

**Valter Moretti**  
Dipartimento di Matematica  
Università di Trento

# **Fondamenti di Fisica Matematica I: Elementi di Meccanica Razionale, Meccanica Analitica e Teoria della Stabilità**

Illustrazioni di **Antonio Lorenzin**

Corsi di *Fondamenti di Fisica Matematica* per la Laurea Triennale in Matematica e  
*Meccanica Analitica* per la Laurea Triennale in Fisica.  
Università di Trento

Dispense scritte da Valter Moretti, liberamente scaricabili dal sito  
<http://www.science.unitn.it/~moretti/dispense.html> protette dal Creative Commons  
Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia License.  
**Nessuno è autorizzato a vendere queste dispense**

# Indice

Scopi, prerequisiti matematici. . . . .	2
Inquadramento generale della meccanica (analitica) classica. . . . .	2
<b>1 Lo Spazio ed il Tempo della Fisica Classica</b>	<b>11</b>
1.1 Lo spazio ed il tempo della fisica classica come spazi affini euclidei . . . . .	11
1.1.1 Spazi Affini . . . . .	12
1.1.2 Spazi Euclidei e Isometrie . . . . .	15
1.1.3 Il gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}^n$ . Interpretazione attiva e passiva delle isometrie . . . . .	19
1.1.4 Lunghezze d'arco, aree e volumi, invarianti sotto il gruppo delle isometrie	20
1.1.5 Lo spazio fisico e l'asse del tempo per un osservatore: regoli ed orologi ideali	21
1.1.6 Orientazione di spazi euclidei e prodotto vettoriale . . . . .	22
1.2 Introduzione alla nozione di varietà differenziabile . . . . .	24
1.2.1 Funzioni e curve differenziabili su una varietà . . . . .	29
<b>2 Lo Spaziotempo della Fisica Classica e la Cinematica Classica</b>	<b>31</b>
2.1 Lo spaziotempo della fisica classica: Tempo e Spazio assoluti e linee di universo .	31
2.2 Sistemi di riferimento . . . . .	36
2.2.1 *Una definizione alternativa di sistema di riferimento . . . . .	38
2.2.2 Sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali . . . . .	40
2.3 Cinematica assoluta del punto materiale . . . . .	42
2.3.1 Derivazione di curve in spazi affini . . . . .	43
2.3.2 Grandezze cinematiche elementari . . . . .	44
2.3.3 Cinematica per punti materiali vincolati a curve e superfici ferme . . . . .	46
2.4 Cinematica relativa del punto materiale . . . . .	52
2.4.1 Vettore $\omega$ e formule di Poisson . . . . .	53
2.4.2 Velocità ed accelerazione al variare del riferimento . . . . .	63
<b>3 Dinamica del punto e dei sistemi di punti materiali</b>	<b>67</b>
3.1 Primo principio della dinamica . . . . .	67
3.1.1 Sistemi di riferimento inerziali . . . . .	67
3.1.2 Trasformazioni di Galileo . . . . .	69

3.1.3	Moto relativo di riferimenti inerziali . . . . .	72
3.2	Formulazione generale della dinamica classica dei sistemi di punti materiali . . .	74
3.2.1	Masse, Impulsi e Forze . . . . .	75
3.2.2	Sovrapposizione delle forze. . . . .	77
3.2.3	Problema fondamentale della dinamica e determinismo . . . . .	78
3.3	Situazioni dinamiche più generali . . . . .	80
3.3.1	Moto assegnato per un sottosistema: forze dipendenti dal tempo . . . . .	80
3.3.2	Vincoli geometrici: reazioni vincolari . . . . .	82
3.3.3	Dinamica in riferimenti non inerziali: forze inerziali . . . . .	87
3.4	Alcuni commenti sulla formulazione generale sulla dinamica newtoniana . . . . .	90
3.4.1	Invarianza galileiana della meccanica classica . . . . .	90
3.4.2	Il fallimento del programma newtoniano . . . . .	94
3.4.3	Un commento sul cosiddetto “Principio di Mach” . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>97</b>
4.1	Sistemi di equazioni differenziali . . . . .	97
4.1.1	Riduzione al prim'ordine. . . . .	98
4.1.2	Problema di Cauchy. . . . .	99
4.1.3	Integrali primi. . . . .	100
4.2	Alcune nozioni e risultati preparatori per il teoremi di esistenza e unicità. . . . .	100
4.2.1	Lo spazio di Banach $C^0(K; \mathbb{K}^n)$ . . . . .	100
4.2.2	Teorema del punto fisso in spazi metrici completi. . . . .	104
4.2.3	Funzioni lipschitziane. . . . .	105
4.3	Teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy. . . . .	108
4.3.1	Teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy. . . . .	108
4.3.2	Condizione per gli integrali primi. . . . .	114
4.3.3	Teorema di esistenza ed unicità globale per il problema di Cauchy. . . . .	115
4.3.4	Equazioni differenziali lineari. . . . .	118
4.3.5	Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare. . . . .	121
4.3.6	Completezza di soluzioni massimali. . . . .	131
4.4	*Confronto tra equazioni differenziali, dipendenza dalle condizioni iniziali e da parametri. . . . .	135
4.4.1	Lemma di Gronwall e sue conseguenze. . . . .	135
4.4.2	Regolarità della dipendenza dai dati di Cauchy e questioni connesse. . . . .	137
4.5	*Problema di Cauchy su varietà differenziabili. . . . .	138
4.5.1	Problema di Cauchy, esistenza ed unicità globali. . . . .	139
4.5.2	Completezza delle soluzioni. . . . .	140
4.5.3	Gruppi di diffeomorfismi locali ad un parametro. . . . .	143
4.5.4	Campi vettoriali commutanti e commutazione dei corrispondenti gruppi locali . . . . .	145
4.5.5	Esistenza di integrali primi funzionalmente indipendenti. . . . .	147

<b>5</b>	<b>Leggi di bilancio ed integrali primi in Meccanica.</b>	<b>150</b>
5.1	Equazioni cardinali per i sistemi di punti materiali, conservazione dell'impulso e del momento angolare . . . . .	150
5.1.1	Massa totale, impulso totale, momento angolare totale, energia cinetica totale . . . . .	151
5.1.2	Equazioni cardinali. . . . .	153
5.1.3	Leggi di bilancio/conservazione di impulso e momento angolare. . . . .	156
5.2	Energia meccanica . . . . .	157
5.2.1	Teorema delle forze vive. . . . .	159
5.2.2	Forze conservative. . . . .	160
5.2.3	Bilancio e conservazione dell'energia meccanica. . . . .	163
5.3	*La necessità della descrizione in termini di continui e di campi in meccanica classica. . . . .	166
<b>6</b>	<b>Introduzione alla meccanica dei Corpi Rigidi.</b>	<b>169</b>
6.1	Il vincolo di rigidità per sistemi discreti e continui. . . . .	169
6.1.1	Corpi rigidi nel caso generale e per sistemi di punti finiti. . . . .	169
6.1.2	Corpi rigidi continui. . . . .	172
6.2	Il tensore d'inerzia e le sue proprietà. . . . .	175
6.2.1	Il tensore d'inerzia . . . . .	175
6.2.2	Terne principali d'inerzia. . . . .	177
6.2.3	Formula di Huygens-Steiner. . . . .	184
6.3	Dinamica del corpo rigido: introduzione alla teoria delle equazioni di Eulero. . .	185
6.3.1	Equazioni di Eulero. . . . .	187
6.3.2	Equazione di Poinsot. . . . .	189
6.3.3	Rotazioni permanenti. . . . .	189
6.3.4	Moti alla Poinsot per corpi giroscopici. . . . .	191
6.3.5	Moti alla Poinsot per corpi non giroscopici. . . . .	193
<b>7</b>	<b>Introduzione alla teoria della stabilità.</b>	<b>197</b>
7.1	Punti singolari e configurazioni di equilibrio . . . . .	197
7.1.1	Equilibrio stabile ed instabile. . . . .	199
7.1.2	Introduzione ai metodi di Liapunov per lo studio della stabilità. . . . .	202
7.1.3	*Ancora sulla stabilità asintotica. . . . .	207
7.1.4	Un criterio per l'instabilità basato sulla procedura di linearizzazione. . .	210
7.2	Applicazioni a sistemi fisici della meccanica classica. . . . .	212
7.2.1	Il teorema di Lagrange-Dirichlet. . . . .	213
7.2.2	Un criterio per l'instabilità . . . . .	217
7.2.3	Stabilità delle rotazioni permanenti per corpi rigidi non giroscopici. . . .	220

<b>8</b>	<b>Fondamenti di Meccanica Lagrangiana</b>	<b>224</b>
8.1	Un esempio introduttivo . . . . .	225
8.2	Il caso generale: sistemi olonomi ed equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	230
8.2.1	Spaziotempo delle configurazioni in presenza di vincoli olonomi . . . . .	231
8.2.2	Vetтори tangenti allo spazio delle configurazioni $\mathbb{Q}_t$ . . . . .	238
8.2.3	Vincoli ideali . . . . .	241
8.2.4	Grandezze cinematiche ed energia cinetica . . . . .	245
8.2.5	Equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi di un numero finito di punti materiali . . . . .	246
8.3	Estensione al caso di sistemi costituiti da corpi rigidi continui e punti materiali .	250
8.3.1	Sistemi articolati . . . . .	251
8.3.2	Calcolo esplicito dei vettori tangenti $\delta P_i^{(k)}$ e dell'energia cinetica di corpi rigidi continui . . . . .	254
8.3.3	Generalizzazione dell'identità (8.36) ai corpi rigidi continui . . . . .	255
8.3.4	Equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi articolati . . . . .	257
8.4	Proprietà elementari delle equazioni di Eulero Lagrange . . . . .	259
8.4.1	Normalità delle equazioni di Eulero-Lagrange. . . . .	259
8.4.2	Spaziotempo degli stati cinetici ed invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	262
8.4.3	Lagrangiane . . . . .	266
8.4.4	Cambiamento di riferimento inerziale e non unicità della lagrangiana . . .	273
8.5	*Formulazione geometrico differenziale globale delle equazioni di Eulero-Lagrange	279
8.5.1	La struttura di varietà fibrata di $\mathbb{V}^{n+1}$ e di $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . . . . .	279
8.5.2	Il campo vettoriale dinamico associato alle equazioni di Eulero-Lagrange .	283
8.5.3	Forme di contatto, forma di Poincaré-Cartan e formulazione intrinseca delle equazioni di E.L. indotte da una lagrangiana . . . . .	284
8.5.4	Sistemi lagrangiani senza lagrangiana globale . . . . .	287
<b>9</b>	<b>Argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana</b>	<b>289</b>
9.1	Il cosiddetto "Principio di Minima Azione" per sistemi che ammettono lagrangiana	289
9.1.1	Primi rudimenti di calcolo delle variazioni . . . . .	289
9.1.2	Il Principio di Minima Azione . . . . .	291
9.2	I potenziali generalizzati . . . . .	294
9.2.1	Il caso della forza di Lorentz . . . . .	294
9.2.2	Generalizzazione della nozione di potenziale . . . . .	296
9.2.3	Condizioni per l'esistenza del potenziale generalizzato . . . . .	298
9.2.4	Potenziali generalizzati delle forze inerziali . . . . .	301
9.3	Configurazioni di equilibrio e stabilità . . . . .	304
9.3.1	Configurazioni di equilibrio rispetto ad un riferimento . . . . .	304
9.3.2	Equilibrio stabile ed instabile, teorema di Lagrange-Dirichlet . . . . .	310
9.4	Introduzione alla teoria delle piccole oscillazioni e delle coordinate normali . . .	314
9.4.1	Equazioni linearizzate e disaccoppiate: coordinate normali . . . . .	315

9.4.2	Pulsazioni normali (o proprie) e modi normali di oscillazione . . . . .	320
<b>10</b>	<b>Simmetrie e leggi di conservazione: teoremi di Noether e di Jacobi.</b>	<b>324</b>
10.1	Il legame tra simmetria e leggi di conservazione: coordinate cicliche. . . . .	324
10.1.1	Coordinate cicliche e conservazione dei momenti coniugati. . . . .	324
10.1.2	Invarianza traslazionale e conservazione dell'impulso. . . . .	327
10.1.3	Invarianza rotazionale e conservazione del momento angolare. . . . .	329
10.2	Il legame tra simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Emmy Noether. .	332
10.2.1	Trasformazioni su $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . . . . .	332
10.2.2	Il teorema di Noether in forma locale elementare. . . . .	333
10.2.3	Invarianza dell'integrale primo di Noether per trasformazione di coordinate.	338
10.2.4	Le trasformazioni di simmetria (debole) di un sistema lagrangiano trasfor- mano soluzioni delle equazioni di E.-L. in soluzioni delle stesse. . . . .	339
10.3	L'integrale primo di Jacobi, invarianza sotto "traslazioni temporali" e conserva- zione dell'energia meccanica. . . . .	341
10.4	Commenti finali sul teorema di Noether. . . . .	346
10.4.1	Invarianza sotto il gruppo di Galileo in meccanica lagrangiana. . . . .	346
10.4.2	Formulazione lagrangiana e teorema di Noether oltre la meccanica classica.	346
10.5	*Formulazione generale e globale del Teorema di Noether. . . . .	347
10.5.1	Il teorema di Noether nella forma generale. . . . .	350
10.5.2	Il vettore di Runge-Lenz dal teorema di Noether. . . . .	356
10.5.3	L'integrale primo di Jacobi come conseguenza del teorema di Noether. . .	358
<b>11</b>	<b>Fondamenti di Meccanica Hamiltoniana</b>	<b>361</b>
11.1	Lo spaziotempo delle fasi e le equazioni di Hamilton . . . . .	362
11.1.1	Lo spaziotempo delle Fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . . . . .	363
11.1.2	Le equazioni di Hamilton . . . . .	367
11.1.3	Le equazioni di Hamilton da un principio variazionale . . . . .	380
11.2	Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ . . . . .	382
11.2.1	Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ . . . . .	382
11.2.2	Il gruppo simplettico ed i sistemi hamiltoniani . . . . .	383
11.2.3	Il teorema di Liouville su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ . . . . .	389
11.3	*La struttura di varietà fibrata di $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e le equazioni di Hamilton come equazioni globali . . . . .	393
11.3.1	Lo spazio fibrato $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . . . . .	393
11.3.2	Trasformazione di Legendre globale come diffeomorfismo da $A(\mathbb{V}^{n+1})$ a $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . . . . .	396
11.3.3	Equazioni di Hamilton assegnate globalmente su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e campo vettor- iale dinamico $Z$ : emancipazione dalla formulazione lagrangiana . . . . .	398

<b>12 Argomenti più avanzati di Meccanica Hamiltoniana</b>	<b>400</b>
12.1 Trasformazioni canoniche e loro proprietà fondamentali . . . . .	400
12.1.1 Trasformazioni canoniche . . . . .	401
12.1.2 Preservazione della forma delle equazioni di Hamilton . . . . .	405
12.2 *Il teorema di Liouville in forma globale ed il teorema “del ritorno” di Poincaré .	411
12.2.1 Teorema di Liouville e l’equazione di Liouville . . . . .	412
12.2.2 Il teorema “del ritorno” (o “di ricorrenza”) di Poincaré . . . . .	415
12.3 Simmetrie e leggi di conservazione in meccanica di Hamilton . . . . .	419
12.3.1 Parentesi di Poisson . . . . .	420
12.3.2 Gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche attive . . . . .	425
12.3.3 Simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Noether hamiltoniano .	431
12.4 Forma di Poincaré-Cartan e teoria di Hamilton-Jacobi . . . . .	438
12.4.1 La forma di Poincaré-Cartan e la condizione di Lie come caratterizzazione delle trasformazioni canoniche . . . . .	439
12.4.2 Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche . . . . .	445
12.4.3 Introduzione alla teoria di Hamilton-Jacobi . . . . .	450
12.4.4 Equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo . . . . .	454
12.5 *Meccanica di Hamilton e strutture simplettiche . . . . .	455
12.5.1 Spazio delle fasi come varietà simplettica per sistemi hamiltoniani autonomi	455
12.5.2 Caso generale: $F(\mathbb{V}^{n+1})$ come fibrato di varietà simplettiche . . . . .	461
12.5.3 Una nozione più generale di spaziotempo delle fasi e dinamica di Hamilton	465
<b>A Elementi di Topologia Generale, Analisi e Geometria Differenziale</b>	<b>469</b>
A.1 Limite e derivazione sotto il segno di integrale . . . . .	469
A.2 Deformazione di curve . . . . .	471
A.3 Richiami di Topologia elementare . . . . .	472
A.4 Elementi di geometria differenziale . . . . .	474
A.4.1 Varietà prodotto . . . . .	476
A.4.2 Funzioni differenziabili . . . . .	476
A.4.3 Sottovarietà embedded . . . . .	477
A.4.4 Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti	481
A.4.5 Differenziali, curve e vettori tangenti. . . . .	485
A.5 Ancora sugli spazi affini ed euclidei . . . . .	486
A.5.1 Spazi affini ed euclidei come varietà differenziabili. . . . .	486
<b>B Argomenti più avanzati di geometria differenziale</b>	<b>490</b>
B.1 Differenziazione su varietà e nozioni connesse . . . . .	490
B.1.1 Pushforward e pullback . . . . .	490
B.1.2 Derivata di Lie di campi vettoriali . . . . .	491
B.2 Immersione di spazi tangenti per sottovarietà embedded . . . . .	493
B.3 Fibrato tangente e cotangente, varietà fibrato e sezioni . . . . .	494
B.4 Teoria delle forme e dell’integrazione su varietà differenziabili . . . . .	498

