

《结构振动基础》

期中课程作业论文

基于输入整形方法的闸道直杆振动抑制

姓 名: [REDACTED]

学 号: [REDACTED]

指导老师: [REDACTED]

2021 年 12 月

摘要:

输入整形技术是开环输入调制方法,利用开环来抑制系统的残留振荡,因其简单高效而在高精度高速度要求的系统中得到了广泛应用,但对于像道闸杆这样仅要求快速而不需要精度系统的研究比较匮乏。本文基于输入整形方法研究道闸直杆的残余振动抑制,从系统推导输入整形原理出发,巧妙建立了道闸杆振动简化模型,最后通过对各种输入整形器输入的 simulink 仿真分析,比较了各个整形器的优缺点,找到适合且可实现的整形方法。通过输入整形方法缩短道闸杆响应周期,提高道闸系统响应速度,对缓解通道口交通拥堵有重要作用。

关键字: 输入整形; 振动抑制; 道闸杆; Simulink。

目录

一 绪论.....	1
1.1 课题研究的背景与意义.....	1
1.2 道闸杆基本结构.....	1
1.3 道闸杆残余振动抑制研究现状.....	2
1.4 本文研究内容.....	2
二 输入整形方法.....	2
2.1 输入整形方法概述.....	2
2.2 输入整形方法基本原理.....	3
2.3 输入整形基本方程.....	5
2.4 典型输入整形器.....	7
2.4.1 零振动（ZV）整形器.....	7
2.4.2 零震荡零导数 ZVD 整形器.....	7
2.4.3 极不灵敏（EI）整形器.....	8
2.4.4 最优化整形器.....	8
三 道闸杆振动模型.....	9
3.1 道闸杆物理模型的简化.....	9
3.2 落杆残余振动模型.....	10
3.3 抬杆残余振动模型.....	12
3.4 传递函数的测定.....	13
3.4.1 固有频率的测量.....	14
3.4.2 阻尼系数的测量.....	14
3.5 道闸杆传递函数确定.....	15
四、输入整形方法抑制道闸杆残余振动.....	15
4.1 ZV 整形.....	15
4.2 ZVD 整形.....	16
4.3 EI 整形.....	17
4.4 最优化整形.....	17
五 总结.....	18
参考文献：	19
附件：	19

一 绪论

1.1 课题研究的背景与意义

当今社会的经济正在飞速发展，我国也早已进入快速发展的信息时代。道闸作为车流控制的现代化产物，随着汽车工业的不断发展及汽车数量的日益剧增，对道闸的需求量也越来越大，对道闸的性能也提出了更高的要求。随着人工智能技术的发展，道闸不再仅仅是传统的挡车器，智能道闸在普通道闸的基础上增加一些智能化的设计，使其具有识别、计费、显示、智能管理等很多数字化功能，从而广泛应用于停车场、收费站、小区门口等众多车流密集场所。

随着人们生活速度的加快，人们对出行速度也越来越高。驾车出行无疑是一种快速便捷的出行方式，但在很多车流密集的地方，堵车几乎成了驾车的常态。尤其是早高峰的停车场门口、节假日的高速收费站总要堵上几分钟甚至几小时，每台车通过道闸杆的时间与道闸系统的识别和响应速度有很大关系，其中为实现“一车一杆”而等待道闸杆抬起和降落的时间占了绝大部分。所以对抑制道闸杆残余振动的研究不仅可以延长道闸的寿命，节约成本；还可以提高道闸杆响应所需时间，从而减少拥堵。

1.2 道闸杆基本结构

道闸是集磁、电、机械控制于一体的机电一体化产品。如图 1 所示，一般由箱体、电动机、离合器、机械传动部分、电子控制系统与闸杆等部分组成，其中振动抑制主要靠传动部分和道闸杆本身刚度实现。以复旦大学正门软杰 RJ-106 道闸为例，传动部分采用经典四连杆平衡设计，输入功率小且具有较大阻尼；闸杆主体采用 2mm 冷轧方钢，杆体内加整条结构钢以保证其刚度和强度两者结合可以到达一定抑制效果。较为新进的道闸系统还会采用交流变频技术增强减振效果。

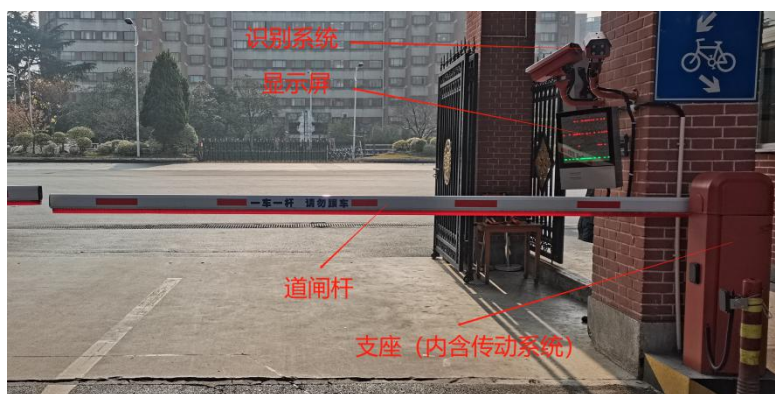


图 1：道闸杆基本结构

1.3 道闸杆残余振动抑制研究现状

目前人们对残余振动抑制的研究主要集中在半导体、航空航天、机械加工等高精度领域,对于像道闸杆这样精度要求较低的场合一般使用有较大冗余的系统来达到目的,这样造成了很多浪费,而且对系统损耗较大。比如最初的的道闸钢残余振动抑制完全靠直杆本省刚度,这种直杆十分笨重,需要较大力矩来实现。目前对道闸杆残余振动的研究主要有

- 1) 开发轻量化、高强度新材料;
- 2) 优化传动系统,追求稳定输出;
- 3) 对不同电机输入信号整形处理,得到残余振动较小的响应。

本文在以上方法的基础上进行研究。

1.4 本文研究内容

本文研究内容是运用输入整形方法抑制道闸杆残余振动,研究对象是道闸直杆,对输入道闸直杆的信号(即传动系统输出信号)进行整形,再输入到直杆,从而减小输入停止后直杆残余振动。当然,只要求出整形后传动系统输出信号,并可通过传递函数环境预测得到传动系统输入信号,甚至电机输入信号。

