Correction Math C

Hasard 2 Math

1 Lemme de Cesàro

1.1

a) pour $u_n \to l \in \mathbb{C}$:
soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$
soit $n \geq n_0$, on a

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k) - l\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - l|$$

on découpe alors la somme en deux ainsi
$\sum_0^n = \sum_0^{n_0-1} + \sum_{n_0}^n$

- d'une part :
  on peut choisir un n_1 tel que $\frac{1}{n_1+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}|u_k - l| < \varepsilon$
- d'autre part :
  $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n}|u_k - l| < \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n}\varepsilon < \varepsilon$

donc en prenant $N = \max(n_0, n_1)$, on a :
$\forall n \geq N, |\sigma_n - l| < \varepsilon + \varepsilon$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = l$

b) pour $u_n \to +\infty$ (on prend $-u_n$ pour $-\infty$) :
soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n > M$
soit $n \geq n_0$, on a
$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k > \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}u_k + \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n}M = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}u_k + \frac{n-n_0+1}{n+1}M$

- d'une part :
  $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}u_k = 0$
  donc on peut choisir un n_1 tel que $\frac{1}{n_1+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}u_k > -1$ (on prend $\delta = -1$)
- d'autre part :
  $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-n_0+1}{n+1} = 1$
  donc on peut choisir un n_2 tel que $\frac{n_2-n_0+1}{n_2+1}M > \frac{1}{2}M$ (on prend $\delta = 1/2$)

donc en prenant $N = \max(n_0, n_1, n_2)$, on a :
$\forall n \geq N, \sigma_n > -1 + \frac{1}{2}M$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$

1.2

$u_k = \frac{1}{k+1} \to 0$ donc $\sigma_n \to 0$
puis $v_n = \sigma_{n-1}$

avec une comparaison série intégrale, on a
$H_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq H_{n+1} - 1$

d'où on en déduit $H_n \sim \ln n$, et finalement $v_n \sim \frac{\ln n}{n}$

1.3

par Cesàro, on a
$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e_k \to \alpha$
or par téléscopage $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{u_n - u_0}{n}$
puis comme $\frac{u_0}{n} = o(1)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \alpha \neq 0$

donc $u_n \sim n\alpha$

on suppose sans perte de généralité que $\alpha > 0$ (on prend $-e_n$ pour le cas négatif). Or, on a

$u_{n+1} - u_n \sim \alpha$ avec $\alpha > 0$

on en déduit que $(u_{n+1} - u_n) > 0$ APCR

donc par critère d'équivalence des séries à terme positif $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \alpha$ sont de même nature.
Or, $\sum \alpha$ diverge vers $+\infty$

donc on en déduit $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=0}^{n} \alpha$

i.e $u_n - u_0 \sim n\alpha$

i.e $u_n \sim n\alpha$

1.4

a) pour $l \in \mathbb{R}_+^*$:

on a par continuité du log : $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) \to \ln l$

i.e $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \to \ln l$

par le même procédé que 3., on a par Cesàro puis par téléscopage: $\frac{\ln u_n}{n} \to \ln l$

puis par continuité de exp: $\exp(\frac{\ln u_n}{n}) \to l$

donc $\sqrt[n]{u_n} \to l$

b) pour $l = +\infty$:
on a de même: $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \lim\limits_{l\to+\infty} \ln l = +\infty$
puis encore $\frac{\ln u_n}{n} \to +\infty$
et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{\ln u_n}{n}) = \lim\limits_{l\to+\infty} \exp(l)$

c) de même avec $l = 0^+$**, on procède par limite**

d) applications :
avec $u_n = n!$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = n+1 \to +\infty$ $\quad$ donc $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$
avec $u_n = \frac{n^n}{n!}$ $\quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} = \frac{n^n(1+\frac{1}{n})^n}{n!} = u_n(1+\frac{1}{n})^n$
donc $u_{n+1}/u_n \to e$ $\quad \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \to e$

1.5

soit $\varepsilon > 0$, comme $a_n \to a$ et $b_n \to b$, il existe un $n_0 = \max(n_a, n_b)$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\begin{array}{l}|a_n - a| < \varepsilon \\ |b_n - b| < \varepsilon\end{array}$
puis

- $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k}) - ab = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k} - ab)$
- pour $n \geq n_0$ et $k \in [|0, n|]$:
  $a_k b_{n-k} - ab = a_k b_{n-k} - ab_{n-k} + ab_{n-k} - ab = (a_k - a)b_{n-k} + a(b_{n-k} - b)$
- d'où

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k}) - ab\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k} - ab)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k b_{n-k} - ab|$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k - a||b_{n-k}| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|b_{n-k} - b||a|$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k - a||b_{n-k}| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|a_k - a||b_{n-k}| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-n_0}|b_{n-k} - b||a| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n-n_0+1}^{n}|b_{n-k} - b||a|$$

