

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Vers l'équation de Navier-Stokes</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Qu'est-ce qu'un fluide ?</b>	<b>2</b>
2.1	Une assemblée <i>désordonnée</i> de molécules . . . . .	2
2.2	Comment décrire cette assemblée : Dynamique moléculaire (1957)	2
2.3	Milieux continus (L. Euler, 1757, "Sur le mouvement des fluides")	3
<b>3</b>	<b>Comment décrire son mouvement ?</b>	<b>7</b>
3.1	Tenseur taux de déformation . . . . .	7
3.2	Utilisation sur les variations de volume . . . . .	8
3.3	Approche lagrangienne . . . . .	8
3.4	Les déformations qui changent les distances . . . . .	10
3.5	Relation phénoménologique de Navier . . . . .	12
3.6	Équation de Navier-Stokes . . . . .	13
3.7	La limite incompressible . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Écoulements visqueux</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Écoulements parallèles</b>	<b>15</b>

## Première partie

# Vers l'équation de Navier-Stokes

## 1 Introduction

A insérer Tableau de S. Dalì (la gare de Perpignan) : la mécanique des fluides est au centre du monde.

## 2 Qu'est-ce qu'un fluide ?

### 2.1 Une assemblée *désordonnée* de molécules

On fait une diffraction aux rayons X sur un liquide, on ne voit pas de réseau ordonné, mais quand même une taille caractéristique qui est la distance entre molécules.

La distance typique entre molécule est de l'ordre de  $3 \text{ \AA}$ . Les molécules bougent avec l'agitation thermique :

$$c = \sqrt{\frac{kT}{m}} \approx 500 - 1000 \text{ m/s}$$

. Les molécules rentrent en collision à peu près tout les  $\tau_c = \frac{l}{c} \approx 10^{-12} \text{ s}$

### 2.2 Comment décrire cette assemblée : Dynamique moléculaire (1957)

On peut tout simplement tenter de résoudre les équations du mouvement pour tout notre système. C'est long, et ça ne permet de pas de prédire grand chose en général.

Pour chaque molécule, on résout :

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i$$

. Si on prend un bocal d'une dizaine de centimètres, on a  $N \approx 10^{26}$ .  $i$  varie donc entre 1 et  $10^{26}$ .

On utilise une approche potentiel pour

$$F_i = -\vec{\text{grad}}_{r_i} V(r_1, \dots, r_N)$$

. Le potentiel  $V$  est choisi en général comme la superposition d'interactions de paires :

$$V(r_1, \dots, r_N) = \sum_i \sum_{j>i} \Phi(r_i - r_j)$$

On choisit pour  $\Phi$  en général le potentiel de Lennard-Jones :

$$\Phi_{LJ}(r) = 4U \left[ \underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}}_{\text{exclusion de Pauli}} - \underbrace{\left(\frac{r_0}{r}\right)^6}_{\text{interactions faibles électrostatiques}} \right]$$