B.4.1	$p$ -forme e forme differenziali . . . . .	498
B.4.2	Derivata di Lie di $p$ -forme . . . . .	503
B.4.3	Integrale di forme di ordine massimo . . . . .	504
B.4.4	Varietà con bordo e teorema di Stokes-Poincaré . . . . .	512
<b>C</b>	<b>Soluzioni e/o suggerimenti per risolvere gli esercizi proposti.</b>	<b>515</b>
C.1	Esercizi del Capitolo 1. . . . .	515
C.2	Esercizi del Capitolo 2. . . . .	521
C.3	Esercizi del Capitolo 3. . . . .	528
C.4	Esercizi del Capitolo 4. . . . .	530
C.5	Esercizi del Capitolo 5. . . . .	534
C.6	Esercizi del Capitolo 6. . . . .	540
C.7	Esercizi del Capitolo 7. . . . .	542
C.8	Esercizi del Capitolo 8. . . . .	543
C.9	Esercizi del Capitolo 11. . . . .	555
C.10	Esercizi dell'Appendice A. . . . .	562
<b>D</b>	<b>Alcuni esercizi d'esame svolti.</b>	<b>564</b>



## Scopi, prerequisiti matematici ed inquadramento generale delle dispense.

Il fine di queste dispense è quello di introdurre gli studenti dei corsi di laurea in Matematica e in Fisica agli argomenti ed i metodi della fisica matematica classica (con particolare attenzione alla meccanica classica), della formulazione lagrangiana della meccanica classica, includendo un'introduzione alla teoria della stabilità ed alla formulazione hamiltoniana della meccanica classica. L'accento è posto in particolare sulla struttura logico-matematica delle teorie fisiche studiate che, per quanto possibile, sono presentate in modo assiomatico deduttivo partendo da un numero ridotto di ipotesi fisiche. Il linguaggio matematico usato è quello dell'analisi e della geometria differenziale elementare.

Queste dispense contengono abbondantemente il materiale didattico dei corsi di *Fondamenti di Fisica Matematica* (prima parte) per la Laurea Triennale in Matematica e di *Meccanica Analitica* per la Laurea Triennale in Fisica.

I prerequisiti per l'utilizzo delle dispense consistono nel calcolo differenziale ed integrale di una e più variabili, delle nozioni elementari di geometria ed algebra lineare, delle nozioni elementari di topologia generale e dei fondamenti di fisica meccanica. Molte delle nozioni tecniche usate saranno brevemente richiamate prima del loro uso. *Gli esempi (che spesso sono esercizi svolti) e gli esercizi proposti sono parte integrante del corso.*

L'ultima sezione riporta le soluzioni o suggerimenti per le soluzioni degli esercizi proposti. Come testo generale di riferimento, per approfondimenti, complementi ed esercizi, si consigliano i testi [Goldstein50], [Fasano-Marmi] e [Arnold92].



Le sezioni, i teoremi, le dimostrazioni e gli esercizi contrassegnati con un asterisco non sono strettamente fondamentali ai fini del corso in quanto si riferiscono ad argomenti (specialmente matematici) più avanzati. Sono spesso importanti per chi voglia approfondire il formalismo.

**Ringraziamento.** Ringrazio i colleghi Franco Caviglia, Riccardo Ghiloni, Enrico Pagani, Alessandro Perotti e Nicola Pinamonti, per diversi suggerimenti sui contenuti dei corsi a cui si rivolgono queste dispense e per correzioni di carattere tecnico. Ringrazio anche Lorenzo Bazzanini, Alessandro Casalino, Federico Franceschini, Marco Frego, Filippo Maria Gambetta, Luca Guglielmi, Gian Vittorio Luria, Stefano Martin, Mattia Signoretto, Filippo Spaggiari, Cesare Traffelini, Fabio Zanini e Chiara Zarpellon per avermi segnalato diverse correzioni nel testo e nelle parti matematiche.

Un importante ringraziamento è dovuto ad Antonio Lorenzin che ha prodotto tutte le figure presenti nelle dispense migliorandone la comprensione.

## Inquadramento generale della meccanica (analitica) classica.

Dal punto di vista fisico è importante sottolineare che la descrizione della realtà fisica presentata in queste dispense ha precisi limiti di applicabilità e, generalmente parlando, deve pensarsi come un'approssimazione di qualche teoria più fondamentale. Infatti essa risulta essere inadeguata in almeno due contesti.

(a) La descrizione classica cessa di valere nel regime di velocità comparabili con quelle della luce/forti campi gravitazionali/trattazioni della fisica cosmologica. In tali contesti la descrizione più soddisfacente, al momento nota, è data dalla *Teoria della Relatività*<sup>1</sup>, di cui la meccanica classica è approssimazione. La rivoluzione della Relatività ha mostrato che le strutture metriche classiche (lunghezze ed intervalli di tempo) sono in realtà *relative al sistema di riferimento*, ma al contempo sono parti di una struttura metrica spaziotemporale *assoluta* che ha particolari proprietà di simmetria (almeno fino a quando si trascura la descrizione relativistica dell'interazione gravitazionale) descritte dal cosiddetto gruppo di Lorentz-Poincaré. La geometria dello spaziotempo che ne consegue si è rivelata il linguaggio matematico per poter trattare argomenti di generale interesse fisico, come la nozione di causalità. Le implicazioni di questo nuovo punto di vista sono state incredibilmente feconde ed hanno avuto influenze fondamentali nello sviluppo di tutta la fisica del 1900. La teoria della relatività ha costruito, insieme alla meccanica quantistica, il *linguaggio stesso* ed il *paradigma* della fisica teorica di un secolo intero di ricerca.

(b) La descrizione classica cessa di essere adeguata anche, rozzamente parlando, in riferimento a sistemi microscopici (scale molecolari ed inferiori). In tali contesti la descrizione più adeguata è data dalla *Meccanica Quantistica* (e dalla teoria dei campi quantistica), di cui, un'altra volta, la meccanica classica è approssimazione. Mentre il linguaggio matematico delle teorie relativistiche è ancora quello della geometria differenziale, il linguaggio matematico delle teorie quantistiche è dato dall'analisi funzionale (degli spazi di Hilbert in particolare).

Dobbiamo doverosamente rimarcare che lo schema è ancora tutt'altro che completo, visto che le teorie quantistiche e quelle relativistiche non formano un corpus coerente, in particolare vi sono diversi problemi concettuali nel conciliare la descrizione quantistica con quella data dalla relatività generale. Al momento manca una descrizione completa della struttura fisica di ciò che esiste.

La meccanica classica, d'altra parte, funziona perfettamente per le applicazioni pratiche più comuni, ma non solo. Basti pensare che le missioni *Apollo* che hanno portato l'uomo sulla luna sono state concepite completamente nell'ambito della meccanica classica, attraverso la quale sono stati costruiti tutti i modelli e sono stati fatti i calcoli.

---

<sup>1</sup>Problemi irrisolti anche nell'ambito delle Teorie Relativistiche rimangono aperti in cosmologia, in particolare in relazione al cosiddetto problema dell'*energia e della materia oscura*.

# Capitolo 1

## Lo Spazio ed il Tempo della Fisica Classica

In questo capitolo iniziale discuteremo come la geometria euclidea fornisca una descrizione matematica appropriata dello spazio e del tempo della fisica classica. Ci riferiamo in questo modo allo spazio fisico ed al tempo fisico come appaiono per ogni possibile *osservatore* pensato come insieme di strumenti fisici (senza necessità di attività cosciente). Nell'ultima sezione estendendo le nozioni introdotte nelle precedenti sezioni, arriveremo a presentare la nozione di varietà differenziabile che sarà utile in tutto il resto delle dispense.

L'appendice A, completando la discussione esposta in questo capitolo introduttivo, richiama alcune nozioni elementari di *topologia generale* e approfondisce la nozione di varietà differenziabile proponendo diversi esempi ed esercizi svolti.

### 1.1 Lo spazio ed il tempo della fisica classica come spazi affini euclidei

Ogni *osservatore* pensato come insieme di strumenti fisici (senza necessità di attività cosciente) colloca gli eventi fisici in uno spazio tridimensionale e lungo una retta temporale. Talvolta si trova scritto che lo spazio fisico, ovvero lo spazio in cui si formula la geometria di Euclide, è lo spazio  $\mathbb{R}^3$ . Questa affermazione non è corretta nè dal punto di vista fisico nè da quello matematico. La ragione è, prima di tutto, che  $\mathbb{R}^3$  ha una struttura che *non* è invariante per traslazioni (e non lo è anche sotto altri tipi di trasformazioni) al contrario della natura delle proposizioni geometriche nella geometria di Euclide. Questa struttura non invariante per traslazioni, dal punto di vista fisico, non ha nemmeno alcun corrispondente nella realtà dell'esperienza quotidiana. Per esempio, l'origine  $(0, 0, 0)$  di  $\mathbb{R}^3$  oppure gli assi individuati dai vettori  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  sono strutture privilegiate che non hanno alcun corrispondente fisico: non c'è alcuna legge fisica che fissa l'origine dello spazio o assi privilegiati di riferimento. Viceversa le leggi della fisica (almeno nei sistemi di riferimento inerziali che discuteremo nei prossimi capitoli) sono invarianti per traslazioni, oltre che sotto altre trasformazioni che si identificano con il gruppo delle isome-

trie dello spazio come vedremo più avanti. In termini intuitivi ignorare la parte della struttura di  $\mathbb{R}^3$  che non è invariante per traslazioni significa appunto vedere  $\mathbb{R}^3$  come uno *spazio affine*<sup>1</sup>. A causa di questa natura tali spazi ammettono particolari trasformazioni, chiamate appunto *traslazioni*, che quando lo spazio affine viene dotato di significato fisico ed in particolare dotato delle usuali proprietà metriche, corrispondono alle operazioni fisiche di *traslazione rigide* dei corpi materiali. (Per parlare di corpi rigidi e di altre trasformazioni di invarianza, diverse dalle traslazioni, come le rotazioni è comunque necessario includere altre strutture matematiche in aggiunta alla nozione di spazio affine come vedremo tra poco.) Un discorso analogo si può fare per l'asse dei tempi lungo il quale vengono ordinati temporalmente gli eventi da parte di ogni osservatore. Anche in questo caso non vi è alcun punto privilegiato lungo tale insieme ordinato e – anche se è più difficile intuirlo rispetto all'analogia proprietà dello spazio fisico – sussiste una proprietà di invarianza per *traslazioni temporali* degli eventi fisici, nel senso che (almeno nei sistemi di riferimento inerziali che discuteremo nei prossimi capitoli) ogni esperimento con un certo esito che può essere preparato oggi può essere in linea di principio preparato anche domani, con lo stesso esito.

Lo spazio tridimensionale della fisica classica e l'asse del tempo della fisica classica (ma anche lo spaziotempo quadridimensionale della fisica relativistica speciale) sono *spazi affini* prima di tutto.

La struttura di spazio affine non è però sufficiente per descrivere matematicamente la natura dello spazio fisico e dell'asse del tempo. Sono necessarie ulteriori strutture matematiche che rendano conto da un lato della possibilità sperimentale di assegnare le *dimensioni fisiche*: *lunghezze, aree, volumi, angoli...*, ai corpi che riempiono lo spazio e dall'altro lato della *durata temporale* dei fenomeni che accadono. Dal punto di vista puramente matematico gli spazi affini, se ulteriormente dotati della *struttura metrica* che vedremo tra poco, si dicono spazi *euclidei* perché, nei casi unidimensionale, bidimensionale e tridimensionale, sono gli spazi della geometria di Euclide. Lo *spazio euclideo tridimensionale* è una la descrizione adeguata dello spazio fisico della fisica classica. Lo spazio euclideo unidimensionale è una descrizione adeguata dell'asse del tempo della fisica classica.

Richiamiamo brevemente la definizione e le principali caratteristiche degli spazi affini e degli spazi euclidei. Tali nozioni dovrebbero già essere note dai corsi di geometria elementare.

### 1.1.1 Spazi Affini

**Definizione 1.1.** Uno **spazio affine (reale) di dimensione (finita)  $n$**  è un insieme  $\mathbb{A}^n$ , i cui elementi sono detti **punti**, dotato di alcune strutture che descriviamo di seguito.

(1) Uno spazio vettoriale reale  $n$ -dimensionale  $V$ , detto **spazio delle traslazioni** o **spazio dei vettori liberi**.

(2) Un'applicazione  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \ni (P, Q) \mapsto P - Q \in V$  che gode delle due seguenti proprietà:

(i) per ogni coppia di elementi  $Q \in \mathbb{A}^n$ ,  $\mathbf{v} \in V$  c'è un *unico* punto  $P \in \mathbb{A}^n$  tale che  $P - Q = \mathbf{v}$ ;

---

<sup>1</sup>Si legga a tal proposito la “definizione” di spazio affine data a p.13 del fondamentale testo di Arnold di Metodi Matematici della Meccanica Classica [Arnold92].

(ii)  $P - Q + Q - R = P - R$  per ogni terna  $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$ .

Se  $Q \in \mathbb{A}^n$  e  $\mathbf{v} \in V$ ,  $Q + \mathbf{v} \in \mathbb{A}^n$  indica l'unico punto  $P$  in  $\mathbb{A}^n$  tale che  $P - Q = \mathbf{v}$ . Una **retta** in  $\mathbb{A}^n$  di **origine**  $P$  e **vettore tangente**  $\mathbf{u}$  è la funzione  $\mathbb{R} \ni t \mapsto P + t\mathbf{u} \in \mathbb{A}^n$ . Un **segmento** di retta si ottiene restringendo  $t$  ad un intervallo (diverso da un punto).  $\diamond$

**N.B.** *Gli spazi affini considerati in queste dispense sono esclusivamente reali e con dimensione finita.*

### Esercizi 1.1.

1. Provare che, per ogni  $P \in \mathbb{A}^n$ ,  $P - P = \mathbf{0}$  vettore nullo di  $V$ .
2. Provare che, se  $Q \in \mathbb{A}^n$  e  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  allora:

$$(Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = Q + (\mathbf{u} + \mathbf{v}). \quad (1.1)$$

3. Provare che, se  $Q, P \in \mathbb{A}^n$  allora:

$$P - Q = -(Q - P). \quad (1.2)$$

4. Provare che, se  $P, Q \in \mathbb{A}^n$  e  $\mathbf{u} \in V$  allora:

$$P - Q = (P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Un **sistema di coordinate locali** su  $\mathbb{A}^n$  è un'applicazione *iniettiva*  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $U \subset \mathbb{A}^n$  e  $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme aperto. Evidentemente  $\psi$  identifica biunivocamente i punti di  $U$  con le  $n$ -ple in  $\psi(U)$ . Il sistema di coordinate è detto **globale** se  $U = \mathbb{A}^n$ . Ogni spazio affine  $\mathbb{A}^n$  ammette una classe di sistemi di coordinate globali naturali detti *sistemi di coordinate cartesiane*, che giocano un importantissimo ruolo nello sviluppo della teoria. Un tale sistema di coordinate si costruisce come segue. Si fissi un punto  $O \in \mathbb{A}^n$ , detto *origine* delle coordinate, ed una base  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  dello spazio delle traslazioni  $V$ , detta *sistema di assi* delle coordinate. Variando  $P \in \mathbb{A}^n$  le componenti,  $((P - O)^1, \dots, (P - O)^n)$ , di ogni vettore  $P - O$  rispetto alla base scelta definiscono una funzione biettiva  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che permette di identificare i punti di  $\mathbb{A}^n$  con i punti di  $\mathbb{R}^n$ . Questa funzione  $f$  che definisce una corrispondenza tra punti,  $P$ , e  $n$ -ple,  $((P - O)^1, \dots, (P - O)^n)$ , è iniettiva per la richiesta (i) nella definizione 1.1, tenendo infine conto che le componenti di un vettore rispetto ad una base sono univocamente determinate dal vettore. È anche suriettiva perché, se  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  allora, posto  $P := O + \sum_{k=1}^n x^k \mathbf{e}_k$ , vale banalmente  $f(P) = (x^1, \dots, x^n)$ .

