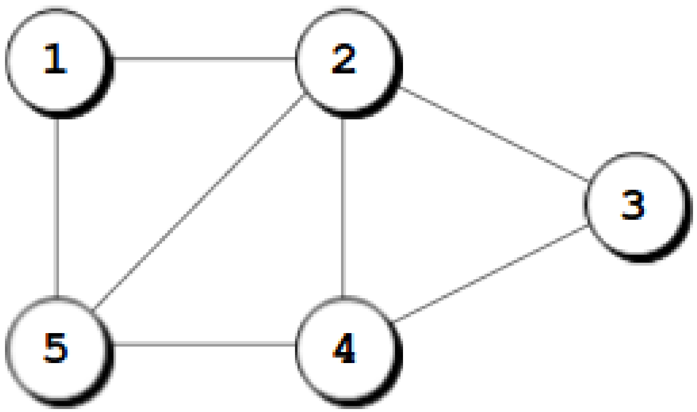
- A matriz de adjacência de um grafo G = (V,A) contendo n vértices é uma matriz de mxn de bits em que A[i,j] é 1 (ou verdadeiro) se e somente se existe um arco do vértice i para o vértice j
- Para grafos pontderados A[i,j] contém o peso associado com a aresta (nesse caso a matriz não é de bits)
- Se não existe aresta de i para j usa valor que não possa ser usado como rótulo ou peso

  Ex: 0 ou branco

Matrizes de adjacência

- Grafo não direcionado → elementos da matriz são simétricos (Adj[i][j] = Adj[j][i])
- Para economizar memória pode armazenar apenas triangulo superior ou inferior

Ex: Adj = vetor [5][5] de inteiros

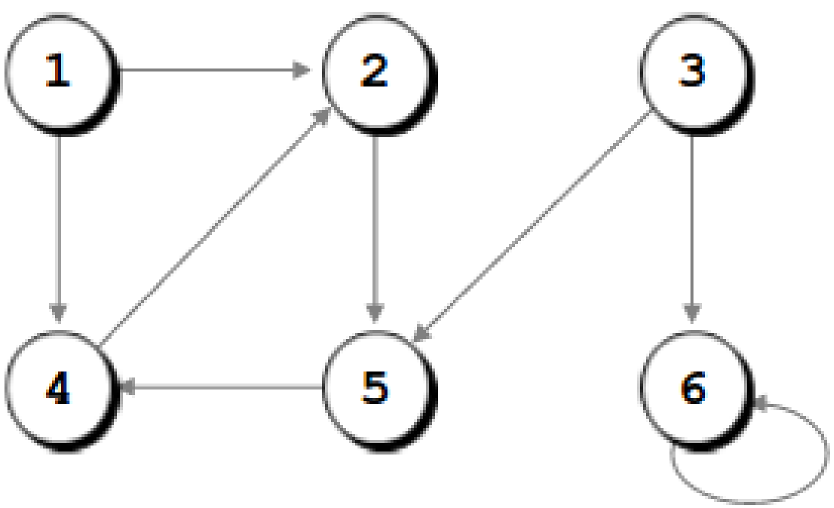


	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Matrizes de adjacência

- Grafo direcionado → linhas representam origem e colunas o destino

  Ex: Adj = vetor [6][6] de inteiros



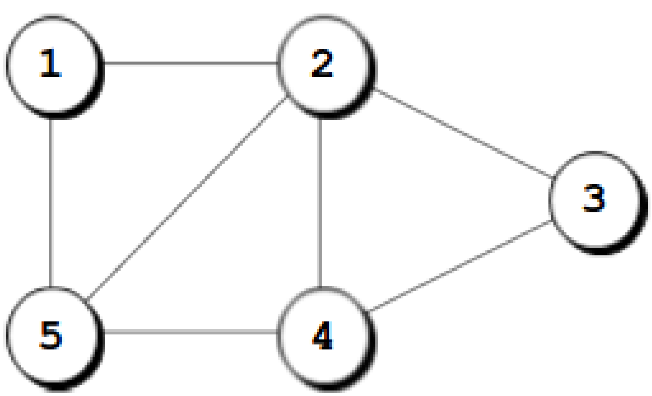
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