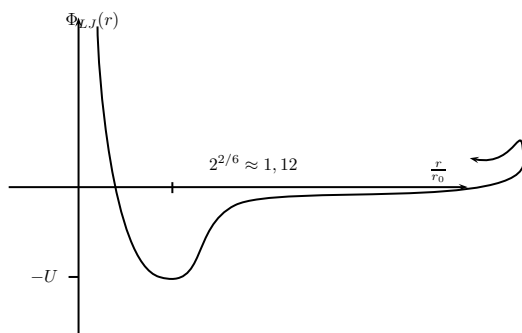


FIGURE 1 –

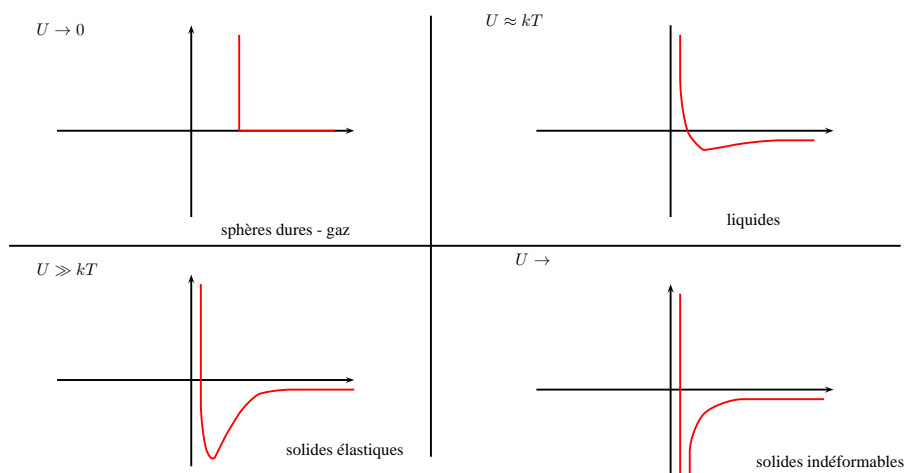


FIGURE 2 –

$$F_{LJ}(r) = \frac{\partial \Phi_{LJ}}{\partial r} = \frac{24U}{r_0} \left[ 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{13} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^7 \right] = 0 \text{ si } \frac{r_e}{r_0} = 2^{1/6}$$

Lorsque les molécules se rapprochent à une distance comparable à leur taille, elle gagnent une énergie  $-U$  par rapport à si elles étaient séparées d'une distance infinie.

Les différents états de la matière :

### 2.3 Milieux continus (L. Euler, 1757, "Sur le mouvement des fluides")

Présentation de l'idée : parabole du glaçon.

On prend un glaçon, de taille  $L = 10^{-2}$ , contenant  $10^{26}$  molécules. Si on se place à une échelle  $\mathcal{L}$  grande devant  $L$ , on peut décrire le mouvement du glaçon (par exemple sa chute) avec la mécanique du point :

$$m_G \frac{dv_G}{dt} \approx mg$$

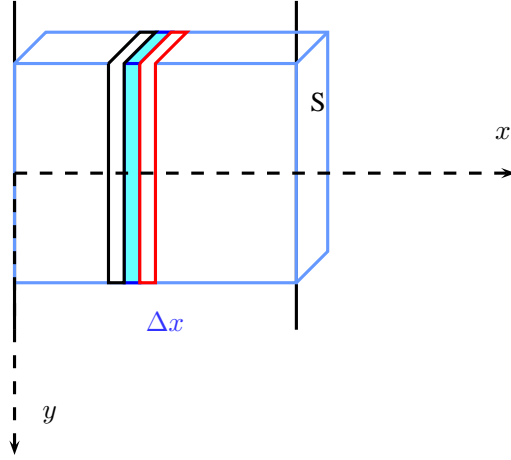


FIGURE 3 –

Si on veut décrire la fonte du glaçon, on aura  $\mathcal{L} \approx L$ . On coince le glaçon entre deux parois chaudes.

$$\rho S \Delta x \frac{\partial U_y}{\partial t} = \rho S \Delta x g + \text{effet des voisins}$$

Effet des voisins : forces de surfaces :

$$\sigma(x + \frac{\Delta x}{2}, t) S = \text{force exercée par rouge sur bleu}$$

Comme l'interface est considérée sans masse, on a une symétrie des forces exercées aux interfaces :

$$-\sigma(x + \frac{\Delta x}{2}, t) S = \text{force exercée par bleu sur rouge}$$

On a donc :

$$\rho S \Delta x \frac{\partial U_y}{\partial t} = \rho S \Delta x g + \sigma(x + \frac{\Delta x}{2}, t) S - \sigma(x - \frac{\Delta x}{2}, t) S$$

$$\rho = \frac{\partial U_y}{\partial t} = \rho g + \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Équation générale :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = F + \text{div} \sigma$$

Cette équation doit être complétée par une relation phénoménologique  $\sigma(U)$

On voit que l'avantage des milieux continus est de réduire grandement le nombre d'équations à résoudre.

Remarque : On a fait l'hypothèse que  $\sigma$  était continu et différentiable. On ne doit pas avoir de discontinuités. Les régions où se trouvent les discontinuités doivent être traitées comme des conditions aux limites.

