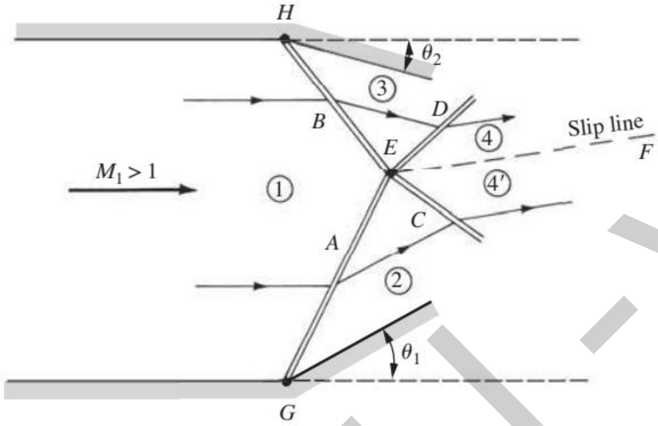
一、 斜激波交叉如图所示，已知$M_1 = 3.5$， $\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$, 求 slip line 与来流方向夹角、slip line 两侧总压比和熵差。



解题思路：

1）编写$\theta - \beta - M$ 关系代码；

2）根据M_1, θ_1, θ_2 , 求得β_1, β_2；

3）得到M_{12n}, M_{13n}和θ_4, $\theta_{4'}$；

4）求得M_2, M_3; p_2, p_3；

5）求得M_4, $M_{4'}$; p_4, $p_{4'}$；

6）由$p_4 = p_{4'}$求得 α；

7）计算$\dfrac{p_{40}}{p_{4'0}}$和$s_2 - s_1$.

理论推导：

1）求滑移线与水平线夹角α

由$\theta - \beta - M$ 关系：

$$\tan\theta = 2\cot\beta\,\frac{M^2\sin^2\beta - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\beta)}, \tag{1-1}$$

取$\gamma = 1.4$， 当$\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$, $M_1 = 3.5$时， 可求得β_1, β_2。从而由

$$M_{in} = M_i \sin\beta_i\,, \tag{1-2}$$

求得M_{1n}，M_{2n}。由正激波关系

$$M_{2n}^2 = \frac{1 + [(\gamma-1)/2]M_{1n}^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma-1)/2}, \tag{1-3}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{1n}^2 - 1\right), \tag{1-4}$$

得到M_{2n}，M_{3n}，p_3/p_1和p_2/p_1。再由

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\beta-\theta)}, \tag{1-5}$$

求得M_2，M_3。两斜激波交叉后沿 slid line 方向流动，记 slid line 与水平方向夹角为 α，由几何关系可确定

$$\theta_4 = \theta_2 + \alpha, \tag{1-6}$$

$$\theta_{4'} = \theta_1 - \alpha. \tag{1-7}$$

重复上述步骤求得$p_4/p_3, p_{4'}/p_2, M_4, M_{4'}$。联合$p_3/p_1$和$p_2/p_1$，由$p_4 = p_{4'}$可解出 α。

2）求$p_{40}/p_{4'0}$和$s_4 - s_{4'}$

上面已经计算出 4 和 4‘区域的m，p，带入静压-总压关系：

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{1-7}$$

再相除即可得到$p_{40}/p_{4'0}$，由

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = e^{-(s_2-s_1)/R}, \tag{1-8}$$

得

$$s_4 - s_{4'} = -R\ln\frac{p_{20}}{p_{10}}, \tag{1-9}$$

其中$R = 287$。

编程及运行结果： [附件：problem1.m]

此题的关键在于解(1-1)、(1-3)、(1-4)三个非线性方程。先写关于$\theta-\beta-M$关系函数：

```
function beta = GetBeta(m,theta)
    %θ-β-M关系
    %输入M,\theta返回、beta
    f = @(b) 2*cotd(b)*(m^2*(sind(b))^2-1)/(m^2*(1.4+cosd(2*b))+2)-tand(theta); %Eq9.23
    options = optimset('display','off');
    beta = fsolve(f,30,options); %此题中β约30°左右, 故取初值30
end
```

