Hasard de math

Tiftouf Val

Table des matières

Chapitre 1

Preuve de résultats

Le but dans ces sections est de donner plusieurs démonstration de résulats, classés par élégance.

1.1 Intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

1.1.1 Encadrement par intégrale de Wallis

On rappelle qqsdue

1.2 Zéta de 2

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.1}$$

1.2.1 Série de Fourier

On pose $f : \begin{cases} [-\pi;\pi] \to [0;\pi^2] \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, 2π-périodique et paire

On calcule ces coefficients de Fourier, $b_n = 0$ car f est paire, et, d'une part

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi^2}{3}$$

D'autre part, par double intégration par partie,

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

De plus,

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) cos(nt)$$

Particulièrement en $x = \pi$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

On a bien 1.1 ce qui conclut.

1.2.2 Série de Taylor et intégrale de Wallis

On part du développement en série de Taylor de la fonction arcsin

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

On pose $x = \sin(t)$ puis on intégre en utilisant les intégrales de Wallis.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \frac{\pi^2}{8}$$

Et,

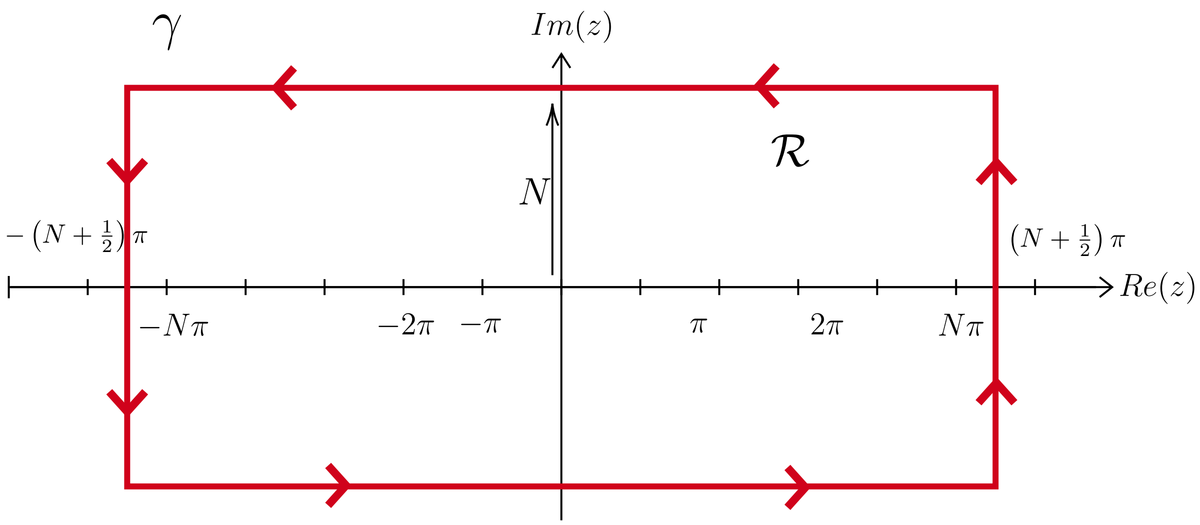
$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Chapitre 2

Analyse complexe

2.1 Calcul de $\zeta(2k)$

Mise en place Le but ici est de calculer la valeur de $\zeta(2k)$ de manière explicite. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ tel que $f : z \to \frac{\cot(z)}{z^{2k}}$. On définit le chemin γ sur la figure ci-dessous et le rectangle $\mathcal{R}$ formé par γ.



D'après le thèoreme des résidus, avec $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{p\in\mathcal{P}\cap\mathcal{R}} Res_f(p)Ind_\gamma(p)$$

On cherche donc les pôles de f

— $f(z) \xrightarrow[z\to 0]{} +\infty$ donc il y a un pôle en 0

— $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^{2k}}\frac{1}{\sin(z)}$ et $\sin(n\pi) = 0$ donc il y a des pôles en $n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}^*$

Indice du lacet Intuitivement, l'indice du lacet est le nombre de tour autour d'un pôle effectués par un point parcourant tout le lacet. Or $\forall p \in \mathcal{P}, p \in \mathcal{R}$ donc un point quelconque parcourant le lacet fait un tour autour de chaque pole, donc

$$Ind_\gamma(p) = 1$$

Pôles en $n\pi$ Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, les pôles en $n\pi$ sont des pôles simples ou d'ordre 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on chercher le résidu donc la limite de,

$$(z - n\pi)f(z) = \frac{\cos(z)}{z^{2k}} \frac{z - n\pi}{\sin(z)}$$

D'après la règle de l'Hopital,

$$\frac{\cos(z)}{z^{2k}} \frac{z - n\pi}{\sin(z)} \xrightarrow[z \to n\pi]{} \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^{2k}} \frac{1}{\cos(n\pi)}$$

Donc,

$$Res_f(n\pi) = \frac{1}{(n\pi)^{2k}}$$

Pôles en 0 Le pole en 0 se comporte de manière diffèrente que les poles en $n\pi$. On développe donc en série de Laurent au voisinage de 0. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{i}{z^{2k}} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{i}{z^{2k}} \frac{e^{2iz} - 1 + 2}{e^{2iz} - 1} = \frac{i}{z^{2k}} + \frac{2i}{z^{2k}} \frac{1}{e^{2iz} - 1}$$

Or, par définition, les nombres de Bernoulli B_n (pour $n \in \mathbb{N}$) sont les nombres tels que :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

En développant en série e^x, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathbb{Q}$. Donc,

$$f(z) = \frac{i}{z^{2k}} + \frac{1}{z^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} (2iz)^n$$

Donc, le pôle en 0 est d'ordre $2k$ et,

$$Res_f(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2i)^{2k} = \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!}$$

Retour au théorème des résidus En combinant toutes les résultats précédents, on a,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n \in [\![-N;N]\!] \setminus \{0\}} \frac{1}{(n\pi)^{2k}}$$

En arrageant les termes,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} + \frac{\pi^{2k}}{4i\pi} \int_\gamma f(z)dz$$

Majoration de l'intégrale On montre maitenant que l'intégrale ci-dessus à droite converge vers 0. D'une part, on majore la cot sur le segment à droite du contour qui correspond à $z = (N + \frac{1}{2})\pi + i\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Donc,

$$|\cot(z)| = \left|\cot\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + i\theta\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\theta\right)\right| = \left|\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right| \leq 1$$

Pour le segment de gauche, on peut aussi majorer par 1 car la cot est π-périodique.

D'autre part, on majore la cot sur les segments du haut et du bas (même argument que précedement) qui correspondent à $z = \theta + iN$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Donc,

$$|\cot(z)| = |\cot(\theta + iN)| = \left| \frac{e^{-i\theta}e^{N} + e^{i\theta}e^{-N}}{e^{-i\theta}e^{N} - e^{i\theta}e^{-N}} \right| \leq \left| \frac{e^{N} + e^{-N}}{|e^{N}e^{-i\theta}| - |e^{-N}e^{i\theta}|} \right| \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}}$$

Donc, $\forall z \in \gamma, |\cot(z)| \leq \frac{e^{N}+e^{-N}}{e^{N}-e^{-N}}$ et,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{2k}} |\cot(z)| dz \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{2k}} dz \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \int_{\gamma} \frac{1}{N^{2k}} dz$$

En sachant $Longueur(\gamma) = O(N)$,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \frac{1}{N^{2k}} Longueur(\gamma) = \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \frac{1}{N^{2k+1}}$$

Dont on en deduis :

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} = \frac{|B_{2k}| (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$