Hasard de math

Tiftouf Val

Table des matières

1 Preuve de résultats **2**
1.1 Intégrale de Gauss 2
1.1.1 Analyse Complexe $\star$ 2
1.1.2 Intégrale de Wallis $\star$ 3
1.1.3 Changement de variables indépendantes $\star\star$ 3
1.1.4 Euler $\star\star$ 4
1.1.5 β et Γ $\star\star$ 4
1.1.6 Coordonnées polaires $\star\star\star$ 4
1.1.7 Γ et sin $\star\star\star$ 4
1.1.8 Transformée de $\mathcal{F}$ourier $\star\star\star$ 4
1.1.9 Volume $\star\star\star$ 5
1.1.10 $\mathcal{L}$aplace $\star\star\star\star$ 5
1.2 Zéta de 2 5
1.2.1 Série de Fourier $\star$ 6
1.2.2 Série de Taylor et intégrale de Wallis $\star\star$ 6
1.2.3 Intégrales doubles et jacobien $\star\star\star$ 6

2 Analyse complexe **8**
2.1 Calcul de $\zeta(2k)$ 8

3 Structures algèbriques **11**
3.1 Exercices 11
3.1.1 Exercices 11
3.1.2 Correction 11

Chapitre 1

Preuve de résultats

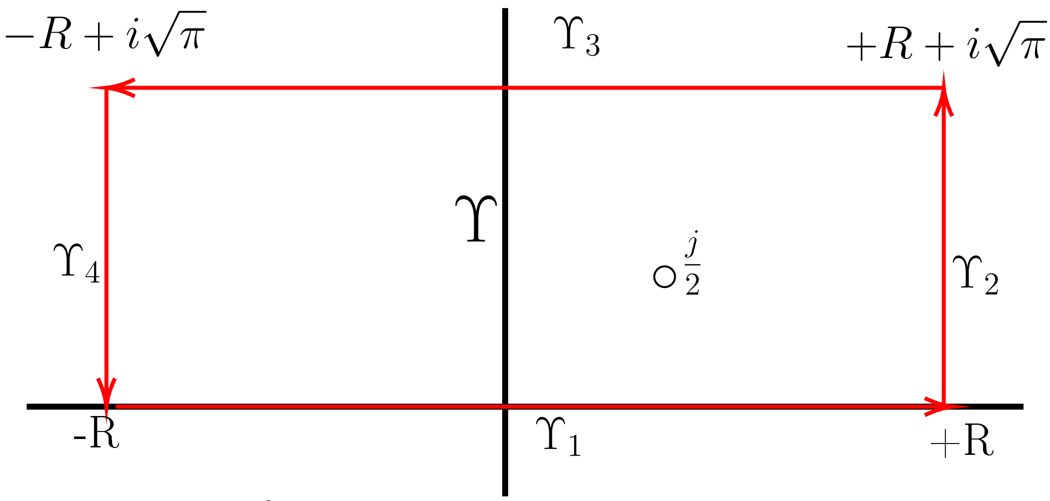
Le but dans ces sections est de donner plusieurs démonstration de résulats, classés par élégance.

1.1 Intégrale de Gauss

$$\varphi = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1.1}$$

On considera parfois φ^2 dont il suffira de prendre la racine carré.

1.1.1 Analyse Complexe $\star$



On pose $f(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{-jz}}$ avec $j = \sqrt{\pi}(1+i)$ et Υ ci-dessus.
Le seul pôle f dans Υ est en $\frac{j}{2}$ et est d'ordre 1, donc d'après le théorème des résidus,

$$\oint_{\Upsilon} f(z)\ dz \ = \ 2i\pi \lim_{z \to \frac{j}{2}} (z - \frac{j}{2}) \cdot f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-j^2/8}}{-je^{-j^2/2}} = \sqrt{2\pi}$$