根据（1-1）和滑移线两侧气压相等非线性方程组函数：

```
function p2 =FunUnline(x,m1,m2,theta1,theta2,p1,p2)
    %x=[alpha,b11,b22]
    %alpha:滑移线与水平线夹角
    %b11,b22: 产生滑移线激波β角
    %p1,p2:出现滑移线前区气压
    %theta:产生滑移线激波θ角
    p2 = [2*cotd(x(2))*(m1^2*(sind(x(2)))^2-1)/(m1^2*(1.4+cosd(2*x(2)))+2)-tand(theta1-x(1));...%eq9.23
        2*cotd(x(3))*(m2^2*(sind(x(3)))^2-1)/(m2^2*(1.4+cosd(2*x(3)))+2)-tand(theta2+x(1));...%eq9.23
        (1+2.8/2.4*(m1*sind(x(2)))^2-1)*p1-(1+2.8/2.4*((m2*sind(x(3)))^2-1))*p2;];%p1 = p2
end
```

求α：

```
%本题关键在于构造并解非线性方程组
%气流发生了两次反射
%第一次反射已知可按顺序求解
%第二次反射入射角与由未知角决定, 需构造方程组
%调用matlab内置函数fslove
%θ-β-M关系函数: GetBeta

%第一次反射
%已知量
m1 = [3.5,3.5];
theta1 = [20,10];

%计算β1
beta1 = [GetBeta(m1(1),theta1(1)),GetBeta(m1(2),theta1(2))];

%计算M1n
m1n = m1.*sind(beta1);

%计算m2n
%Eq 8.78  γ=1.4
m2n = sqrt((1+0.2.*m1n.^2)./(1.4.*m1n.^2-0.2));

%计算m2
m2 = m2n./sind(beta1-theta1);

%设p1=1,计算第二区气压p2
p2 = 1+2.8/2.4.*(m1n.^2-1); %Eq 8.65

%第二次反射
%构造非线性方程组求解滑移线,function FunUnline
% 由eq 9.23 和 滑移线两侧压力相等得到方程
%α: 滑移线与水平线夹角
%p3:第三区气压
x0 = [10 10 10]; %给定初始值
options = optimset('Display','off');
x = fsolve(@FunUnline,x0,options,m2(1),m2(2),theta1(1),theta1(2),p2(1),p2(2));

%滑移线与水平线夹角
alpha = x(1)
```

求 滑 移 线 两 侧 压 强 比 和熵差：

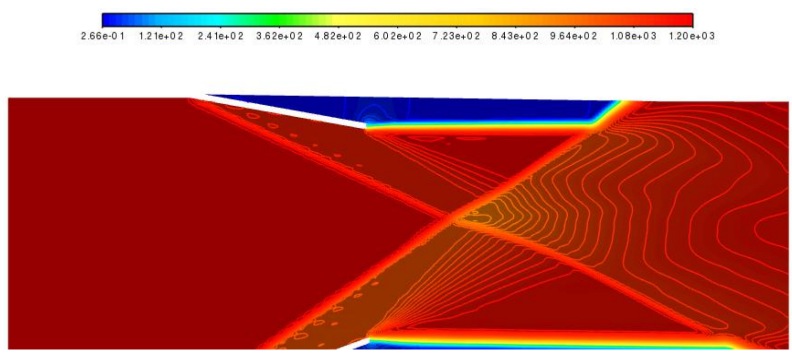
```
%求滑移线两侧马赫数
theta2 = [theta1(1)-alpha theta1(2)+alpha]; %二次反射θ
beta2 = [x(2) x(3)]; %二次反射β
m2n_ = m2.*sind(beta2); %二次反射m1n
m3n = sqrt((1+0.2.*m2n_.^2)./(1.4.*m2n_.^2-0.2)); %二次反射m2n
m3 = m3n./sind(beta2-theta2);

%滑移线两侧总压比静压
p0_p = (1+0.2*m3.^2).^(1.4/0.4); %eq8.42

%滑移线两侧总压比
pdp = p0_p(1)/p0_p(2)

%滑移线两侧熵差
%eq8.73
ds=-287*log(pdp)
```