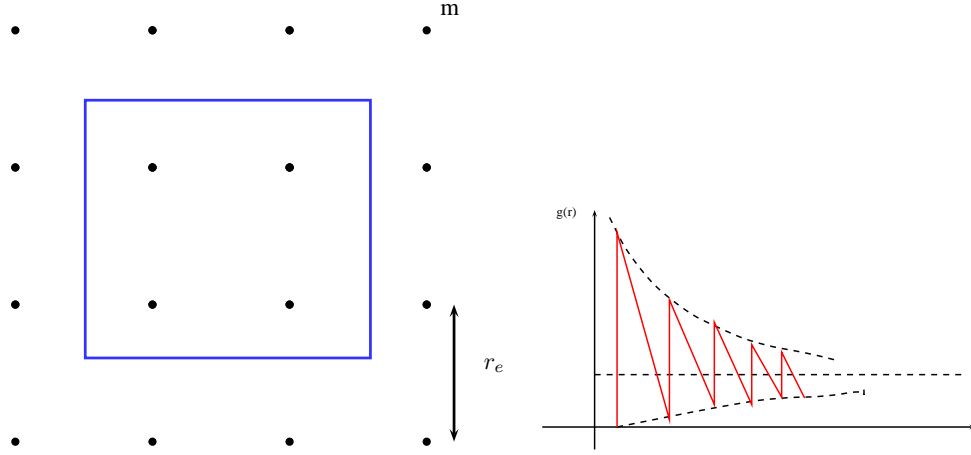


FIGURE 4 –

**Qu'est-ce que la continuité d'un milieu discontinu ?**

$$m(r) = \text{masse contenue dans le carré de côté } r \quad (1)$$

$$\rho(r) = \frac{m(r)}{r^2} = \frac{n(r)m_0}{r^2} \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \frac{m_0}{r_e^2} \quad (3)$$

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\bar{\rho}} = n\left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \quad (4)$$

$$(5)$$

Avant environ  $n = 10$ , on doit utiliser la dynamique moléculaire. Au-delà, on peut utiliser les milieux continus. Pour décider, on utilise le nombre de Knudsen :  $K_n = \frac{r}{r_e}$ . Lorsque ce nombre très grand devant 1, on peut utiliser les milieux continus, s'il est inférieur à 10, on doit utiliser la dynamique moléculaire.

On considère que les mouvements à l'échelle moléculaire permettent d'assurer la continuité.

**A la recherche de la relation  $\sigma(U)$**  Une phase condensée à l'équilibre : On considère des petites briques cubiques de taille  $r_0$  qui forment un parallélépipède cubique de surface  $\Sigma$  et de volume  $\Omega$ . A chaque fois que deux briques s'assemblent, on gagne une énergie  $-U$  ( $\frac{-U}{2}$  par surface).

$$\Delta E_{total} = \frac{\Omega}{r_e^3} 6\left(\frac{-U}{2}\right) + \frac{\Sigma}{r_e^2} 1\left(\frac{U}{2}\right) = \frac{-3U}{r_e^3} \Omega + \frac{U}{2r_e^2} \Sigma$$

Le premier terme est cohésif, le second terme est le terme d'énergie surfacique (d'où on tire :  $\gamma = \frac{U}{2r_e^2}$  la tension de surface).

Ordre de grandeur de la tension de surface :  $[\gamma] = \frac{m}{T^2} \approx 0,02N/m$

On cherche à vérifier à partir de quelle taille on sent le champ extérieur de gravité :

$$\gamma \mathcal{L}^2 \approx \rho \mathcal{L}^4 g \quad \mathcal{L} \approx \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = \kappa^{-1}$$

