CORRECTION 10.18

Hamza Messaoudi

Lycée Omar Ibn AlKhattab

-N'hésitez pas à signaler la moindre erreur ou ambiguité.

Indications:

1. Remarquer qu'écrire $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt$ revient à écrire $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,dt$.
2. Penser à sommer les deux intégrales pour trouver $\ln(\sin(2t))$ comme intégrande.
3. Poser $u = 2t$ pour $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\,dt$

Corrigé:

On a $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt$.
On pose : $t = \frac{\pi}{2} - x \implies dx = -dt$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx \\
\implies 2I &= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)\sin(x))\,dx \\
\implies I &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(2\cos(x)\sin(x)) - \ln(2)\,dx \\
\implies I &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\,dx - \frac{\pi}{4}\ln(2)
\end{aligned}$$

On pose : $u = 2x \implies dx = \frac{du}{2}$
Donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,du - \frac{\pi}{4}\ln(2) \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,du\right) - \frac{\pi}{4}\ln(2)
\end{aligned}$$

On travaille cette fois-ci sur la deuxième intégrale dont les bornes sont inconvenables.
On pose donc : $u = \pi - x \implies du = -dx$

on trouve

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\left(2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\,du\right) - \frac{\pi}{4}\ln(2) \qquad \text{(Sommation sous variable muette)} \\ &= \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln(2) \end{aligned}$$

Enfin

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$