运行结果：

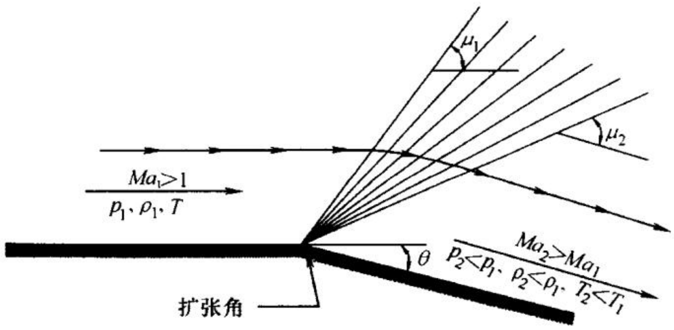
```
alpha =
  10.473637289196395


pdp =
   1.035244222284756


ds =
  -9.940923020986268
```

即滑移线与来流方向夹角约为10.4736°，两侧熵之比约为1.0352，熵差9.9409.

ansys 仿真结果：



二、$M_1 = 2$, $\theta = 20°$，画膨胀波流线。



理论推导：

根据膨胀波理论，波头马赫角

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{M_1} \tag{2-1}$$

波尾马赫角

$$\mu_2 = \arcsin \frac{1}{M_2} \tag{2-2}$$

普利特-迈耶函数

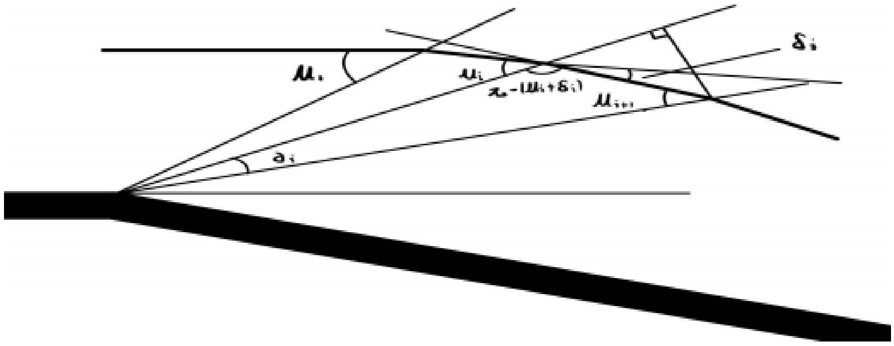
$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg} \sqrt{(M^2-1)} \tag{2-3}$$

其中$\gamma = 1.4$。对于给定M_1，计算出$v(M_1)$；然后给定 θ，由

$$v(M_2) = v(M_1) + \theta \tag{2-4}$$

得到$v(M_2)$,再根据（2-3）求得M_2.

以拐点为原点建立极坐标系，在膨胀波扇形域内$(\mu_1 \le \mu \le \mu_2)$，



记δ_i为流体流经第 i 个马赫波偏转角度，μ_i, l_i为某一流线经过第 i 个马赫波位置，由几何关系

$$\frac{l_{i+1}}{\sin(\mu_i+\delta_i)}=\frac{l_i}{\sin(\mu_{i+1})} \tag{2-5}$$

Equction9.32 and equction9.39 in Anderson

$$d\theta=\sqrt{M^2-1}\frac{\mathrm{dV}}{V} \tag{2-6}$$

$$\frac{\mathrm{dV}}{V}=\frac{1}{1+[(\gamma-1)/2]M^2}\frac{\mathrm{dM}}{M} \tag{2-7}$$