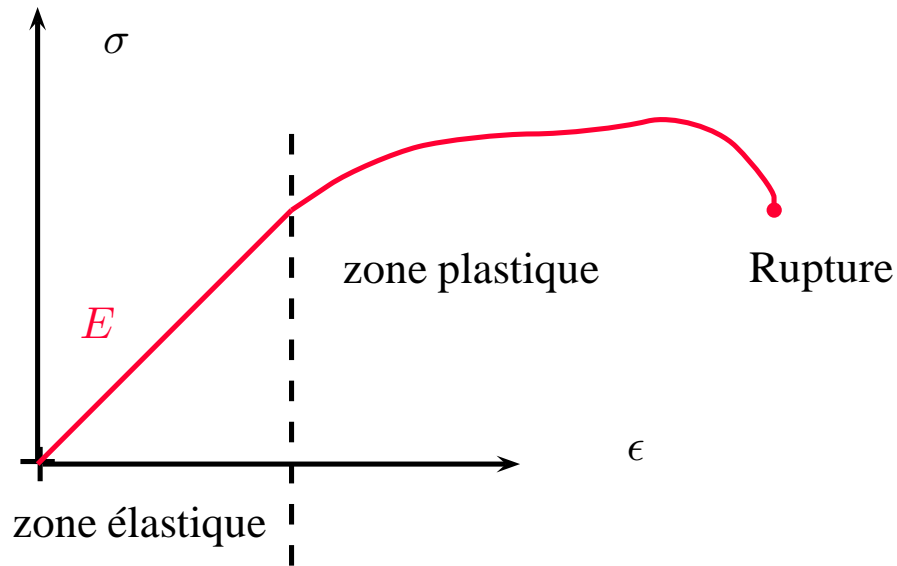


FIGURE 5 –

TABLE 1 – Résultats donnés par la loi de Hooke sur les contraintes limites (en  $10^7 \text{Pa}$ )

	Limite d'élasticité	rupture	module d'Young
Fer	17	35	20 000
Acier	20-100	40-200	20 000
Alu	6	10-20	7 000
Cuivre	0,5 - 12	1-40	11 000
Argent	15	30	7500

On considère ensuite une perturbation d'équilibre.

On part du potentiel

$$\Phi_{LJ}(r) = 4U[(\frac{r_0}{r})^{12} - (\frac{r_0}{r})^6]$$

et on le perturbe.

$$\Phi_{LJ}(r_e + \delta r) = -U + 0 + \frac{1}{2}(\delta r)^2 \frac{\partial^2}{\partial \Phi_{LJ}} r \quad k_0 \approx \frac{U}{r_0^2}$$

où  $k_0$  est la raideur du ressort qui modélise le lien entre deux molécules.

Remarque sur l'agitation thermique.

$$\delta r_{kT} \approx \sqrt{kT \frac{r_0^2}{U}} \quad \frac{\delta r_{kT}}{r_0} = \sqrt{\frac{kT}{U}}$$

On voit donc que si  $U \gg kT$ ,  $\frac{\delta r_{kT}}{r_0} \ll 1$  et si  $U \approx kT$  on a  $\frac{\delta r_{kT}}{r_0} \approx 1$ .  
Résultats expérimentaux pour des solides élastiques :

On considère un solide comme un réseau de ressorts. On peut considérer qu'un plan est un ensemble de ressorts en parallèle :

$$k_{//} = \frac{S}{r_e^2} k_0$$

. On considère alors les plans comme des ressorts en série :

$$k_{eff} = \frac{k_{//}}{L/r_e}$$

Avec ce modèle moléculaire, on aura :

$$F \approx k_{eff} \Delta L = \frac{S}{r_e^2} k_0 \frac{r_e}{L} \Delta L$$

D'où la relation :

$$\frac{F}{S} \approx \frac{k_0}{r_e} \frac{\Delta L}{L} = \sigma = \frac{1}{E} \epsilon$$

d'où  $E = \frac{U}{r_0^3}$ . Le module d'Young fait le lien entre l'échelle moléculaire et ce qu'il en découle à l'échelle macroscopique. C'est la même chose que  $\gamma$ , la tension de surface. Ce sera aussi le cas pour  $\eta$ , la viscosité, qui cachera aussi des termes d'interaction moléculaire.

En ce qui concerne les liquides :

$\tau_c = \frac{r_e}{c} \approx 10^{-12}$ s. Tant que le liquide ne s'est pas réorganisé, il se comporte comme un solide élastique :

$$F \approx k_{eff}(v\tau_c) \approx \frac{S}{r_e^2} k_0 \frac{r_e}{L} v\tau_c$$

Cette vision naïve est la vision Newtonienne. On a alors :

$$\frac{F}{S} \approx \left(\frac{U}{r_0^3} \tau_c\right) \left(\frac{\dot{\Delta L}}{L}\right) \quad \eta = \frac{U}{r_0^3} \tau_c$$

où l'on voit apparaître la viscosité.

Ordre de grandeur de la viscosité :  $\eta \approx 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau par exemple.

