第五章

方程求根的迭代法

—— 二分法

—— 不动点迭代及其加速

内容提要

- 非线性方程求解基本概念
- 二分法
- 不动点迭代法及其加速
- 牛顿法、弦截法

非线性方程基本概念

基本概念

$$\boxed{f(x) = 0}$$

$$x \in R, \quad f(x) \in C[a,b]$$

- 若 $f(x)$ 是一次多项式，则称为**线性方程**；
  否则称为**非线性方程**

- **代数方程**：$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

n=1, 2, 3, 4 时有相应的求根公式，$n \geq 5$ 时不存在求根公式

- 非线性方程可能有(无穷)多个解，一般要强调 **求解区间**

- 非线性方程一般没有直接解法，通常**用迭代法求数值解**

二分法（对分法）

- 基本思想、数学原理、计算过程
- 收敛性分析

二分法（对分法）

- **基本思想**

  将**有根区间**对分，并找出根所在的小区间，然后再对该小区间对分，依次类推，直到有根区间的长度足够小为止。

- **数学原理：介值定理**

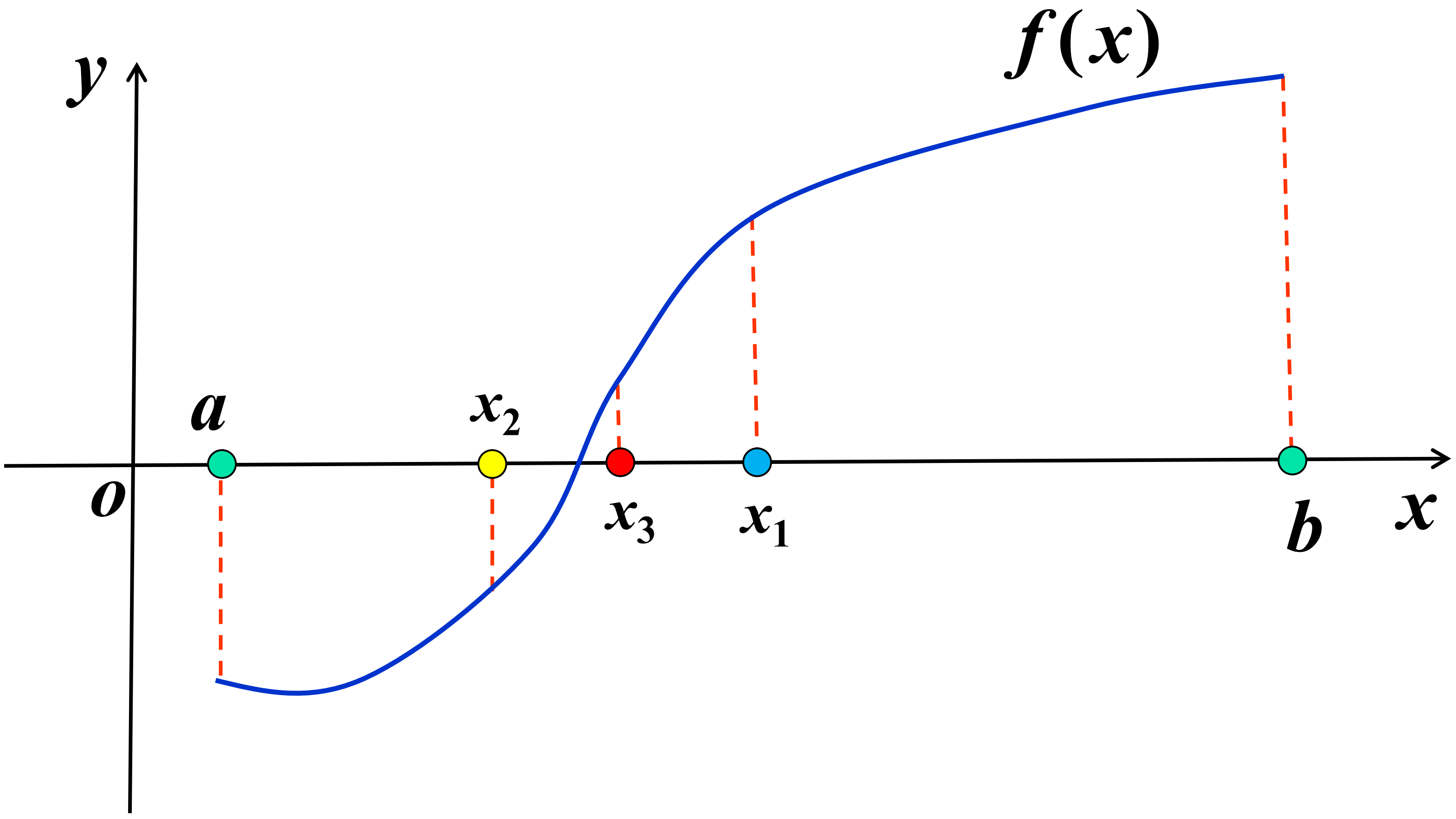
  设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\,f(b)<0$，则由介值定理可得，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$

