Null space란?

e.g.

A	x	b
1 5 3	[	=
2 6 -1	]	
2 by 3	3 by 1	= 2 by 1

- ➔ Whole space(row vector): 3차원

  Spanning 가능한 총 공간을 row space: 여기서는 2차원이 최대

  그 중 출력값에 영향 x -> null space (row space의 수직 쪽에 위치하는 직선 /)

수학적으로는

Null space

$Ax = 0$ 이를 가능케 하는 x

응용적, 실용적

출력 영향 x, task 자체의 output 영향 x -> null space

- ➔ Null space를 늘리면 다른 쓸데없는 action을 할 수 있음

고유벡터(eigenvector)

반드시 이야기를 하는 형식으로 수학 습득

행렬 A가 있을 때,

2 by 2

1 2

5 6

열 벡터 (1,2)/ (5,6)를 만들고 이를 곱해지는 값이 x(b,c)

X가 이동하면

원점으로부터 직선 상에 있는 모든 벡터를 구하라! -> eigen 벡터

$Av = \lambda v$

(given A에 대해서 어떤 v(x, vector)를 곱했을 때(transformation), 장소 λ(상수) x v 상수배이다)

원점 – v – Av (같은 eigenvector 선상에 놓여 있음)

Ratio

V = eigenvector라고 할 때, 그 때의 ratio?

이를 만족하는 λ가 eigenvalue

e.g.

모든 사람들의 국어, 영어, 수학, 과학 점수들을 매긴다(85명 기준)

이를 graph 그린다 (일단, X축 수학, Y축 영어)

<u>한점</u> 당 한 사람의 점수라고 볼 수 있음(이것이 벡터)

4차원의 공간 (국어, 영어, 수학, 과학)

4차원의 벡터(점)이 되어버림

- ➔ 85개의 점이 됨

이 점들이 일정한 분포를 이루고 있다면, (2개가 같이 간다) 국어 x축, 영어 y축일 때

/ 이 점들이 분산되어 있다면 (같이 가는 느낌이 덜함)

- ➔ 같이 가는 느낌 -> 상관관계(Correlation)

상관관계 (r)

-1<= 0 <= 1

0일 때 가장 상관관계 낮고, 극과 극일 때 상관관계 높음

원의 형태에 가깝 -> r =0

선의 형태 -> 상관계수 높다

!?!?!

선형대수의 사용방법

e.g. 국어, 영어의 값이 총 85개

국어 벡터 1개, 영어 벡터 1개 /

85차원을 그려서 한 점을 찍고(한 차원: 한 사람)

국어, 영어, 원점으로 3각형 -> 3점이 찍힘

이때, 각도값? 수학이 또 존재했을 때 각도값?

Cosθ = r(상관계수)

cos90 = 0 / 아예 correlation 이 없을 때 -> 2개의 사건 관련 x / 사건들이 orthogonal하다

cos0 = 1 / 두개의 벡터가 만든 선이 붙어있는 것 -> 2개의 사건이 함께 붙어있는 거

2개의 사건 관계 밀접 -> 일직선에 가깝

- ⇨ 이번 한 학기에서 가장 중요한 개념

각도값?

Inner product (dot product)

2 vector 가 있을 때, 차원이 몇 차원이던간에 /

A vector, b vector의 inner product는

[1 2 3]

[4 5 6] / 3차원 공간에서 (삼각형 만듦 원점이랑 2 vector해서 -> 수직, 직각 내려버리기?)

(a의 길이)x cosθ x (b의 길이) /

= [1x4 + 2x5 + 3x6] = 32 / 둘끼리 곱해서 안쪽에서 더해버린다

a.b = 32

몇 차원이더라도 상관 x

2 vector가 있음

원점(0,0,0,…) 중심으로 a vec, b vec 있음

➔ 삼각형 형성(2차원의 형태)

Inner product를 한다

a = [1 2 3] 1 by 3

b = [2 4 7] 1 by 3

a x b = 곱하기 안됨

How?

1. B를 3 by 1로 만들기 (transpose)

   1 2 3 x 2

   4

   7

⇨ 2 + 8 + 21 = 31 (1 by 1 행렬 탄생) / inner product, a*b (무조건 1 by 1 matrix 나옴)

2. A를 3 by 1로 만들기

   1 x 2 4 7

   2

   3

⇨ 2 4 7

   4 8 14

   6 12 21

   2 by 3 형태의 행렬 / outer product

e.g.

a = 1 2 3

b = 2 4 7

두 vec의 inner product의 기하학적 interpretation?

삼각형 oab = 선분 ob의 수직(90도)인 직선을 점a에서 내린다

수직 직선을 aH라고 가정하면

oH x ob 가 inner project이다

ob에다가 a가 project되었던 길이를 구하는 것

(a의 길이) ㅣaㅣ x cosθ x ㅣbㅣ = a*b

그렇다면, Cos의 각도를 어떻게 알 수 있는가?