De plus,
$\oint_{\Upsilon_1} f = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-t^2/2}}{1+e^{-jt}} dt \xrightarrow{R \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{1+e^{-jt}} dt$
$\left| \oint_{\Upsilon_2} f \right| = \left| \int_0^{\sqrt{\pi}} f(R+it)\ i\ dt \right| \leqslant \int_0^{\sqrt{\pi}} \left| \frac{e^{-R^2/2\ +\ t^2/2}}{1+e^{-j(R+it)}} \right| dt \leqslant e^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-R^2/2}}{1/2} dt \xrightarrow{R \to \infty} 0$
$\oint_{\Upsilon_3} f = \int_{+R}^{-R} f\left(t + i\sqrt{\pi}\right)\ dt \xrightarrow{R \to +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(t+i\sqrt{\pi})^2/2}}{1+e^{-j(t+i\sqrt{\pi})}} dt$

$\left|\oint_{\Upsilon_4} f\right| = \left|\int_{\sqrt{\pi}}^0 f(-R+it)\ i\ dt\right| \leqslant \int_0^{\sqrt{\pi}} \left|\frac{e^{-R^2/2+t^2/2}}{1+e^{-j(-R+it)}}\right| dt \leqslant e^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-R^2/2}}{1/2} dt \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

Enfin :

$$\sqrt{2\pi} = \oint_{\Upsilon_1} f(z)\ dz + \oint_{\Upsilon_3} f(z)\ dz \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-t^2/2}}{1+e^{-jt}} - \frac{e^{-\left(t+i\sqrt{\pi}\right)^2/2}}{1+e^{-j\left(t+i\sqrt{\pi}\right)}} \right) dt$$

Après simplifications :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2} \cdot \varphi$$

1.1.2 Intégrale de Wallis $\star$

On part de,

$$\forall \xi \in [0,1[\,, \ln(1+\xi) \leq \xi \leq \ln(1-\xi)$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right[\,, \frac{-t^2}{n} \in \left]-1, 0\right]$$

Par changement de variable, puis intégration par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Avec $t = \sqrt{n}\sin(\theta)$ et $t = \sqrt{n}\tan(\theta)$ respectivement, on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \cdot W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \cdot W_{2n-2}$$

Où W_n est la suite d'intégrale de Wallis tel que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Par encadrement,

$$\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1.1.3 Changement de variables indépendantes $\star\star$

On considère φ^2 tel que,

$$\varphi^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dydx$$

Puis on pose $y = xt$ donc $dy = xdt$,

$$\varphi^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x \cdot dtdx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{4}$$

Ce qui conclus.

1.1.4 Euler $\star\star$

Par Euler,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2/n}}}\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{x^{1/n}}{\sqrt{1-x^{2/n}}} dx\right) = n\frac{\pi}{2}$$

Dont on en deduit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1-x^{2/n}}{2/n}}}\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{x^{1/n}}{\sqrt{\frac{1-x^{2/n}}{2/n}}} dx\right) = \pi$$

Or $\frac{1-x^{2/n}}{2/n} \xrightarrow{n\to\infty} -\ln x$ d'où

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}\right)^2 = \pi$$

Dont on conclus par :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} \xrightarrow{u=\sqrt{-\ln x}} 2\varphi = \pi$$

1.1.5 β et Γ $\star\star$

Par les rélations entre β et Γ, on a :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-), \quad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

On en deduis que,

$$\varphi^2 = \left(\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} dx\right)^2 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$$

1.1.6 Coordonnées polaires $\star\star\star$

On pose $\Phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $(x,y) = \Phi(r,\theta)$

On a alors $\mathbf{J}_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ donc $|\det(\mathbf{J}_\Phi(r,\theta)| = |r|$. D'où :

$$\varphi^2 = \int_{r\in\mathbb{R}_+} \int_{\theta\in[0,\pi/2]} e^{-r^2} r \ d\theta \ dr = \frac{\pi}{4}$$

1.1.7 Γ et sin $\star\star\star$

On a la propriété suivantes sur Γ :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