On a ici discuté de l'origine moléculaire des trois paramètres  $E, \eta, \gamma$ , qui cachent le niveau microscopique lorsqu'on considère des échelles macroscopiques. On mesurera ces paramètres au lieu de les calculer depuis le modèle microscopique.

## 3 Comment décrire son mouvement ?

### 3.1 Tenseur taux de déformation

Sur la figure 6, on peut voir que :

$$dx + U(x + dx, t)\delta t = U(x, t)\delta t + dx'$$

$$dx' = dx + \vec{\text{grad}} U dx \delta t$$

On appelle  $\vec{\text{grad}} U$  le tenseur taux de déformation.

Remarque : Il faut veiller à prendre un  $\delta t$  suffisamment petit pour que la vitesse soit identique tout le long.

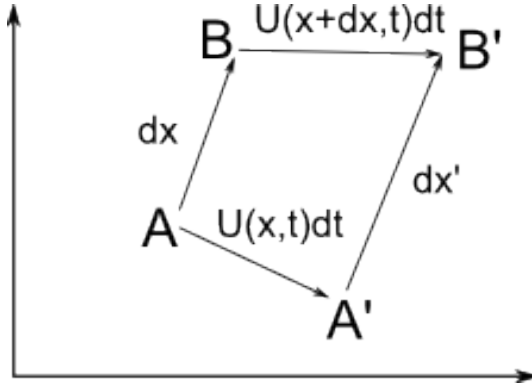


FIGURE 6 –

### 3.2 Utilisation sur les variations de volume

On définit un parallélogramme avec les vecteurs  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ , de volume  $\Omega$  (figure ??).

$$\Omega = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = abc \quad (6)$$

$$\Omega(t + \delta t) = (\vec{a}' \wedge \vec{b}') \cdot \vec{c}' \quad (7)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{\text{grad}}U \cdot \vec{a} \delta t \quad \rightarrow \quad a' = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta t = \begin{bmatrix} (1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}) \delta t a \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \delta t a \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \delta t a \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$(\vec{a}' \wedge \vec{b}') \cdot \vec{c}' = abc[1 + \text{Tr}[\vec{\text{grad}}U] \delta t + o(\delta t^2)]$$

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \Omega(t) \text{div}(\vec{U})$$

Variation de volume

### 3.3 Approche lagrangienne

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{A(\vec{x} + \vec{U} \delta t, t + \delta t) - A(\vec{x}, t)}{\delta t} = \frac{A(\vec{x}, t) + \vec{\text{grad}}A \cdot \vec{U} \delta t - A(\vec{x}, t)}{\delta t}$$

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\text{grad}}A \cdot \vec{U}$$

où  $\frac{DA}{Dt}$  est la dérivée lagrangienne (utile pour les lois de conservation),  $\frac{\partial A}{\partial t}$  est le terme instationnaire, et  $\vec{\text{grad}}A \cdot \vec{U}$  est le terme convectif.

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{U(x + dx)(U(x))}{dx/U} = U \frac{\partial U}{\partial x}$$



