

**Data(입력) -> 기계, 인공지능(함수) -> Data(출력)**

앞뒤에 위치해 있는 data는 무조건 벡터의 형태로 존재

앞뒤의 숫자 개수가 꼭 일치할 필요는 x (e.g. 앞 data 10개, 뒤 data 7개)

e.g.

음성 -> 기계 -> text

➔ 음성인식 AI

Text -> 기계 -> 음성

➔ 음성합성 AI

일본어 Text -> 기계 -> 한국어 text

➔ 번역 기계

⇒ 이 내부의 과정을 이해하기 위해서 **선형대수**를 배워야 한다!

## **선형대수 (Linear Algebra)**

: 행렬을 가지고 연산을 하는 것

**행렬(Matrix)**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

행(세로)과 열(가로)로 구성

행: m행(세로), 열: n열(가로)/ m by n (or m x n)

얼마나 큰가? 이야기할 때, dimension(차원) 기준으로!

## 벡터(Vector)

: a sequence of numbers

행렬 중 하나로 한 줄로 길게 구성되어 있는 숫자열

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

(1 by m                      n by 1    짜리 행렬로 볼 수 있음!)

e.g.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

기하적으로는 (3,4) -> 2차원(x,y)의 한 점

/ Column Vector (세로로 길게 생긴 벡터)

2 by 1 짜리

e.g.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

기하적으로는 (3,-1,2) -> 3차원(x,y,z) 안에 있는 한 점 / 차원만 증가할 뿐, **점은 1개!**

3 by 1 짜리

## Vector Multiplication

e.g.

$$0.5 \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

기하적으로 (6,8)의 각각의 값들에다가 0.5 곱하면 -> (3,4) 의 지점

$$0.5 \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

기하적으로 (6,-2, 4)의 각각의 값들에다가 0.5 곱하면 -> (3,-1, 2)의 지점

## Vector addition

e.g.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

각각의 열의 값들끼리 더하면 = (5,5)

/ 평행사변형의 모양을 그려서 점이 만들어짐

➔ Same goes to the 3-dimension vector!

## Vector Spaces

: linear combinations still stay in the space

무수한 벡터(하나가 아니라!)들이 만들어내는 공간

## Linear combination

v, w (길이, 차원 똑같은 vector)

c, d (0.5, 3 같이 곱셈 값 scalar)

$$c \times v + d \times w$$

➔ 곱하고, 더하고

점 한점은 1사분면에 있을 수 있지만,

Linear combination을 통해서 이는 2사분면, 3사분면, 4사분면에도 있을 수 있음(덧셈, 곱셈 등등)

1사분면 자체를 완성된 vector space라고 이야기할 수는 없음

(2차원을 기준으로 할 때)

$$R^1, R^2, R^3, \dots, R^n$$

$R^n$  space

Consists of all vectors

With n components

e.g 3차원의 공간은

모든 벡터들이 채워진 공간

Column Space

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Column vector 개수? 2개 (세로 2개 2,1 이랑 -1,3)

2점이 2차원 공간에서 생김 -> linear combination 해보자

곱하고 더하고, 곱하고 더하고를 무수히 해보면 **하나의 plain**이 형성된다

모든 space가 채워질 수 있음 => column vector에 의한 column space

Column space는 column vector(2차원)보다 차원이 높을 수 있다?

Nope! 갑자기 다른 차원으로 넘어갈 수는 없다

- 1) 2개의 column vector들에다가 점을 찍고
- 2) 원점(0,0)과 2 column vector들을 모두 연결
- 3) 삼각형 모양 형성(Spanning 확장시킴)

-> 2개의 vector들은 independent(서로 같은 선상에 위치x),

따라서 independent한 숫자 수와 whole space는 일치

3-1) 삼각형 모양 형성 x or 직선 모양

-> 연결요소 있음, independent x

Whole space -> vector가 가지고 있는 공간 -> 2차원 공간 그대로

Column space -> 2차원에 있는 공간

e.g.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

같은 선상에 위치한다

원점과 2 column 이었을 때 삼각형 x

Linear combination 이 라인에서만 값이 나온다

Whole space 2차원

Column space 1차원(Line)

dim(whole space)

: n rows, row의 개수

dim(column space)

: n of independent columns, independent 한 vector 개수

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Row 가 3개 있으므로 3차원

Whole space : 3차원

Column space: (서로서로 같은 라인 x -> independent) 3차원, 모든 공간 차지 가능

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Whole space: 3차원

Column space (col2는 col1의 2배, 같은 선상에 존재 / 서로서로 independent 하지 x)

그래서 2개, 2차원(Plain)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Whole space: 3차원

Column space: 2차원(plain) / (col1 + col2 = col3, 이므로 col3는 col1, col2의 합에 의해서 형성되었으므로, 관련값은 col1, col2로만 계산)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Whole space 3차원

Column space: 1차원(Line) / col2 = 2col1, col3 = 2col2 이므로 결국 모두 연결

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

/직사각형 모양의 행렬

Whole space 3차원 / column vec 2개, 3차원에서 찍힘

Column space: 2차원 (independent column은 2개, 따라서 2차원)

Transpose (AT)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

이런 식으로 바꾸는 것

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Whole space: 2차원

Column space: 2차원 (Column vec 3개, 몇 개가 있던, spanning해서 만들면 2차원이 최대이므로)

Four spaces in a matrix

m x n 행렬 A	Column space	Nullspace	Row space	Left Nullspace
Dimension	<b>r</b> (Column space의 차원은 행렬의 rank, 즉 pivot의 개수와 같다.)	<b>n - r</b> (Nullspace의 차원은 열의 개수에서 rank를 뺀 것과 같다.)	<b>r</b> (Row space의 차원은 행렬의 rank, 즉 pivot의 개수와 같다.)	<b>m - r</b> (Left nullspace의 차원은 행의 개수에서 rank를 뺀 것과 같다.)
basis	행렬 A에서 서로 독립인 r개의 column vector들	Ax = 0을 만족시키는 n-r개의 특수해들	행렬 A에서 서로 독립인 r개의 row vector들	$A^T x = 0$ 을 만족시키는 m-r개의 특수해들

m by n matrix는

2개의 whole space 존재

$R_m$  &  $R_n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Column(행) 의 whole space ->  $R^3$  (3차원)

Row(열) 의 whole space ->  $R^2$  (2차원)

중요!

Column 방향으로 생각하면 3차원 / dependent 함 ( $col2 = 2col1$  이므로)

-> column space는 1차원

(whole space 3차원 - column space 1차원 = 2차원 (비어있는 공간, 의미없는 공간 null space))

Null space

기하적인 concept

Whole space - column space = 그 나머지를 null space

수학적 정의

어떤 행렬이 있을 때, 무엇을 곱하든지 간에 반드시 0이 되는  $(x, x)$ 를 null space라고 한다

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



기하학적인 해석과 함께 연결해서 생각해보면

3 x 2 행렬

Whole space에서 일부의 column space + null space

Column space에서의 null space는 left null space

Row space에서의 null space는 그냥 null space

m by n의 행렬일 때

각각의 whole space 존재

Column  $R_m$  / Column space  $r$  + left null space  $m-r$

Row  $R_n$  / row space  $r$  + null space  $n-r$

Linear Transformation

$A(\text{입력값})x = b(\text{출력값})$

행렬을 대문자(A), 벡터를 소문자(B)

인공지능, 기계, 함수를  $x$

$x$ 의 입력벡터 차원,  $b$ 의 출력벡터 차원은 항상 같아야 되나?