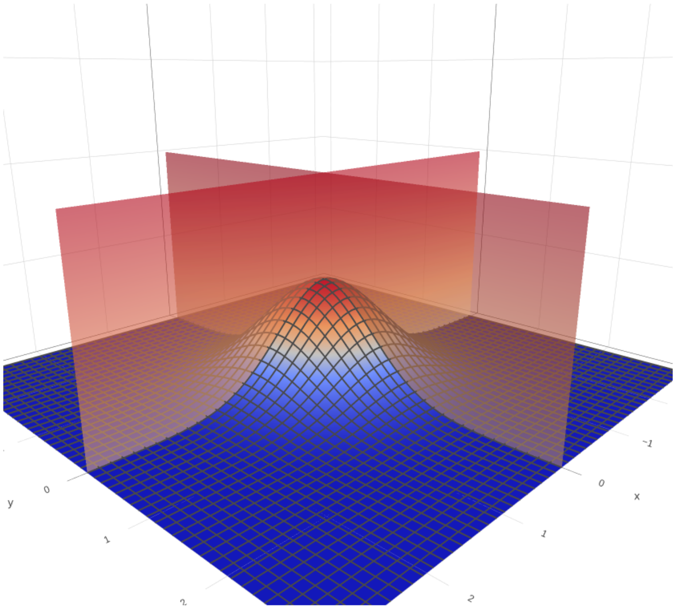
Dont on en deduit,

$$\varphi^2 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \frac{\pi}{4}$$

1.1.8 Transformée de $\mathcal{F}$ourier $\star\star\star$

1.1.9 Volume ⋆⋆⋆

φ^2 représente le volume de la surface $z = e^{-(x^2+y^2)}$ sur $\mathbb{R}^2_+$ ci-dessous.



On a $z = e^{-r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, z \in]0,1]$.
En calculant le volume par rapport à l'axe z, on a la conclusion suivante :

$$\varphi^2 = \int_0^1 d(V(z)) = \int_0^1 A(z)dz = \int_0^1 \frac{1}{4}\pi r(z)^2 dz = \frac{\pi}{4}\int_0^1 -\ln z \, dz \; = \; \frac{\pi}{4}$$

1.1.10 $\mathcal{L}$aplace ⋆⋆⋆⋆

$$\varphi = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\sqrt{t}}\right\}(s)\cdot\mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\}(s)ds = \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+s}ds$$

Or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\varphi$ d'où,

$$\varphi = \int_0^\infty \frac{1}{2\varphi\cdot 2\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{1+s}ds$$

Puis avec, $\sqrt{s} = x$, on a la conclusion suivante,

$$2\varphi^2 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

1.2 Zéta de 2

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.2}$$

1.2.1 Série de Fourier $\star$

On pose $f : \begin{cases} [-\pi;\pi] \to [0;\pi^2] \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, 2π-périodique et paire

On calcule ces coefficients de Fourier, $b_n = 0$ car f est paire, et, d'une part

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi^2}{3}$$

D'autre part, par double intégration par partie,

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

De plus,

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)cos(nt)$$

Particulièrement en $x = \pi$,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

On a bien **??** ce qui conclut.

1.2.2 Série de Taylor et intégrale de Wallis $\star\star$

On part du développement en série de Taylor de la fonction arcsin

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$$

On pose $x = \sin(t)$ puis on intégre en utilisant les intégrales de Wallis.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^{2n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \frac{\pi^2}{8}$$

Et,

$$\zeta(2) = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1.2.3 Intégrales doubles et jacobien $\star\star\star$

D'une part :

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1 - x^2y^2} = \int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}y^{2n}\ dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

D'autre part :

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \iint_T f(g(\alpha,\beta)) \cdot |\det(\mathcal{J}_g(\alpha,\beta)| \cdot d\alpha d\beta$$

où $g(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \end{pmatrix}$ et $T = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right\}$
De plus, $\det \mathcal{J}_g = 1 - \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\beta} \frac{d\alpha d\beta}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}} \left(1 - \frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}\right) d\alpha d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\beta} d\alpha d\beta = \frac{\pi^2}{8}$$