- **适用范围**

  求有根区间内的 单重实根 **或** 奇重实根，即 $f(a)\,f(b)<0$

  用二分法求根，通常先给出 $f(x)$ 草图以确定有根区间

二分法（对分法）



二分法

example_0_2.m

算法 ：(二分法)

(1) 计算 $f(a)$，$f(b)$，若 $f(a)\,f(b)>0$ ，则算法失效，停止计算

(2) 令 $x=\dfrac{a+b}{2}$ ，计算 $f(x)$

(3) 若 $|f(x)|<\varepsilon$ 或 $|b-a|<\varepsilon$，停止计算，输出近似解 x

(4) 若 $f(a)\cdot f(x)<0$，则令 $b=x$; 否则令 $a=x$

(5) 返回第 2 步

- 优点：简单易用，总是收敛
- 缺点：收敛慢，不能求复根和偶数重根，一次只能求一个根
- 总结：一般用来计算解的一个粗糙估计

误差分析

记 $a_1 = a,\ b_1 = b$，第 k 步的有根区间为 $[a_k, b_k]$

$$\Rightarrow\quad |x_k - x_*| = \left|\frac{b_k + a_k}{2} - x_*\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{4} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

$$\Rightarrow\quad |x_k - x_*| \le \frac{b-a}{2^k} \to 0\ (k \to \infty)$$

结论：二分法总是收敛的！(条件：函数满足介值定理)