so,

$$d\theta=\frac{\sqrt{M^2-1}}{1+[(\gamma-1)/2]M^2}\frac{\mathrm{dM}}{M} \tag{2-8}$$

from (2-1)

$$M=\frac{1}{\sin\mu} \tag{2-9}$$

so

$$d\theta=-\frac{\cos^2\mu}{\sin^2\mu+0.2}d\mu \tag{2-10}$$

即

$$\delta_i=\frac{\cos^2\mu_i}{\sin^2\mu_i+0.2}(\mu_i-\mu_{i+1}) \tag{2-11}$$

由（2-6）（2-1)，给定初值μ_1, l_1步长$d=(\mu_{i+1}-\mu_i)$，即可得膨胀波扇形域流线。

在极坐标系中，记流线上的点为（α，l），则

$$\alpha_{i+1}=\alpha_i-\delta_i-d \tag{2-12}$$

变换到直角坐标：

$$x=l\cos\alpha$$
$$y=l\sin\alpha \tag{2-13}$$

对于波前流域($\mu>\mu_1$)

$$y=l_1\sin\mu_1 \tag{2-14}$$

对于波后流域($\mu<\mu_2$)

$$x=x_2+l_2\cos\mu_2$$
$$y=y_2+l_2\sin\mu_2 \tag{2-15}$$

编程与运行结果： [附件：problem2.m]

先根据（2-3）编写m2计算函数：

```
function GetM2(v2) %已知v2,求m2
    myfun = @(m2,v2) sqrt(6)*atand(sqrt(1/6*(m2^2-1)))-atand(sqrt(m2^2-1))-v2;
    fun = @(m2) myfun(m2,v2);    % function of b alone
    fzero(fun,2) %以下用到的β在40附近
end
```

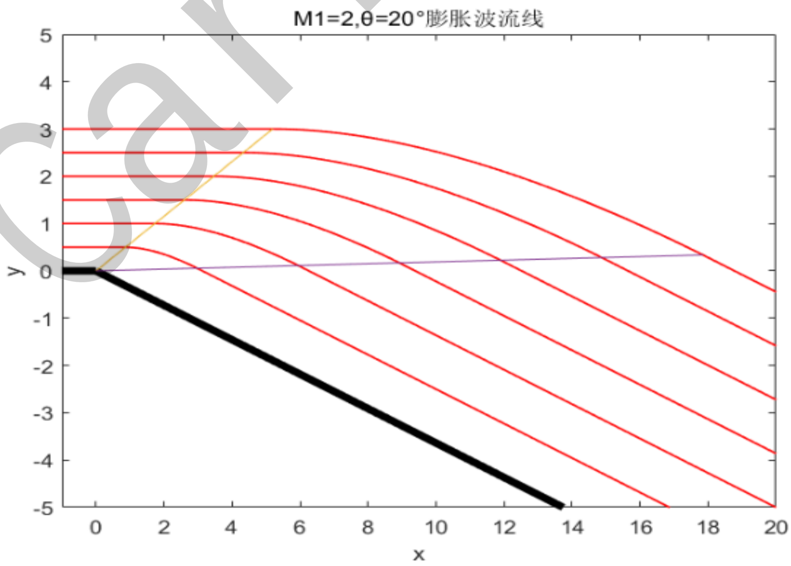
准备阶段：

```
clc,clear all;
%此题关键在于构造膨胀波流线微观几何关系
%先计算出膨胀波边界
%再根据几何关系绘制膨胀波流线
%绘制波前波后流线

%求膨胀波边界
%parameters
m1 = 2;
theta = 20;

%计算v2
v1 = sqrt(6)*atand(sqrt(1/6*(m1^2-1)))-atand(sqrt(m1^2-1));%eq9.42
v2 = v1+theta; %eq9.43

%计算m2
%解非线性方程
%调用fslove函数
myfun = @(m,v) sqrt(6)*atand(sqrt(1/6*(m^2-1)))-atand(sqrt(m^2-1))-v;
fun = @(m2) myfun(m2,v2);
options = optimset('display','off');
m2 = fsolve(fun,2,options); %预估值为2

%计算边界us, uf
us = asind(1/m1);
uf = asind(1/m2);

%绘制边界
%取边界突变点为原点
plot([-10,0],[0,0],'LineWidth',4,'Color',[0,0,0]);
hold on;
plot([0,15*cosd(theta)],[0,-15*sind(theta)],'LineWidth',4,'Color',[0,0,0]);
axis([-1 20 -5 5]);
xlabel('x');
ylabel('y');
title('M1=2,θ=20°膨胀波流线');
```