Or $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

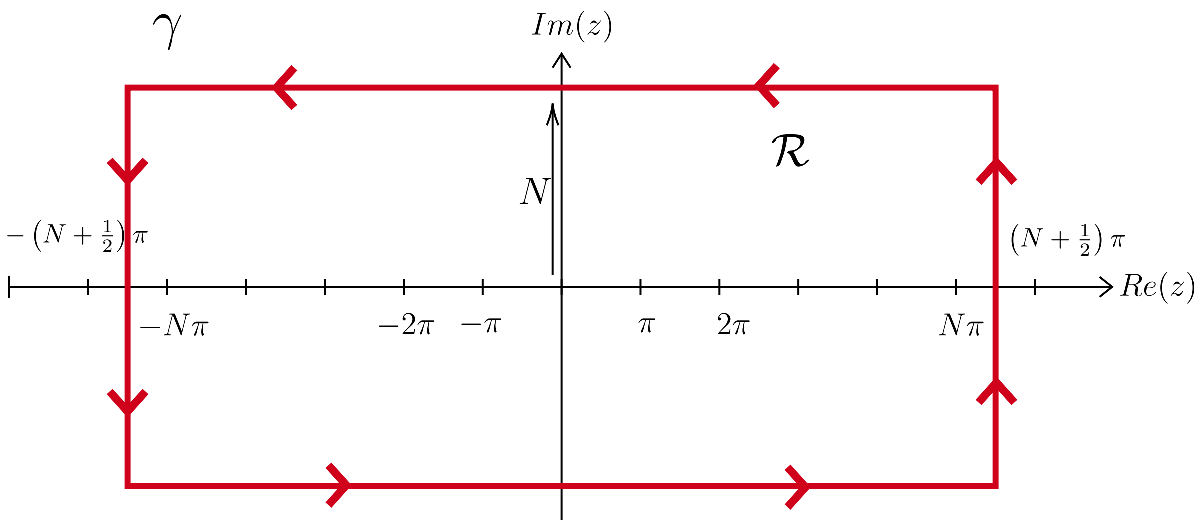
$$\zeta(2) = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}I \ = \ \frac{\pi^2}{6}$$

Chapitre 2

Analyse complexe

2.1 Calcul de $\zeta(2k)$

Mise en place Le but ici est de calculer la valeur de $\zeta(2k)$ de manière explicite. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On note f l'application définie sur $\mathbb{C}$ tel que $f : z \to \frac{\cot(z)}{z^{2k}}$. On définit le chemin γ sur la figure ci-dessous et le rectangle $\mathcal{R}$ formé par γ.



D'après le thèoreme des résidus, avec $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{p \in \mathcal{P} \cap \mathcal{R}} Res_f(p) Ind_\gamma(p)$$

On cherche donc les pôles de f

- $f(z) \xrightarrow[z \to 0]{} +\infty$ donc il y a un pôle en 0
- $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^{2k}} \frac{1}{\sin(z)}$ et $\sin(n\pi) = 0$ donc il y a des pôles en $n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}^*$

Indice du lacet Intuitivement, l'indice du lacet est le nombre de tour autour d'un pôle effectués par un point parcourant tout le lacet. Or $\forall p \in \mathcal{P}, p \in \mathcal{R}$ donc un point quelconque parcourant le lacet fait un tour autour de chaque pole, donc

$$Ind_\gamma(p) = 1$$

Pôles en $n\pi$ Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, les pôles en $n\pi$ sont des pôles simples ou d'ordre 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on chercher le résidu donc la limite de,

$$(z - n\pi) f(z) = \frac{\cos(z)}{z^{2k}} \frac{z - n\pi}{\sin(z)}$$

D'après la règle de l'Hopital,

$$\frac{\cos(z)}{z^{2k}} \frac{z - n\pi}{\sin(z)} \xrightarrow[z \to n\pi]{} \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^{2k}} \frac{1}{\cos(n\pi)}$$

Donc,

$$Res_f(n\pi) = \frac{1}{(n\pi)^{2k}}$$

Pôles en 0 Le pole en 0 se comporte de manière diffèrente que les poles en $n\pi$. On développe donc en série de Laurent au voisinage de 0. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{i}{z^{2k}} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{i}{z^{2k}} \frac{e^{2iz} - 1 + 2}{e^{2iz} - 1} = \frac{i}{z^{2k}} + \frac{2i}{z^{2k}} \frac{1}{e^{2iz} - 1}$$