Cosθ = a*b / ㅣaㅣ x ㅣbㅣ

Inner product a*b = 31

a의 길이 = 원점에서 (1, 2, 3) 까지의 길이 3차원 선상에서, 루트 1제곱 + 2제곱 + 3제곱

b의 길이 = 원점에서 (2,4,7) 까지의 길이, 루트 2제곱 + 7제곱 + 4제곱

Cosθ -> 역으로 계산기 넣으면 구할 수 있음

- ⇨ 이는 correlation r(상관계수)와 매우 유사

  e.g. 원점을 기준으로 a vec, b vec 90도로 수직이면 theta = 90

  Cos90 = 0 (관계 x)

  기하적으로 a를 b쪽으로 project시키면 0이기 때문에 결국 값은 0이 나올 수밖에 없음

A = [90 60 50 30]

B = [20 90 50 80]

이 때, 4차원 상에서 a vec, b vec를 점을 찍었을 때, 각도를 구한 후

이 cosθ을 인공지능에서 Cosine similarity 라고 부름

(얼마나 두 벡터인 A, B가 유사한가?)

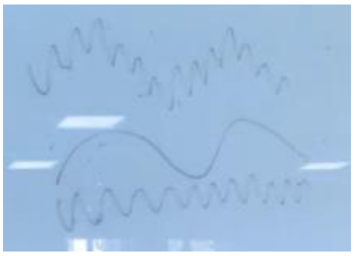
이거 구하는 거 백퍼 시험에 나온다

통계 쪽의 correlation r(상관계수)와 유사하다고 생각하면 됨

Wave를 지금까지 다뤄옴(파동)

특정 wave가 존재

여기에 어떤 성분들 2개가 보이는가?



예시 -> 가장 처음 wave

/ 이 속에는 100hz가 하나 있고, 1000hz 하나 있는데, 각각의 그려진 진폭만큼 존재한다

1번째 특징 -> 2번째 wave (sine wave) -> 100hz

2번째 특징 -> 마지막 wave (sine wave) -> 1000hz

이것을 어떻게 수학적으로 뽑을 수 있는가? -> <u>inner product 이용</u>

Wave는 모두 수치, 점으로 찍힐 수 있음

숫자 value들이 100개가 존재한다고 가정하자

1번째 특징대로 벡터(점) 100개를 찍고 (100개의 숫자) r100(100차원)

2번째 특징대로 벡터(점) 100개를 찍음 (100개의 숫자) r100(100차원)

1번째 특징 x 원래 wave = inner product 도출

2번째 특징 x 원래 wave = inner product 따른 것 도출

- ➔ 둘을 곱하면 됨

차곡차곡 하나씩 100hz, 200hz … 10000hz까지(똑 같은 간격으로) sine wave를 나타내고

inner product 해버리면 됨

Phasor 를 바꿔가면서 만들 수 있음

Spectrogram -> 진하고 약하고 되어 있는 부분

-> inner product 값의 진하고 약하고에 따라서 다름

어떻게 해서 저 방법이 먹히는가?

e.g. wave가 있고, 다 벡터값(점) 100개로 치환되었다고 하자(a = 맨 위 wave)

똑 같은 wave 1개(b = 중간 wave)를 그리고 둘을 inner product하면 -> a*b

그리고 c wave가 있는데 이게 b보다 2배 더 빠르다고 생각하면 됨 -> a*c

어떤 차이?

a*b = a가 올라갈 때 b도 올라가고 -> 그러므로 a*b 값은 크다(1)

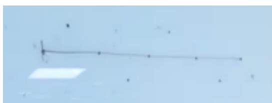
a*c = a가 올라갈 때 c는 올라갈 때도 있고 아니기도 하고(불일치)

-> a*c 값은 위 값보다는 작다(1 미만)

아무리 복잡한 wave가 있더라도 Inner Producting하면 같은 성분, 다른 성분 금방 찾을 수 있음

(같은 성분 -> 값 높고, 다른 성분 -> 값 낮다)

e.g. Sine wave 그려서



0 1 0 -1 0 1 0 -1 0

(이런 식으로 점 찍혀 있음) -> 간단한 형식으로

이것과

0 1 0 -1 0 1 0 -1 0

둘의 Inner product 값?

0x0 + 1x1 + 0x0 + (-1)x(-1) + 0x0 + 1x1 + 0x0 + (-1)x(-1) + 0x0 = 4

만약에, 다른 wave를 그리면 값이 더 작게 나올 것이다

이것의 맹점이 존재

E.g.

1번째 wave -> sine wave (a vector)

2번째 wave -> cos wave (90도만큼 이동시킴) / (b vector)

Inner product?

0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0

(frequency는 완전 똑같은데, inner product는 0이라고 하네?)

- ➔ 살짝 옆으로 가니까 제 기능을 하지 x

Inner product가 0이 되려면 90도 나와야 함

9차원 상황에서의 a vec, b vec가 90도 / radient 에서의 90도 차이가 어떻게 같을까?

Phasor 차이가 0도이면, a와 b vector 역시도 일치함

Phasor에 민감하게 작용 x -> probing 하는 phasor (sine, cos phasor 를 쓰지 x)

/ phasor shift에 매우 민감하기 때문에 -> 다른 phasor 를 이용(complex phasors)