第二章

插 值 方 法

—— 多项式插值

—— Lagrange 插值

为什么插值

- 大多数实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系
- 但函数通常无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表
- **如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值?**

例： 已测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（^{0}C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如 500、600、800米…）处的水温。

数学工具：数值插值技术

什么是插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，且已经测得在点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0), \ \dots, \ y_n = f(x_n)$

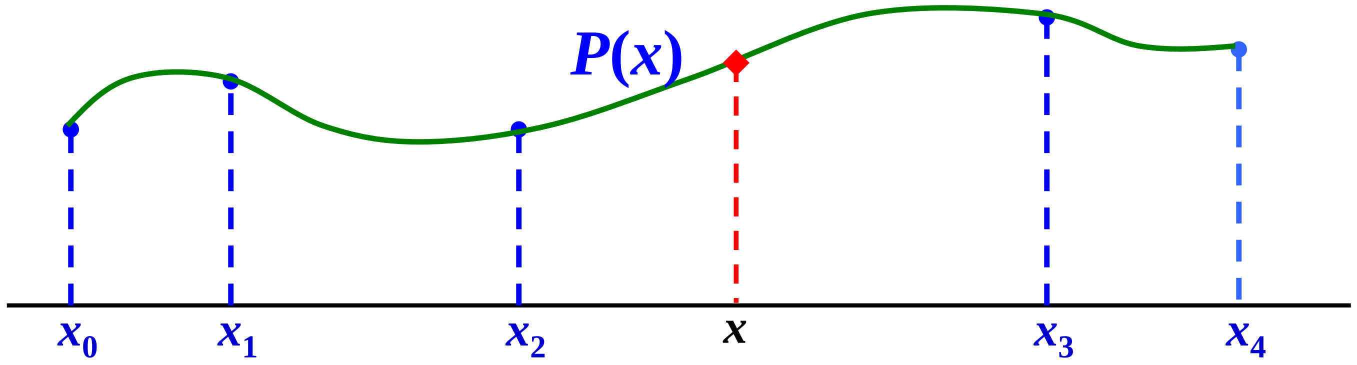
如果存在一个**简单易算**的函数 $p(x)$，使得

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**

- $[a, b]$ 为插值区间，x_i 为插值节点，$p(x_i) = f(x_i)$ 为插值条件
- 插值节点**无需递增排列**，但必须确保**互不相同**！
- 求插值函数 $p(x)$ 的方法就称为**插值法**

常用插值方法



- 常用插值法
  - **多项式插值：** $p(x)$ 为多项式，多项式最常用的插值函数
  - **分段多项式插值：** $p(x)$ 为分段多项式

- **三角插值：** $p(x)$ 为三角函数
- **有理插值：** $p(x)$ 为有理函数
- ……

内容提要

- 多项式插值
- Lagrange 插值
- 差商与 Newton 插值
- Hermite 插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

多项式插值

- **多项式插值**

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 个点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n)$

求次数 **不超过** n 的多项式

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n,$$

使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

注意：$p(x)$ 的次数有可能小于 n

多项式插值

定理（多项式插值的存在唯一性）

满足上述条件的多项式 $P(x)$ 存在且唯一。

证明：板书（*Vandermonde* 行列式）

注：该定理的证明过程事实上也给出了一种求 $p(x)$ 的方法，但较复杂，一般不用！后面将给出较简单的求法

线性插值

例（板书）：线性插值，即求一次多项式 $p(x)$，满足

$$p(x_0)=y_0\ ,\quad p(x_1)=y_1$$

$$p(x_0)=y_0,\quad p(x_1)=y_1 \Rightarrow \boxed{p(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)}$$

点斜式

$$\boxed{p(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}$$

重新整理

- 我们注意到，$p(x)$ 是两个一次多项式的线性组合

令 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

则 $\boxed{p(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)}$　　为什么能写成这个形式？

进一步观察可知：$\boxed{l_0(x_0)=1,l_0(x_1)=0}$　$\boxed{l_1(x_0)=0,l_1(x_1)=1}$

抛物线插值

例： 抛物线插值，即求二次多项式 $p(x)$，满足

$$p(x_0)=y_0\ ,\quad p(x_1)=y_1\ ,\quad p(x_2)=y_2$$

想法：如果能构造三个二次多项式 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$，满足

$$\boxed{\begin{array}{l} l_0(x_0)=1, l_0(x_1)=0, l_0(x_2)=0 \\ l_1(x_0)=0, l_1(x_1)=1, l_1(x_2)=0 \\ l_2(x_0)=0, l_2(x_1)=0, l_2(x_2)=1 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)}$$

问题：如何构造 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$？ $\Rightarrow$ 待定系数法

内容提要

- 多项式插值
- Lagrange 插值
  - 基函数法
  - Lagrange 基函数
  - Lagrange 插值余项与误差估计
- 差商与 Newton 插值
- Hermite 插值
- 分段低次插值
- 三次样条插值

基函数插值法

- **基函数插值法**

记 $Z_n(x) = \left\{\text{次数不超过 } n \text{ 的多项式的全体}\right\}$ → $n+1$ 维

设 $z_0(x), z_1(x), \ldots, z_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基，则插值多项式可表示为

$$p(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

① 寻找合适的基函数

② 确定插值多项式在这组基下的线性表示系数

通过基函数来构造插值多项式的方法就称为**基函数插值法**

Lagrange 插值

Lagrange 基函数

定义： 设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次 Lagrange **插值基函数**

通过构造法，可求得

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Lagrange 插值

- 两点说明
  - $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 构成 $Z_n(x)$ 的一组基
  - $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ 与插值节点有关，但与 $f(x)$ 无关