Or, par définition, les nombres de Bernoulli B_n (pour $n \in \mathbb{N}$) sont les nombres tels que :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

En développant en série e^x, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathbb{Q}$. Donc,

$$f(z) = \frac{i}{z^{2k}} + \frac{1}{z^{2k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} (2iz)^n$$

Donc, le pôle en 0 est d'ordre $2k$ et,

$$Res_f(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2i)^{2k} = \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!}$$

Retour au théorème des résidus En combinant toutes les résultats précédents, on a,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n \in [\![-N;N]\!] \setminus \{0\}} \frac{1}{(n\pi)^{2k}}$$

En arrageant les termes,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} + \frac{\pi^{2k}}{4i\pi} \int_\gamma f(z) dz$$

Majoration de l'intégrale On montre maitenant que l'intégrale ci-dessus à droite converge vers 0. D'une part, on majore la cot sur le segment à droite du contour qui correspond à $z = (N + \frac{1}{2})\pi + i\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Donc,

$$|\cot(z)| = \left|\cot\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + i\theta\right)\right| = \left|\cot\left(\frac{\pi}{2} + i\theta\right)\right| = \left|\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}\right| \leq 1$$

Pour le segment de gauche, on peut aussi majorer par 1 car la cot est π-périodique.

D'autre part, on majore la cot sur les segments du haut et du bas (même argument que précedement) qui correspondent à $z = \theta + iN$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Donc,

$$|\cot(z)| = |\cot(\theta + iN)| = \left| \frac{e^{-i\theta}e^{N} + e^{i\theta}e^{-N}}{e^{-i\theta}e^{N} - e^{i\theta}e^{-N}} \right| \leq \left| \frac{e^{N} + e^{-N}}{|e^{N}e^{-i\theta}| - |e^{-N}e^{i\theta}|} \right| \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}}$$

Donc, $\forall z \in \gamma, |\cot(z)| \leq \frac{e^{N}+e^{-N}}{e^{N}-e^{-N}}$ et,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{2k}} |\cot(z)| dz \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{2k}} dz \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \int_{\gamma} \frac{1}{N^{2k}} dz$$

En sachant $Longueur(\gamma) = O(N)$,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \frac{1}{N^{2k}} Longueur(\gamma) = \frac{e^{N} + e^{-N}}{e^{N} - e^{-N}} \frac{1}{N^{2k+1}}$$

Dont on en deduis :

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

Conclusion

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} = \frac{|B_{2k}| (2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

Chapitre 3

Structures algèbriques

3.1 Exercices

3.1.1 Exercices

Exercice 1 Ensemble des automorphismes
On rappelle qu'un automorphisme de groupe G est un morphisme $f : G \to G$ si f est bijective. Soit A l'ensemble des automorphismes d'un groupe G, montrer que $(A, \circ)$ est un groupe.

Exercice 2 Caractérisation de l'injectivité
Soient $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$ et e_G l'élément neutre de G. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$ alors f est injective.

3.1.2 Correction

Exercice 1 $\forall (a, b) \in A^2, a \circ b \in A$. Donc la loi $\circ$ est bien une loi interne. De plus, il est évident que la loi $\circ$ est associative. D'autre part, $Id_G : G \to G$ est bijective donc $Id_G \in A$ et $\forall a \in A, a \circ Id_G = a = Id_G \circ a$ donc Id_G est l'élément neutre de $\circ$ sur A. Enfin, $\forall a \in A, a^{-1}$ existe et $a^{-1} \in A$. Donc tout élément de A est inversible, ce qui conclus.

Exercice 2 Soient $(G, \cdot)$, $(H, \star)$ et $(x, y) \in G^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Donc on a, $f(x) \star f(y)^{-1} = e_H$ puis $f(x) \star f(y^{-1}) = e_H$ donc $f(x \cdot y^{-1}) = e_H$. Puis en utilisant l'hypothèse, on a, $x \cdot y^{-1} = e_G$. Aussitôt $x = y$, ce qui conclus.