$\leq \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n_0-1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|a_j-a|\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n_0}^{n}\varepsilon\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-n_0}\varepsilon\cdot|a|+\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=n-n_0+1}^{n}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j-b|\cdot|a|$

$= \frac{n_0}{n+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|a_j-a|\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon\cdot|a|+\frac{n_0}{n+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j-b|\cdot|a|$

$\leq \frac{n_0}{n+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|a_j-a|\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\varepsilon\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\varepsilon\cdot|a|+\frac{n_0}{n+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j-b|\cdot|a|$

- on choisit un n_1 tel que $\frac{n_0}{n_1+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|a_j-a|\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|<\varepsilon$
- on choisit un n_2 tel que $\frac{n_0}{n_2+1}\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j-b|\cdot|a|<\varepsilon$

finalement, en prenant $N=\max(n_0,n_1,n_2)$, on a

$\forall n\geq N, \left|\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k})-ab\right|<\varepsilon+\varepsilon\cdot\max\limits_{j\in\mathbb{N}}|b_j|+\varepsilon\cdot|a|+\varepsilon$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k})=ab$$

comme $n\sim n+1$, on peut remplacer $n+1$ par n

1.6

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k}c_j=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k}\sum\limits_{p=0}^{j}a_pb_{j-p}=\frac{1}{n}\sum\limits_{0\leq p\leq j\leq k\leq n}^{n}a_pb_{j-p}=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}\sum\limits_{k=p}^{n}\sum\limits_{j=p}^{k}a_pb_{j-p}$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}a_p\sum\limits_{k=p}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k-p}b_j=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}a_p\sum\limits_{k=p}^{n}B_{k-p}$ changement de variable $j\to j-p$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}a_p\sum\limits_{k=0}^{n-p}B_k$ changement de variable $k\to k-p$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n}a_{n-p}\sum\limits_{k=0}^{p}B_k$ changement de variable $p\to n-p$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}B_k\sum\limits_{p=k}^{n}a_{n-p}$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}B_k\sum\limits_{p=0}^{n-k}a_p$ changement de variable $p\to n-p$

$=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}B_kA_{n-k}$

Donc par la question 5, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}C_k\to AB$$

1.7

on pose $u_n=(-1)^n$

u_n diverge, mais on a

- $\sigma_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2n+1} = 0$
- $\sigma_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} \to 0$

donc $\sigma_n \to 0$ et donc σ_n converge

1.8

on suppose SPDG que u_n est croissante, on prend $-u_n$ sinon.
u_n est croissante, donc soit elle est majorée et converge, soit elle est non majorée et diverge vers $+\infty$

On suppose $\sigma_n \to l \in \mathbb{C}$
si $u_n \to +\infty$, on a $\sigma_n \to +\infty$ donc absurde. Donc u_n converge vers $m \in \mathbb{R}$
on a donc $\sigma_n \to m$. Par unicité de la limite, $m = l$

On suppose $\sigma_n \to +\infty$
si u_n converge, on a σ_n converge aussi donc absurde. Donc $u_n \to +\infty$

pour le cas $-\infty$, on prend $-u_n$

1.9

$\sum_{k=0}^{n} ke_k = \sum_{k=0}^{n} k(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)u_{k+1} - u_{k+1} - ku_k) = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)u_{k+1} - ku_k) - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = (n+1)u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} u_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$
donc on a
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ke_k = u_{n+1}$

- or $ke_k \to 0$ donc par Cesàro $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{n} ke_k \to 0$
- et par hypothèse, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to l$

Donc $u_n \to l$

1.10

1.10.1

$\sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)(u_{j+1} - u_j) = \sum_{j=n}^{m-1} ((m-j-1)u_{j+1} + u_{j+1} - (m-j)u_j)$
$= \sum_{j=n}^{m-1} ((m-j-1)u_{j+1} - (m-j)u_j) + \sum_{j=n}^{m-1} u_{j+1} = (m-m)u_m - (m-n)u_n + \sum_{k=n+1}^{m} u_k = \sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n$

1.10.2

$(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k$

donc

$\left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| = \left|\sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{m-j}{m-n}e_j\right| \leq \sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{m-j}{m-n}|e_j|$

et comme $e_n = O(1/n)$ il existe $C > 0$ tq $|e_n| \leq \frac{C}{n}$ d'où

$\sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{m-j}{m-n}|e_j| \leq \sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{m-j}{m-n}\frac{C}{j} \leq \sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{C}{j}$

avec $\frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^{j}\frac{dx}{x}$ on a