Lagrange插值

- **如何用 Lagrange 基函数求 $P(x)$**

设 $p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x)$

将 $p(x_i) = y_i$，$i = 0, 1, \ldots, n$ 代入，可得

$$\boxed{a_i = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n}$$

$$\Rightarrow p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \triangleq L_n(x)$$

$L_n(x)$ 就称为 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

线性与抛物线插值

- **两种特殊情形**
  - **线性插值多项式（一次插值多项式）：** $n=1$

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

  - **抛物线插值多项式（二次插值多项式）：** $n=2$

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

注：n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是 n 次的，但有时也会低于 n 次。如：二次插值中，如果三点共线，则 $L_n(x)$ 为直线

插值举例

例： 已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下 demo_2_1.m

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试分别用**线性插值**和**抛物线插值**计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解： 为了减小截断误差，通常选取插值点 x 邻接的插值节点

线性插值： 取 $x_0=0.5,\ x_1=0.6$ 得

$$L_1 = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad = 1.823x - 1.6046$$

将 $x=0.54$ 代入可得： $\ln 0.54 \approx L_1(0.54) = -0.6202$

插值举例

抛物线插值： 取 x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, 可得

$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) = -0.6153$

在实际计算中，一般不需要给出插值多项式的具体表达式

$\ln 0.54$ 的精确值为：$-0.616186\cdots$

可见，抛物线插值的精度比线性插值要高

Lagrange 插值简单方便，只要取定节点就可写出基函数，进而得到插值多项式，易于计算机实现。

误差估计

- 估计误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$ → **插值余项**

定理： 设 $f(x) \in C^n[a, b]$ (n 阶连续可微)，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在，则对 $\forall x \in [a,b]$，存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

证明：板书

- 注：余项中的 ξ_x 与 x 是相关的

插值余项

由插值条件可知：$R_n(x_i)=0$，$i=0, 1, \ldots, n$

⇒ $R_n(x)$ 在$[a,b]$上至少有 $n+1$ 个零点

⇒ $R_n(x)$ 可写成 $\boxed{R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)}$

对任意给定的 $x\in[a,b]$ $(x\neq x_i, i=0, 1, \ldots, n)$，构造辅助函数

$$\boxed{\varphi(t)=R_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)}$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 中有 $n+2$ 个互不相同的零点：$x, x_0, \ldots, x_n$

罗尔定理

设$f(x)\in C[a,b]$，且在(a,b)内可微；若$f(a)=f(b)=0$，则必存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

插值余项

条件： $f(x) \in C^n[a, b]$，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在

由 Rolle 定理可知 $\varphi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点；

同理可知 $\varphi''(t)$ 在 (a, b) 内至少有 n 个零点；

以此类推，可知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点，设为 ξ_x，即 $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$，$\xi_x \in (a, b)$。

又

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(n+1)}(t) &= R_n^{(n+1)}(t) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) \\
&= f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)! \\
&= f^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)!
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $K(x) = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ $\Rightarrow$ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

插值余项

- **两个特例**
  - **线性插值（两点插值，即 n=1）**

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)$$

  - **抛物线插值（三点插值，即 n=2）**

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

插值余项

- 几点说明
  - 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
  - ξ_x 与 x 有关，通常无法确定, 实际使用中通常是估计其上界

若 $\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$，则 $\boxed{\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left|x-x_i\right|}$

  - 计算点 x 上的近似值时，应尽量选取与 x 相近插值节点

Lagrange基函数性质

- **Lagrange 基函数的两个重要性质**

- 当 $f(x)$ 为一个次数 $\le n$ 的多项式时，有 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$

  故
  $$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \equiv 0$$

  即 n 次插值多项式对于次数 $\le n$ 的多项式是**精确**的

- 若 $f(x) = x^k$，$k \le n$，则有

  $$R_n(x) = x^k - \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = 0$$

  特别地，当 $k = 0$ 时有 $\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$

插值误差举例

例： 已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试估计线性插值和抛物线插值计算 ln 0.54 的误差

解：

线性插值　$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1)$$

$x_0=0.5,\ x_1=0.6,\ \xi\in(0.5,\ 0.6)$ ⟹ $\left|f^{(2)}(\xi)\right| \le \left|-\xi^{-2}\right| \le 4$

⟹ $$\boxed{\left|R_1(0.54)\right| \le \left|2(0.54-0.5)(0.54-0.6)\right| = 0.048}$$

插值误差举例

抛物线插值： $R_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$x_0=0.4$, $x_1=0.5$, $x_2=0.6$, $\xi\in(0.4, 0.6)$ $\Rightarrow$ $\left|f^{(3)}(\xi)\right|\le\left|2\xi^{-3}\right|\le 31.25$

$$\Rightarrow \left|R_2(0.54)\right|\le\frac{31.25}{3!}\left|(0.54-0.4)(0.54-0.5)(0.54-0.6)\right| = 0.00175$$

$$\left|R_1(0.54)\right|\le 0.048$$

抛物线插值通常优于线性插值。

插值误差举例

例： 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间 [-5, 5]，取等距节点，

试画出插值多项式 L 的图像

`example_2_6.m`

例： 设 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0, x_1, \ldots, x_5$ 的 Lagrange 插值基函数.

证明:

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=0$$

证明：板书