不动点迭代

- **基本思想**
- **迭代格式**
- **收敛性分析（全局收敛与局部收敛）**

不动点迭代基本思想

- 构造 $f(x)=0$ 的一个等价方程：

$$x=\varphi(x)$$

$f(x)=0 \quad \xleftrightarrow{\text{等价变换}} \quad x=\varphi(x)$

$f(x)$ 的零点 $\quad \longleftrightarrow \quad$ $\varphi(x)$ 的不动点

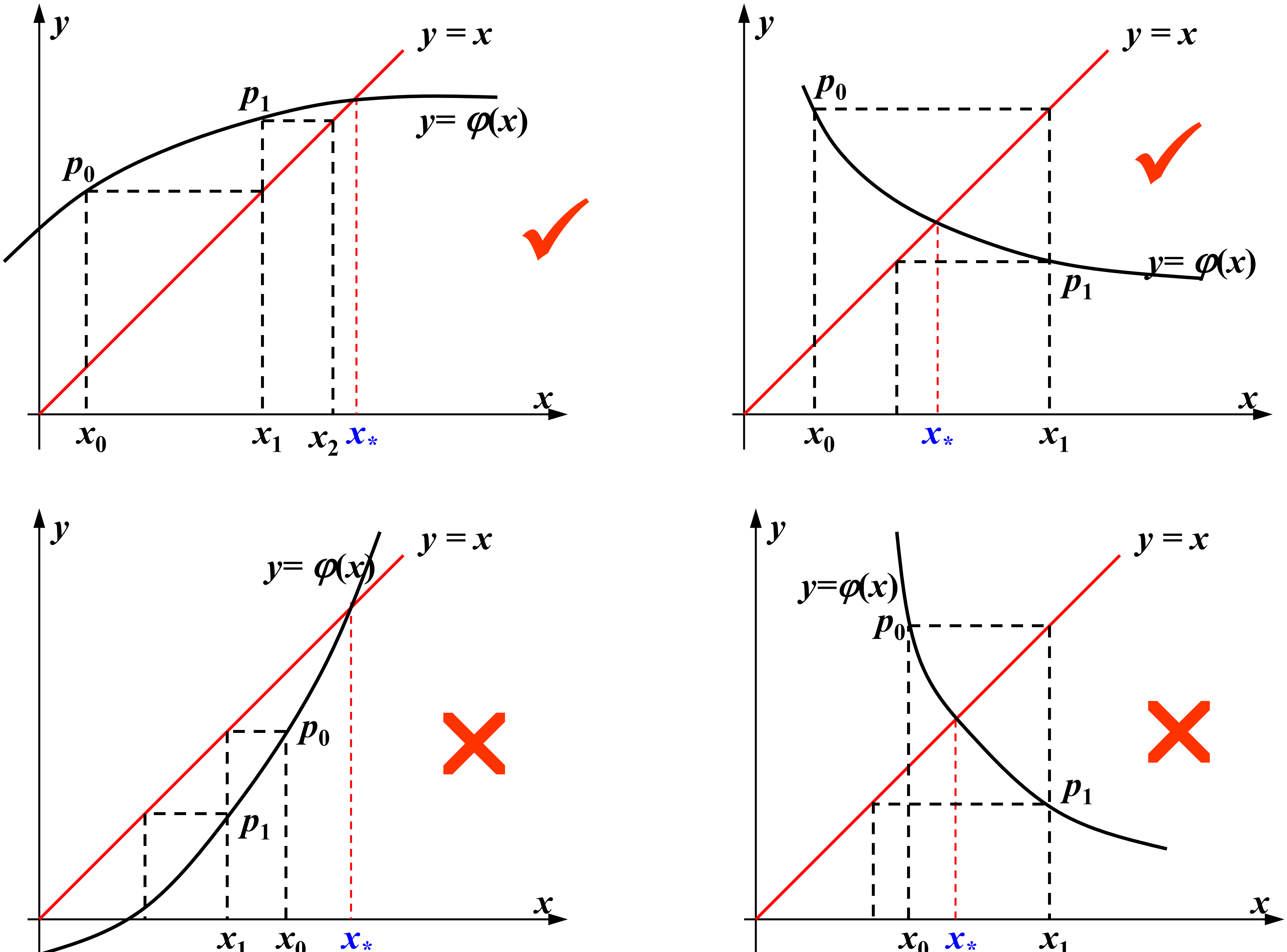
不动点迭代格式

- **任取一个迭代初值** x_0 **，计算**

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \dots \dots$$

得到一个迭代序列： $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

几何含义： **求曲线** $y = \varphi(x)$ **与直线** $y = x$ **的交点。**



y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x0
x1
x2
x*
y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1
y
y = x
y= φ(x)
p0
p1
x
x1
x0
x*
y
y = x
y=φ(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1

收敛性分析

设 $\varphi(x)$ 连续，若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$ ，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

$\Rightarrow$ $x_* = \varphi(x_*)$ 即 $\boxed{f(x_*) = 0}$

性质：若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$，则不动点迭代**收敛**，且 x_* 就是 $f(x)=0$ 的解；否则迭代法**发散**。

解的存在唯一性

定理： 设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi(x) \in [a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y \in [a,b]$ 有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \leq L\left|x-y\right|$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在**唯一的不动点** x_*

不动点迭代的收敛性判断

定理：设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且满足

(1) 对任意的 $x\in[a,b]$ 有 $\varphi(x)\in[a,b]$

(2) 存在常数 $0<L<1$，使得任意的 $x, y\in[a,b]$ 有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|$$

则对任意初始值 $x_0\in[a,b]$，不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛，且

$$|x_k - x_*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

注：一般来说，L 越小，收敛越快！

不动点迭代的收敛性判断

推论： 若 $\varphi(x) \in C^1[a,b]$，对任意 $x \in [a,b]$ 有 $\varphi(x) \in [a,b]$

且对任意 $x \in [a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

则上述定理中的结论成立。

以上两个结论中的 收敛性与初始值的选取无关！

全局收敛

举例

例：求 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间 [1, 2] 中的根

(1) $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow 1\le\varphi(x)\le 2 \quad (x\in[1,2])$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} \Rightarrow |\varphi'(x)|\le\frac{1}{3}\sqrt[3]{0.25}<1$$