文章第一部分介绍了道闸杆振动抑制的研究的应用背景、应用前景已经研究现状。第二部分介绍并系统推导了输入整形方法的基本原理,并给出了几种常见输入整形器。第三部分建立了道闸杆振动模型,求出来传递函数。第四部分对用输入整形方法抑制残余振动的过程进行数值仿真,比对抑制效果。

二 输入整形方法

2.1 输入整形方法概述

随着科技水平的提,我们对控制系统的速度和精度要求不断提高。但对于一个要求高精度的系统,比如机械臂、塔吊、码头集装箱等,一般由于模型中存在着振荡模态,所以当其到达期望的位置时,由于存在残余振动而不能立刻停下来。为了满足我们对速度的需求,我们需要系统尽快停止,即振动抑制。常规的振动抑制方法有增加系统阻尼、提高系统刚度和建立复杂模型,采用复杂控制器等。但是,这些方法都有一定的缺陷。系统中加入可变阻尼将会导致设计复杂,阻尼器的增加,不仅会增加成本,有时甚至不可能实现;如果通过神经网络自校正控制算法及变结构等复杂控制方法的控制来实现闭环控制,则

需要建立复杂的数学模型，而且需要复杂的测量设备来配合实施；而基于 J 控制的高阶轨迹规划、新加减速方法等运动轨迹算法，必须进行大量复杂的数学运算，这会对系统的实时控制性能造成影响。鉴于此，输入整形方法无疑是一种相对比较简单的方法。

输入整形方法是一种开环前馈控制技术能有效抑制系统残余振动，缩短系统调节时间。20 世纪 50 年代，Smith 从相隔半个周期的两个正弦信号可以相互抵消这一原理出发，将一个给定振幅的阶跃按照时间段分成两个小幅值的阶跃，这种方法称为 Posicast 控制。90 年代初，麻省理工学院的 N.C.Singer 等学者改进了这种方法，并将其称为输入整形方法。输入整形改善了鲁棒性差的问题，在现实生活中得以广泛应用，是近些年发展起来的一种有效的振动抑制方法。该方法考虑了系统的物理特性和振动特性，使各振动模态在系统输入信号的响应中自我抵消，根本上抑制了系统的振动，且运动过程中不需要额外的传感器，应用起来十分方便。当控制对象的各振动模态参数可以被精确获得时，即使是基本的输入整形器也能够获得良好的振动抑制效果。

输入整形技术在现实生活中有着广泛的用途。众多研究人员在输入整形器的设计方法、自适应输入整形器、最优输入整形器、非线性系统输入整形器的设计及各整形器的适用范围等方面进行了大量研究，已取得相当多的研究成果。

2.2 输入整形方法基本原理

输入整形方法抑制振动，顾名思义就是通过对输入信号进行整形再输入系统来减小系统残余振动。作为一种前馈控制，输入整形根据系统的特性进行设计求解，得到不同幅值和时滞时间的脉冲序列，然后将输入信号与整形器脉冲序列进行卷积，产生整形后的控制信号来控制系统。其结构如图所示：

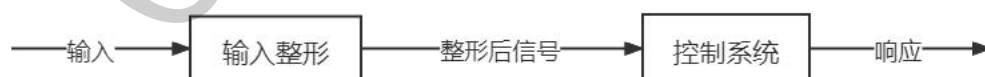


图 2: 输入整形方法基本结构

试想在小车内挂着一个球，小车从静止开始运动，小球位置必然滞后与小车，此时小车达到目的地停下时小球必然继续残余振动。而如果我们使小车先加速起步再刹车到目的地前某一位置，然后再继续起步走后面一段距离，这样很有可能当小车到达目的地时小球刚好停止。我们知道必然存在这么一个这样位置，而输入整形方法就是根据小车和小球参数去找到这个位置。

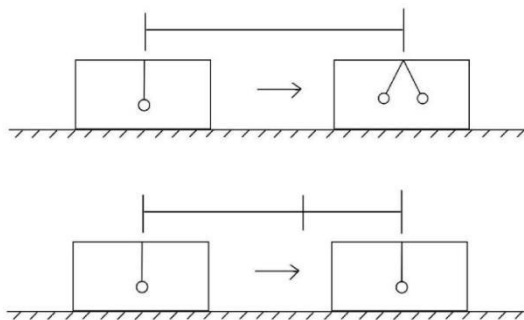


图 3: 小车摆球系统输入整形示意图

对于任何一个运动系统，当一个输入信号输入系统必然产生残余振动时，通过输入整形方法我们可以考虑把这个信号分成两个或多个信号依次输入系统，这样就可能使各个信号产生的残余振动相互抵消，从而达到抑制残余振动的目的。假设有一个系统固有频率 $\omega = 2$ ，阻尼比 $\xi = 0.1$ ，我们在 t_1 时刻对其施加一个 A_1 的阶跃信号，他将产生一个残余振动

$$x_1 = -e^{-0.2t} \sin(2t) \quad (1)$$

而如果我们在 t_2 时刻向系统输入 A_2 的阶跃信号，则该信号产生的残余振动

$$x_2 = -e^{-0.2t} \sin(2t) \quad (2)$$

该残余振动与上式残余振动大小相等，方向相反，刚好相互抵消，从而使 t_2 之后系统静止。

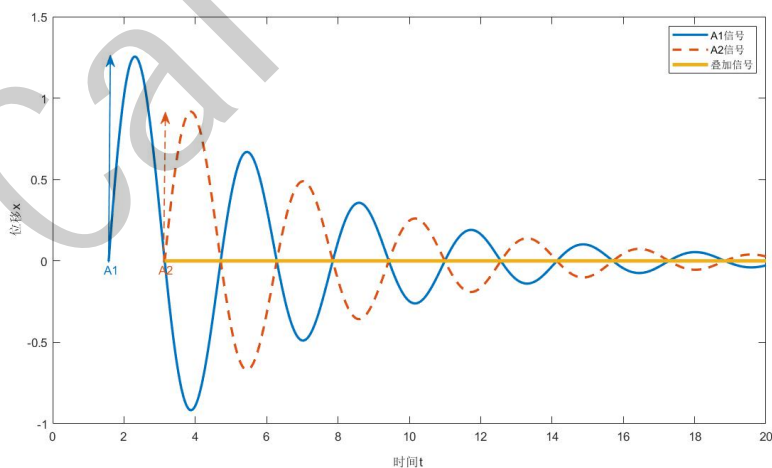


图 4: 输入序列叠加效果图

容易看出，输入整形方法的关键是确定输入信号序列的赋值和时滞(时间间隔)。

2.3 输入整形基本方程

输入整形的主要内容是构造一个合适幅值和时滞的脉冲序列，与系统的输入进行卷积，以整形后的输入来对系统进行驱动，因此被称为输入整形器。其基本结构为

$$F(s) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-s t_i} \quad (3)$$

其中 A_i 和 t_i 分别为脉冲序列的赋值和时滞， n 为脉冲序列中的脉冲数。整形的过程如图 4 所示。

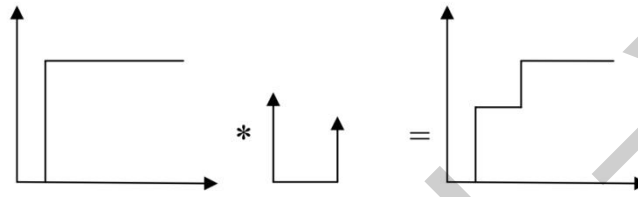


图 5: 输入整形过程示意图

对于一个二阶系统，传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4)$$

其中 ω_n 为系统无阻尼固有频率， ξ 为系统阻尼比。输入单位脉冲

$$\delta = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

其响应为

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (6)$$

其中 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ 为系统阻尼固有频率。所以输入一个赋值为 A_i 、时滞为 t_i 的脉冲，则单位脉冲输入的响应为

$$o_i(t) = \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n(t-t_i)} \sin \omega_d(t-t_i). \quad (7)$$

系统脉冲响应为脉冲序列响应的叠加

$$o(t) = \sum o_i(t) = \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n(t-t_i)} \sin \omega_d(t-t_i) \quad (8)$$

运用差角公式

$$o(t) = \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n (t-t_i)} (\sin \omega_d t \cos \omega_d t_i - \cos \omega_d t \sin \omega_d t_i) \quad (9)$$

去掉括号

$$o(t) = \sin \omega_d t \cdot \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n (t-t_i)} \cdot \cos \omega_d t_i - \cos \omega_d t \cdot \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n (t-t_i)} \cdot \sin \omega_d t_i \quad (10)$$

变形得

$$o(t) = \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} (\sin \omega_d t \cdot \sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \cos \omega_d t_i - \cos \omega_d t \cdot \sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \sin \omega_d t_i) \quad (11)$$

整理得脉冲序列输入的响应的标准形式

$$o(t) = \sum \frac{A_i \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sqrt{(\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \cos \omega_d t_i)^2 + (\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \sin \omega_d t_i)^2} \sin(\omega_d t - \phi) \quad (12)$$

$$\text{其中 } \phi = \arctg \frac{\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \cos \omega_d t_i}{\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \sin \omega_d t_i}。$$

定义输入结束时(t_n)，序列脉冲输入响应的赋值与单位脉冲输入响应的赋值的比值为残留振荡百分比V，即在 $t = t_n$ 时，将式~和式~的赋值相除得到

$$V(\xi, \omega_n) = e^{-\xi \omega_n t_n} \sqrt{(\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \cos \omega_d t_i)^2 + (\sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \sin \omega_d t_i)^2} \quad (13)$$

消除残余振动，即

$$V = 0 \quad (13)$$

显然只能根号下的值为零，即

$$\begin{cases} \sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \cos \omega_d t_i = 0 \\ \sum A_i e^{\xi \omega_n t_i} \cdot \sin \omega_d t_i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 A_i 和 t_i 为待求未知数。

解这两个方程即可得到系统输入整形器，所有我们称此方程为二阶系统输入整形的基本方程。任意的线性系统都可以用二阶系统来近似，所以统称为输入整形基本方程。容易看出这里有 $2i(i \geq 2)$ 个未知数，但我们只有两个方程，所有这是一个不定方程组，为使方程确定，我们需根据实际需求添加方程从而得到确定

解。

2.4 典型输入整形器

在输入整形基本方程的基础上, 根据常见需求添加一些方程, 得到以下四个常用的输入整形器。

2.4.1 零振动 (ZV) 整形器

ZV 整形器是最简单的整形器, 只有两个脉冲 ($i = 2$)。为使时间最短, 可令

$$t_1 = 0 \quad (15)$$

为保证系统最终达到目标位置, 且要求系统响应不超调, 则增益满足

$$\sum A_i = 1, A_i > 0 \quad (16)$$

设计 ZV 整形器

$$F_{ZV}(s) = A_1 + A_2 e^{-t_2 s} \quad (17)$$

则

$$A_1 + A_2 = 1 \quad (18)$$

把 (15) 式带入 (14) 式得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 e^{\xi \omega_n t_2} \cos \omega_d t_2 = 0 \\ A_2 e^{\xi \omega_n t_2} \sin \omega_d t_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

再结合 (18) 式, 求得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + e^{\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} & \frac{e^{\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{1 + e^{\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (20)$$

2.4.2 零震荡零导数 ZVD 整形器

ZV 整形器能很好的抑制残留振动, 但当模型参数不准确时, ZV 整形器的零点不能有效的对消系统的零点, 从而不能有效的消除残留振动。为了提高整形器的鲁棒性, 在 ZV 整形器的基础上对式 $V(\omega, \xi)$ 的微分方程进行约束, 为系统配置多重零点, 即

$$\frac{d}{d\omega} V(\omega, \xi) = 0 \quad (21)$$

为避免系统超静定，需增加一个脉冲($i = 3$)。式~相当于要求系统方程在固有频率处有两重极点，这样要求 ZV 整形器满足

$$(F_{ZV})^2 = 0 \quad (22)$$

即

$$A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2 e^{-2t_2s} = 0 \quad (23)$$