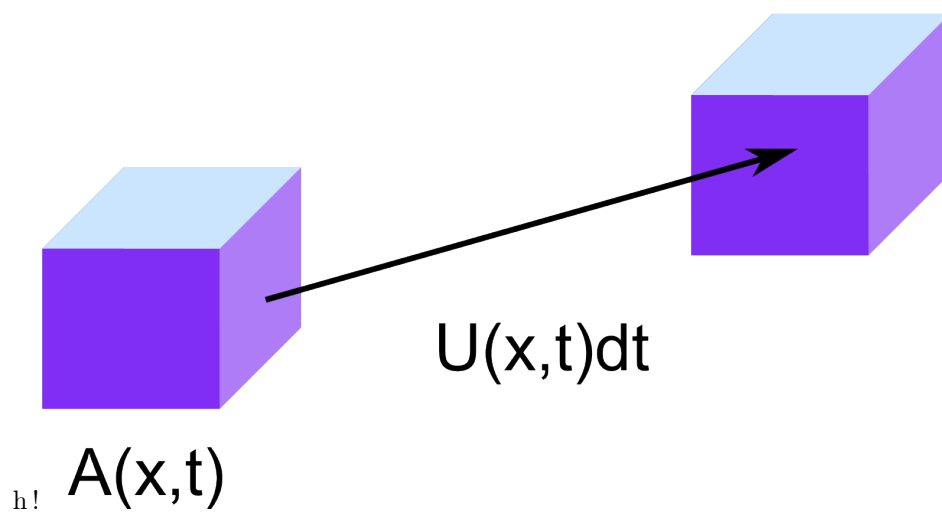


FIGURE 7 –

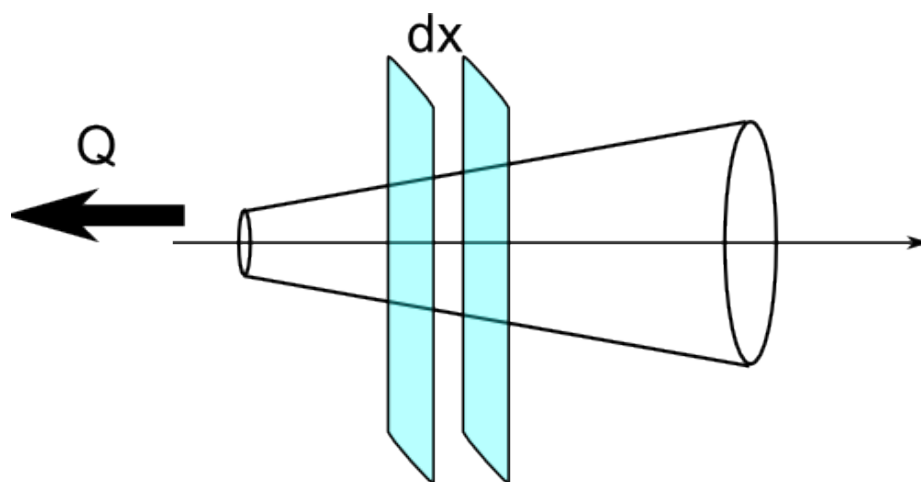


FIGURE 8 – Si on aspire l'air par le cône.

### Conservation de la masse

$$A = \rho\Omega \quad \frac{D\rho\Omega}{Dt} = 0 \text{ loi de conservation} \quad (9)$$

$$\rho \frac{D\Omega}{Dt} + \Omega \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (10)$$

$$\rho\Omega \operatorname{div}\vec{U} + \Omega \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho\vec{U} + \rho\operatorname{div}\vec{U} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{U}) = 0 \quad (13)$$

### Évolution de l'impulsion

$$\vec{A} = \rho\Omega\vec{U} \quad (14)$$

$$\frac{D\rho\Omega\vec{U}}{Dt} = \vec{F} \text{ loi de conservation} \quad (15)$$

$$\rho\Omega \frac{D\vec{U}}{Dt} + \frac{D\rho\Omega}{Dt} = \vec{F} \quad (16)$$

$$\frac{D\rho\Omega}{Dt} = 0 \text{ conservation de la masse} \quad (17)$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\vec{F}}{\Omega} \quad (18)$$

$$(19)$$

$$\rho \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho \underline{\underline{\operatorname{grad}\vec{U}\vec{U}}} = \vec{f} + \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} \quad (20)$$

On définit alors une relation phénoménologique pour  $\underline{\underline{\sigma}}(\vec{U})$

### 3.4 Les déformations qui changent les distances

$$d\vec{x}' = dx + \underline{\underline{\operatorname{grad}U}} d\vec{x}\delta t \quad (21)$$

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}U}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}U}} + {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}U}}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\operatorname{grad}U}} - {}^t\underline{\underline{\operatorname{grad}U}} \quad (22)$$

$$= \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{R}} \quad (23)$$

$\underline{\underline{E}}$  représente l'extension,  $\underline{\underline{R}}$  représente la rotation.

Pour  $\underline{\underline{R}}$  :

$$\vec{\omega}_r \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} \omega_{r1} \\ \omega_{r2} \\ \omega_{r3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_{r2}a_3 - \omega_{r3}a_2 \\ \omega_{r3}a_1 - \omega_{r1}a_3 \\ \omega_{r1}a_2 - \omega_{r2}a_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\underline{\underline{R}}\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{r3} & \omega_{r2} \\ \omega_{r3} & 0 & -\omega_{r1} \\ -\omega_{r2} & \omega_{r1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_{r2}a_3 - \omega_{r3}a_2 \\ \omega_{r3}a_1 - \omega_{r1}a_3 \\ \omega_{r1}a_2 - \omega_{r2}a_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

donc

$$\vec{\omega}_r = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{U}$$

On définit la notation :

$$U_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta t$$

En deux dimensions :

$$d\vec{x}' = \begin{bmatrix} dx'_1 \\ dx'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + U_{11})dx_1 + U_{12}dx_2 \\ U_{21}dx_1 + (1 + U_{22})dx_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$dx'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 = (1 + 2U_{11})dx_1^2 + 2U_{12}dx_1dx_2 + (1 + 2U_{22})dx_2^2 + 2U_{21}dx_1dx_2 \quad (29)$$

$$= dx^2 + 2[U_{11}dx_1^2 + (U_{12} + U_{21})dx_1dx_2 + U_{22}dx_2^2] \quad (30)$$

$$+ \begin{bmatrix} U_{11} & \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) \\ \frac{1}{2}(U_{12} + U_{21}) & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1^2 & dx_1dx_2 \\ dx_2dx_1 & dx_2^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Pour l'extension en 2D :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} Tr[\underline{\underline{1}}] + (\underline{\underline{E}} - \frac{1}{2} Tr[\underline{\underline{1}}])$$

Pour l'extension en 3D :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{3} Tr[\underline{\underline{1}}] + (\underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} Tr[\underline{\underline{1}}])$$

**exemple** Pour la dilatation

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + \begin{bmatrix} \alpha Tr & 0 \\ 0 & \alpha Tr \end{bmatrix} d\vec{x} \quad (32)$$

$$dx'_1 = (1 + \alpha Tr)dx_1 \quad (33)$$

$$dx'_2 = (1 + \alpha Tr)dx_2 \quad (34)$$

$$(35)$$

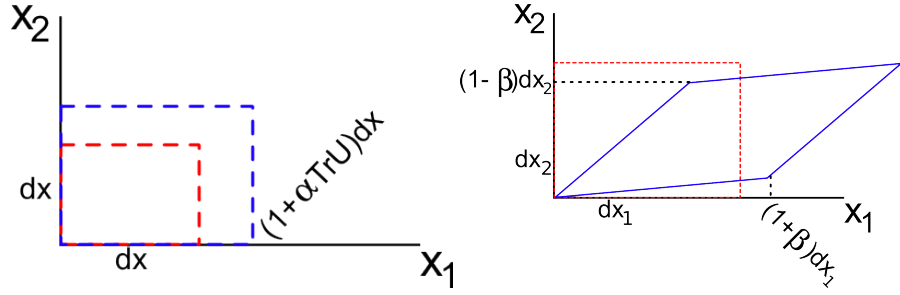


FIGURE 9 –

Pour la déformation :

$$dx'_1 = \begin{bmatrix} dx'_{11} \\ x'_{12} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$= \begin{bmatrix} dx_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & E_{12} \\ E_{12} & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$= \begin{bmatrix} (1 + B)dx_1 \\ E_{12}dx_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$dx'_2 = \begin{bmatrix} dx'_{21} \\ x'_{22} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & E_{12} \\ E_{12} & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dx_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} E_{12}dx_2 \\ (1 + B)dx_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

### 3.5 Relation phénoménologique de Navier

$$\underline{\underline{\sigma}} = \kappa \text{div} \underline{\underline{U}} + 2\eta \underline{\underline{E}}_0 \quad (42)$$

Elle remplace la relation qui ne fonctionne pas

$$\underline{\underline{\sigma}} = \alpha \underline{\underline{E}}$$

L'équation 44 est définie aussi pour l'élasticité dans les solides (les deux coefficients pour les solides sont les coefficients de Lamé, qui sont construits à partir du module d'Young et du coefficient de Poisson), elle ne prend pas en compte la réorganisation qui a lieu dans les liquides. On va pour tenir compte de la spécificité des liquides en ajoutant un terme pour les chocs :  $-p\underline{\underline{1}}$ . La loi phénoménologie de Navier est donc tirée de celle utilisée pour les solides élastiques, mais avec un terme correctif qui tient compte de la particularité des liquides.