**Definizione 1.2.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}^n$  con spazio delle traslazioni  $V$  si fissi un punto  $O \in \mathbb{A}^n$  ed una base  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  di  $V$ . Il sistema di coordinate globali  $(\mathbb{A}^n, f)$ , dove  $f$  associa a  $P \in \mathbb{A}^n$  la  $n$ -pla di componenti di  $P - O$ , rispetto alla base  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , è detto **sistema di coordinate cartesiane con origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$** . I sistemi di coordinate (locali) non cartesiane sono detti sistemi di coordinate **curvilinee**.  $\diamond$

Le coordinate cartesiane sono importanti anche perché consentono di rappresentare in maniera semplice le cosiddette *trasformazioni affini*. Una trasformazione affine è una trasformazione che preserva la struttura di spazio affine. Formalmente si ha la seguente definizione.

**Definizione 1.3.** Siano  $\mathbb{A}_1^n$  e  $\mathbb{A}_2^m$  spazi affini con spazi delle traslazioni  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente.  $\psi : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$  è detta **trasformazione affine** se valgono le condizioni:

(i)  $\psi$  è *invariante per traslazioni*, cioè

$$\psi(P + \mathbf{u}) - \psi(Q + \mathbf{u}) = \psi(P) - \psi(Q), \text{ per ogni } P, Q \in \mathbb{A}_1^n \text{ e } \mathbf{u} \in V_1;$$

(ii) la funzione  $P - Q \mapsto \psi(P) - \psi(Q)$  definisce una trasformazione lineare  $V_1 \rightarrow V_2$ , indicata con  $d\psi : V_1 \rightarrow V_2$ .  $\diamond$

Si osservi che la funzione in (ii) è ben definita a causa della richiesta (i): ci sono infinite scelte possibili per la coppia di punti  $P, Q$  che individuano lo stesso vettore  $\mathbf{v} := P - Q \in V_1$ , ma ognuna di queste scelte definisce lo stesso vettore  $d\psi(\mathbf{v}) := \psi(P) - \psi(Q) \in V_2$  a causa della richiesta (i) (provarlo).

### Esercizi 1.2.

1. Sia  $(\mathbb{A}^n, f)$  un sistema di coordinate cartesiane, come nella definizione 1.2, con coordinate  $x^1, \dots, x^n$  e  $(\mathbb{A}^n, g)$  un altro sistema di coordinate cartesiane, con coordinate  $x'^1, \dots, x'^n$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ , in modo che valga

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j_i \mathbf{e}'_j.$$

Provare che la funzione  $g \circ f^{-1}$  è espressa, in coordinate, dalle relazioni:

$$x'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i (x^i + b^i), \quad (1.4)$$

dove  $(O - O') = \sum_i b^i \mathbf{e}_i$ .

2. In riferimento all'esercizio precedente, provare che la funzione  $f \circ g^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , in coordinate, è espressa da:

$$x^i = \sum_{j=1}^n (B^{-1})^i_j x'^j - b^i. \quad (1.5)$$

3. Provare che se  $\psi : \mathbb{A}_1^n \rightarrow \mathbb{A}_2^m$  è affine, allora, per ogni scelta di sistemi di coordinate cartesiane nei due rispettivi spazi  $(\mathbb{A}_1^n, f_1)$  e  $(\mathbb{A}_2^m, f_2)$ , la *rappresentazione in coordinate* di  $\psi$ , cioè la funzione

$$f_2 \circ \psi \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^n \ni (x_1^1, \dots, x_1^n) \mapsto (x_2^1, \dots, x_2^m) \in \mathbb{R}^m$$

ha la forma

$$x_2^i = \sum_{j=1}^n L^i_j x_1^j + c^i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1.6)$$

per opportuni coefficienti  $L^i_j$  e  $c^i$ , dipendenti da  $\psi$  e dai sistemi di coordinate. Sopra  $(x^1_2, \dots, x^m_2)$  sono le coordinate cartesiane in  $\psi(P) \in \mathbb{A}^m_2$  e  $(x^1_1, \dots, x^n_1)$  quelle di  $P \in \mathbb{A}^n_1$ .

Dimostrare che, viceversa,  $\psi : \mathbb{A}^n_1 \rightarrow \mathbb{A}^m_2$  è affine se esistono due sistemi di coordinate cartesiane nei rispettivi spazi in cui  $\psi$  ha la forma (1.6) in coordinate.

4. Mostrare che le trasformazioni affini trasformano rette in rette. Ossia, se  $\psi : \mathbb{A}^n_1 \rightarrow \mathbb{A}^n_2$  è affine e  $P(t) := P + t\mathbf{u}$ , con  $t \in \mathbb{R}$  è la retta in  $\mathbb{A}^n_1$  di origine  $P$  è vettore tangente  $\mathbf{v} \in V_1$ , allora  $\psi(P(t))$ , al variare di  $t \in \mathbb{R}$  definisce ancora una retta in  $\mathbb{A}^n_2$ .

Per ogni spazio affine  $\mathbb{A}^n$ , lo spazio vettoriale  $V$  delle traslazioni agisce come insieme di trasformazioni  $\{T_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in V}$  su  $\mathbb{A}^n$ . La trasformazione  $T_{\mathbf{v}} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  di  $\mathbf{v} \in V$  su  $\mathbb{A}^n$  è definita in modo ovvio come  $T_{\mathbf{v}} : P \mapsto P + \mathbf{v}$ . Esplicitiamo alcune caratteristiche dell'azione di  $V$ .

(i) L'insieme  $\{T_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in V}$  è banalmente un *gruppo* rispetto alla composizione di applicazioni valendo  $T_{\mathbf{u}}T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ .

Dato che  $T_{\mathbf{u}}T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$  e  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ , il gruppo risulta anche essere *abeliano* cioè commutativo:  $T_{\mathbf{u}}T_{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}}T_{\mathbf{u}}$  per ogni coppia  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Dato che l'applicazione  $V \ni \mathbf{v} \mapsto T_{\mathbf{v}}$  è iniettiva (poiché  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  se  $T_{\mathbf{u}} = T_{\mathbf{v}}$ ), essa è un isomorfismo gruppendale quando  $V$  è visto come gruppo commutativo rispetto alla somma di vettori.

(ii) Solo  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  soddisfa che  $T_{\mathbf{v}}(P) = P$  per ogni  $P \in \mathbb{A}^n$ , in altre parole, l'azione del gruppo delle traslazioni è *libera*.

(iii) Per ogni coppia  $P, Q \in \mathbb{A}^n$  esiste una traslazione  $T_{\mathbf{v}}$  tale che  $T_{\mathbf{v}}(P) = Q$ , in altre parole, l'azione del gruppo delle traslazioni è *transitiva*.

Il gruppo delle traslazioni acquista ulteriore interesse quando si potenzia la struttura di spazio affine con un prodotto scalare.

### 1.1.2 Spazi Euclidei e Isometrie

Quando uno spazio affine è dotato di una struttura metrica aggiuntiva compatibile con quella preesistente e che consente di definire proprietà metriche, si ha uno *spazio euclideo*. Tale struttura metrica è un prodotto scalare assegnato nello spazio delle traslazioni.

**Definizione 1.4.** Uno spazio affine  $\mathbb{E}^n$  di dimensione  $n$  (finita) e dotato di un prodotto scalare (reale simmetrico)

$$V \times V \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$$

nello spazio delle traslazioni  $V$ , è detto **spazio euclideo (reale) di dimensione  $n$** .

I sistemi di coordinate cartesiane associati a basi ortonormali rispetto al prodotto scalare  $\cdot$  sono detti sistemi di coordinate cartesiane **ortonormali**.  $\diamond$

Mostriamo ora come la presenza del prodotto scalare dia senso alle nozioni metriche che ci aspettiamo dalla fisica: distanze ed angoli. Ricordiamo a tal fine la definizione di *spazio metrico*.

**Definizione 1.5.** Uno **spazio metrico** è un insieme  $M$  dotato di una funzione  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  detta **distanza**, soddisfacente:

- (i)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ,
- (ii)  $d(P, Q) \geq 0$  dove = vale se solo se  $P = Q$ ,
- (iii)  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$  per  $P, Q, R \in M$ .

Una funzione  $f : M \rightarrow M'$  con  $M, M'$  spazi metrici con distanze,  $d$  e  $d'$  rispettivamente è detta **isometria** se *conserva le distanze*, cioè:  $d(P, Q) = d'(f(P), f(Q))$  per ogni coppia  $P, Q \in M$ .

◇

Ovviamente, per (ii), le isometrie sono sempre trasformazioni iniettive. Nel caso degli spazi euclidei, la presenza del prodotto scalare arricchisce ulteriormente la struttura di spazio affine aggiungendo una struttura di spazio metrico, quando la distanza tra punti di  $\mathbb{E}^n$  è definita come la norma standard associata al prodotto scalare  $\cdot$  valutata su  $P - Q$ :

$$d(P, Q) := \|P - Q\| := \sqrt{P - Q \cdot P - Q} . \quad (1.7)$$

Quindi gli spazi euclidei sono naturalmente degli spazi metrici. Si noti che il prodotto scalare presente nello spazio delle traslazioni consente di definire la nozione misura di *angolo tra vettori*: l'angolo  $\alpha$  tra due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  è, quando ha senso definirlo, l'unico (in  $[0, \pi]$ ) che soddisfa

$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} .$$

Passiamo ora a considerare le isometrie tra spazi euclidei. Una trasformazione affine tra due spazi euclidei che conserva le rispettive distanze è detta **isometria affine**.

Dato che la nozione di isometria nasce indipendentemente da quella di trasformazione affine, ci si può chiedere se tra due spazi euclidei possano esistere isometrie che non siano trasformazioni affini. Vale tuttavia il seguente notevole teorema che, per spazi euclidei, identifica isometrie ed isometrie affini. La dimostrazione è data negli esercizi.

**Teorema 1.1.** Siano  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$  spazi euclidei con la stessa dimensione  $n$  (finita).  $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  è un'isometria se e solo se è un'isometria affine.

Un modo alternativo, ma equivalente, di formulare lo stesso risultato in termini più operativi è dato in nell'esercizio svolto 1.3.3 che riportiamo sotto in forma di teorema.

**Teorema 1.1 (Riformulazione).** Siano  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$  due spazi euclidei con la stessa dimensione e con distanze  $d_1$  e  $d_2$  rispettivamente. La trasformazione  $f : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  è un isometria se e solo se, per una scelta (e quindi ogni scelta) di coordinate cartesiane ortonormali in  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$ , è rappresentata in coordinate nella forma ( $i = 1, \dots, n$ )

$$x_2^i = \sum_{j=1}^n R_j^i x_1^j + b^j ,$$



essendo la matrice di coefficienti  $R^i_j$  una matrice ortogonale  $n \times n$  reale e  $b^j \in \mathbb{R}$  costanti. Le  $(x_1^1, \dots, x_1^n)$  sono le coordinate del generico  $P \in \mathbb{E}_1^n$  e  $(x_2^1, \dots, x_2^n)$  sono le coordinate del punto trasformato  $f(P) \in \mathbb{E}_2^n$ .

Ricordiamo che le matrici ortogonali di ordine  $n$  sono le matrici reali  $n \times n$ ,  $R$ , tali che  $RR^t = I$  (ossia in componenti  $\sum_k R^i_k R^j_k = \delta^{ij}$ ). Esse costituiscono un gruppo rispetto al prodotto matriciale righe per colonne, detto **gruppo ortogonale di dimensione  $n$**  o **gruppo delle rotazioni in dimensione  $n$**  ed indicato con il simbolo  $O(n)$ .

### Osservazioni 1.1.

(1) La distanza  $d$  su uno spazio euclideo (1.7) gode di alcune interessanti proprietà. In primo luogo essa è *invariante sotto l'azione delle traslazioni*:

$$d(P + \mathbf{u}, Q + \mathbf{u}) = d(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^n, \mathbf{u} \in V, \quad (1.8)$$

e pertanto le traslazioni sono particolari tipi di isometrie. La verifica di tale proprietà di invarianza è immediata dalla definizione di  $d$  e tenendo conto della proprietà  $(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = P - Q$ . Un'altra proprietà interessante della distanza di spazi euclidei è di natura completamente matematica: risulta per computo diretto che la funzione  $P, Q \mapsto d(P, Q)^2$  descritta in coordinate cartesiane ortonormali è di classe  $C^\infty$  (cioè infinitamente derivabile tenendo conto anche di tutte le possibili derivate miste di ogni ordine), quando scritta in coordinate di ogni sistema di coordinate cartesiane ortonormali. Infatti, se  $(x_P^1, \dots, x_P^n) \in \mathbb{R}^n$  e  $(x_Q^1, \dots, x_Q^n) \in \mathbb{R}^n$  sono le coordinate cartesiane ortonormali di  $P$  e  $Q$  rispettivamente, è facile vedere che

$$d(P, Q)^2 = \sum_{k=1}^n (x_P^k - x_Q^k)^2$$

(la formula vale per ogni scelta del comune sistema di coordinate cartesiane ortonormali usato per descrivere entrambi gli argomenti di  $d$ ). Il secondo membro è un polinomio nelle  $2n$  variabili  $x_P^k$  e  $x_Q^k$  ed è pertanto infinitamente differenziabile in ciascuna di essa, includendo tutte le possibili derivate miste di ogni ordine. La funzione  $P, Q \mapsto d(P, Q)$  scritta in coordinate cartesiane è invece ovunque continua, ma non è ovunque  $C^\infty$ , dato che ammette una singolarità esattamente per  $P = Q$ .

(2) Come conseguenza dell'esercizio 1.2.1, tenendo conto che le matrici di trasformazione tra basi ortonormali sono le matrici ortogonali, la più generale legge di trasformazione tra le coordinate di due differenti sistemi di coordinate cartesiani ortonormali assume la forma

$$x'^j = \sum_{i=1}^n R^j_i (x^i + b^i), \quad (1.9)$$

dove i numeri reali  $b^i$  sono arbitrariamente fissati e i coefficienti  $R^j_i$  individuano una qualsiasi fissata *matrice ortogonale* di dimensione  $n$ . La formula scritta si può scrivere equivalentemente,

chiamando i numeri  $\sum_{i=1}^n R^j_i b^i$  direttamente  $c^j$

$$x'^j = \sum_{i=1}^n R^j_i x^i + c^j .$$

**(3)** Dalla definizione di  $O(3)$ , usando la regola di Binet per il determinante ed il fatto che il determinante della matrice trasposta è uguale a quello della matrice, segue immediatamente che se  $R \in O(3)$  allora  $\det R = \pm 1$ . Entrambi i casi sono rappresentati in  $O(3)$ . Infatti  $I$  e  $-I$  sono matrici in  $O(3)$  ed hanno rispettivamente determinante 1 e  $-1$ . L'insieme delle matrici di  $O(3)$  con determinante 1 è indicato con  $SO(3)$  e, come si prova facilmente, è un sottogruppo di  $O(3)$ .  $SO(3)$  si chiama **gruppo ortogonale proprio** (di dimensione 3) ed i suoi elementi sono le **rotazioni proprie**. L'insieme delle matrici con determinante  $-1$  non può essere un sottogruppo dato che non contiene l'elemento neutro (dato dalla matrice  $I \in SO(3)$ ). Tuttavia, se  $S \in O(3)$  e  $\det S = -1$ , allora  $S = (-I)R$ , dove  $R := (-I)S \in SO(3)$ . Pertanto tutte le rotazioni con determinante  $-1$ , dette anche **rotazioni improprie** o, con un termine un po' impreciso **riflessioni**, si ottengono da una rotazione propria seguita dall'azione di  $-I$ , trasformazione che a sua volta, è detta **inversione** o **inversione di parità**. Ciò giustifica la notazione  $-ISO(3)$  per l'insieme delle rotazioni improprie (di dimensione 3). Un caso importante di rotazione impropria si ottiene dall'immagine specchiata di un oggetto rispetto all'oggetto stesso. In tal caso, in riferimento ad una terna di assi cartesiani ortonormali, l'operazione di rotazione impropria, immaginando lo specchio come dato dal piano  $x = 0$ , corrisponde alla matrice diagonale che ha  $-1$  come primo elemento della diagonale principale, seguito da due 1 sulla stessa diagonale. È chiaro che il determinante di tale matrice è  $(-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$ .