联立 (21) (22) (23) 可解得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2k+k^2} & \frac{2k}{1+2k+k^2} & \frac{k^2}{1+2k+k^2} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中 $k = \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ 。

2.4.3 极不灵敏 (EI) 整形器

在实际工程中，系统运行时，参数会变化，导致模型不准确，为了能使整形器能有效的抑制残留振动，整形器需要具有很强的鲁棒性。此时不再要求在系统固有频率点处振动为零，只需在固有频率附近处使系统的残留振动小于或等于允许的残留振动幅值 V_{exp} ，此方法称为 EI 整形。约束条件

$$\begin{aligned} V(\omega_r, \xi) &= V_{\text{exp}} \\ V(\omega_l, \xi) &= 0 \\ V(\omega_u, \xi) &= 0 \\ \frac{d}{d\omega_n} V(\omega_r, \xi) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

其中 ω_l, ω_u 分别为固有频率左侧和右侧频率。用 matlab 符号运算解得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+V_{\text{exp}}}{4} & \frac{1-V_{\text{exp}}}{2} & \frac{1+V_{\text{exp}}}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} \end{bmatrix}。 \quad (26)$$

2.4.4 最优化整形器

前面三种典型的整形器时滞需为系统半振动周期的整数倍，根据最优理论设计最优输入整形器，时滞可任意选取，能在更短时间内将残留振动抑制为零，有效地提高工作效率。

根据式 (4)，我们知道一个二阶系统的传递函数必然存在极点

$$p = -\xi\omega_n \pm j\omega_d \quad (27)$$

极点往往对系统不利，最优输入整形的原理就是用整形器的零点集覆盖了系统的极点。我们知道

$$\lim_{s \rightarrow p_1, p_2} \frac{(e^{sT} - e^{p_1 T})(e^{sT} - e^{p_2 T})}{(s - p_1)(s - p_2)} \neq 0 \quad (28)$$

因此可设计一种最优化整形器

$$F_m = C(e^{sT} - e^{p_1 T})(e^{sT} - e^{p_2 T})e^{-2st} \quad (29)$$

展开得

$$F_m(s) = C(e^{2sT} - (e^{p_1 T} + e^{p_2 T})e^{sT} + e^{(p_1 + p_2)T})e^{-2st} \quad (30)$$

把极点带入

$$F_m(s) = C[1 - 2(e^{-\xi\omega_n T} \cos \omega_d T)e^{-sT} + e^{-2\xi\omega_n T}e^{-2sT}] \quad (31)$$

写成标准形式

$$F_m(s) = A_1 + A_2 e^{-Ts} + A_3 e^{-2Ts} \quad (32)$$

其中赋值和时滞分别为

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{C} \\ A_2 &= -\frac{2e^{-\xi\omega_n T} \cos \omega_d T}{C} \\ A_3 &= \frac{e^{-2\xi\omega_n T}}{C} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= T \\ t_3 &= 2T \end{aligned} \quad (34)$$

为满足停在目标位置，带入式（16）解得

$$C = 1 - 2e^{-\xi\omega_n T} \cos \omega_d T + e^{-2\xi\omega_n T} \quad (35)$$

从上面推导可以看出，无论 T 取何值均可消除系统极点。基于最优化理论，我们可以取尽可能小的时滞 T，保证系统响应速度。

三 道闸杆振动模型

3.1 道闸杆物理模型的简化

道闸杆的残余振动主要有直杆与传动系统铰接处的铰接残余振动和由于直

杆的柔性自身的横振动两种形式。铰接处中运用四连杆传动设计有效抑制了传动系统与直杆铰接残余振动，因此可以把铰接处看作固支。道闸直杆的柔性横振动模型与杆密度分布有关，而道闸杆本身并非单一均质材料，求解比较复杂。这里采用质点和无质量杆近似替代，如图 6 所示：

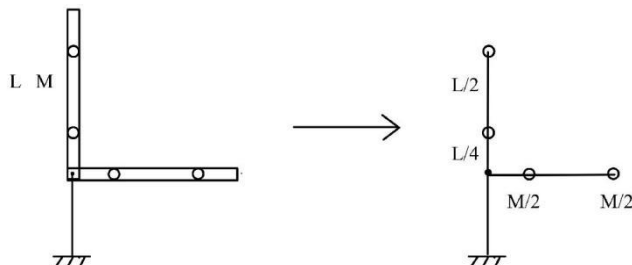


图 6：道闸杆力学模型等效

将质量为 M 长度为 L 的直杆等分为两段，分别将两段的质量 $M/2$ 集中在质心处，并用无质量杆连接两个质心 ($L/2$) 和铰接处 ($L/4$)。道闸杆运动分为落杆和抬杆两个过程，两个过程均可看作当里面质点运动绕铰接点旋转 90° 后外面质点绕该质点的残余振动（在里面质点处有刚度为 K_θ 的一个力矩弹簧）。下面分落杆和抬杆两个过程分析。

3.2 落杆残余振动模型

如图 7 所示，落杆时 m_1 在输入作用下从竖直位置旋转到水平位置， m_2 随 m_1 也从竖直位置旋转到水平位置，但由于 m_1 处弹簧 k_θ 的存在，当 m_1 到达水平位置时， m_2 依然在水平位置附件上下运动。

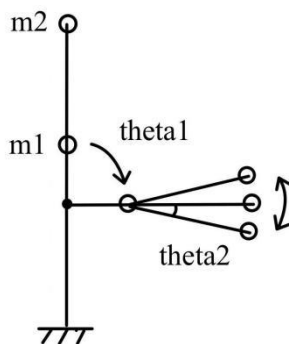


图 7：道闸杆落杆过程残余振动

记 θ_1 为 m_1 相对水平位置转角， θ_2 为 m_2 相对水平位置转角， k_θ 为 m_2 振动刚度。为了计算方便，我们取 m_2 水平位置时弹簧存在形变 θ_0 ，并记此时 $\theta_1 = 0$ ， θ_0 满足

$$m_2 g \frac{3l}{4} = \frac{1}{2} k_\theta \theta_0^2. \quad (36)$$

现假设铰接处也是 k_θ 的弹簧, m_1, m_2 在水平方向附件做自由振动, 如图 8。以竖直向上为 x 轴正向, 水平向右为 y 轴正向建立坐标系, 则该模型可等效为传统双摆模型。记 m_1, m_2 位移为 x_1, y_1, x_2, y_2 , 则

