Лекции 7 и 8
Мощности множеств.
Натуральные числа

1. Мощность множеств

1. Конечные множества

Множество X = {x_1, x_2, …, x_n} имеет n элементов, т.к. все элементы пронумерованы натуральными числами от 1 до n: $i \to x_i$ – это взаимно-однозначное отображение множества $\mathbb{N}_n$ = {1, 2, …, n} на X. Пустое множество будем считать конечным с 0 элементов.

Утв. 1
Конечные множества X и Y имеют одинаковое число элементов, если существует взаимно-однозначное отображение f: X → Y.

Доказательство

Пусть в множестве X n элементов, тогда
∃ g: $\mathbb{N}_n$ → X – взаимно-однозначное отображение.
Если ∃ f: X → Y -взаимно-однозначное, то
f ∘ g : $\mathbb{N}_n$ → Y – взаимно-однозначное, т.е. в
Y - n элементов.

Определение 1.
Множества X и Y (не обязательно конечные) называются равномощными, если существует взаимно-однозначное отображение f: $X \to Y$.

Пример
$X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ равномощно $Y = \{2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$: отображение $f(k) = 2k$ – взаимно-однозначно, несмотря на то, что Y - подмножество X и $Y \neq X$.

Определение 2.
Непустое множество называется бесконечным, если оно не равномощно ни одному из множеств $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Замечание
В нашем примере $Y \subset X$, это характерное свойство бесконечных множеств.

2. Счетные множества

Определение 2.
Множество X называется счетным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Утв. 2
Счетное множество является бесконечным.

Утв. 3
Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

Доказательство

Пусть X – бесконечное множество, следовательно, X не пустое. Пусть $x_1 \in$ X, тогда X \ $\{x_1\}$ - не пустое, иначе X = $\{x_1\}$ конечное одноэлементное множество. Пусть $x_2 \in$ X \ $\{x_1\}$, тогда X \ $\{x_1, x_2\}$ - не пустое, иначе X = $\{x_1, x_2\}$ - конечное двухэлементное множество и т.д. Этот процесс не может остановиться, т.к. X – бесконечное множество. В итоге мы построим счетное подмножество $\{x_1, x_2, \dots\}$ в X: $\{x_1, x_2, \dots\} \subset$ X

Утв. 4
Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Доказательство

Пусть X = $\{x_1, x_2, \dots\}$ счетное, а Y $\subset$ X.
Пусть n_1 – минимальный номер элемента x_i, такой, что $x_{n_1} \in$ Y, n_2 – минимальный номер элемента x_i, такой, что $x_{n_2} \in$ Y \ $\{x_{n_1}\}$ и т.д. Продолжая процесс мы пронумеруем все элементы множества Y:
Y = $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$.

Утв. 5

1. **Объединение конечного и счетного множества счетно;**
2. **Объединение двух счетных множеств счетно;**
3. **Объединение конечного числа счетных множеств счетно;**
4. **Объединение счетного множества конечных множеств счетно;**
5. **Объединение счетного числа счетных множеств счетно.**

Доказательство

1. **Пусть X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – конечное, а Y = $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ – счетное, тогда X ∪ Y = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ (с исключением конечного числа повторяющихся элементов) - счетное.**
2. **Пусть X = $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ – счетное и Y = $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ – счетное, тогда X ∪ Y = $\{x_1, y_1 , x_2, y_2 \ \ x_3, y_3 \quad \ldots\}$ (с исключением повторяющихся элементов) - счетное.**
3. **Пусть $X^{(k)}$ = $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ \ldots\}$, k = 1, 2,…, m, $X^{(k)}$ – счетные. Тогда $\cup_{k=1}^{m} X^{(k)}$ = =$\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(m)}, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(m)}, \ldots\}$ (с исключением повторяющихся элементов).**
4. **Пусть $X^{(k)}$ = $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ \ldots x_{n_k}^{(k)}\}$, k = 1, 2,… $X^{(k)}$ – конечные. Тогда $\cup_{k=1}^{\infty} X^{(k)}$ =**

$=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \ldots\}$(с исключением повторяющихся элементов)

5. Пусть $X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \ldots x_{n_k}^{(k)}, \ldots\}$, k = 1, 2,… $X^{(k)}$ – счетные. Тогда $\cup_{k=1}^{\infty} X^{(k)} =$

$=\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_1^{(3)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}, \ldots\} =$

$= \cup_{p=1}^{\infty} C^{(p)} = \cup_{p=2}^{\infty} \{ x_1^{(p-1)}, x_2^{(p-2)}, \ldots, x_{p-1}^{(1)}\}$ (с исключением повторяющихся элементов) – объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Определение

Множество X не более чем счетно, если оно конечно или счетно.