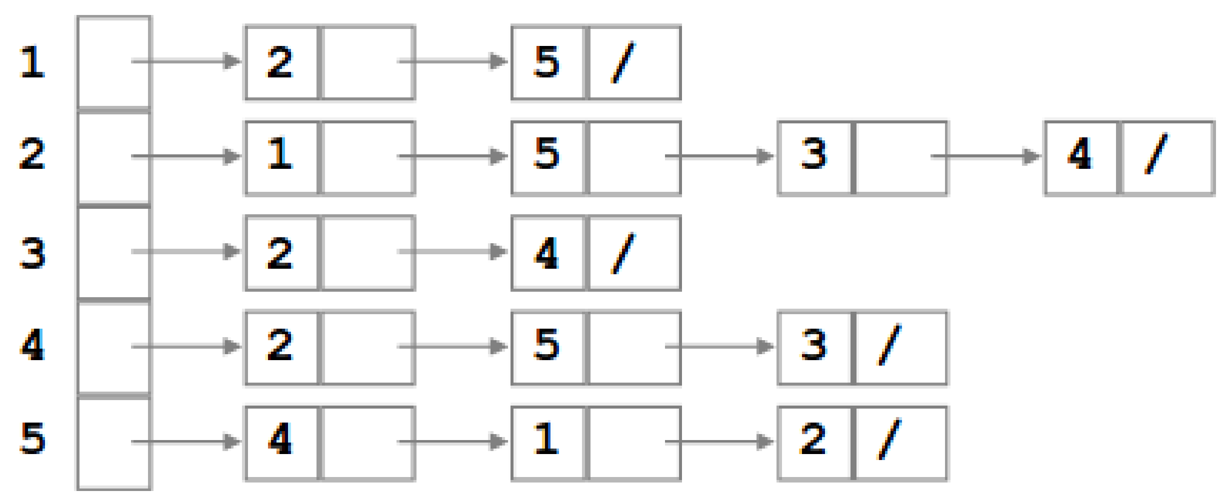
Matrizes de adjacência

- Requer conhecimento previo do numero de vértices
- Mesmo que a matriz seja esparsa deve separar espaço para toda possível aresta entre dois vértices (para n vértices precisa de n^2 alocações)
- Alternativa → lista ligada → só aloca espaço necessário

Listas de adjacência

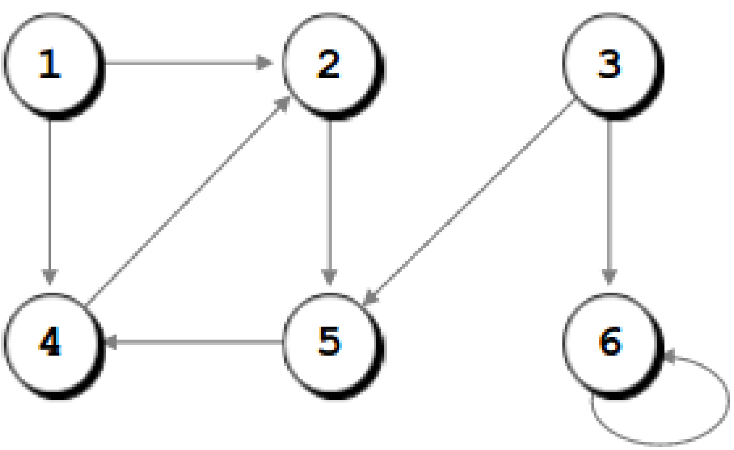
- Vetor de N listas encadeadas, uma para cada vértice
- Para cada vértice u a lista de adjacências Adj[u] contém todos os vértices v para os quais existe uma aresta (u,v)
  - Ex: Grafo não direcionado (implementação mista, vetor e lista ligada)

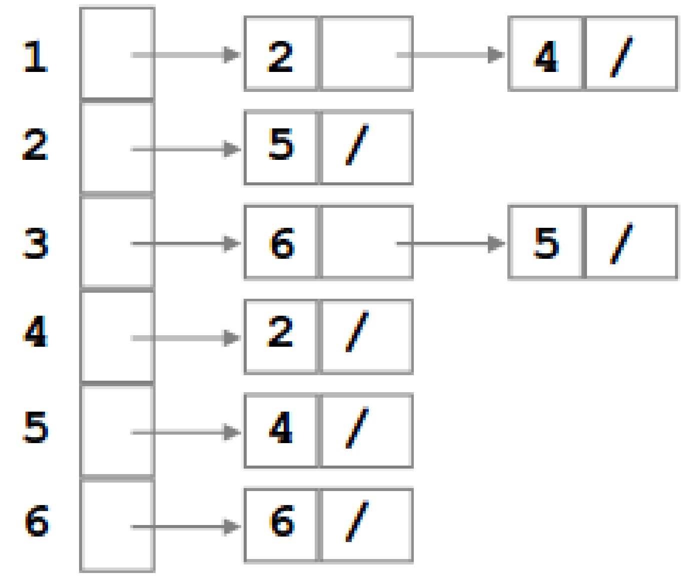




Listas de adjacência

- Ex: Grafo direcionado (implementação mista, vetor e lista ligada)





Exercícios

Resolva os exercícios abaixo para cada uma das estruturas de dados (matriz de adjacências e listas de adjacência) descritas acima:

- Escreva uma função grauEntradaGrafo() que calcule o grau de entrada de um vértice v de um digrafo G.
- Escreva uma função grauSaidaGrafo() que calcule o grau de saída de v.

Estruturas de Dados Clássicas – Grafos

Prof. Bárbara Quintela

barbaraquintela@pucminas.cesjf.br

CES/JF
Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora