Optimisation & Analyse convexe
Séance 4 : Caractérisation du minimum dans le cas avec contraintes

Exercice 1 . On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1, \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calculer le minimum de la fonction $J : v \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$ sur l'ensemble K :

(a) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0\}$

(b) $K := \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0, v_1 \geq 0\}$

Corrigé 1 . Notons d'abord que la matrice A est définie-positive. Donc la fonctionnelle J admet bien un minimum unique qui est caractérisé par l'inéquation d'Euler.

(a) Supposons que $K = \{v \in \mathbb{R}^3; v_2 + v_3 = 0\}$. On note par $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par u le minimum de J sur K. Les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad Au + C^{\mathsf{T}}\lambda = b \quad \text{et } Cu = 0.$$

Ou encore,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2u_1 - u_2 & = & -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda & = & 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = & 2 \\ u_2 + u_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

La résolution de ce système donne que

$$u = \begin{pmatrix} -19/11 & -5/11 & 5/11 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \lambda = 7/11.$$

(b) D'abord on réécrit la contrainte $v_2 + v_3 = 0$ sous la forme $v_2 + v_3 \leq 0$ et $-v_2 - v_3 \leq 0$. En posant

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

l'ensemble des contraintes se réécrit : $K = \{v \mid \widetilde{C}v \leq 0\}$. Les conditions d'optimalité impliquent :

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad Au + \widetilde{C}^{\mathsf{T}}\lambda = 0, \quad \widetilde{C}u \leq 0, \quad \text{et } \lambda_i[\widetilde{C}u]_i = 0.$$

Ce qui donne :

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2u_1 - u_2 - \lambda_1 & = & -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 2 \\ u_2 + u_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et } \lambda_1 u_1 = 0,\ u_1 \geq 0$$

ou encore,

$$\exists \lambda_1 \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2u_1 - u_2 - \lambda_1 & = & -3 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 + \lambda & = & 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = & 2 \\ u_2 + u_3 & = & 0 \end{cases} \quad \text{et } \lambda_1 u_1 = 0,\ u_1 \geq 0.$$

Pour la résolution de ce système, on va distinguer 2 cas. On suppose d'abord que $\lambda_1 = 0$. Dans ce cas la solution (u, λ) serait solution de (1) et vérifierait en plus $u_1 \geq 0$. Or, on a vu en (a) que l'unique solution de (1) ne vérifie pas $u_1 \geq 0$.

Reste le 2e cas où $u_1 = 0$ et $\lambda_1 > 0$:

$$\exists \lambda_1 > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -u_2 - \lambda_1 & = & -3 \\ +2u_2 - u_3 + \lambda & = & 1 \\ -u_2 + 2u_3 + \lambda & = & 2 \\ u_2 + u_3 & = & 0 \end{cases}$$

On trouve alors que la solution est :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \lambda_1 = 19/6, \lambda = 3/2.$$

Exercice 2 . Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, $u \in \mathbb{R}^n$ le vecteur défini par $u_i = 1$ pour $i = 1, \cdots n$ et $e \in \mathbb{R}^n$ un vecteur tel que $0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_n$. Dans toute la suite, on suppose que $n \geq 3$.

Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$ donnés, on définit ensuite les ensembles

$$C_1(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, (u, x) = 1 \text{ et } (e, x) = \varepsilon\},$$
$$C_2(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n, (u, x) = 1 \text{ et } \frac{1}{2}(Ax, x) = \sigma\}.$$

Dans la suite du problème on cherche à résoudre les problèmes

$$\text{Inf}_{x \in C_1(\varepsilon)} \frac{1}{2}(Ax, x) \tag{2}$$
$$\text{Sup}_{x \in C_2(\sigma)} (e, x) \tag{3}$$

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, l'ensemble des contraintes $C_1(\varepsilon)$ est non vide, fermé et non borné. En déduire que le problème (2) admet une solution unique.
2. Montrer que pour certaines valeurs de $\sigma \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $C_2(\sigma)$ est non vide, fermé et borné. En déduire que le problème (3) admet au moins une solution.
3. On note λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $(u, x) = 1$ et μ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $(e, x) = \varepsilon$. On définit ensuite les réels a, b, c et d par

$$a = (A^{-1}u, u), \quad b = (A^{-1}u, e), \quad c = (A^{-1}e, e) \quad \text{ et } d = b^2 - ac.$$

En utilisant les conditions d'optimalité associées à l'ensemble $C_1(\varepsilon)$, montrer que la solution x du problème (2) vérifie

$$\lambda = (c - b\varepsilon)/d; \tag{4a}$$
$$\mu = (a\varepsilon - b)/d; \tag{4b}$$
$$x = -A^{-1}(\lambda u + \mu e). \tag{4c}$$

4. On dit qu'une solution x est efficiente si elle est solution commune aux problèmes (2) et (3), et on appelle frontière d'efficience la courbe du plan (ε, σ) correspondant à l'ensemble de ces solutions lorsque ε et σ varient. Déterminer la frontière d'efficience des problèmes (2) et (3).

Corrigé 2 .

1. On construit le vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ par les relations :

$$y_1 = \frac{e_n - \varepsilon}{e_n - e_1},\ y_2 = \ldots, y_{n-1} = 0,\ y_n = \frac{\varepsilon - e_1}{e_n - e_1}.$$

Ce vecteur vérifie $(y, e) = \varepsilon$ et $(y, u) = 1$. Donc l'ensemble $C_1(\varepsilon)$ n'est pas vide ; c'est par ailleurs un ensemble fermé car les contraintes sont affines. Enfin il n'est pas borné : pour tout $p \in \mathbb{R}$, le vecteur $y_p = y + pz$, avec $z = u \wedge e$ vérifie les contraintes, et sa norme tend vers l'infini avec p.

La matrice A étant symétrique définie positive, on a aussi $\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{1}{2}(Ax, x) = +\infty$. Le problème (2) admet donc une solution. De plus cette solution est unique car la fonctionnelle est strictement convexe et $C_1(\varepsilon)$ est un ensemble convexe fermé non vide.

2. La fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continue ; pour $\sigma \in \mathbb{R}^+$ l'ensemble

$$C_2'(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{2}(Ax, x) = \sigma\}$$

est donc un ensemble fermé ; il est de plus borné puisque

$$\frac{1}{2}\lambda_{min}(A)\|x\|_2^2 \le \frac{1}{2}(Ax, x) \Longrightarrow \forall x \in C_2'(\sigma), \quad \|x\|_2 \le \sqrt{\frac{2\sigma}{\lambda_{min}(A)}}.$$

De même l'ensemble

$$C(u) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ (u, x) = 1\}$$

est fermé, et on peut le caractériser comme suit :

$$C(u) = \{\frac{1}{n}u + v,\ v \in \{u\}^\perp\}.$$

L'ensemble $C_2(\sigma) = C_2'(\sigma) \cap C(u)$ est donc un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$; à quelle condition est-il non vide ?

Une condition suffisante sur σ pour que l'ensemble $C_2(\sigma)$ ne soit pas vide s'obtient de la manière suivante : on recherche les éléments de $C_2(\sigma)$ sous la forme $x + \lambda y$ avec $x = u/n$, $y \in \{u\}^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, vérifiant

$$\begin{array}{ll} & (A(x+\lambda y), x+\lambda y) = 2\sigma \\ \text{soit} & (Ax,x) - 2\sigma + 2\lambda(Ax,y) + \lambda^2(Ay,y) = 0 \end{array}$$

Ce trinôme en λ admet deux racines réelles si et seulement si

$$\begin{array}{ll} & \Delta = (Ax,y)^2 - (Ay,y)((Ax,x) - 2\sigma) \geq 0 \\ \text{soit} & (Ax,y)^2 \geq (Ay,y)((Ax,x) - 2\sigma) \end{array}$$

comme $(Ay,y) \geq 0$ cette condition est réalisée si $(Ax,x) < 2\sigma$. Or

$$(Ax,x) \leq \lambda_{\max}\|x\|^2 = \lambda_{\max}/n,$$

donc $\sigma \geq \lambda_{\max}/(2n)$ est une condition suffisante pour que $C_2(\sigma) \neq \emptyset$.

3. La solution x du problème (2) et les multiplicateurs de Lagrange λ et μ sont liés par les relations

$$\begin{array}{rcl} \nabla J(x) + \lambda u + \mu e & = & 0 = Ax + \lambda u + \mu e \\ (x,e) & = & \varepsilon \\ (x,u) & = & 1 \end{array}$$

on en déduit que $x = -A^{-1}(\lambda u + \mu e)$, et que λ et μ vérifient

$$\begin{array}{rcl} b\lambda + c\mu & = & -\varepsilon \\ a\lambda + b\mu & = & -1 \end{array}$$

système linéaire inversible si $d = b^2 - ac \neq 0$, et dont la solution unique est

$$\lambda = \frac{c - b\varepsilon}{d} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{a\varepsilon - b}{d}.$$

Il reste donc à démontrer que $d \neq 0$: la relation

$$(A^{-1}(u+\theta e), (u+\theta e)) = (A^{-1}e,e)\theta^2 + 2(A^{-1}u,e)\theta + (A^{-1}u,u) > 0 \quad \forall\theta$$

se traduit en

$$\forall\theta \qquad a\theta^2 + 2b\theta + c > 0,$$

on en déduit $d = b^2 - ac < 0$.

4. La solution x commune aux deux problèmes vérifie

$$\sigma = \frac{1}{2}(Ax, x) = -(a\varepsilon^2 - 2b\varepsilon + c)/2d$$

qui définit une parabole dans le plan (ε, σ). Cette parabole admet un minimum en $(b/a, 1/2a)$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ donné il existe une valeur unique σ sur la parabole, par contre pour calculer ε à partir d'une valeur de σ donnée, il faut nécessairement que $\sigma \geq 1/2a$. Sous cette condition deux valeurs de ε sont associées sur la parabole, la solution du problème (3) est, par définition, la plus grande des deux. La frontière d'efficience est donc la branche de parabole

$$\sigma = -(a\varepsilon^2 - 2b\varepsilon + c)/d$$

correspondant aux valeurs $\varepsilon \geq b/a$.

Commentaire : Ce type de problème d'optimisation modélise l'étude d'efficience d'un portefeuille d'actions. Soit un portefeuille composé de $n \geq 3$ actions *à risque* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on note x_i la proportion de l'action a_i dans le portefeuille. Le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$ qui représente la composition du portefeuille, vérifie

$$\sum_i x_i = 1 = (u, x) \quad \text{et} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Le rendement de l'action a_i est modélisé par une variable aléatoire r_i, de moyenne $e_i = E(r_i)$. On introduit le vecteur rendement moyen $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^\mathsf{T}$, puis la matrice de variance-covariance A par la relation

$$A_{i,j} = E[(r_i - E(r_i))(r_j - E(r_j))] \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Le rendement du portefeuille est calculé par la fonctionnelle $\varepsilon(x) = (e, x)$, tandis que le risque du portefeuille est calculé par la fonctionnelle $\sigma(x) = \frac{1}{2}(Ax, x)$.

On dit alors qu'un portefeuille x est efficient, s'il est à la fois solution du problème (2) et du problème (3). Ce portefeuille assure donc à la fois un rendement maximal ε pour un risque donné σ, et un risque minimal σ pour un rendement imposé ε.

Exercice 3 (Longueur minimale).
Soit

$$\begin{array}{rccl} J : & \mathbb{R}^{n+2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v = (v_0, \dots, v_{n+1}) & \longrightarrow & h \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right)^2} = J(v) \end{array}$$

où $h = 1/(n+1)$ et $n > 0$.

1. Donner une interprétation géométrique de $J(v)$. Montrer que la fonction J est convexe. Est-elle strictement convexe ?
2. On considère le problème de minimisation de J sur l'ensemble $K \subset \mathbb{R}^{n+2}$ suivant :

$$K = \{v = (v_0, ..., v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}, v_0 = 0, v_{n+1} = 1\}$$

Discuter l'existence, l'unicité, et caractériser la (ou les) solution(s) éventuelle(s).

Corrigé 3 .

1. **Interprétation :** $J(v)$ représente la longueur de la courbe continue affine par morceau passant par les points (x_i, v_i) où $x_i = ih$. En effet la longeur entre (x_i, v_i) et (x_{i+1}, v_{i+1}) est

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (v_{i+1} - v_i)^2} = h\sqrt{1 + \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right)^2}.$$

Convexité : Notons que la fonction $g : x \longmapsto h\sqrt{1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2}$ est convexe (et même strictement convexe) sur $\mathbb{R}$ car on a $g''(x) = \dfrac{1}{h}\dfrac{1}{(1 + \frac{x^2}{h^2})^{3/2}} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussi, pour tout $i = 0, \cdots, n$, l'application

$$q_i : v = (v_0, \cdots, v_n) \longmapsto v_{i+1} - v_i \tag{5}$$

est affine. Or l'application $v \longmapsto h\sqrt{1 + \left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\right)^2}$ est égale à la composée $g \circ q_i$, elle est donc convexe puisque $\forall\theta \in [0, 1], \forall u, v \in \mathbb{R}^{n+2}$, on a

$$\begin{array}{rrcl} & q_i(\theta u + (1 - \theta)v) & = & \theta q_i(u) + (1 - \theta)q_i(v); \\ \text{et} & g \circ q_i(\theta u + (1 - \theta)v) & = & g\left(\theta q_i(u) + (1 - \theta)q_i(v)\right) \\ & & \leq & \theta g(q_i(u)) + (1 - \theta)g(q_i(v)). \end{array}$$

Ainsi la fonction $J = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g \circ q_i$, comme somme de fonctions convexes, est convexe.

Stricte convexité. Si on prend $u = (0, \cdots, 0)$ et $v = (1, \cdots, 1)$, on a $J(\dfrac{u+v}{2}) = J(u) + J(v) = (n + 1)h = 1$ et donc

$$J(\frac{u+v}{2}) = \frac{1}{2}J(u) + \frac{1}{2}J(v);$$

ce qui prouve que J n'est pas strictement convexe.

2. Remarquons d'abord que
$$\inf_{v=(v_0,v_1,\cdots,v_n,v_{n+1})\in K} J(v) = \inf_{w=(v_1,\cdots,v_n)\in \mathbb{R}^n} q(w),$$
où $q : w \in \mathbb{R}^n \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} h\sqrt{1+\left(\frac{w_{i+1}-w_i}{h}\right)^2} + h\sqrt{1+\left(\frac{w_1}{h}\right)^2} + h\sqrt{1+\left(\frac{1-w_n}{h}\right)^2}$.

Existence d'un minimum. Montrons que q est infinie à l'infini.
On a : $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$ et donc, pour tout $k = 1, \cdots, n$
$$q(w) \geq \sum_{i=1}^{k-1} |w_{i+1}-w_i| + |w_1| \geq |w_1| + \sum_{i=1}^{k-1}\Big[|w_{i+1}| - |w_i|\Big] = |w_k|.$$
Donc $q(w) \geq \sup_{k\in\{1,\cdots,n\}} |w_k| = \|w\|_\infty$. Ainsi, $\lim_{\|w\|\to+\infty} q(w) \longrightarrow +\infty$.
De plus, $\mathbb{R}^n$ est un fermé et q est continue, donc q admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Unicité du minimum. Nous allons montrer que q est strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (ou, ce qui revient au même, que J est strictement convexe sur K). Pour cela, supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que :
$$q(\theta u + (1-\theta)v) = \theta q(u) + (1-\theta)q(v) \qquad \text{avec } \theta \in]0,1[, \tag{6}$$
et montrons que nécessairement $u = v$. Comme q est convexe (car J est convexe), ceci prouvera bien la stricte convexité. Pour $i = 1, \cdots, n-1$, on note par q_i la fonction définie en (5), et on redéfinit les fonctions q_0 et q_n par
$$q_0(w) = w_1, \qquad \text{et} \;\; q_n(w) = 1 - w_n.$$
Avec ces notations, on rappelle qu'on a :
$$\begin{aligned} q((\theta u + (1-\theta)v) &= \sum_{i=0}^{n} g(q_i(\theta u + (1-\theta)v)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} g(\theta q_i(u) + (1-\theta)q_i(v)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \theta g(q_i(u)) + (1-\theta)g(q_i(v)) = \theta q(u) + (1-\theta)q(v). \end{aligned} \tag{7}$$
Donc si (6) est vérifiée nécessairement on a des égalités dans (7) :
$$\forall i = 0, \cdots, n, \quad g(\theta q_i(u) + (1-\theta)q_i(v)) = \theta g(q_i(u)) + (1-\theta)g(q_i(v)).$$
Or g est strictement convexe et $\theta \in]0,1[$. Donc nécessairement $q_i(u) = q_i(v)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$. On en déduit que
$$\left\{\begin{array}{lcll} u_1 &=& v_1; & \\ u_{i+1} - u_i &=& v_{i+1} - v_i & \forall i = 1, \cdots, n-1; \\ 1 - u_n &=& 1 - v_n & \end{array}\right.$$

Ce qui prouve bien que $u = v$ et q est strictement convexe. L'unicité du minimum est alors imédiate.

Condition nécessaire d'optimalité. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ le minimum, on a alors :

$$\nabla q(u) = 0, \quad \text{ou encore } \frac{\partial q}{\partial u_i} = 0 \ \forall i = 1, \cdots, n. \tag{8}$$

Or

$$\frac{\partial q}{\partial u_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\sqrt{h^2 + (u_i - u_{i-1})^2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{h^2 + (u_i - u_{i+1})^2}},$$

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1$. On obtient donc :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\sqrt{h^2 + (u_i - u_{i-1})^2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\sqrt{h^2 + (u_i - u_{i+1})^2}},$$

pour tout $i = 1, \cdots, n$. La fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$ étant strictement croissante, il vient que :

$$u_i - u_{i-1} = u_{i+1} - u_i = C, \quad \forall i = 1, \cdots, n.$$

Donc $u_1 = u_0 + C = 0 + C = C$, $u_2 = u_1 + C = 2C, \cdots, u_{n+1} = (n+1)C$. Or $u_{n+1} = 1$, d'où $C = \dfrac{1}{n+1} = h$ et $u_k = kh$. (Ce qui correspond à la droite passant par $(0,0)$ et $(1,1)$).

Commentaire : Vu la convexité de la fonction q, la condition d'optimalité (8) est nécessaire et suffisante. Le fait que (8) posséde exactement une solution est aussi un argument suffisant pour conclure que le problème admet une unique solution.