**Osservazioni 1.2.** \* Esiste un'altra caratterizzazione di  $SO(3)$  e  $-ISO(3)$  di natura completamente topologica che ha interesse dal punto di vista fisico. Pensiamo a tal fine le rotazioni proprie e improprie come *trasformazioni attive* cioè che agiscono sugli oggetti geometrici modificandoli (vedi la sezione seguente). Come è evidente dall'esperienza fisica, le rotazioni improprie, come le riflessioni attraverso uno specchio, sono operazioni fisiche "discontinue": non possono essere ottenute con una successione di "piccole modifiche" della figura iniziale. Quest'idea intuitiva ha un corrispondente matematico preciso che ora illustriamo senza entrare nei dettagli. Il gruppo  $O(3)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^9$ , dato che le matrici reali  $3 \times 3$  si possono pensare come vettori in  $\mathbb{R}^9$ . Se dotiamo  $O(3)$  della topologia indotta da  $\mathbb{R}^9$ , si vede che le operazioni di prodotto di elementi del gruppo e di calcolo dell'inversa sono operazioni continue. In questo senso  $O(3)$  è un *gruppo topologico*. Questa caratterizzazione in realtà vale per tutto il gruppo delle isometrie di uno spazio euclideo, ma in questa sede ci occuperemo del solo sottogruppo delle rotazioni. Rimanendo a livello di sottoinsiemi di uno spazio topologico, osserviamo che  $O(3)$  non è sicuramente un sottoinsieme connesso di  $\mathbb{R}^9$ , dato che la funzione  $\det : O(3) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua ed assume valori dati dall'insieme sconnesso  $\{1, -1\}$ , mentre l'immagine di un insieme connesso secondo una funzione continua deve essere connesso. Questo significa che i due sottoinsiemi  $SO(3)$  e  $-ISO(3)$  devono essere tra di loro sconnessi oltre che disgiunti. Si riesce anche a provare che ciascuno dei due insiemi è separatamente connesso. Pertanto  $SO(3)$  e  $-ISO(3)$  sono le

(uniche due) componenti connesse di  $O(3)$ . La prima è l'unica delle due che include l'identità. Per concludere osserviamo che se una rotazione impropria come una riflessione,  $S \in -ISO(3)$  fosse connettibile a  $I$  con una curva continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow SO(3)$  con  $\gamma(a) = I$  e  $\gamma(b) = S$ , cioè una curva continua di rotazioni, vorrebbe dire che  $I$  e  $S$  apparterrebbero alla stessa componente connessa di  $O(3)$  (perché l'immagine  $\gamma([a, b])$  di tale curva è connessa in quanto immagine di un connesso secondo una funzione continua). Questo è falso come appena visto. In termini più intuitivi, abbiamo appena provato che le rotazioni improprie, come le riflessioni attraverso uno specchio, sono operazioni fisiche “discontinue”: non possono essere ottenute con una successione di “piccole modifiche” della figura iniziale, cioè con una successione di rotazioni che differiscono di poco partendo dall'identità.

### 1.1.3 Il gruppo delle isometrie di $\mathbb{E}^n$ . Interpretazione attiva e passiva delle isometrie

Usando per esempio direttamente la caratterizzazione delle isometrie in coordinate cartesiane ortonormali provata nel Teorema 1.1 si dimostra facilmente per esempio che, per un fissato spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$ , la classe delle isometrie  $\psi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  costituisce un gruppo rispetto alla legge di composizione di funzioni. Tale gruppo è detto il **gruppo delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$** . Quindi la composizione di due isometrie è ancora tale e l'inversa di una isometria esiste sempre ed è un'isometria. Possiamo dire qualcosa riguardo alla struttura di tale gruppo. Se fissiamo un unico sistema di coordinate cartesiane ortonormali in  $\mathbb{E}^n$ , in riferimento a tale sistema di coordinate, come si prova facilmente, la forma più generale per un'isometria  $\psi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  che trasforma il punto generico  $P \in \mathbb{E}^n$  di coordinate  $(x^1, \dots, x^n)$  nel punto  $\psi(P) \in \mathbb{E}^n$ , di coordinate  $(x'^1, \dots, x'^n)$ , è ancora data dalla (1.9) in cui i numeri reali  $b^i$  e la matrice  $R$  sono fissati e dipendono da  $\psi$ . Questo tipo di trasformazioni sono dette **attive**, dato che agiscono “spostando” i punti dello spazio. Come conseguenza di tale forma esplicita degli elementi del gruppo vediamo immediatamente che il gruppo delle isometrie include come sottogruppi quello delle traslazioni e quello delle rotazioni attorno ad un fissato punto (l'origine delle coordinate scelte con la rappresentazione (1.9)). Le isometrie dello spazio fisico tridimensionale sono dunque tutte e sole le *rototraslazioni*. Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortonormali sono tutte e sole della forma (1.9) interpretate come *trasformazioni attive*.

Il fatto che il gruppo delle isometrie contenga le traslazioni implica che il gruppo agisca *transitivamente* su  $\mathbb{E}^n$ : per ogni coppia di punti  $P, Q \in \mathbb{E}^n$  c'è un'isometria (in particolare una traslazione) che porta  $P$  in  $Q$ . Il fatto che il gruppo contenga le rotazioni attorno ad un punto implica che l'azione del gruppo delle isometrie, differentemente da quella delle sole traslazioni, non sia più *libera*: è falso che l'unica trasformazione che lascia fisso un fissato  $P \in \mathbb{E}^n$  sia l'identità, dato che ogni rotazione attorno a  $P$  lo lascia fisso.

Nel caso di  $n = 3$ , le isometrie di  $\mathbb{E}^3$ , dal punto di vista fisico sono le operazioni che si possono eseguire attivamente sui corpi senza alterarne le proprietà metriche.

Sottolineiamo che, lavorando in un unico e fissato  $\mathbb{E}^n$ , abbiamo ora interpretato *attivamente* le trasformazioni isometriche (1.9), cioè come trasformazioni dei punti di  $\mathbb{E}^n$  in punti di  $\mathbb{E}^n$ . Tuttavia le (1.9), proprio come fatto in (2) di osservazioni 1.1, si possono interpretare anche

**passivamente** cioè riferendole a due *diversi* sistemi di coordinate cartesiane ortonormali in  $\mathbb{E}^n$  nei quali si descrive lo *stesso* punto, che non viene “spostato” ma semplicemente descritto da due differenti sistemi di coordinate. Le (1.9) descrivono come le coordinate di uno stesso punto ma riferite a sistemi di coordinate cartesiane ortonormali sono collegate. In questo caso la funzione rappresentata in coordinate è semplicemente la funzione identità  $\mathbb{E}^n \ni P \mapsto P \in \mathbb{E}^n$ . Il fatto che non appaia come la funzione identità passando alle coordinate in  $\mathbb{R}^n$  è dovuto al fatto che stiamo usando *due* differenti sistemi di coordinate, *entrambi cartesiani ortonormali*, nel dominio e nel codominio. Le due interpretazioni attiva e passiva sono entrambe usate nelle applicazioni fisiche.

#### 1.1.4 Lunghezze d’arco, aree e volumi, invarianti sotto il gruppo delle isometrie

Nella costruzione delle teorie fisiche, non sono solo importanti le distanze e gli angoli, ma anche altri oggetti matematici come aree e volumi. Non ci addentreremo nella discussione su come vengano definite queste nozioni a partire dalla struttura di spazio euclideo, ma ci limiteremo ad esporre qualche semplice osservazione generale.

Le nozioni di *area* e di *volume* di insiemi misurabili nel senso della *misura di Peano-Jordan-Riemann* possono essere costruite a partire dalle sole nozioni di distanza ed angolo usate per definire i rettangoli, i parallelepipedi e le loro misure di superficie e volume in  $\mathbb{E}^2$  ed  $\mathbb{E}^3$ . La nozione si generalizza a qualunque  $\mathbb{E}^n$ . Risulta che, esattamente come la distanza, le misure di volume in ogni  $\mathbb{E}^n$  ottenute con la procedura di Peano-Jordan-Riemann sono *invarianti sotto l’azione delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$* . In altre parole se, per esempio, facciamo agire una trasformazione  $\psi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  del gruppo delle isometrie sull’insieme  $G \subset \mathbb{E}^n$  che ammette volume  $vol(G)$  allora  $\psi(G)$  ammette volume e vale  $vol(\psi(G)) = vol(G)$ . L’approccio più sofisticato e potente basato sulla teoria della *misura di Lebesgue* richiede qualche accorgimento tecnico in più, ma risulta comunque che la nozione di spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$  individua naturalmente ed unicamente una nozione di misura (di Lebesgue) invariante sotto il gruppo delle isometrie di  $\mathbb{E}^n$  che assegni il valore standard al volume degli  $n$ -rettangoli  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  di  $\mathbb{E}^n$ .

L’assegnazione di un prodotto scalare in  $V$  che si ha per definizione in uno spazio euclideo permette di definire, con una procedura del tutto analoga a quella che si segue in  $\mathbb{R}^n$ , la nozione di *lunghezza di una curva rettificabile*, per curve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^n$  sufficientemente regolari. Discuteremo tale nozione nel prossimo capitolo nel caso  $n = 3$ . Nello stesso modo, nel caso  $n = 3$ , l’assegnazione del prodotto scalare di  $\mathbb{E}^3$  permette di definire, con una procedura del tutto analoga a quella che si segue in  $\mathbb{R}^3$ , la nozione di *area di una superficie rettificabile*, per superfici  $P = P(u, v) \in \mathbb{E}^3$  sufficientemente regolari, con  $(u, v)$  che variano in qualche insieme aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Entrambe queste nozioni sono, ancora, *invarianti sotto il gruppo delle isometrie* del corrispondente spazio euclideo.

### 1.1.5 Lo spazio fisico e l'asse del tempo per un osservatore: regoli ed orologi ideali

Ritorniamo ora al caso dello spazio fisico tridimensionale, pensato come  $\mathbb{E}^3$ , e dell'asse del tempo, pensato come  $\mathbb{E}^1$ , esponendo ancora alcune importanti osservazioni di carattere fisico.

Dal punto di vista fisico, la distanza, i prodotti scalari e gli angoli tra i segmenti ed i vettori in  $\mathbb{E}^3$ , viene misurata con l'assegnazione di una classe di *regoli rigidi ideali* che si devono supporre disponibili in ogni punto dello spazio ad ogni tempo. Le traslazioni, individuate dai vettori  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{E}^3$ , devono essere pensate come le traslazioni fisiche dei corpi materiali. Devono quindi esistere corpi (almeno i regoli rigidi!) che siano metricamente invarianti per traslazioni fisiche come lo è la distanza  $d$  associata al prodotto scalare.

Ci si può allora chiedere cosa intendiamo, dal punto di vista fisico, quando parliamo della classe dei regoli rigidi *ideali* e della classe degli orologi *ideali*. L'*idealità* dei regoli è relativa alla seguente proprietà che si assume valida per essi. Scelti due regoli arbitrariamente, essi risultano coincidere se sono in quiete nello stesso posto in un arbitrario riferimento e che questo fatto permane anche dopo che i regoli hanno subito diverse storie (incluse accelerazioni), una volta riportati in quiete relativa in un arbitrario riferimento (anche diverso dal primo). Lo stesso criterio si applica per la nozione di idealità di orologi usati per misurare la distanza temporale sull'asse del tempo: presi due orologi essi risultano battere il tempo nello stesso modo quando sono in quiete nello stesso posto in un riferimento e tale fatto permane anche dopo che gli orologi hanno subito diverse storie, una volta riportati in quiete relativa in un riferimento (anche diverso dal primo e anche se non risultano più essere sincronizzati se lo erano inizialmente).

È importante precisare che non è possibile usare lo stesso tipo di strumento di misura a tutte le scale: per esempio non possiamo misurare le distanze astronomiche, ma neppure le distanze intermolecolari con un regolo rigido lungo un metro. Sono necessari diversi tipi di strumenti per le corrispondenti differenti scale. Il fatto che questi diversi tipi di strumenti di misura della stesso tipo di grandezza fisica che lavorano per esempio su scale diverse, si comportino in maniera coerente, per esempio fornendo lo stesso risultato su scale intermedie dove possiamo usare strumenti di classi diverse contemporaneamente, corrisponde all'idea che *esista una geometria indipendente dagli strumenti di misura*. Questo fatto, che dobbiamo considerare un'evidenza sperimentale, non è per nulla ovvio anche se lo riteniamo del tutto naturale dato che lo verifichiamo direttamente ed indirettamente nell'esperienza di tutti i giorni.

Una discussione del tutto analoga può essere svolta riguardo all'asse del tempo ed agli orologi ideali.

Dal punto di vista fisico è importante notare che da tempo si specula sulla eventuale natura non continua dello spazio e del tempo stesso a scale molto piccole (scale di Planck  $\sim 10^{-33}\text{cm}$  e  $10^{-43}\text{s}$ ) in cui dovrebbe valere una qualche forma di *Quantum Gravity*. A tali scale la struttura classica dello spazio e del tempo qui discussa in questo capitolo, ma anche una struttura più indebolita nella nozione di varietà differenziabile (come nelle teorie relativistiche generali) cesserebbe di essere fisicamente appropriata.

**Osservazioni 1.3.**    \*Le nozioni di *idealità* per regoli ed orologi descritte sopra sono valide

anche in fisica relativistica benché richiedano maggiore cautela nella costruzione di corrispondenti enti matematici. In generale, abbandonando la formulazione classica, la nozione di spazio di quiete con un osservatore o un riferimento è più complicata da descrivere matematicamente e non è più concepita in termini di uno spazio euclideo nel senso appena visto, ma è descritta da una varietà differenziabile di dimensione 3 dotata di una metrica positiva: una 3-varietà *riemanniana*. I regoli ideali devono allora essere pensati, in tale contesto, come rappresentati da vettori (“infinitesimi”) nello *spazio tangente* alla varietà, traspostati da un punto ad un altro tramite la procedura di *trasporto parallelo* rispetto alla *connessione di Levi-Civita*. Il tentativo di interpretare i regoli come veri sottoinsiemi della varietà (corrispondenti ai segmenti finiti degli spazi euclidei) contrasterebbe con l’assenza di un gruppo di isometrie che agisce transitivamente per una varietà riemanniana generica non a curvatura costante: non ci sarebbe modo di descrivere le operazioni di trasporto fisico di un regolo da un posto ad un altro, senza alterarne le dimensioni. Si deve infine notare che la geometria dello spazio di quiete, in questo contesto, può dipendere dal tempo.

### 1.1.6 Orientazione di spazi euclidei e prodotto vettoriale

Lo spazio delle traslazioni  $V$  di uno spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$ , o più generalmente di uno spazio affine  $\mathbb{A}^n$ , è per sua natura *orientabile*. Ricordiamo questa importante nozione. Se  $\mathcal{B}$  denota la classe di tutte le basi di  $V$ , e  $A, B \in \mathcal{B}$ , con  $A = \{e_r^{(A)}\}_{r=1,2,\dots,n}$  e  $B = \{e_r^{(B)}\}_{r=1,2,\dots,n}$ , denotiamo con  $M(A, B)$  la matrice  $n \times n$  di passaggio da una base all’altra, cioè la matrice i cui coefficienti  $M(A, B)^j_i$  sono dati da

$$e_i^{(A)} = \sum_{j=1}^n M(A, B)^j_i e_j^{(B)}.$$

Dato che  $M(A, B)$  è non singolare, il determinante deve essere non nullo e, di fatto, può essere sia positivo che negativo. La relazione

$$\forall A, B \in \mathcal{B}, \quad A \sim B \quad \text{se e solo se} \quad \det M(A, B) > 0$$

risulta essere una relazione di equivalenza con due sole classi di equivalenza. La classe  $\mathcal{B}$  viene naturalmente decomposta nell’unione di tali due classi disgiunte. La scelta di una delle due classi, che viene detta classe delle basi ad **orientazione positiva**, è un’**orientazione** di  $V$  e dello spazio euclideo (o affine) associato.

**Osservazioni 1.4.** Nel caso di uno spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ , nel quale ricade il nostro spazio fisico, le due classi di equivalenza di basi sono dette classe delle basi **destrorse** e classe delle basi **sinistrorse**. La prima classe di equivalenza è quella che include la terna individuata dalla nostra mano destra, costituita, nell’ordine, da pollice, indice, medio. La seconda è definita analogamente rispetto alla mano sinistra. *Si è soliti scegliere come terne con orientazione positiva le terne destrorse, e noi seguiamo questa convenzione.*

Nel caso di  $\mathbb{E}^3$  orientato, l'orientazione dello spazio euclideo individua anche un'orientazione delle rotazioni attorno ad un fissato asse di rotazione  $\mathbf{u}$ . Una rotazione  $R \in SO(3)$  di un angolo  $\theta \in (0, 2\pi)$  attorno ad  $\mathbf{u}$  è detta **positiva**, se, fissato un vettore  $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}, \mathbf{0}$ , la terna  $\mathbf{v}, R\mathbf{v}, \mathbf{u}$  è destrorsa. Nel caso di  $\mathbb{E}^3$  orientato, il **prodotto vettoriale** tra due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  che individuano un angolo  $\alpha \in [0, \pi]$ , è, come ben noto, definito dal vettore  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in V$  di modulo  $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$ , di direzione normale a  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e di verso scelto in modo tale che  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  sia una terna destrorsa (se nessuno dei vettori ha modulo nullo).