Утв. $5'$

Объединение не более чем счетного набора не более чем счетных множеств не более чем счетно.

Утв. 6

Пусть X – бесконечное множество, а Y – не более чем счетное множество, тогда множество X∪ Y равномощно множеству X.

Доказательство

По Утв. 3. $\exists$ $X_1 \subset$ X: X_1 – счетное, тогда $X_1 \cup$ Y – счетное, т.е. равномощное X_1. Следовательно, X∪Y = (X \ X_1) ∪ X_1 ∪ Y и X = (X \ X_1) ∪ X_1 равномощны.

Следствие
Пусть X – бесконечное множество, а Y – не более чем счетное множество, такое, что X \ Y – бесконечное. Тогда множество X \ Y равномощно множеству X.

Утв. 7
Пусть X = $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ и Y = $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ – счетные множества, тогда XxY – счетно.

Доказательство
XxY = $\{(x_i, y_j) | i, j = 1, 2, \ldots\}$
XxY = $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_3), \ldots\}$

Утв. 8
1. **Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно;**
2. **Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.**
Доказательство
1. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, \ldots\}$
2. $\mathbb{Q} = \{p / q | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (|p|, q) = 1\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Утв. 9
Множество бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1 несчетно.
Доказательство
Пусть множество бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1, счетно. Тогда их можно выписать виде списка
$1 \leftrightarrow (m_{11}, m_{12}, m_{13} \ldots)$
$2 \leftrightarrow (m_{21}, m_{22}, m_{23} \ldots)$

$3 \leftrightarrow (m_{31}, m_{32}, m_{33} \dots)$

……………………………..

Возьмем диагональную последовательность
μ = $(m_{11}, m_{22}, m_{33}, \dots)$
и построим последовательность из нулей и единиц ν все члены которой отличаются от соответствующих членов последовательности μ: ν = $(1 - m_{11}, 1 - m_{22}, 1 - m_{33}, \dots)$
Последовательность ν не может входить в наш список, т.к. для любого k последовательность $(m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kk} \dots)$ не совпадает с ν, т.к. элемент равный m_{kk} не совпадает в k-м элементом ν, равным $1 - m_{kk}$.

Следствие
Множество вещественных чисел на промежутке [0, 1] несчетно.

Доказательство
Вещественные чисел на промежутке [0, 1] представляется двоичными бесконечными дробями. Дроби с нулем в периоде и 1 в периоде можно использовать для представления одного числа, но таких дробей счетное число.
Всех дробей – не счетное множество, поэтому множество двоичных дробей, представляющих вещественные числа несчетно.

3. Сравнение мощностей множеству

Раньше обсуждали равенство мощностей (равномощность) множеств: $|X| = |Y|$.
Перейдем к сравнению мощностей.
Определение
Мощность множества X меньше мощности множества Y: (пишут $|X| < |Y|$), если
- $|X| \neq |Y|$;
- $\exists\, Y_1 \subset Y$, **такое что** $|X| = |Y_1|$.

Пишут $|X| \leq |Y|$, если $|X| = |Y|$ или $|X| < |Y|$.

Теорема (о сравнении мощностей)
Если $|X| \leq |Y|$ и $|Y| \leq |X|$, то $|X| = |Y|$.

Утв. 10
$|X| < |2^X|$ **т.е. мощность множества все подмножеств множества X больше мощности самого множества X.**

Доказательство
1. **Множество X равномощно множеству одноэлементных подмножеств X, следовательно, $|X| \leq |2^X|$.**
2. **Пусть $\forall\, x \in X \to B_x \in 2^X$. Покажем, что существует $B_1 \subset X$, такое, что $B_1 \neq B_x$, $x \in X$, т.е. отображение $x \in X \to B_x \in 2^X$ не сюрьективно, что исключает $|X| = |2^X|$.**

Для $\forall$ x $\in$ X выполнено одно из двух:
x $\in$ $\boldsymbol{B_x}$ или x $\notin$ $\boldsymbol{B_x}$.