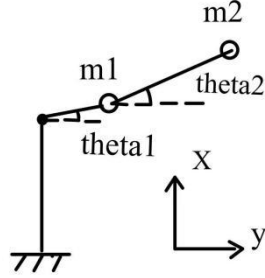


图 8: 落杆过程自由振动

$$x_1 = \frac{l}{4} \sin \theta_1 \quad (37)$$

$$y_1 = \frac{l}{4} \cos \theta_1 \quad (38)$$

$$x_2 = \frac{l}{4} \sin \theta_1 + \frac{l}{2} \sin \theta_2 \quad (39)$$

$$y_2 = \frac{l}{4} \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 \quad (40)$$

构造拉格朗日函数

$$L = T - V \quad (41)$$

其中 T 为系统动能, V 为系统势能。两个质点起始时重力势能已经由 (35) 式弹性势能抵消, 故整个过程可忽略重力作用。则

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (42)$$

$$V = \frac{k_\theta}{2} \theta_1^2 + \frac{k_\theta}{2} \theta_2^2 \quad (43)$$

因为

$$m_1 = m_2 = \frac{m}{2} \quad (44)$$

把 (44) (42) (43) 式带入 (41) 式, 用 matlab 符号运算 (附件 1) 得

$$L = \frac{3 \theta_1'^2 l^2 m}{128} - \frac{k \theta_2^2}{2} - \frac{k \theta_1^2}{2} + \frac{9 \theta_2'^2 l^2 m}{128} + \frac{\theta_1'^2 l^2 m \cos(2 \theta_1)}{128} - \frac{\theta_2'^2 l^2 m \cos(2 \theta_1)}{128} + \frac{\theta_1' \theta_2' l^2 m \cos(\theta_1 - \theta_2)}{16} \quad (45)$$

因为 θ_1, θ_2 足够小, 所以 $\cos 2\theta_1 \approx \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$, 则拉格朗日算子 (45) 式简化为

$$L = \frac{l^2 m}{32} (\theta_1'^2 + 2\theta_1' \theta_2' + 2\theta_2'^2) - \frac{k}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (46)$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (47)$$

其中 i 为自由度数, q 为系统广义坐标, f_i 为该广义坐标方向上的外力。这里 $i = 2$, θ_1, θ_2 为广义坐标。由于广义坐标 θ_2 方向上没有外力作用, 故 $f_2 = 0$ 。所以

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (48)$$

即

$$\frac{l^2 m}{16} \theta_1'' + \frac{l^2 m}{8} \theta_2'' + k \theta_2 = 0 \quad (49)$$

整理得 m_1, m_2 运动相关关系

$$\theta_1''(t) = 2\theta_2''(t) + 16 \frac{k}{l^2 m} \theta_2(t) \quad (50)$$

对其求 Laplace 变换

$$s^2 \Theta_1(s) = 2s^2 \Theta_2(s) + 16 \frac{k}{l^2 m} \Theta_2(s) \quad (51)$$

则两质点自由振动位移-位移传递函数、速度-位移传递函数和力-位移传递函数分别为

$$G_\theta(s) = \frac{s^2}{2s^2 + 16 \frac{k}{l^2 m}} \quad (52)$$

$$G_\omega(s) = \frac{s}{2s^2 + 16 \frac{k}{l^2 m}} \quad (53)$$

$$G_\alpha(s) = \frac{1}{2s^2 + 16 \frac{k}{l^2 m}} \quad (54)$$

容易得到该系统固有频率

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{2}}{l} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (55)$$

本文针对力-位移传递函数进行输入整形, 即假设存在阻尼 ξ , 即可得到二阶系统传递函数。

3.3 抬杆残余振动模型

如图 9 所示, 抬杆时 m_1 在输入作用下从水平位置旋转到竖直位置, m_2 随 m_1 也从水平位置旋转到竖直位置, 但由于 m_1 处弹簧 k_θ 的存在, 当 m_1 到达竖直位置时, m_2 依然在水平位置附件上下运动。

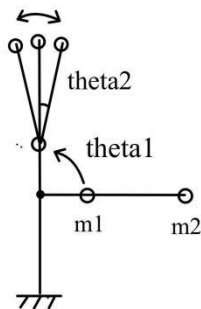


图 9: 道闸杆抬杆过程残余振动

记 θ_1 为 m_1 相对水平位置转角, θ_2 为 m_2 相对竖直位置转角, k_θ 为 m_2 振动刚度。同样可以假定在起始位置时弹性势能恰好等于停止后增加的重力势能。现假设铰接处也是 k_θ 的弹簧, m_1 , m_2 在竖直方向附件做自由振动, 如图 10。以水平向右为 x 轴正向, 竖直向上为 y 轴正向建立坐标系, 则该模型同样可等效为传统双摆模型。

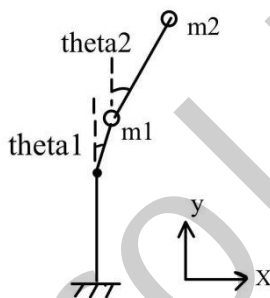


图 10: 落杆过程自由振动

根据上一小节可求得与式 (55) 一样的固有频率。从而得到与落杆时相同的残余振动模型。由此可见, 道闸杆整个响应过程中残余振动模型均可用 (55) 式近似。

3.4 传递函数的测定

从第二部分我们知道输入整形器的设计只需知道系统的固有频率和阻尼比就可以, 不需要对系统进行准确的模型建立。对于该系统, 可以通过测量道闸杆质量 m , 长度 l 和刚度 k , 通过式~计算系统无阻尼固有频率, 但阻尼系数无法直接求出。对于结构复杂、模型难以确定的结构, 我们可以通过实验的方法直接测得固有频率和阻尼比。测量原理如下