Ricordiamo che l'applicazione  $\wedge : V \times V \rightarrow V$  è lineare nell'argomento di sinistra:

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R} \text{ e ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,$$

ed *antisimmetrica*:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

di conseguenza è anche lineare nell'argomento di destra.

L'operazione  $\wedge$  non è *associativa*. In altre parole, escludendo casi particolari nella scelta dei tre vettori:  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ . La definizione che abbiamo dato sopra di prodotto vettoriale definisce una *equivalente* alla regola del determinante

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = (u^2v^3 - u^3v^2)\mathbf{e}_1 - (u^1v^3 - u^3v^1)\mathbf{e}_2 + (u^1v^2 - u^2v^1)\mathbf{e}_3,$$

purché la base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  di  $V$  sia ortonormale destrorsa, e  $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 u^j \mathbf{e}_j$  e  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 v^j \mathbf{e}_j$ .

Lasciamo le dimostrazioni di tutti questi fatti al lettore per esercizio. Esiste una definizione alternativa di prodotto vettoriale, basata sulla nozione di *pseudovettore*, che noi non adopereremo.

### Esercizi 1.3.

1. Sia  $\mathbb{E}^n$  uno spazio euclideo e  $d$  la sua distanza. Fissato un punto  $O \in \mathbb{E}^n$ , si identifichino (biunivocamente) i vettori dello spazio  $V$  delle traslazioni di  $\mathbb{E}^n$  con i punti di  $\mathbb{E}^n$  tramite la corrispondenza  $\mathbf{u} \mapsto O + \mathbf{u}$ . Provare che il prodotto scalare  $\cdot$  su  $V$  si può scrivere in termini di  $d$  come:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}d(O, O + (\mathbf{u} + \mathbf{v}))^2 + \frac{1}{2}d(O, O + (\mathbf{u} - \mathbf{v}))^2. \quad (1.10)$$

2. Siano  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$ , due spazi euclidei con la stessa dimensione  $n$ , con distanze  $d_1$  e  $d_2$  rispettivamente e prodotti scalari  $(\cdot|\cdot)_1$  e  $(\cdot|\cdot)_2$  rispettivamente. Sia  $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  una trasformazione affine. Provare che  $d\phi$  conserva il prodotto scalare tra vettori (e quindi anche l'angolo tra vettori), ossia, per ogni fissato  $Q \in \mathbb{E}_1^3$ :

$$(\phi(P) - \phi(Q)|\phi(P') - \phi(Q))_2 = (P - Q|P' - Q)_1, \quad \forall P, P' \in \mathbb{E}_1^3. \quad (1.11)$$

se e solo se  $\phi$  conserva le distanze, cioè

$$d_2(\phi(P), \phi(Q)) = d_1(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}_1^3. \quad (1.12)$$

3. Siano  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$  due spazi euclidei con la stessa dimensione e con distanze  $d_1$  e  $d_2$  rispettivamente. Mostrare che la trasformazione  $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  è un'isometria se e solo se, per una

scelta (e quindi ogni scelta) di coordinate cartesiane ortonormali in  $\mathbb{E}_1^n$  e  $\mathbb{E}_2^n$ , è rappresentata nella forma ( $i = 1, \dots, n$ )

$$x_2^i = \sum_{j=1}^n R_j^i x_1^j + b^i. \quad (1.13)$$

essendo la matrice di coefficienti  $R_j^i$  una matrice ortogonale  $n \times n$  reale.

4. Dati due spazi affini  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$ , un'applicazione  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  è detta *diffeomorfismo*, se è (1) biettiva ed inoltre (2), quando si rappresentano  $\psi$  e  $\psi^{-1}$  in coordinate cartesiane in  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$  e quindi si pensano come funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$  rispettivamente, tali funzioni risultano essere ovunque infinitamente differenziabili (cioè di classe  $C^\infty$ ). Considerando le isometrie tra due spazi euclidei, mostrare che:

- (i) le isometrie tra due spazi euclidei con la stessa dimensione sono diffeomorfismi;
- (ii) le funzioni inverse di isometrie sono ancora isometrie;
- (iii) la composizione di due isometrie è ancora un'isometria;
- (iv) se  $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  è un'isometria, allora  $d\phi : V_1 \rightarrow V_2$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali che conserva il prodotto scalare.

5. Mostrare che le isometrie  $\phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  costituiscono un gruppo che è sottogruppo dei diffeomorfismi dallo spazio euclideo  $\mathbb{E}^n$  in se stesso.

6.\* Dimostrare il teorema 1.1.

## 1.2 Introduzione alla nozione di varietà differenziabile

Premettiamo la seguente definizione tecnica che enunciamo qui una volta per tutte.

**Definizione 1.6.** Siano  $n, m = 1, 2, \dots$  e  $k = 0, 1, \dots$  fissati e sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e non vuoto.

(a) Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è detta essere **di classe  $C^k$** , e si scrive in tal caso  $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , se tutte le derivate parziali (incluse quelle miste) delle componenti di  $f$  esistono e sono continue fino all'ordine  $k$  incluso. Si pone  $C^k(\Omega) := C^k(\Omega; \mathbb{R})$ .

(b)  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è detta di classe  $C^\infty$  se è di classe  $C^k$  per ogni  $k = 0, 1, \dots$  e si definisce:

$$C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0,1,\dots} C^k(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Si pone  $C^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ . ◇

Solitamente quando non è menzionata esplicitamente la classe di differenziabilità  $k$  di una funzione oppure di una *varietà differenziabile* – nozione che stiamo per introdurre – si sottointende che  $k = \infty$ . Noi seguiamo questa convenzione in tutte le dispense.

Lo strumento matematico più generale e potente atto a descrivere le proprietà generali dello spazio fisico tridimensionale, dello spaziotempo, e dello spazio astratto in cui descrivere i sistemi fisici delle teorie classiche, è la nozione di *varietà differenziabile*. Si tratta, in essenza, di



un insieme  $M$  di oggetti arbitrari (per esempio i punti su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , benché questo esempio sia estremamente limitativo), indicati con il nome generico di *punti*, che può essere ricoperto localmente con *sistemi di coordinate*  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  – dove il numero  $n$  non deve dipendere dalla porzione  $U$  di  $M$  considerata e l’unione di tutti i domini  $U$  coincide con  $M$ . In questo modo le varie porzioni  $U$  di  $M$  ricoperte da un corrispondente sistema di coordinate  $\psi$  possono essere messe, separatamente, in corrispondenza biunivoca con corrispondenti porzioni  $\psi(U)$  di  $\mathbb{R}^n$ : le funzioni  $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  sono cioè assunte essere biettive, come è proprio nell’idea di “sistema di coordinate”. Quando due sistemi di coordinate  $(U, \psi)$  e  $(V, \phi)$  ricoprono porzioni distinte che hanno un’intersezione non vuota:  $U \cap V \neq \emptyset$ , su tale intersezione possiamo usare indifferentemente  $\psi$  oppure  $\phi$ . Si richiede allora che, in tale situazione, i due sistemi di coordinate soddisfino una semplice condizione di compatibilità: le funzioni  $\psi \circ \phi^{-1}$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$ , rispettivamente definite su  $\phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  e  $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  devono essere *differenziabili con continuità* fino ad un certo ordine  $k$  – che non dipende dalla scelta di  $U$  e  $V$ .

In questo modo (con ulteriori precisazioni su ulteriori richieste che faremo di seguito), l’insieme  $M$  può essere trattato *localmente* come se fosse  $\mathbb{R}^n$ , anche se non è  $\mathbb{R}^n$ . Conseguentemente, sull’insieme  $M$  possono essere definite per estensione alcune nozioni matematiche fondamentali in fisica originariamente definite solo su  $\mathbb{R}^n$ . In particolare può essere precisata la nozione di funzione o curva *differenziabile* definita in  $M$ . In questo modo può essere sviluppata la teoria delle equazioni differenziali in  $M$  per descrivere le equazioni di evoluzione di sistemi fisici vincolati a “vivere” in  $M$ : si pensi al caso in cui  $M$  è una superficie su cui evolve un punto materiale vincolato ad essa, oppure il caso in cui  $M$  è lo spaziotempo ed il sistema fisico che evolve in esso descritto in termini di equazioni differenziali è un campo elettromagnetico.

Per rendere operativa la definizione di varietà differenziabile, data sopra discorsivamente, sono necessarie ancora alcune richieste topologiche. Perché abbia senso discutere della differenziabilità delle funzioni  $\psi \circ \phi^{-1}$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$  è richiesto che tali funzioni siano definite su insiemi aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Per questo motivo si assume fin dal principio, che gli insiemi  $U$  domini dei vari sistemi di coordinate  $\psi$  siano insiemi *aperti* di  $\mathbb{R}^n$ . Dato che le funzioni  $\psi$  sono biettive, i sottoinsiemi aperti di  $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  saranno trasformati tramite  $\psi^{-1}$  in sottoinsiemi di  $U$ , si può provare che la classe di tutti i sottoinsiemi che si ottengono in questo modo su  $M$ , anche al variare di  $U$  e  $\psi$ , individua una topologia naturale di  $M$  richiedendo che le varie funzioni  $\psi : U \rightarrow \psi(U)$  risultino essere continue con inverse continue – cioè, in gergo, *omeomorfismi locali* – pertanto è naturale assumere che  $M$  sia uno spazio topologico fin dal principio e che le varie funzioni  $\psi$  siano continue con inversa continua. Infine, sulla topologia di  $M$  si impongono due ulteriori richieste che necessitano un richiamo tecnico (altre nozioni di topologia elementare sono richiamate brevemente in appendice).

Uno spazio topologico  $M$  è detto essere **di Hausdorff** se, per ogni scelta di  $p, q \in M$ , esistono due insiemi aperti  $U_p, U_q$  tali che  $U_p \ni p, U_q \ni q$  e  $U_p \cap U_q = \emptyset$ .  $\mathbb{R}^n$  e tutti gli spazi affini  $\mathbb{A}^n$  dotati della topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$  da qualunque sistema di coordinate cartesiane (la topologia ottenuta in questo modo non dipende dal sistema di coordinate cartesiane scelto) sono sicuramente spazi di Hausdorff. In quel caso, i due insiemi  $U_p$  e  $U_q$  possono sempre essere scelti come palle (in coordinate) aperte, centrate su  $p$  e  $q$  rispettivamente, di raggi sufficientemente piccoli. Uno spazio topologico si dice avere **base numerabile** se esiste una classe numerabile

di insiemi aperti tale che ogni altro insieme aperto possa essere costruito come unione di alcuni elementi della classe.  $\mathbb{R}^n$  e tutti gli spazi affini  $\mathbb{A}^n$  dotati della topologia precisata sopra sono a base numerabile (la classe numerabile di aperti può sempre essere scelta, una volta fissato un sistema di coordinate cartesiane, come la classe delle palle aperte di raggio razionale centrate in punti di coordinate razionali).

**Definizione 1.7.** Una **varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^k$** , con  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $k = 1, 2, \dots, \infty$  fissati, è uno spazio topologico  $M$  i cui elementi sono detti **punti**, dotato di alcune strutture geometriche con proprietà che precisiamo di seguito.

(1) L'insieme  $M$  deve essere dotato di una **struttura differenziabile di classe  $C^k$  e dimensione  $n$** ,  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  cioè, una collezione di coppie  $(U_i, \phi_i)$ , dette **carte locali** o **sistemi di coordinate locali**, in cui  $U_i$  è sottoinsieme aperto di  $M$  e  $\phi_i$  è un'applicazione con dominio  $U_i$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  e vale:

- (i)  $\cup_{i \in I} U_i = M$ , ogni  $\phi_i$  è iniettiva e  $\phi_i(U_i)$  aperto in  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii) le carte locali in  $\mathcal{A}$  devono essere  $C^k$ -compatibili a due a due. Due applicazioni iniettive  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U, V \subset M$  sono dette  $C^k$ -**compatibili** (o più brevemente  **$k$ -compatibili**) se vale  $U \cap V \neq \emptyset$  e le funzioni  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  e  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  sono entrambe di classe  $C^k$ , oppure se vale  $U \cap V = \emptyset$ ;
- (iii)  $\mathcal{A}$  è **massimale** ossia soddisfa: se  $U \subset M$  è aperto e  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è compatibile con ogni carta di  $\mathcal{A}$ , allora  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ .

(2) Dal punto di vista topologico, si richiede che:

- (i) lo spazio topologico  $M$  sia di Hausdorff a base numerabile;
- (ii) lo spazio topologico  $M$  sia, tramite le carte di  $\mathcal{A}$ , *localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$* . In altre parole, se  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ , allora  $U$  è aperto e  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  è un omeomorfismo.  $\diamond$

In base alla definizione data, ogni carta locale  $(U, \phi)$  su una varietà differenziabile  $M$  permette di assegnare biunivocamente una  $n$ -pla di numeri reali  $(x_p^1, \dots, x_p^n) = \phi(p)$  ad ogni punto  $p$  di  $U$ . Gli elementi della  $n$ -pla sono le **coordinate** di  $p$  nella carta  $(U, \phi)$ . I punti in  $U$  sono quindi in corrispondenza biunivoca con le  $n$ -ple di  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Una carta locale con dominio dato da tutto  $M$  è detta **carta globale** o **sistema di coordinate globale**. Eccetto varietà molto particolari, nel caso generale non è possibile individuare una carta che ricopra completamente una generica varietà. Possiamo dire, in termini generali, che l'essere *ricopribile con più carte locali* è la proprietà che meglio caratterizza la nozione di varietà o, almeno, è la ragione fondamentale per la quale è stata inventata questa nozione matematica: il poter trattare oggetti che sono localmente, ma non globalmente, identificabili con porzioni di  $\mathbb{R}^n$  e tale identificazione può essere assegnata in vari modi distinti tutti ugualmente leciti.

Una collezione di carte locali  $\mathcal{A}$  sulla varietà differenziabile  $M$  che soddisfi (i) e (ii) in (1) ma non necessariamente (iii), e che soddisfi (ii) in (2), è detto **atlante** su  $M$  **di dimensione  $n$  e classe  $C^k$** . Si dimostra facilmente che per ogni atlante  $\mathcal{A}$  su  $M$  esiste un unico atlante massimale che lo include. Si osservi che due atlanti su  $M$  tali che ogni carta di uno sia compatibile con ogni carta dell'altro, inducono la stessa struttura differenziabile su  $M$ . Quindi per assegnare una struttura differenziabile è sufficiente assegnare un atlante non massimale, uno dei possibili che

la individua. L'unica struttura differenziabile associata nel modo detto ad un fissato atlante si dice essere **indotta** dall'atlante.

### Esempi 1.1.

1. L'esempio più semplice ed in un certo senso più ovvio e “inutile” di varietà differenziabile, di classe  $C^\infty$  e dimensione  $n$ , è ogni sottoinsieme non vuoto e aperto di  $\mathbb{R}^n$  (incluso  $\mathbb{R}^n$  stesso) dotato della sua topologia naturale (che come, ben noto, è di Hausdorff a base numerabile) con una struttura differenziabile standard individuata dalla funzione identità che da sola definisce un atlante. Tutto ciò si può estendere agli spazi affini ed euclidei.

Osserviamo prima di tutto che ogni spazio affine  $\mathbb{A}^n$  è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. La topologia con queste proprietà si ottiene fissando un qualsiasi sistema di coordinate cartesiane  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e definendo gli insiemi aperti di  $\mathbb{A}^n$  come l'insieme vuoto e tutti e soli gli insiemi  $\psi^{-1}(U)$  dove  $U \subset \mathbb{R}^n$  è aperto. Si dimostra facilmente che questa classe di insiemi non dipende dal sistema di coordinate cartesiane scelto. Nel caso in cui  $\mathbb{A}^n$  possiede la struttura di spazio euclideo, esiste in principio un'altra topologia: quella indotta dalla distanza  $d$  ricavata dal prodotto scalare. Questa topologia è in realtà la stessa descritta sopra, è infatti quella che si ottiene con la procedura indicata se  $\psi$  è un sistema di coordinate cartesiane ortonormali. Ogni spazio affine  $\mathbb{A}^n$  ammette quindi una struttura naturale di varietà differenziabile (di classe  $C^\infty$ ) che include in particolare i sistemi di coordinate globali naturali tra di loro compatibili dati da tutti i possibili *sistemi di coordinate cartesiane* su  $\mathbb{A}^n$ . Tale struttura naturale di varietà differenziabile è esplicitamente discussa in appendice nella sezione A.5.1.

