第五章

方程求根的迭代法

—— **Newton 迭代法**

—— **弦截法**

本讲内容

- **Newton 法及其收敛性**
- **简化的 Newton 法**
- **Newton 下山法**
- **弦截法**

Newton 迭代法

- 基本思想、几何意义
- 二阶局部收敛性
- 简化 Newton 法
- Newton 下山法

Newton 迭代法

- **基本思想**

将非线性方程线性化

- 设 x_k 是 $f(x)=0$ 的近似根，将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

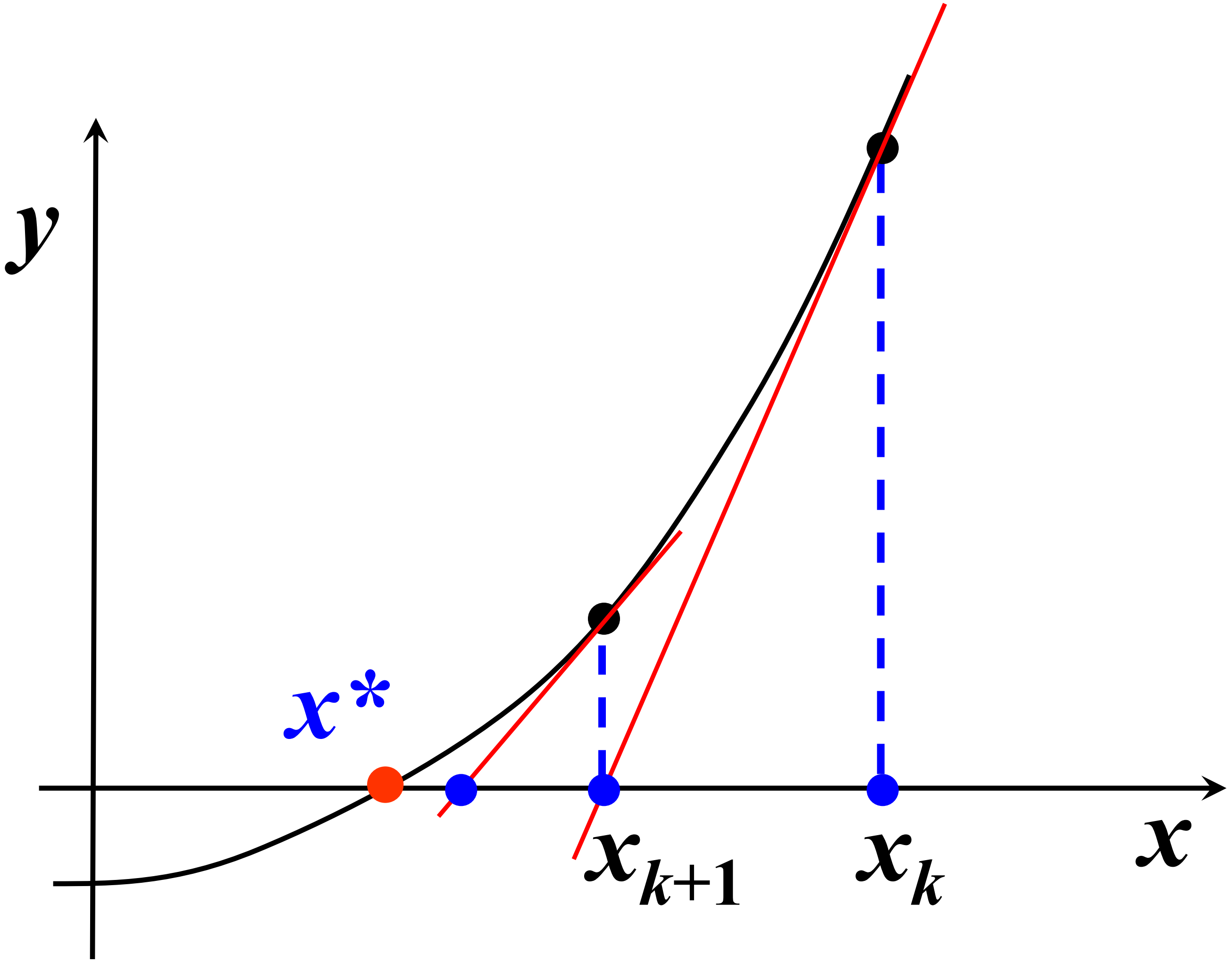
$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)^2$$

$$\approx f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) \triangleq P(x)$$

令： $P(x)=0 \Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$

条件： $f'(x) \neq 0$

Newton 法



Newton 法

算法：(Newton 法)

(1) 任取迭代初始值 x_0

(2) 计算 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(3) 判断收敛性：如果 $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或者 $\left|f\left(x_1\right)\right| < \varepsilon$ ，

则算法收敛，停止计算，输出近似解 x_1

(4) 令 $x_0 \leftarrow x_1$，返回第二步

收敛性

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- **迭代函数** $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x_*) = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}$$

$\Rightarrow$ **牛顿法至少二阶局部收敛**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2!} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}$$

举例

demo_5_3.m

例：用 Newton 法求 $f(x) = x^3 - x - 1=0$ 的解

取迭代初始值 x_0=1.5时，收敛

取迭代初始值 x_0=0.6时，发散

应用举例：计算平方根

例： 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C=0$ 的正根

解： $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{C}{x_k}\right)$ ⇒

$$x_{k+1} - \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k - \sqrt{C}\right)^2$$

$$x_{k+1} + \sqrt{C} = \frac{1}{2x_k}\left(x_k + \sqrt{C}\right)^2$$

⇒ $$\frac{x_{k+1} - \sqrt{C}}{x_{k+1} + \sqrt{C}} = \left(\frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}}\right)^2$$

⇒ $$\frac{x_k - \sqrt{C}}{x_k + \sqrt{C}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{C}}{x_0 + \sqrt{C}}\right)^{2^k} \triangleq q^{2^k}$$

⇒ $$x_k - \sqrt{C} = 2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1 - q^{2^k}}$$

对任意 $x_0>0$，总有 $|q|<1$，即牛顿法收敛

牛顿法

- **牛顿的优点**

  至少二阶局部收敛，收敛速度较快，特别是当迭代点充分靠近精确解时。

  牛顿法是目前求解非线性方程 (组) 的主要方法

- **牛顿的缺点**

  - 对重根收敛速度较慢（线性收敛）
  - 对初值的选取很敏感，要求初值相当接近真解

    先用其它算法获取一个近似解，然后使用牛顿法

  - 每一次迭代都需要计算导数！

简化的Newton法

- 基本思想：用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \longrightarrow \boxed{\text{线性收敛}}$$

- 好处：只需要计算一次导数，即 $f'(x_0)$
- 缺点：只有线性收敛速度（假定方法是收敛的）

Newton下山法

example_4_7.m

- 基本思想：要求每一步迭代满足下降条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{保证全局收敛}}$$

- 具体做法：加下山因子 λ

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

- 下山因子的取法：

从 λ=1 开始，逐次减半，直到满足下降条件为止

弦截法

目的：避免计算 Newton 法中的导数，并且尽可能地保持较高的收敛性（超线性收敛）

- 弦截法（割线法）：用差商代替微商

弦截法

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- **弦截法迭代格式：**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

- **注：弦截法需要提供两个迭代初值**

弦截法几何含义

example_4_8.m