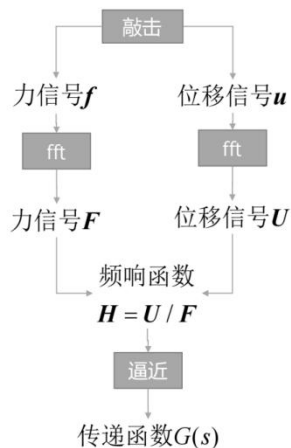


图 11: 传递函数测定原理

3.4.1 固有频率的测量

系统的固有频率是指系统在受迫运动时产生共振的频率。固有频率的测量一般在再振动图像上进行，从振动图像中我们很容易得到振动周期 T_d ，由

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad (56)$$

求得 ω_d ， $\omega_n \approx \omega_d$ 。常用的具体检测方法有：

- 1) 运动测试法，系统运动到指定位置后，会有类正弦波的残留振动，通过计算可以求出系统的固有频率。
- 2) 衰减法，用冲击力激振，通过衰减振动波形来测试振动系统固有频率。
- 3) 频域法，用扫描信号测定系统的波特图，其峰顶就是系统的固有频率。

3.4.2 阻尼系数的测量

对于 (4) 式所示的二阶系统，定义一个周期内衰减系数

$$\eta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\xi \omega_n T_d} \quad (57)$$

因为 $\omega_n \approx \omega_d$ ，所以

$$\omega_n T_d = \omega_d T_d = 2\pi \quad (58)$$

这样一来我们只要测出赋值衰减系数并可求得阻尼系数 ξ 。但一个周期衰减较小，测量误差严重，我们通过测量 $j (j \geq 3)$ 个周期的赋值衰减

$$\eta_j = \frac{A_i}{A_{i+1}} \times \frac{A_{i+1}}{A_{i+2}} \times \dots \times \frac{A_{i+j-1}}{A_{i+j}} \quad (59)$$

对其取对数并除 j 得平均对数赋值衰减

$$\delta = \frac{1}{j} \ln \eta_j = 2\pi \xi \omega \quad (60)$$

则

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} \quad (61)$$

3.5 道闸杆传递函数确定

假设图 6 所用模型中道闸杆质量 $m = 10 \text{ kg}$ ，长度 $l = 2\sqrt{2} \text{ m}$ ，刚度 $k_\theta = 1000 \text{ N/rad}$ ，阻尼系数 $\xi = 0.02$ 。则该系统传递函数为

$$G_\alpha(s) = \frac{100}{s^2 + 0.4s + 100} \quad (62)$$

在 2s 时给系统输入一个梯形信号，用输入信号和残余振动如图 12，容易看出系统在 20s 后才趋于稳定，最大振幅 $1.77 \times 10^{-2} \text{ rad}$ 。

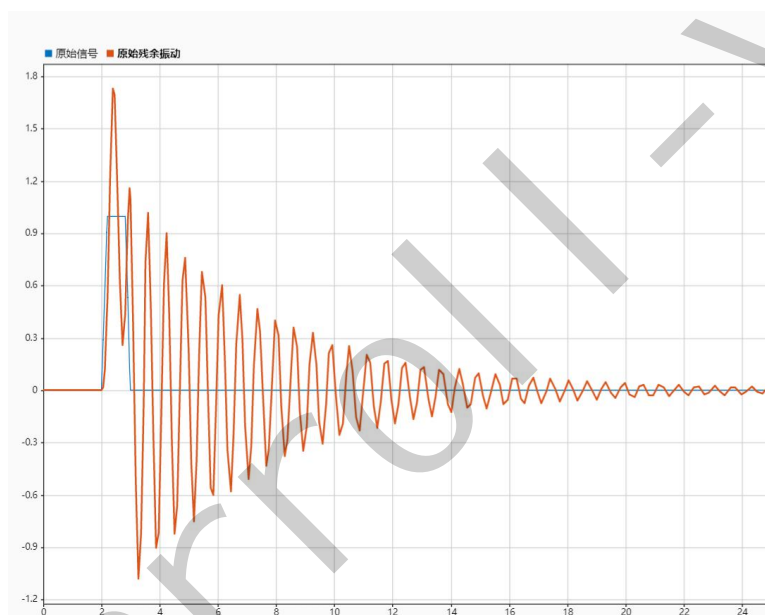


图 12: 原始输入与残余振动

四 输入整形方法抑制道闸杆残余振动

该部分用第二部分讨论的四种整形器对图 12 所示的输入和残余振动整形和抑制，计算出具体整形器，并加入系统进行 simulink 仿真分析（附件 2，附件 3）。

4.1 ZV 整形

将系统固有频率和阻尼系数带入（20）式，求得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4843 & 0.5157 \\ 0 & 0.3142 \end{bmatrix} \quad (63)$$

simulink 仿真

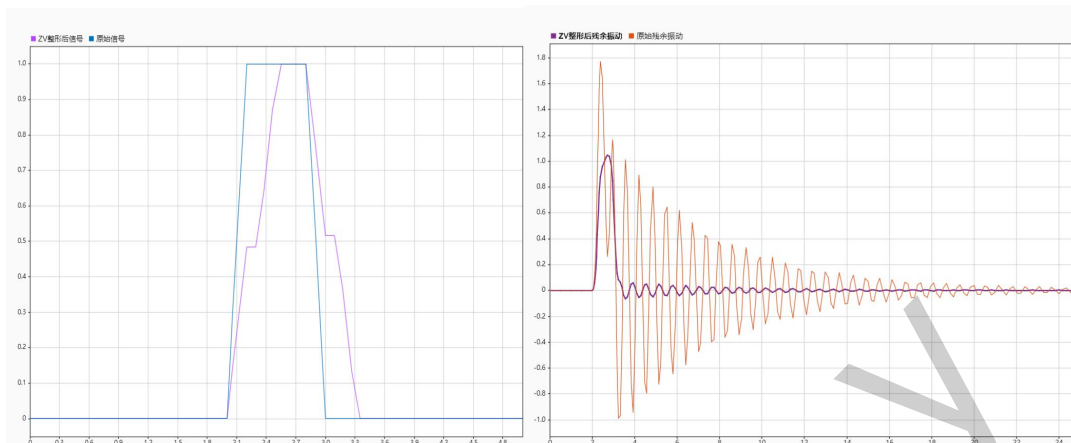


图 13: ZV 整形信号及响应

经过 ZV 整形后，信号分两个梯形输入系统，系统 3.2s 趋于稳定，未整形时减阵到相同赋值需 16.1s，节约了 12.9s，但之后有一段较长时间微幅振动，约 10s 后才停止。最大振幅 $1.05 \times 10^{-2} \text{ rad}$ ，比未整形少了 $0.72 \times 10^{-2} \text{ rad}$ 。