2. Si consideri la superficie sferica unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{R}^3$  centrata nell'origine e dotata della topologia ereditata da  $\mathbb{R}^3$  (gli insiemi aperti di  $\mathbb{S}^2$  sono per definizione le intersezioni di  $\mathbb{S}^2$  con gli insiemi aperti di  $\mathbb{R}^3$ ). In coordinate canoniche  $x^1, x^2, x^3$  di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{S}^2 := \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 \} .$$

$\mathbb{S}^2$  acquista una struttura di varietà differenziabile, di dimensione 2 e classe  $C^\infty$ , da quella di  $\mathbb{R}^3$ , definendo un atlante su  $\mathbb{S}^2$  costituito da 6 carte locali  $(\mathbb{S}_{(i)\pm}^2, \phi_{\pm}^{(i)})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ottenute come segue. Considerato l'asse  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e la coppia di emisferi aperti  $\mathbb{S}_{(i)\pm}^2$  con asse sud-nord dato dall'asse  $x^i$ , si considerano le carte locali  $\phi_{\pm}^{(i)} : \mathbb{S}_{(i)\pm}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  che associano ad ogni  $p \in \mathbb{S}_{(i)\pm}^2$  le coordinate di esso sul piano a  $x^i = 0$ . Si può provare che è impossibile dotare  $\mathbb{S}^2$  di una carta globale a differenza di  $\mathbb{R}^3$  (o di ogni suo sottoinsieme aperto): avremmo una funzione continua sul compatto  $\mathbb{S}^2$  la cui immagine non è compatta che è impossibile. *Questo fatto dimostra che la classe delle varietà differenziabili non si riduce ai soli sottoinsiemi non vuoti aperti degli  $\mathbb{R}^n$ .*

3. Un esempio analogo è quello della circonferenza  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^2$  di raggio unitario centrata nell'origine, dotata della topologia indotta da  $\mathbb{R}^2$  (gli insiemi aperti di  $\mathbb{S}^1$  sono per definizione le intersezioni di  $\mathbb{S}^1$  con gli insiemi aperti di  $\mathbb{R}^2$ ) che è ricopribile da un atlante di 4 carte locali  $(N, \psi_N), (O, \psi_O), (S, \psi_S), (E, \psi_E)$  dove gli insiemi  $N, O, S, E \subset \mathbb{S}^1$  sono le semi circonferenze aperte rispettivamente centrate in  $(0, 1), (-1, 0), (0, -1)$  e  $(1, 0)$ , le funzioni  $\psi_N$  e  $\psi_S$  sono entrambe la proiezione dei punti della circonferenza sul segmento  $(-1, 1)$  dell'asse  $x$  e le funzioni

$\psi_O$  e  $\psi_E$  sono la proiezione dei punti della circonferenza sul segmento  $(-1, 1)$  dell'asse  $y$ . Vale per esempio che  $\psi_N \circ \psi_E^{-1} : y \mapsto \sqrt{1 - y^2}$  dove  $y$  è preso in  $(0, 1) = \psi_E(N \cap E)$ . Questa funzione, sul dominio detto, è chiaramente  $C^\infty$  (non lo sarebbe in  $y = 1$ , ma tale punto è escluso dal dominio). Come conseguenza  $\mathbb{S}^1$  acquista da  $\mathbb{R}^2$  la struttura di una varietà differenziabile di dimensione 1 e classe di differenziabilità  $C^\infty$ . Anche in questo caso non esiste alcuna carta con dominio pari a tutto  $\mathbb{S}^1$ .

**4.** Consideriamo  $\mathbb{R}^3$  e la relazione di equivalenza  $(x, y, z) \sim (x', y', z')$  se e solo se  $(x, y, z) = (x' + k, y' + h, z' + l)$  con  $k, h, l \in \mathbb{Z}$ . L'insieme,  $\mathbb{T}^3$ , che si ottiene corrisponde intuitivamente ad un cubo di lato 1 in cui sono state identificate le facce opposte. Questo insieme può essere dotato, in modo naturale, di una struttura di varietà differenziabile (di classe  $C^\infty$ ) di dimensione 3 e non esiste nessuna carta globale per tale varietà differenziabile. La topologia su tale spazio è definita richiedendo che gli aperti di  $\mathbb{T}^3$  sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $\mathbb{T}^3$  la cui controimmagine secondo la proiezione canonica  $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto [(x, y, z)] \in \mathbb{T}^3$  sia un insieme aperto di  $\mathbb{R}^3$  (e quindi, in particolare  $\pi$  è continua). Questa topologia rende lo spazio  $\mathbb{T}^3$  di Hausdorff ed a base numerabile come si prova facilmente. Per ogni punto  $p \in (0, 1)^3$ , una carta locale su  $\mathbb{T}^3$  che include il punto nel suo dominio è l'applicazione che associa al punto le solite coordinate  $(x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Per un punto  $q$  che si trova su una faccia del cubo  $[0, 1]^3$ , diciamo per fissare le idee, che  $q$  si trova sulla faccia del cubo con  $x = 0$  (che è equivalente a dire  $x = 1$ ), una carta locale su  $\mathbb{T}^3$  che include  $q$  nel dominio è data dalla solita funzione che associa al punto le sue coordinate su  $\mathbb{R}^3$  ristretta al dominio  $-1/2 < x < 1/2, y, z \in (0, 1)$ . Si deve infatti tenere conto che i valori in  $(-1/2, 0)$  per la coordinata  $x$  individuano comunque punti in  $\mathbb{T}^3$  a causa dell'identificazione  $x + k \sim x$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Osservazioni 1.5.

**(1)** Ci si può chiedere a cosa servono le richieste in (2)(i) sulla topologia di una varietà differenziabile  $M$ , di essere spazio di Hausdorff a base numerabile. Entrambe le richieste sono di carattere tecnico e, come si può provare con opportuni controesempi, sono indipendenti dalle rimanenti richieste della definizione. La proprietà di Hausdorff assicura per esempio l'unicità di limiti e conseguentemente l'unicità di soluzioni di equazioni differenziali, per esempio descrittive l'evoluzione di sistemi fisici, formulata su varietà differenziabili (e questo sarà l'argomento tecnico generale del resto di queste dispense). La richiesta di base numerabile invece è meno utile a livello elementare, ma serve per poter estendere, per esempio, il calcolo integrale di volumi e superfici alle varietà differenziabili (assicurando, insieme alle altre ipotesi, la cosiddetta proprietà di *paracompattezza*).

**(2)** Se  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  sono carte locali sulla varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^k$ , nell'ipotesi  $U \cap V \neq \emptyset$ , la  $k$ -compatibilità di carte locali  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  implica che la matrice jacobiana di  $\phi \circ \psi^{-1}$ , essendo invertibile, abbia determinante ovunque non nullo. Viceversa, se  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è biettiva, di classe  $C^k$ , con determinante della matrice jacobiana non nullo su  $\psi(U \cap V)$ , allora  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è anch'essa  $C^k$  e quindi le due carte locali sono  $k$ -compatibili. La prova di ciò (esercizio A.1.5) si basa sul noto [GiustiII]:

### Teorema 1.2. (Teorema della funzione inversa)

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $D \subset \mathbb{R}^n$  aperto non vuoto, una funzione di classe  $C^k$ , con  $k = 1, 2, \dots, \infty$  fissato. Se la matrice jacobiana di  $f$ , valutata in  $p \in D$ , ha determinante non nullo allora esistono un intorno aperto  $U \subset D$  di  $p$  ed un intorno aperto  $V$  di  $f(p)$  tali che: (i)  $f|_U : U \rightarrow V$  sia biettiva (ii) la sua inversa  $f|_U^{-1} : V \rightarrow U$  sia di classe  $C^k$ .

(3) Si può provare che se  $1 \leq k < \infty$ , si possono eliminare alcune carte dalla struttura differenziabile (un numero infinito di carte!), in modo tale che l'insieme risultante sia ancora un atlante con  $k = \infty$ . Si possono infine considerare varietà *analitiche reali* (in simboli si scrive  $C^\omega$ ), in cui tutte le funzioni  $\phi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  sono assunte essere funzioni analitiche reali. Gli spazi affini hanno una naturale struttura differenziabile di classe  $C^\omega$ .

### 1.2.1 Funzioni e curve differenziabili su una varietà

Dato che una varietà differenziabile, localmente è indistinguibile dallo spazio  $\mathbb{R}^n$ , la struttura di varietà differenziabile permette di dare senso all'importante nozione di *funzione differenziabile* definita su un insieme che non sia un  $\mathbb{R}^n$  oppure un suo sottoinsieme, ma che abbia la struttura di varietà differenziabile. L'idea è banalmente quella di ridursi, localmente, alla definizione standard in  $\mathbb{R}^n$  di funzione differenziabile, usando la struttura di carte locali che ricoprono ogni varietà differenziabile.

Se  $M$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e di classe  $C^k$ , diremo che  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è **differenziabile** con continuità fino all'ordine  $p \leq k$ , oppure più brevemente, che  $f$  è di **classe  $C^p$** , se le funzioni  $f \circ \phi^{-1}$  sono di classe  $C^p$  come funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  per ogni carta locale  $(U, \phi)$  su  $M$ . Nel caso generale in cui il codominio di  $f$  sia una seconda varietà  $N$ ,  $f : M \rightarrow N$  è **differenziabile** con continuità fino all'ordine  $p \leq k$ , oppure più brevemente, che  $f$  è di **classe  $C^p$** , se le funzioni  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  sono di classe  $C^p$  come funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  per ogni carta locale  $(U, \phi)$  su  $M$  ed ogni carta locale  $(V, \psi)$  su  $N$  per cui la composizione  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  ha senso. In particolare, in questo modo acquista senso la nozione di **curva differenziabile**:  $\gamma : I \rightarrow N$ , dove  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  è pensato come varietà differenziabile rispetto alla struttura naturale di varietà differenziabile che ammette.

Se  $f : M \rightarrow N$  è una funzione differenziabile (di classe  $C^k$ ) e sono assegnate carte locali  $(U, \phi), (V, \psi)$ , rispettivamente in  $N$  e  $M$ , la funzione  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è detta **rappresentazione in coordinate** di  $f$ .

Per concludere precisiamo che un **diffeomorfismo** (di ordine  $k$ )  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà differenziabili è una funzione iniettiva e suriettiva differenziabile (fino all'ordine  $k$ ) la cui inversa è differenziabile (fino all'ordine  $k$ ). Nel caso esista un diffeomorfismo (di ordine  $k$ ) tra due varietà esse sono dette **diffeomorfe** (all'ordine  $k$ , rispetto a quel diffeomorfismo).

#### Osservazioni 1.6.

Si dimostra facilmente che, affinché  $f : M \rightarrow N$  sia  $C^p$ , è sufficiente che  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  siano funzioni  $C^p$  al variare delle carte locali  $(U, \phi), (V, \psi)$  in due atlanti, rispettivamente su  $M$  ed  $N$ , senza

dover controllare la validità di tale condizione per *tutte* le possibili carte locali delle due varietà.

**Esempi 1.2.**

(1)  $\mathbb{R}^n$  e la palla aperta di raggio 1 centrata nell'origine  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  sono varietà differenziabili diffeomorfe. In questo caso la struttura differenziabile di  $\mathbb{R}^n$  e di  $B^n$  sono quelle naturali riferite alle coordinate cartesiane standard di  $\mathbb{R}^n$  (ristrette a  $B^n$  per quanto riguarda la varietà  $B^n$ ) che, da sole, costituiscono rispettivi atlanti  $C^\infty$ . Un diffeomorfismo che identifica  $B^n$  a  $\mathbb{R}^n$  è, per esempio, la funzione biettiva  $C^\infty$  con inversa  $C^\infty$ :

$$f : B^n \ni \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \in \mathbb{R}^n .$$

Ulteriori nozioni di geometria differenziale che saranno talvolta usate nel seguito si trovano nell'Appendice.

## Capitolo 2

# Lo Spaziotempo della Fisica Classica e la Cinematica Classica

In questo capitolo introduciamo la struttura dello spaziotempo della fisica classica, la nozione di sistema di riferimento e la cinematica assoluta e relativa elementare.

### 2.1 Lo spaziotempo della fisica classica: Tempo e Spazio assoluti e linee di universo

Abbiamo visto nel capitolo precedente che lo spazio ed il tempo della fisica classica possono essere modellizzati come spazi euclidei, quindi dotati di proprietà metriche che rappresentano, in termini matematici, gli strumenti di misura. Nella descrizione data nel capitolo precedente manca però un ingrediente fenomenologico essenziale: l'esperienza fisica ci insegna che corpi che sono in quiete per un osservatore, non lo sono per altri. In generale possiamo affermare che esistono differenti nozioni di quiete a seconda dell'osservatore – dove per “osservatore” intendiamo qui e nel seguito un *sistema di strumenti di misura senza la necessità di alcuna attività cosciente*. Ogni osservatore ha il proprio privato spazio di quiete. D'altra parte esiste un secondo dato sperimentale della massima importanza: malgrado un corpo possa essere in quiete rispetto ad un osservatore e non esserlo rispetto ad un altro, *le dimensioni fisiche di (lunghezze, aree, volumi, angoli) di un fissato corpo fisico risultano essere le stesse per tutti gli osservatori*.

Similmente, malgrado due fissati eventi appaiano accadere in posti e tempi differenti a seconda dell'osservatore, *la durata dell'intervallo temporale tra i due eventi risulta essere la stessa per tutti gli osservatori*. In questo senso, le strutture metriche, spaziali e temporali sono *assolute*: non dipendono dagli osservatori<sup>1</sup>.

Nel seguito presenteremo una sistemazione teorica a questo stato di cose fenomenologico che deve contemplare, nello stesso schema, la possibilità di avere diverse nozioni di spazio di quiete

---

<sup>1</sup>Come ben noto questo stato di cose è solo un'approssimazione e cessa di valere in modo evidente quando le velocità in gioco sono paragonabili con la velocità della luce che è di circa 300.000 km/s; in tal caso è necessaria una descrizione relativistica che è fuori dalla portata di queste dispense.

insieme all'assolutezza delle delle nozioni metriche. Lo strumento concettuale di cui faremo uso è quello di *spaziotempo*, che andiamo immediatamente ad introdurre.

Un postulato fisico fondamentale, comune alle teorie fisiche classiche e relativistiche, è quello che afferma che tutto ciò che accade sia decomponibile in *eventi*. Un evento, dal punto di vista fisico corrisponde alla minima determinazione spaziotemporale possibile, individuabile dall'assegnazione di tre coordinate spaziali ed una temporale. Tali assegnazioni sono relative ai diversi osservatori, intesi qui come puri *sistemi di riferimento*. L'insieme degli eventi costituisce lo *spaziotempo*. Deve essere chiaro da subito che ogni evento e lo spazio tempo stesso hanno comunque una natura indipendente e pre-esistente alle loro rappresentazioni, in termini di coordinate spaziotemporali, date nei singoli sistemi di riferimento. In questo *framework*, tutto ciò che accade deve ammettere una descrizione in termini di *relazioni o coincidenze* tra eventi.

Si assume ulteriormente che lo spaziotempo abbia una natura *topologica* – tecnicamente la natura di *spazio topologico di Hausdorff a base numerabile* – ed una soprastante natura *differenziabile* – tecnicamente ciò corrisponde alla presenza di una struttura di *varietà differenziabile quadridimensionale*, sostanzialmente una classe di sistemi di coordinate nell'intorno di ogni evento che identificano tale intorno con un corrispondente intorno di  $\mathbb{R}^4$ .

La struttura topologica permette in particolare (ma non solo) di dare senso alle nozioni di “vicinanza o prossimità spaziale e temporale”. La richiesta che la topologia sia di Hausdorff ha una motivazione fisica profonda. A causa degli errori sperimentali degli strumenti di misura, ogni determinazione spaziotemporale è solo approssimativamente precisa. Possiamo conoscere la posizione temporale e spaziale di un evento solo con una certa approssimazione. In termini matematici, possiamo solo individuare *intorni* di eventi e non gli eventi stessi. Tali intorni sono determinati dalle imprecisioni piccole a piacere, ma non nulle, degli strumenti di misura di spazio e tempo. *Il fatto che la topologia dello spaziotempo sia di Hausdorff significa che possiamo in ogni caso distinguere due eventi facendo misure sufficientemente precise, anche se non infinitamente precise.*

La struttura differenziabile permette di dare senso alla nozione di curva e funzione differenziabile (rispetto alle coordinate) definite nello spaziotempo. Come vedremo tra poco, si possono in tal modo introdurre le nozioni di velocità ed accelerazione, per descrivere l'evoluzione di punti materiali. La struttura differenziabile dello spaziotempo permette, molto più in generale, di descrivere in termini di *equazioni differenziali* le equazioni che determinano l'evoluzione spaziotemporale di sistemi fisici classici (e relativistici), siano essi discreti (sistemi di punti) o continui (fluidi o campi). L'esistenza e l'unicità delle soluzioni di tali equazioni (in presenza di condizioni iniziali e/o al contorno) corrisponde al postulato fisico classico del *determinismo*. I teoremi di esistenza ed unicità sono strettamente connessi alla struttura topologica (non solo differenziabile) dello spaziotempo.