$\sum\limits_{j=n}^{m-1}\frac{C}{j} \leq \int_{n-1}^{m-1}\frac{dx}{x} = C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$

finalement

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leq C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

- avec cette inégalité, on a aussi

  $\left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l + l - u_n\right| \leq C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$

- aussi par inégalité traingulaire :

  $|u_n - l| - \left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l\right| \leq \left|[\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l] - [u_n - l]\right|$

donc en combinant les deux inégalités, on obtient

$|u_n - l| \leq C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l\right|$

enfin

$\left|\frac{(m+1)\sigma_m-(n+1)\sigma_n}{m-n} - l\right| = \left|\frac{(m+1)(\sigma_m-l)+(n+1)(-\sigma_n+l)}{m-n}\right| \leq \frac{(m+1)|\sigma_m-l|+(n+1)|\sigma_n-l|}{m-n} \leq \frac{(m+1)|\sigma_m-l|+(m+1)|\sigma_n-l|}{m-n}$

on peut conclure que

$$|u_n - l| \leq C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}(|\sigma_m - l| + |\sigma_n - l|)$$

1.10.3

En prenant $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor > n$, on a par la question précédente

$$|u_n - l| \leq C\ln\left(\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n-1}\right) + \frac{2 + \lfloor \alpha n \rfloor}{1 + \lfloor \alpha n \rfloor - n}(|\sigma_{1+\lfloor \alpha n \rfloor} - l| + |\sigma_n - l|)$$

– **limite du terme de droite :**
tout d'abord, pour $\alpha > 1$, on a

$\lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n < \lfloor \alpha n \rfloor + 1$

donc

$\alpha n - 1 < \lfloor \alpha n \rfloor \leq \alpha n$

on en déduit $\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \to \alpha$

d'où avec $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$

- $C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) \to C \ln \alpha$
- $\frac{m+1}{m-n} = \frac{2+\lfloor \alpha n \rfloor}{1+\lfloor \alpha n \rfloor - n} = \frac{\frac{2}{\lfloor \alpha n \rfloor}+1}{\frac{1}{\lfloor \alpha n \rfloor}+1-n/\lfloor \alpha n \rfloor} \to \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$
- $|\sigma_m - l| + |\sigma_n - l| \to 0$

enfin, on a donc

$$C \ln\left(\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n-1}\right) + \frac{2+\lfloor \alpha n \rfloor}{1+\lfloor \alpha n \rfloor - n}(|\sigma_{1+\lfloor \alpha n \rfloor} - l| + |\sigma_n - l|) \to C \ln \alpha$$

– **conclusion:**
soit $\delta > 0$, on pose $\alpha = e^{\frac{\delta}{2C}} > 1$, ainsi, comme le terme de droit tend vers $C \ln \alpha$, on sait que pour $\varepsilon = \frac{\delta}{2} > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel

$$C \ln\left(\frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n-1}\right) + \frac{2+\lfloor \alpha n \rfloor}{1+\lfloor \alpha n \rfloor - n}(|\sigma_{1+\lfloor \alpha n \rfloor} - l| + |\sigma_n - l|) < C \ln \alpha + \varepsilon$$

par l'inégalité qu'on a montré, on a donc

$$\forall n \geq n_0, |u_n - l| < C \ln \alpha + \varepsilon = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

ainsi

$$u_n \to l$$

2 Théorème d'Abel

2.1

2.1.1

f est continue à l'intérieur de son disque de convergence, donc en particulier en 1 car $1 \in D(0, R)$
on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, on a donc

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in D(0,R)}} f(z) = f(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in \mathbb{C}$$

puis par définition de Δ_{θ_0}, les z de cet ensemble vérifie $|z| < 1$ donc $\Delta_{\theta_0} \subset D(0, 1)$:

2.1.2

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$
$$= (z-1) \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{n=k+1}^{N} a_n = (z-1) \sum_{k=0}^{N-1} z^k (R_k - R_N)$$
$$= (z-1) \sum_{k=0}^{N-1} z^k R_k - R_N (z^N - 1)$$

2.1.3

on passe à la limite sur N, avec $R_N \to 0$ car S_N converge

2.1.4

comme $R_n \to 0$, il existe un N_0 tq $\forall n \geq N_0, |R_n| < \varepsilon$
de plus, on sait que $\sum_{n \geq 0} R_n z^n$ converge par l'égalité de la question précédente.
donc par inégalité triangulaire, on a:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |R_n z^n| = \sum_{n=0}^{N_0} |R_n z^n| + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |R_n z^n| < \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| \, |z|^n + \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \varepsilon |z|^n$$

et donc comme $|z| < 1$:

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N_0} |R_n| + \varepsilon \tfrac{|z-1|}{1-|z|}$$

2.1.5