Рассмотрим множество B_1 = {x| x $\notin$ $\boldsymbol{B_x}$}.
Покажем, что не существует x_1, т.ч. B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$.
Предположим, что такое x_1 существует, т.е.
B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$, тогда x_1 либо принадлежит B_1, либо не принадлежит B_1.

Во первом случае x_1 $\in$ B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$, но
B_1 = {x| x $\notin$ $\boldsymbol{B_x}$}, поэтому x_1 $\notin$ $\boldsymbol{B}_{x_1}$ = B_1. Это противоречие показывает, что x_1 не может принадлежать B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$.

Во втором случае x_1 $\notin$ B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$, но,
поскольку, B_1 = {x| x $\notin$ $\boldsymbol{B_x}$}, то x_1 $\in$ $\boldsymbol{B}_{x_1}$ = B_1.
Это противоречие показывает, что x_1 не может не принадлежать B_1 = $\boldsymbol{B}_{x_1}$.

Определение
Мощность множества $2^{\mathbb{N}}$ называется мощностью континуума c: c = $|2^{\mathbb{N}}|$.

Утв. 17
Множество всех бесконечных двоичных последовательностей имеет мощность континуума.

Доказательство
Множество двоичных последовательностей взаимно-однозначно отображается на множество подмножеств натуральных чисел. Действительно, последовательности $\mu = (m_1, m_2, m_3, \ldots)$ можно сопоставить подмножество $\mathbb{N}$: $A_\mu = \{k|\ m_k = 1\}$ и обратно $A \subset \mathbb{N}$ соответствует последовательность из 0 и 1: $m_k = 1$ если $k \in A$, иначе $m_k = 0$.

Следствие
Множество [0, 1] имеет мощность континуума.
Замечание
1. **Имеется бесконечная последовательность увеличивающихся мощностей:**
   $|\mathbb{N}| < c = |2^{\mathbb{N}}| < |2^{2^{\mathbb{N}}}| < \ldots$
2. **Проблема: существует ли множество A, т.ч.**
   $|\mathbb{N}| < |A| < c = |2^{\mathbb{N}}|$.
   Континуум-гипотеза: такого множества не существует.
   В аксиоматической теории множеств было доказано, что, фактически, это независимая аксиома теории множеств.

Задание
1. **Доказать, что любой интервал [a, b], $a < b$ имеет мощность континуума;**
2. **Доказать, что множество (0, 1) имеет мощность континуума;**

3. **Доказать, что $\mathbb{R}$ = (- ∞, +∞) имеет мощность континуума;**
4. **Определить мощность множества полиномов с целыми коэффициентами;**
5. **Определит мощность множества иррациональных чисел;**
6. **Алгебраическое число – это решение алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (пример: x = $\sqrt{2}$ решение уравнения $x^2 - 2 = 0$). Найти мощность множества алгебраических чисел;**
7. **Вещественное число не являющееся алгебраическим называется трансцендентным. Найти мощность множества трансцендентных чисел.**

Натуральные числа

1. Аксиомы Пеано

Натуральным рядом **называется система (N, $'$), где N – множество натуральных чисел, $'$: N → N бинарное отношение непосредственного следования: m = n' ≡ m непосредственно следует за n, т.ч.**

1. ∃1∈ N: $n' \neq 1$, ∀ n ∈ N
2. ∀ n ∈ N ∃! n' ∈ N ≡ отношение $'$ функционально и определено на всем N
3. $n' = m'$ ⟹ n = m ≡ отображение $'$ инъективно
4. Аксиома индукции: пусть M ⊂ N:
   1. 1 ∈ M
   2. ∀ n ∈ M ⟹ n' ∈ M

   тогда M = N.

2. Принцип полной математической индукции

Теорема
Пусть T(n) – утверждение, зависящее от параметра n:
1. T(1) – истинно;
2. Для ∀ n ∈ N, если T(n) истинно, то T(n + 1) - истинно

Тогда T(n) истинно для ∀ n ∈ N.

Доказательство

Пусть M = {$\forall$ n $\in$ N| T(n) истинно}, тогда M удовлетворяет всем требованиям Аксиомы индукции и, следовательно, M = N.

Доказательство теорем с использованием принципа математической индукции: проверяем истинность T(1) – база индукции и T(n) $\Longrightarrow$ T(n + 1) – шаг индукции.