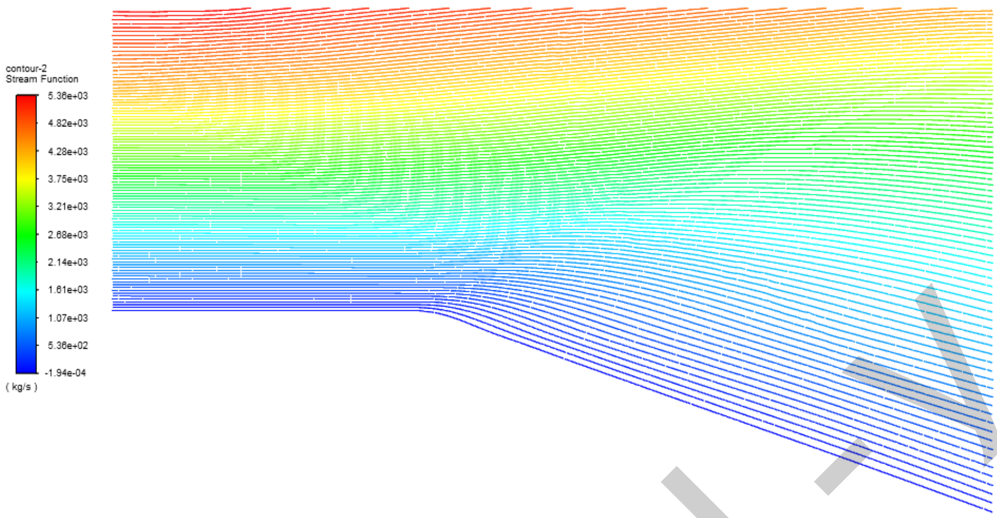

绘图：

```
%绘制膨胀波流线
%对膨胀波取微元
%u>0,直接调用几何关系
N = 100; %n等分
u = fliplr(linspace(uf,us,N));
for ls = 1:6 %控制流线数
    l(1) = ls; %初始模长
    d(1) = 0; %\deta
    a(1) = us; %alpha
    for i=1:N-1
        d(i+1)=(cosd(u(i)))^2/((sind(u(i)))^2+0.2)*(u(i)-u(i+1));%eq11
        l(i+1)=l(i)*sind(u(i)+d(i))/sind(u(i+1));%eq5
        a(i+1) = a(i)-d(i)-(us-uf)/N;
    end

    %坐标变换
    x = l.*cosd(a);
    y = l.*sind(a);
    plot(x,y,"LineWidth",1,'Color',[1,0,0]);

    %绘制波前
    plot([-1,x(1)],[y(1),y(1)],"LineWidth",1,'Color',[1,0,0]);

    %绘制波后
    plot([x(N),15*cosd(theta)+x(N)],[y(N),-15*sind(theta)+y(N)],"LineWidth",1,'Color',[1,0,0]);

    %绘制膨胀波
    plot([0,x(1)],[0,y(1)]);
    plot([0,x(N)],[0,y(N)]);
end
```

运行结果：



ansys仿真结果：


contour-2
Stream Function
5.36e+03
4.82e+03
4.28e+03
3.75e+03
3.21e+03
2.68e+03
2.14e+03
1.61e+03
1.07e+03
5.36e+02
-1.94e-04
(kg/s)