4.2 ZVD 整形

将系统固有频率和阻尼系数带入 (24) 式，求得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2345 & 0.4995 & 0.2660 \\ 0 & 0.3142 & 0.6284 \end{bmatrix} \quad (64)$$

simulink 仿真

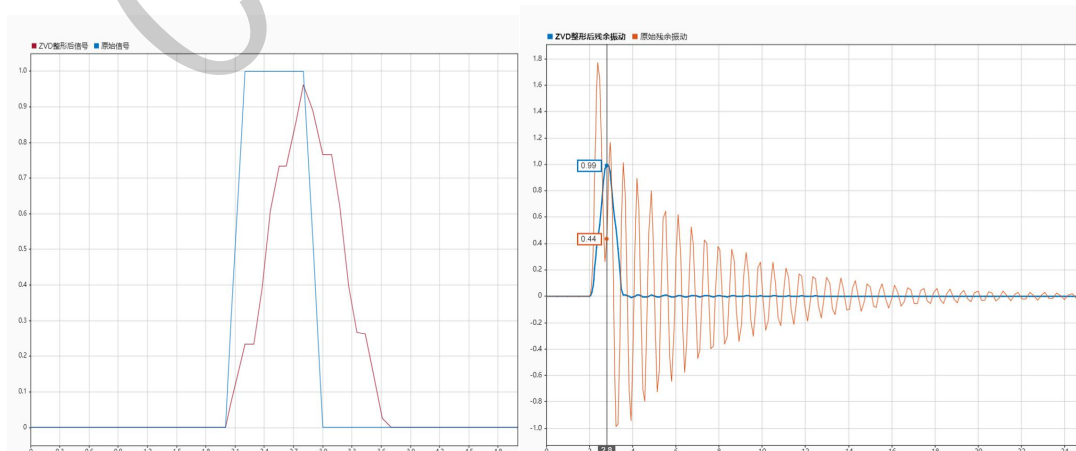


图 14: ZVD 整形信号及响应

经过 ZVD 整形后，信号分三次输入系统，系统 3.6s 开始稳定，未整形时减阵到相同赋值需 25s 以上，节约了 20s 余，最大振幅 $0.99 \times 10^{-2} \text{rad}$ ，比未整形少了 $0.78 \times 10^{-2} \text{rad}$ 。

4.3 EI 整形

假设我们允许有残留振动赋值 $V_{\text{exp}} = 0.01$ 将系统固有频率和阻尼系数带入 (26) 式，求得

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2525 & 0.4950 & 0.2525 \\ 0 & 0.3142 & 0.6284 \end{bmatrix} \quad (65)$$

simulink 仿真

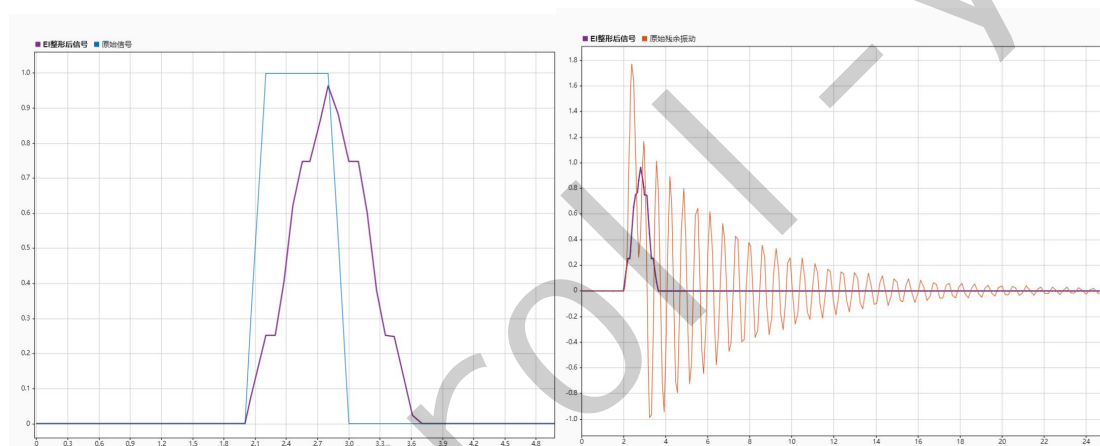


图 15: EI 整形信号及响应

经过 EI 整形后，系统 3.7s 后停止，未整形时停止需 30s 以上，节约了 30s 余，最大振幅 $0.96 \times 10^{-2} \text{rad}$ ，比未整形少了 $0.81 \times 10^{-2} \text{rad}$ 。

4.4 最优化整形

把固有振动频率和阻尼系数带入 (33) (34) (35) 式，取 $T = \frac{\pi}{2\omega}$

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4686 & 0 & 0.5314 \\ 0 & 0.1571 & 0.3142 \end{bmatrix} \quad (66)$$

取 $T = \frac{\pi}{4\omega}$

$$\begin{bmatrix} A_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3481 & -1.8768 & 1.5287 \\ 0 & 0.0786 & 0.1571 \end{bmatrix} \quad (67)$$