$\eta$  est la viscosité dynamique,  $\kappa$  est la seconde viscosité, qui n'intervient qu'en cas de changement de volume.

### 3.6 Équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\underline{\underline{gradU}})\vec{U} = \vec{f} + \text{div}\underline{\underline{sigma}} \quad (43)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\kappa \text{div}\vec{U} - p)\underline{\underline{1}} + 2\eta\underline{\underline{E_0}} \quad (44)$$

$$\text{div}\underline{\underline{\sigma}} = -\vec{\text{grad}}P + \kappa\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{U}) + 2\eta\text{div}\underline{\underline{E_0}} \quad (45)$$

$$\underline{\underline{E_0}} = \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3}\text{div}\vec{U}\underline{\underline{1}} \quad (46)$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{gradU}} + {}^t\underline{\underline{gradU}}) \quad (47)$$

$$\text{div}\underline{\underline{E_0}} = \text{div}\text{div}\underline{\underline{E}} - \frac{1}{3}\vec{\text{grad}}\text{div}\vec{U} \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2}\Delta\vec{U} + \frac{1}{2}\vec{\text{grad}}\text{div}\vec{U} - \frac{1}{3}\vec{\text{grad}}\text{div}\vec{U} \quad (49)$$

$$2\eta\text{div}\underline{\underline{E_0}} = \eta\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\eta\vec{\text{grad}}\text{div}\vec{U} \quad (50)$$

D'où une réécriture de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho\underline{\underline{gradU}}\vec{U} = \vec{f} - \vec{\text{grad}}p + \eta\Delta\vec{U} + (\kappa + \frac{\eta}{3})\vec{\text{grad}}\text{div}\vec{U} \quad (51)$$

Cette équation remplace les  $10^{26}$  équations de l'approche dynamique moléculaire.

On lui ajoute la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{U}) = 0 \quad (52)$$

### 3.7 La limite incompressible

$$C^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \Rightarrow \delta p \approx \frac{1}{C^2} \delta p$$

$$\delta p \approx \rho U^2$$

donc

$$\frac{\delta p}{\rho} \approx \left( \frac{U}{C} \right)^2 = M_a^2$$

où  $M_a = \frac{U}{C}$  est le nombre de Mach.

Comme on a

$$C = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

on peut en déduire :

$$M_a = \sqrt{\frac{mU^2}{kT}}$$

Si  $M_a \ll 1$  (ce qui est le cas le plus commun),

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 \Rightarrow \rho \approx \langle \rangle \rho$$

C'est ce qu'on appelle la limite incompressible. Cela simplifie la conservation de la masse en :

$$\text{div} \vec{U} = 0$$

Et l'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \underline{\underline{\text{grad} U \vec{U}}} = \vec{f} - \text{grad} P + \eta \Delta \vec{U}$$

## Deuxième partie

# Écoulements visqueux

Équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u}$$

Conditions aux limites :

- sur la vitesse (condition de non-glissement de Navier)

$$\vec{u}_{\text{fluide/paroi}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$$

Exceptions : les écoulements de gaz dilué (il peut y avoir glissement à la paroi), polymères, fluides non mouillants

- sur les contraintes (à la traversée d'une interface entre deux fluides, on doit écrire la continuité de la contrainte de cisaillement :

$$\eta_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial y}$$

Cas particulier d'une surface libre

$$\left. \frac{\partial u_{\text{libre}}}{\partial y} \right|_{\text{interface}} = 0$$

- Saut de pression et de contrainte normale à la traversée d'une interface courbe (équation de Laplace).

## 4 Écoulements parallèles

Définition : écoulement unidirectionnel qui ne dépend pas de la direction de l'écoulement :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x(y, z, t) \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

Conséquence : l'équation de Navier-Stokes est grandement simplifiée.

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2}{\partial u_x} y + \frac{\partial^2}{\partial u_x} z \right)$$

Exemples d'écoulements :

### Démarrage d'un plaque plane

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

En ordre de grandeur,  $\frac{U}{t} \approx \nu \frac{U}{\delta^2}$  où  $\delta$  est l'épaisseur de la zone où existe le gradient de vitesse.  $\nu$  est alors un coefficient de diffusion.