Considerando esplicitamente il caso dello spaziotempo classico, lo spaziotempo include due strutture ulteriori: il *tempo assoluto* e lo *spazio assoluto*. Il termine *assoluto* si riferisce *all'indipendenza dai possibili sistemi di riferimento delle misure di angoli, distanze ed intervalli temporali*.

**Definizione 2.1.** (Lo spaziotempo della fisica classica.) Lo spaziotempo della fisica



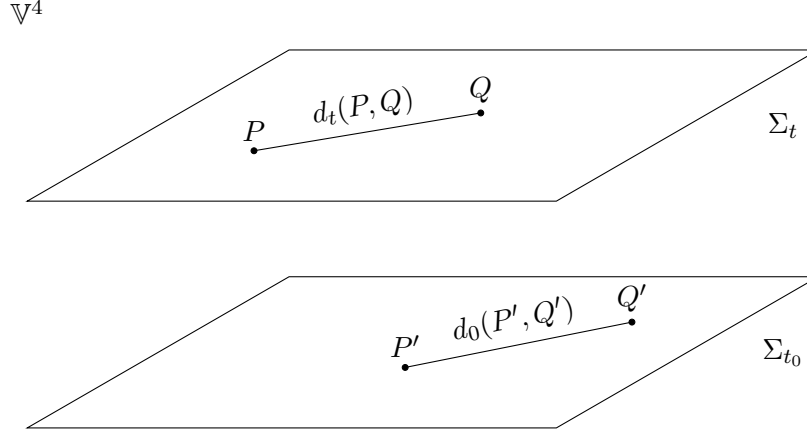


Figura 2.1:  $\mathbb{V}^4$  e due spazi assoluti a tempo fissato

**classica** è una varietà differenziabile quadridimensionale (di classe  $C^\infty$ ) indicata con  $\mathbb{V}^4$ . I punti di  $\mathbb{V}^4$  sono detti **eventi**.

$\mathbb{V}^4$  è dotato di una funzione privilegiata definita a meno di una arbitraria costante additiva,  $T : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , detta **tempo assoluto** che si richiede essere differenziabile, suriettiva e ovunque nonsingolare (definizione A.5). Si suppone inoltre che:

(i) ciascuno dei sottoinsiemi a due a due disgiunti:  $\Sigma_t := \{p \in \mathbb{V}^4 \mid T(p) = t\}$ , detta **spazio assoluto al tempo**  $t \in \mathbb{R}$ , abbia una struttura di spazio euclideo tridimensionale (con spazio delle traslazioni  $V_t$  e prodotto scalare  $(\cdot|\cdot)_t$ ).

(ii) Le strutture geometriche sulle  $\Sigma_t$  devono essere compatibili con la struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$  nel senso che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , in un intorno  $O_e$  di ogni evento  $e \in \Sigma_t$  ci deve essere un sistema di coordinate locali quadridimensionali  $x^0, x^1, x^2, x^3$  su  $\mathbb{V}^4$  che definisce un sistema di coordinate *cartesiane* tridimensionali  $x^1, x^2, x^3$  in  $O \cap \Sigma_t$ .  $\diamond$

Come già detto a pagina 21, dal punto di vista fisico è importante ricordare che attualmente si specula sulla eventuale natura non continua dello spaziotempo stesso a scale molto piccole (scale di Planck  $\sim 10^{-33}\text{cm}$  e  $10^{-43}\text{s}$ ) in cui dovrebbe valere una qualche forma di *Quantum Gravity*. A tali scale la struttura topologico-differenziabile classica descritta nella definizione 2.1 cesserebbe di essere fisicamente appropriata.

Tornando alla descrizione classica basata sulla definizione 2.1 possiamo dire che, dal punto di vista fisico-operativo, un **punto materiale** è un sistema fisico la cui posizione è determinata, istante per istante, assegnando solo tre coordinate spaziali. Il fatto che un sistema fisico sia o no assimilabile ad un punto materiale, trascurandone l'eventuale struttura "interna", può dipendere dalla precisione dei nostri strumenti di misura e dal grado di approssimazione scelto. L'evoluzione temporale di un punto materiale nello spaziotempo costituisce un oggetto elementare detto *storia* o *linea di universo* (di un punto materiale). Formalmente possiamo dare la

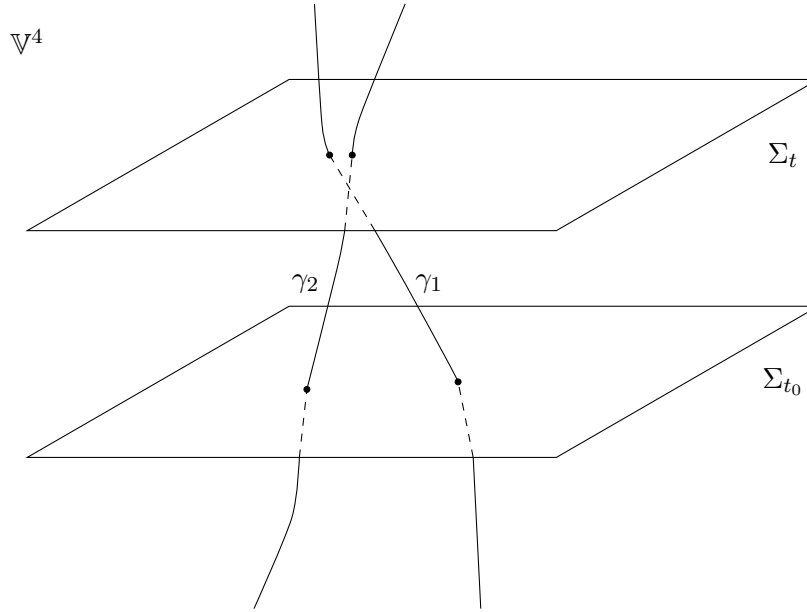


Figura 2.2: Due linee di universo in  $\mathbb{V}^4$

seguinte definizione.

**Definizione 2.2.** (**Linea di universo o storia.**) Una **storia** o **linea di universo** (di un **punto materiale**) è una curva differenziabile

$$I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{V}^4,$$

dove  $I$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  che può essere identificato con un intervallo di tempo assoluto, nel senso che vale, per qualche *costante*  $c \in \mathbb{R}$ , in generale dipendente da  $\gamma$ ,

$$T(\gamma(t)) = t + c, \forall t \in I. \quad (2.1)$$

◇

**Osservazioni 2.1.**

(1) Si devono notare alcuni fatti su  $T$ . In primo luogo  $T$  è definita a meno di una costante additiva, ciò corrisponde al fatto fisico evidente di poter fissare l'origine convenzionale del tempo a nostro piacimento. La costante  $c$  che appare nella definizione 2.2 esprime la possibilità di cambiare tale origine. Il fatto che non siano ammesse dilatazioni di  $T$  significa che è stata fatta una scelta universale dell'unità di misura del tempo. Dal punto di vista fisico l'esistenza di un tempo assoluto equivale a dire che è stata assunta l'esistenza di *orologi ideali*, disponibili in ogni

punto dello spaziotempo, che misurino tale tempo.

(2)\* Le  $\Sigma_t$  sono *sottovarietà embedded* di dimensione  $4 - 1 = 3$  per il teorema dei valori regolari, teorema A.4 nell'appendice, essendo  $T$  ovunque non singolare. Quindi se  $p \in \Sigma_t$  esiste una carta locale  $(U, \psi)$  in  $\mathbb{V}^4$  con  $\psi : U \ni q \mapsto (x^1(q), x^2(q), x^3(q), x^4(q)) \in \psi(U) \subset \mathbb{R}^4$  tale che  $p \in U$  e l'insieme  $U \cap \Sigma_t$  è descritto in coordinate da tutte e sole le quaterne  $(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \psi(U)$  tali che  $x^4 = 0$ . La mappa  $\psi' : U \cap \Sigma_t \ni q \mapsto (x^1(q), x^2(q), x^3(q)) \in \mathbb{R}^3$  definisce una carta locale su  $\Sigma_t$  nell'intorno di  $p$  e tutte le carte costruite analogamente attorno ai punti di  $\Sigma_t$  partendo da carte in  $\mathbb{V}^4$  sono tra di loro  $C^\infty$  compatibili (essendo tali le carte locali su  $\mathbb{V}^4$  di cui sono restrizione) e formano quindi un atlante che rende  $\Sigma_t$  una varietà differenziabile di dimensione 3. Tale struttura differenziabile su  $\Sigma_t$  è per costruzione *indotta* da quella di  $\mathbb{V}^4$ .

Riguardo alla struttura di spazio euclideo delle  $\Sigma_t$ , la richiesta di essere “compatibile con la struttura globale di  $\mathbb{V}^4$ ” significa che la struttura differenziabile associata alla struttura di spazio affine e quella dovuta al fatto che  $\Sigma_t$  è sottovarietà *embedded* coincidono. In altre parole i sistemi di coordinate cartesiani tridimensionali su  $\Sigma_t$  sono  $C^\infty$  compatibili con i sistemi di coordinate locali indotti su  $\Sigma_t$  da  $\mathbb{V}^4$ .

(3) Per costruzione valgono i fatti seguenti riguardanti gli spazi assoluti.

- (a) La suriettività di  $T$  assicura che  $\Sigma_t \neq \emptyset$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b) Per definizione, se  $t \neq t'$ , gli spazi assoluti associati sono disgiunti:

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset.$$

(c) Dato che  $T$  è definito su tutto lo spaziotempo, per ogni  $p \in \mathbb{V}^4$  esiste  $t \in \mathbb{R}$  con  $\Sigma_t \ni p$ . Pertanto

$$\mathbb{V}^4 = \cup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t.$$

In definitiva lo spaziotempo è fogliato dagli spazi assoluti e coincide con l'unione di essi.

(4) Ogni spazio assoluto  $\Sigma_t$  è dunque uno spazio euclideo tridimensionale reale. Dal punto di vista fisico, la distanza  $d_t$ , e quindi i prodotti scalari e gli angoli tra i segmenti in  $\Sigma_t$ , viene misurata con l'assegnazione di una classe di *regoli rigidi ideali* che si devono supporre disponibili in ogni punto dello spaziotempo. Le traslazioni indotte dai vettori  $\mathbf{v}$  in  $\Sigma_t$  devono essere pensate come le traslazioni fisiche dei corpi materiali.

(5) Abbiamo definito le nozioni di distanza ed intervallo temporale indipendentemente dalla nozione di sistema di riferimento che dobbiamo ancora introdurre. Proprio per tale fatto la nozione di distanza e di lunghezza di un intervallo temporale sono *assoluti*.

(6) Nella definizione di linea di universo, il requisito  $T(\gamma(t)) = t + c$  per ogni  $t \in I$  assicura che il tempo assoluto possa essere usato come parametro per descrivere la linea di universo, ma anche che una linea di universo non possa intersecare più di una volta lo stesso spazio assoluto  $\Sigma_t$  per ogni fissato valore di  $t^2$  (e non possa in particolare autointersecarsi). Come conseguenza del vincolo posto, risulta che il punto materiale, di cui la linea di universo rappresenta la storia, non “può tornare indietro nel tempo” (non può tornare a  $\Sigma_t$  una volta che l'ha lasciata nel passato). Questo è un requisito fisico che evita i paradossi causali della fantascienza.

---

<sup>2</sup>Se  $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \Sigma_t$  con  $t_1 < t_2$ , allora  $t_1 + c = T(\gamma(t_1)) = t = T(\gamma(t_2)) = t_2 + c$ , per cui  $t_1 = t_2$  che è impossibile.

(7) Possiamo pensare di dotare due punti materiali di orologi ideali. Tali orologi, a meno della scelta dell'origine del tempo, indicheranno le etichette  $t$  delle varie ipersuperfici  $\Sigma_t$  attraversate dalle linee di universo dei due punti. Se i due punti si incontrano nell'evento  $p \in \Sigma_t$  e in tale evento si decide di sincronizzare gli orologi *a vista* in modo che segnino, in quell'evento, entrambi  $t$ , ad ogni successivo incontro dei due orologi, essi segneranno ancora lo stesso tempo  $t' > t$  (indipendentemente dal loro stato di moto relativo al loro incontro). Inoltre, se sincronizziamo due orologi a distanza tramite un terzo orologio che funge da spola tra i due, la sincronizzazione rimarrà in futuro e tutte le procedure di sincronizzazione risultano essere equivalenti. Tutto questo perché gli orologi ideali, si limitano a *leggere* il tempo assoluto postulato esistere. Sappiamo dalla fisica che in realtà questo stato di cose è solo approssimato e cessa di essere verificato quando le velocità relative in gioco (per es. quella relativa tra due orologi istantaneamente vicini) sono prossime a quella della luce. Questo significa che l'assioma che postula il tempo assoluto ha validità fisica limitata e deve essere sostituito da qualcos'altro per avere un'immagine più fedele del mondo fisico. Similmente, se associamo dei regoli rigidi ai punti materiali, ogni qual volta tali regoli sono messi a confronto nello stesso evento  $p$  (anche con velocità relativa diversa) devono coincidere, perché si limitano a *leggere* la geometria assoluta dello spazio assoluto  $\Sigma_t \ni p$ . Anche in questo caso, la realtà fisica è ben diversa quando le velocità in gioco (quella relativa dei due regoli a confronto) sono vicine a quella della luce e ciò significa che postulare lo spazio, e la geometria assoluti non ritrae fedelmente la realtà fisica.

## 2.2 Sistemi di riferimento

Quello che vogliamo fare ora è introdurre gli strumenti necessari per poter assegnare, ad ogni linea di universo, una velocità ed una accelerazione. Per fare ciò dobbiamo introdurre la nozione di *sistema di riferimento* che sostituiremo a quella, usata fino ad ora in modo intuitivo, di *osservatore*.

Tradizionalmente questa parte della meccanica cade sotto il nome di **cinematica**, che è la parte della meccanica che si occupa della pura descrizione dei moti.

Un sistema di riferimento è un modo per rappresentare, in un fissato “spazio di quiete”, ciò che accade nello spaziotempo, allo scorrere del tempo assoluto. Un sistema di riferimento è pensabile come una identificazione di  $\mathbb{V}^4$  con il prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$ , dove  $\mathbb{R}$  è l'asse del tempo assoluto (su cui abbiamo scelto un'origine) e  $\mathbb{E}^3$  è lo *spazio di quiete del riferimento*, che è dotato della struttura di spazio euclideo, isomorfa a ciascuna analoga struttura su ogni  $\Sigma_t$ .

**Definizione 2.3.** (**Sistemi di riferimento.**) Un **sistema di riferimento**, o brevemente un **riferimento** (della fisica classica),  $\mathcal{J}$  è una coppia  $(\Pi_{\mathcal{J}}, E_{\mathcal{J}})$ , in cui  $E_{\mathcal{J}}$  è uno spazio euclideo tridimensionale (con spazio delle traslazioni, prodotto scalare e distanza che indichiamo rispettivamente con  $V_{\mathcal{J}}$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{J}}$  e  $d_{\mathcal{J}}$ ) e  $\Pi_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  è un'applicazione differenziabile suriettiva tale che, per ogni istante del tempo assoluto  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  sia un'isometria di spazi euclidei (e quindi, in particolare, anche un isomorfismo di spazi affini che preserva i prodotti scalari).  $E_{\mathcal{J}}$  è detto **spazio di quiete** di  $\mathcal{J}$  e i suoi elementi sono detti **punti in quiete** con

$\mathcal{J}$ .

◇

La definizione data ha come conseguenza la seguente proposizione che giocherà un ruolo importante nel seguito.