simulink 仿真

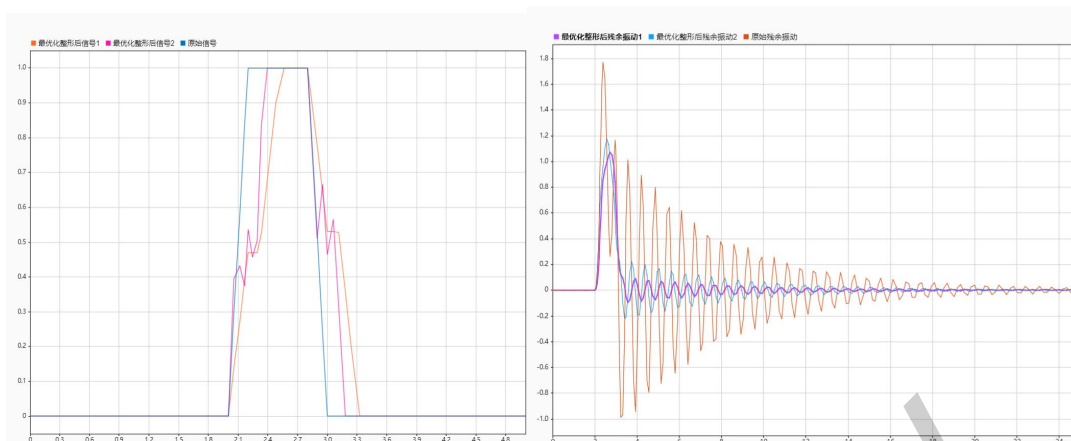


图 16: 最优化整形输入与响应

经过 (66) 式最优化整形后, 系统 3.2s 趋于稳定, 未整形时减阵到相同赋值需 11.1s, 节约了 7.1s, 但之后有一段较长时间微幅振动, 约 10s 后才停止。最大振幅 $1.18 \times 10^{-2} \text{rad}$, 比未整形少了 $0.69 \times 10^{-2} \text{rad}$ 。经过 (67) 式最优化整形后, 系统 3.2s 趋于稳定, 未整形时减阵到相同赋值需 15.5s, 节约了 12.3s, 但之后有一段较长时间微幅振动, 约 10s 后才基本停止。最大振幅 $1.07 \times 10^{-2} \text{rad}$, 比未整形少了 $0.74 \times 10^{-2} \text{rad}$ 。比对两组数据, 容易得到响应时间越小, 对残余振动抑制越好的结论, 但由于时滞无限小时输入趋于为整形, 所以猜测其中必存在一个零界点, 使系统最优。

五 总结

上面部分我们针对式 (62) 所确定的道闸杆系统输入一秒的梯形信号进行研究, 各个输入整形器的抑制效果进行了比对分析, 四种输入整形器都有较好的抑制效果, 我们应根据需求选择。如果我们具有较高精度要求, EI 和 ZVD 是不错的选择; 如果我们对速度有要求更高, 则优先考虑 ZV 和最优化整形。现实生活中很多问题系统是不确定的, 这就需要考虑第二部分中提到的鲁棒性问题, 需要进一步分析。

针对本文所研究的道闸杆系统而言, 着重于抑制残余振动的快速性, 过高的精度要求没有意义, 所以 ZV 整形和最优化整形是不错的选择, 对于 1s 的梯形信号输入, 两者均可在 1.2s 内使系统相对稳定, 到达相同抑制效果比未整形节约了 10 余秒, 相当于十多个输入周期。当然, 该系统里输入信号中已经抵消了重力的作用, 实际输入很难做到这点, 所以基于输入整形方法的道闸杆残余振动抑制还有待进一步研究。

参考文献:

- [1] 陈俊恒, 楼云江, 黄瑞宁. 固晶机柔性摆臂系统的输入整形减振控制研究[A]. 中国自动化学会控制理论专业委员会. 中国自动化学会控制理论专业委员会 D 卷[C]. 中国自动化学会控制理论专业委员会:中国自动化学会控制理论专业委员会, 2011:5.
- [2] 柳硕. 输入整形技术对柔性臂结构振动抑制的研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2010.
- [3] 朱春艳, 邵济明, 那帅, 唐国安. 太阳能电池翼调姿后残余振动抑制的整形器设计[J]. 振动与冲击, 2012, 31(08):176-180. DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2012.08.020.
- [4] 秦望舒. 基于输入整形技术的运动控制算法的研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2010.
- [5] 陈俊恒. 输入整形减振算法的研究与实现[D]. 哈尔滨工业大学, 2010.
- [6] 林敦志. 闸门振动现象及振动特性分析[J]. 科技资讯, 2010(16):116. DOI:10.16661/j.cnki.1672-3791.2010.16.053.
- [7] 黄佳佳, 周波, 李丹, 方斯琛. 滑模控制永磁同步电动机位置伺服系统抖振[J]. 电工技术学报, 2009, 24(11):41-47. DOI:10.19595/j.cnki.1000-6753.tces.2009.11.007.
- [8] 李琳, 胡锡钦, 邹焱飏. 模态参数识别和输入整形相结合的抑振方法[J]. 振动, 测试与诊断, 2019, 39(03):565-570+672. DOI:10.16450/j.cnki.issn.1004-6801.2019.03.016.
- [9] 倪韵竹, 戈新生. 航天器太阳帆板振动抑制的输入整形方法研究[J]. 应用力学学报, 2020, 37(01):293-300+488-489.
- [10] 张美艳, 邹怀武, 王和庆, 唐国安. 基于输入整形方法的 2 自由度机械臂运行过程振动抑制[J]. 上海航天, 2020, 37(05):37-42. DOI:10.19328/j.cnki.1006-1630.2020.05.006.
- [11] 徐健, 曹军, 张怡卓. 应用改进输入整形算法的采摘装置振动抑制[J]. 东北林业大学学报, 2020, 48(12):79-84. DOI:10.13759/j.cnki.dlxb.2020.12.015.
- [12] 杨明, 曹佳, 徐殿国. 基于输入整形技术的交流伺服系统抖动抑制[J]. 电工技术学报, 2018, 33(21):4979-4986. DOI:10.19595/j.cnki.1000-6753.tces.L80595.
- [13] 张铁, 康中强, 邹焱飏, 廖才磊. 用于残余振动抑制的深度神经网络输入整形器[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2021, 49(08):103-112.
- [14] S Choura. Reduction of residual vibrations in a rotating flexible beam with a moving payload mass[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 1997, 211(1).
- [15] Singhose W E, Porter L J, Seering W P. Input shaped control of a planar gantry crane with hoisting[C]// American Control Conference. IEEE, 2002.

附件:

附件 1: InputShapeCount.mlx —— 文章中用到的 matlab 计算

附件 2: InputShape_Result.maltax —— 仿真结果

附件 3: InputShape.xls —— 仿真模型