아니다 다를 가능성이 높다 ->  $A$ (행렬)의 모양에 따라서 달라짐

5 3 0 1     -1   0   2

0   1   3

3   -5   7

2   3   4

1 by 4,     4 by 3

둘을 곱할 때, 둘의 column이 일치(차원 길이는 같아야 된다)

몇 개의 숫자가 나오는 것(출력)은 row와 관련성이 높다

→ Transformation Matrix

4개 있는 것이 이동


곱하기, 더하기 -> linear

4개짜리를 3개짜리로, 차원과 숫자 모두를 변하게 함

$x \rightarrow b$ 로 바꿔주는 matrix는 A이다.

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

→ 기계 부분                      /    입력 부분                      =                      출력 부분




Detransformation

Inverse matrix

$$A^{-1}b = x$$

A의 역함수를 b에 취하면 x가 나올 수 있음

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$


Determinant

행렬식이 0이 될 때, 역함수가 없다

e.g 3)

면적이 determinant와 동일

면적이 0 => independent 하지 않다, 같은 선상에 존재

1 3 6 2 0

5 1 x 3 9 1

6 -1

3 by 2 matrix 2 by 3

인접한 2개의 수가 똑같아야지 곱할 수 있음

3 by 2, 2 by 3 (저 수가 일치해야지 곱셈이 가능해짐)

(6,3)을 옮겨서 3 by 2에 각각 곱하고 더하면

$$6 + 9 = 15$$

$$30 + 3 = 33$$

$$36 + -3 = 33$$

(2,9)을 옮겨서 3 by 2에 각각 곱, 덧셈하면

$$2 + 27 = 29$$

$$10 + 9 = 19$$

$$12 + -9 = 3$$

(0,1)

3

1

-1

총값

15    29    3

33    19    1

33    3    -1

3 by 3

행렬끼리의 곱

단순하게 벡터끼리도 가능

3 x 2,        2 x 1

1    3        6

5    1    x    3

6    -1

A (기계)    x(입력)

15

33

33

3 by 1

b(출력)

6        1    3

3    x    5    1

6    -1

$2 \times 1, 3 \times 2 \rightarrow$  어떻게 곱하게? 인접 숫자 일치  $x$

$1 \times 2$ 로 교체 /  $2 \times 3$ 로 교체(transpose)

6 3 1 5 6

$x \quad 3 \quad 1 \quad -1$

$$6 + 9 = 15 / 30 + 3 = 33 / 36 + -3 = 33$$

$$Ax = b$$

$$x^T A^T = b^T$$

기본적인 matrix 계산

A

1 2

-1 0

3 5

3 by 2 matrix

- Column 3차원(component 3개) / whole space 3차원,  
column space(spanning 쪽 넓히면) 2차원(Plain)  
 $\Rightarrow$  col space < whole space, 이때 나머지 1차원은? Left Null space (Orthogonal  $\rightarrow$  수직)  
plain과 직각이 되는 선은 1개 있다(1차원, 선)  $\leftarrow$  whole space - column space =  $3 - 2$   
spanning: Linear combination으로 표현가능한 모든 것, 2가지 column vector  
linear combination한다, b값 출력, all possible bs could be column space  $\rightarrow$  cannot  
surpass the plain) if it's orthogonal to column space, it is null space.
- Row 2차원(component 2개) / whole space 2차원,  
row space(spanning 쪽 넓히면) 2차원(Plain)  
 $\Rightarrow$  row space = whole space = 2차원  
column space, row space의 차원은 independent한 것이 몇 개 있는가가 중요!

Column vector 2개

Independent 한 것들의 숫자(rank) ? 2개 -> column space의 차원과 일치 2차원

Row vector 3개

Independent 한 것들의 숫자? 2개

(row vec2 = row vec1 - 2 이므로, vec1, vec3끼리만 independent) / row space 차원? 2차원

Column vec space 2차원

Row vec space 2차원(whole space가 최대 2차원이기에)

2 = 2차원

Null space 각각 (column)1, (row)0차원