✓

全局收敛

(2) $\varphi(x)=x^3-1 \Rightarrow 0\le\varphi(x)\le 7 \quad (x\in[1,2])$

$$\varphi'(x)=3x^2 \Rightarrow |\varphi'(x)|>1$$

✗

demo_5_1.m

不动点迭代的局部收敛

定义：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若存在 x_* 的某个 **δ-邻域** $U_\delta(x_*)=[x_*-\delta,\ x_*+\delta]$，对任意 $x_0\in U_\delta(x_*)$，不动点迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

产生的点列都收敛到 x_*，则称该迭代**局部收敛。**

定理：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续，且

$$|\varphi'(x_*)|<1$$

则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛

收敛速度

定义：设迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x_*，记 $e_k=x_k-x_*$，若

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$

其中常数 $C>0$，则称该迭代为 p **阶收敛**。

(1) 当 $p=1$ 且 $0<C<1$ 时称为**线性收敛**

(2) 当 $p=2$ 时称为**二次收敛**，或**平方收敛**

(3) 当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $C=0$ 时称为**超线性收敛**

● 若 $0<|\varphi'(x_*)|<1$，则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ **局部线性收敛**

基本收敛定理

定理：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x_* 的某邻域内连续，且

$$\varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_*) = 0,$$

$$\varphi^{(p)}(x_*) \neq 0$$

则迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶**局部收敛**的。且有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x_*)}{p!}$$

举例

例：求 $f(x)=x^2-3=0$ 的正根 $x_* = \sqrt{3}$

demo_5_2.m

(1) $\varphi(x) = x^2 - 3 + x \Rightarrow \varphi'(x_*) = 2\sqrt{3} + 1 > 1$

(2) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2-3}{4} \Rightarrow \varphi'(x_*) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1$

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right) \Rightarrow \varphi'(x_*) = 0$

$$\varphi''(x_*) = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$$

- **一般来说，$|\varphi'(x_*)|$ 越小，收敛越快！**

不动点迭代的加速

- **Aitken 加速技巧**

Aitken 加速

$$x_1 = \varphi(x_0) \Rightarrow x_1 - x_* = \varphi(x_0) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_1)(x_0 - x_*)$$

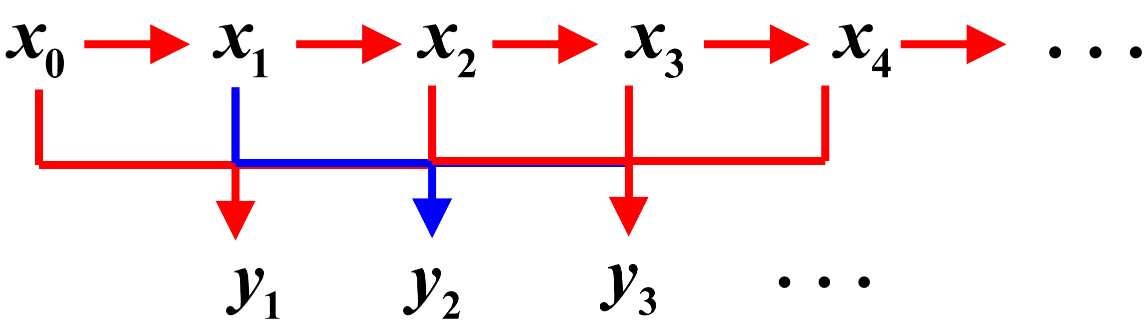
$$x_2 = \varphi(x_1) \Rightarrow x_2 - x_* = \varphi(x_1) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi_2)(x_1 - x_*)$$

若 $\varphi'(x)$ 变化不大，则可假定： $\boxed{\varphi'(\xi_1) \approx \varphi'(\xi_2)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1 - x_*}{x_2 - x_*} \approx \frac{x_0 - x_*}{x_1 - x_*}$$

$$\Rightarrow \quad x_* \approx x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} == y_1$$

Aitken 加速



$$\boxed{y_{k+1} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}}$$

收敛性： $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{y_{k+1} - x_*}{x_k - x_*} = 0$ ⟹ y_k **收敛较快**