3. Примеры использования принципа математической индукции

1. **1+ 2 + … + n = n (n + 1)/2 – это наше утверждение T(n)**
   a. **T(1) = 1 = 1 (1 + 1)/2**
   b. **Пусть T(n) истинно, тогда 1+ 2 + … + n + (n + 1) = n (n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1) (n /2 + 1) = = (n + 1) (n + 2)/2, т.е. T(n + 1) - истинно $\forall$ n $\in$ N.**

2. **1 + 3 + 5 + … + (2 n – 1) = n^2 – это наше T(n)**
   a. **T(1) = 1 = 1^2**
   b. **Пусть T(n) истинно, тогда 1 + 3 + 5 + … + (2 n – 1) + (2 n + 1) = n^2 + + (2 n + 1) = $(n + 1)^2$, т.е. T(n + 1) - истинно $\forall$ n $\in$ N.**

Самостоятельная работа:

3. **Доказать: 1+ 2^2 + … + n^2= n (n + 1) (2 n + 1)/2**

4. **Доказать: 1+ 2^3 + … + n^3= $n^2(n+1)^2$/2**

4. Арифметические действия с натуральными числами

1. Сложение натуральных чисел

Сложение натуральных чисел **– это бинарная операция на N: N x N → N: (m, n) → m + n :**

1. $\mathbf{m + 1 = m'}$
2. $\mathbf{m + n' = (m + n)'}$

Бинарная операция задается тетранарным отношением функционального типа на N.

Теорема (свойства операции сложения натуральных чисел)

1. **Операция сложения натуральных чисел существует и единственна;**
2. **Сложение ассоциативно:** $\mathbf{(k + m) + n = k + (m + n)}$**;**
3. **Сложение коммутативно:** $\mathbf{m + n = n + m}$**;**
4. **Сложение обладает свойством сократимости: если** $\mathbf{k + n = m + n}$**, то** $\mathbf{k = m}$**.**

Доказательство

Утв. 2: доказываем $\mathbf{(k + m) + n = k + (m + n)}$ **индукцией по n при произвольных k и m:**

1. $\mathbf{n = 1}$: $\mathbf{(k + m) + 1 = (k + m)' = k + m' = k + (m + 1)}$
2. $\mathbf{(k + m) + n' = ((k + m) + n)' = (k + (m + n))' = k + (m + n)' = k + m + n'}$.

Утв. 3:

1. **Доказываем m + 1 = 1 + m индукцией по m:**
   a. **m = 1 ⟹ 1 + 1 = 1 + 1;**
   b. m': **(m' + 1) = (m + 1) + 1 = (1 + m) + 1 =**
      = 1 + (m + 1) = 1 + m'
2. **Доказываем m + n = n + m индукцией по** n **при фиксированном m:**
   a. **n = 1 утверждение доказано в п. 1**
   b. n': **m +** n' = $(m + n)'$ = $(n + m)'$ =
      = n + m' **= n + (m + 1) = n + (1 + m) =**
      = (n + 1) + m = n' **+ m.**

2. **Умножение натуральных чисел**

***Умножение натуральных чисел* – это бинарная операция на N: N x N → N: (m, n) → m · n :**

1. **m · 1 = m**
2. **m ·** n' **= m · n + m**

Теорема (свойства операции умножения натуральных чисел)

1. **Операция умножения натуральных чисел существует и единственна;**
2. **Операция умножения натуральных чисел дистрибутивна: k · (m + n) = k · m + k · n;**
3. **Операция умножения натуральных чисел ассоциативна: (k · m) · n = k · (m · n);**
4. **Операция умножения натуральных чисел коммутативна m · n = n · m;**

5. **Операция умножения натуральных чисел обладает свойством сократимости: если $k \cdot n = m \cdot n$, то $k = m$.**

3. Линейный порядок на множестве натуральных чисел

Число m меньше числа n ($m < n$), если существует $k \in N$, т.ч. $n = m + k$.

Теорема (свойства отношения $m < n$)

1. **Бинарное отношение $m < n$ задает на N строгий линейный порядок;**
2. **(N, <) – вполне упорядоченное множество: если $M \subset N$, то во множестве M существует наименьший элемент;**
3. **Если $m < n$ и $k \in N$, то $m + k < n + k$**
4. **Если $m < n$ и $k \in N$, то $m \cdot k < n \cdot k$**