**Proposizione 2.1.** *Se  $(\Pi_{\mathcal{J}}, E_{\mathcal{J}})$  è un riferimento, l'applicazione*

$$\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (T(e), \Pi_{\mathcal{J}}(e)) \in \mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$$

*è iniettiva e suriettiva e pertanto identifica lo spaziotempo con la decomposizione in spazio e tempo data dal prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$  (equivalentemente, tenendo conto della costante additiva arbitraria nella definizione di  $T$ , identifica lo spaziotempo con  $\mathbb{E}^1 \times E_{\mathcal{J}}$ , dove  $\mathbb{E}^1$  è l'asse del tempo senza alcuna scelta dell'origine).*

*Ogni curva  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (t, P) \in \mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$ , per ogni fissato  $P \in E_{\mathcal{J}}$ , risulta essere una linea di universo nel senso della definizione 2.2 quando pensata in  $\mathbb{V}^4$  attraverso l'identificazione di  $\mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$  con  $\mathbb{V}^4$  vista sopra. Tale linea di universo,  $\gamma_P$ , è detta **linea di universo del punto  $P$  in quiete con  $\mathcal{J}$** .*

**Dimostrazione.** Consideriamo l'applicazione  $\mathbb{V}^4 \ni e \mapsto (T(e), \Pi_{\mathcal{J}}(e)) \in \mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$ . Questa applicazione è iniettiva. Ci sono infatti due possibilità se  $e \neq e'$ : (1) i due eventi appartengono a spazi assoluti diversi, ed in tal caso  $T(e) \neq T(e')$ , oppure (2)  $e$  ed  $e'$  appartengono allo stesso spazio assoluto  $\Sigma_t$  ed in tal caso individuano punti differenti di  $\Sigma_t$ , e quindi  $\Pi_{\mathcal{J}}(e) \neq \Pi_{\mathcal{J}}(e')$  dato che  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t}: \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  è biettiva (essendo isomorfismo di spazi affini). In entrambi i casi  $e \neq e'$  implica  $(T(e), \Pi_{\mathcal{J}}(e)) \neq (T(e'), \Pi_{\mathcal{J}}(e'))$ . Per quanto riguarda la suriettività, osserviamo che, fissato un arbitrario  $(t_0, P) \in \mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}}$ , dato che  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_{t_0}}: \Sigma_{t_0} \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  è suriettiva per ipotesi, significa che  $\Pi_{\mathcal{J}}^{-1}(P)$  interseca  $\Sigma_{t_0}$  in qualche  $e$ . Per costruzione  $(T(e), \Pi_{\mathcal{J}}(e)) = (t_0, P)$ . Ovviamente ogni curva  $\gamma_P$  descritta come  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (t, P) \in \mathbb{R} \times E_{\mathcal{J}} \equiv \mathbb{V}^4$  soddisfa la richiesta  $T(\gamma_P(t)) = t$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Il fatto che ogni curva  $\gamma_P$  sia differenziabile segue subito dal fatto che esiste un sistema di coordinate globali su  $\mathbb{V}^4$ , detto *sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$*  (vedi successiva definizione 2.5) che è compatibile con la struttura differenziabile dello spaziotempo come provato nella successiva proposizione 2.2 ed in cui ogni curva  $\gamma_P$  ha struttura banale  $t \mapsto (t, x_P^1, x_P^2, x_P^3)$ , dove le coordinate  $x_P^i$  sono tenute costanti. □

## Osservazioni 2.2.

(1) Per quanto riguarda la nozione di sistema di riferimento, non ha alcun senso fisico distinguere tra due coppie  $(\Pi, E)$  e  $(\Pi', E')$  che soddisfino la definizione 2.3, ma che siano isomorfe, nel senso che esiste un isomorfismo di spazi euclidei (cioè un'isometria tra spazi euclidei)  $\psi: E \rightarrow E'$  tale che  $\Pi' = \psi \circ \Pi$ . Pertanto assumeremo che, in tal caso, entrambe le coppie  $(\Pi, E)$  e  $(\Pi', E')$  individuino uno stesso sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ .

(2) Abbiamo appena visto che i punti  $P$  dello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  di un riferimento  $\mathcal{J}$ , evolvendo nel tempo, tracciano linee di universo in  $\mathbb{V}^4$ . Ognuna di tali linee di universo  $\gamma_P$  individua sempre lo stesso punto,  $P$ , nello spazio di quiete. Lo spazio di quiete è istante per istante isometricamente

identificato con  $\Sigma_t$ . Pertanto la distanza spaziale  $d_t(\gamma_P(t), \gamma_Q(t))$  tra le linee di universo  $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  dei punti  $P, Q$  in quiete con un riferimento  $\mathcal{J}$  è costante al variare del tempo assoluto. Questa non è l'unica proprietà della classe  $\{\gamma_P\}_{P \in E_{\mathcal{J}}}$  di linee di universo, ce ne sono altre che elenchiamo e la cui dimostrazione è immediata. Le curve  $\gamma_t$  sono tra di loro *sincronizzate*, cioè le costanti additive del parametro  $t$  che le descrive ( $\gamma_P = \gamma_P(t)$ ) sono fissate in modo che *ogni* curva intercetti ogni  $\Sigma_\tau$  per il valore  $t = \tau$  del suo parametro. *Ogni* evento dello spaziotempo è raggiunto da una  $\gamma_P$ . Le linee  $\gamma_P$  non si intersecano mai tra di loro.

### 2.2.1 \*Una definizione alternativa di sistema di riferimento

Per dare una definizione alternativa di sistema di riferimento si può porre l'accento sulle proprietà elencate sopra delle linee di universo dei punti in quiete con il riferimento (pensando tali curve come enti primari) piuttosto che sulla decomposizione  $\mathbb{E}^1 \times E_{\mathcal{J}}$ . Questo punto di vista è utile per sviluppi successivi della teoria (in particolare per le teorie relativistiche). In pratica si può immaginare un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  come l'assegnazione di una classe  $\{\gamma_P\}_{P \in E_{\mathcal{J}}}$  di linee di universo. Si osservi che l'insieme di indici  $E_{\mathcal{J}}$  non ha alcuna struttura di spazio euclideo in questo contesto per il momento. Le linee di universo in  $\{\gamma_P\}_{P \in E_{\mathcal{J}}}$  sono pensate parametrizzata su *tutto* il tempo assoluto e *sincronizzate*, cioè le costanti additive del parametro  $t$  che le descrive ( $\gamma_P = \gamma_P(t)$ ) sono fissate in modo che *ogni* curva intercetti ogni  $\Sigma_\tau$  per il valore  $t = \tau$  del suo parametro. Le linee di  $\mathcal{J}$  devono permeare *tutto* lo spaziotempo. Si assume ancora che le linee  $\gamma_P$  non si intersechino tra di loro. In questo modo, ogni evento è intercettato da una sola linea di universo, l'indice  $P$  che etichetta tale linea e la distingue dalle altre, definisce “la localizzazione spaziale” dell'evento. Il valore del parametro, il tempo assoluto in cui  $\gamma_P$  interseca l'evento, definisce la “localizzazione temporale” dell'evento. Se le linee di universo evolvono in modo *rigido*, cioè conservando le distanze reciproche negli spazi  $\Sigma_t$  al variare di  $t$ , si può dotare lo spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$ , come ci si aspetta dalla fisica, di una struttura metrica che lo identifica con ogni spazio  $\Sigma_t$ , ricadendo in questo modo nella prima modellizzazione di sistema di riferimento data nella definizione precedente.

**Definizione 2.4.** \*(Sistemi di riferimento, definizione alternativa.) Un **sistema di riferimento** o brevemente un **riferimento** (della fisica classica),  $\mathcal{J}$  è una classe di linee di universo  $\{\gamma_P\}_{P \in E_{\mathcal{J}}}$  che soddisfa i seguenti requisiti.

- (i) **inestendibilità temporale**: per ogni  $P \in E_{\mathcal{J}}$ , il dominio di  $\gamma_P$  è tutto  $\mathbb{R}$ .
  - (ii) **sincronizzazione**:  $\gamma_P(t) \in \Sigma_t$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e ogni  $P \in E_{\mathcal{J}}$  (per una scelta opportuna della costante additiva del tempo assoluto).
  - (iii) **globalità**:  $\bigcup_{P \in E_{\mathcal{J}}} \gamma_P(\mathbb{R}) = \mathbb{V}^4$ .
  - (iv) **non intersecabilità**:  $\gamma_P(\mathbb{R}) \cap \gamma_Q(\mathbb{R}) = \emptyset$  se  $P \neq Q$  per ogni  $P, Q \in E_{\mathcal{J}}$ .
  - (v) **rigidità**:  $d_t(\gamma_P(t), \gamma_Q(t)) = d_{t'}(\gamma_P(t'), \gamma_Q(t'))$  per ogni  $P, Q \in E_{\mathcal{J}}$  e per ogni  $t, t' \in \mathbb{R}$ .
- L'insieme degli indici  $E_{\mathcal{J}}$  è detto **spazio di quiete** di  $\mathcal{J}$ . ◇

Osserviamo che per ogni  $p \in \mathbb{V}^4$ , c'è un unico  $P \in E_{\mathcal{J}}$ , la cui linea di universo  $\gamma_P$  interseca  $p$ . In questo modo risulta essere definita una funzione surgettiva  $\Pi_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  che associa

$p \in \mathbb{V}^4$  all'indice  $P \in E_{\mathcal{J}}$  nel modo detto. La surgettività di  $\Pi_{\mathcal{J}}$  segue immediatamente dalla definizione di  $\Pi_{\mathcal{J}}$ .

Come preannunciato, proviamo ora che ogni sistema di riferimento nel senso della definizione appena data individua un sistema di riferimento nel senso della definizione data inizialmente.

**Teorema 2.1.** *\*Sia  $\mathcal{J}$  un riferimento su  $\mathbb{V}^4$  nel senso della definizione 2.4, e si consideri l'applicazione  $\Pi_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  che associa  $p \in \mathbb{V}^4$  all'indice  $P$  dell'unica linea di universo di  $\mathcal{J}$  che interseca  $p$ .*

*Si può dotare lo spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  di struttura di spazio euclideo tridimensionale (con spazio delle traslazioni, prodotto scalare e distanza che indichiamo rispettivamente con  $V_{\mathcal{J}}$ ,  $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{J}}$  e  $d_{\mathcal{J}}$ ), in modo tale che (i)  $\Pi_{\mathcal{J}}$  sia differenziabile e (ii) per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  è un'isometria e quindi, in particolare, anche un isomorfismo di spazi affini che preserva i prodotti scalari. Infine la coppia  $(\Pi_{\mathcal{J}}, E_{\mathcal{J}})$  è un riferimento nel senso della definizione 2.4 e le linee di universo dei punti in quiete con  $(\Pi_{\mathcal{J}}, E_{\mathcal{J}})$  (nel senso della proposizione 2.1) coincidono con le  $\gamma_P$ .*

**Dimostrazione.** Fissiamo un valore  $t_0 \in \mathbb{R}$  e riferimoci a  $\Sigma_{t_0}$ . Ogni curva  $\gamma_P$  interseca  $\Sigma_{t_0}$  esattamente in un punto  $P'$ . Ogni punto  $P'$  di  $\Sigma_{t_0}$  individua un'unica linea di universo di  $\mathcal{J}$ , diciamo  $\gamma_P$ . Pertanto esiste una corrispondenza iniettiva e suriettiva tra gli indici  $P$  delle linee di universo di  $\mathcal{J}$  ed i punti di  $\Sigma_{t_0}$  e quindi possiamo pensare gli indici  $P \in E_{\mathcal{J}}$  come punti di  $\Sigma_{t_0}$ . Dato che  $\Sigma_{t_0}$  è uno spazio euclideo,  $E_{\mathcal{J}}$  risulta ereditare una struttura di spazio euclideo tramite l'identificazione detta. Con questa definizione  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  si può leggere come  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow \Sigma_{t_0}$ . Per costruzione, se  $Q_i \in \Sigma_t$  allora, per ogni fissato  $i = 1, 2$ ,  $Q_i$  e  $P_i := \Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t}(Q_i) \in \Sigma_{t_0}$  appartengono alla stessa linea di universo di  $\mathcal{J}$ . Per la richiesta di rigidità nella definizione 2.4,  $d_{t_0}(P_1, P_2) = d_t(Q_1, Q_2)$ . Concludiamo che  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t}$  è un'isometria tra  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_{t_0} \equiv E_{\mathcal{J}}$ . Ma allora, per (iv) in esercizio 1.3.4,  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow \Sigma_{t_0}$  è anche un'isometria affine e quindi, in particolare, un isomorfismo di spazi affini che preserva i prodotti scalari. Si osservi che in questo modo  $E_{\mathcal{J}}$  eredita anche una struttura differenziabile che lo rende diffeomorfo a  $\Sigma_{t_0}$ . Il resto della tesi è, a questo punto, di ovvia dimostrazione escluso il fatto che, con le scelte fatte, la funzione  $\Pi_{\mathcal{J}}$  sia differenziabile. Per dimostrare ciò si osservi che esiste un sistema di coordinate globali  $(t, x^1, x^2, x^3)$  su  $\mathbb{V}^4$ , detto sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  (vedi successiva definizione 2.5 che può essere data anche con la definizione 2.3 di riferimento) che è compatibile con la struttura differenziabile dello spaziotempo come provato nella successiva proposizione 2.2 (la cui dimostrazione vale anche con la definizione 2.3 di riferimento) ed in cui l'applicazione  $\Pi_{\mathcal{J}}$  ha struttura banale  $(t, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2, x^3)$ .  $\square$ .

**Osservazioni 2.3.** *Nel seguito ci riferiremo sempre alla definizione 2.3 di sistema di riferimento.*

### 2.2.2 Sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali

Vogliamo ora introdurre particolari carte globali su  $\mathbb{V}^4$ , associate ad un riferimento fissato  $\mathcal{J}$ , che diremo *solidali* con  $\mathcal{J}$ . A tal fine fissiamo, nello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$ , un sistema di coordinate cartesiane ortonormali  $x^1, x^2, x^3$ . Consideriamo poi la funzione  $\sigma_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , che dopo aver proiettato ogni evento  $p \in \Sigma_t$  dello spaziotempo sullo spazio di quiete di  $\mathcal{J}$ ,  $E_{\mathcal{J}}$ , associa a  $p$  la quaterna ordinata di numeri dati dal valore del tempo assoluto  $T(p) = t$ , ridefinito per una eventuale costante additiva  $c$  e dalle tre coordinate cartesiane di  $\Pi_{\mathcal{J}}(p)$  nello spazio di quiete di  $\mathcal{J}$ :

$$\sigma_{\mathcal{J}} : p \mapsto (T(p) + c, x^1(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^2(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^3(\Pi_{\mathcal{J}}(p))) .$$

Mostriamo che  $\sigma_{\mathcal{J}}$  è biettiva e quindi, in particolare, definisce una carta globale  $(\mathbb{V}^4, \sigma_{\mathcal{J}})$  e di conseguenza un atlante su  $\mathbb{V}^4$ . Assumeremo  $c = 0$  nel seguito, senza perdere generalità.

*Suriettività.* Scelto  $(t, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$  si consideri  $\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$ . Questa è una funzione biettiva come chiarito nel teorema 2.1. Quindi esiste  $p \in \Sigma_t$  tale che  $\Pi_{\mathcal{J}}(p) \in E_{\mathcal{J}}$  ha coordinate  $(x^1, x^2, x^3)$ . Per costruzione  $\sigma_{\mathcal{J}}(p) = (t, x^1, x^2, x^3)$ .

*Inieltività.* Se  $p \neq p'$  ci sono due possibilità. (1)  $T(p) \neq T(p')$  per cui  $\sigma_{\mathcal{J}}(p) \neq \sigma_{\mathcal{J}}(p')$ . (2)  $T(p) = T(p') =: t$ , per cui  $p, p' \in \Sigma_t$ , ma  $p \neq p'$  perché sono punti distinti. In tal caso, essendo  $\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  biettiva e quindi inieltiva, sarà anche  $\Pi_{\mathcal{J}}(p) = \Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t}(p) \neq \Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t}(p') = \Pi_{\mathcal{J}}(p')$  e quindi

$$(x^1(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^2(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^3(\Pi_{\mathcal{J}}(p))) \neq (x^1(\Pi_{\mathcal{J}}(p')), x^2(\Pi_{\mathcal{J}}(p')), x^3(\Pi_{\mathcal{J}}(p'))),$$

da cui  $\sigma_{\mathcal{J}}(p) \neq \sigma_{\mathcal{J}}(p')$ .

**Definizione 2.5. (Coordinate cartesiane ortonormali solidali)** Sia  $\mathcal{J}$  un sistema di riferimento nello spaziotempo  $\mathbb{V}^4$ , siano  $x^1, x^2, x^3$  coordinate cartesiane ortonormali nello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  e  $\sigma_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  sia la funzione biettiva che associa ad ogni evento  $p$  dello spaziotempo i numeri  $(T(p) + c, x^1(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^2(\Pi_{\mathcal{J}}(p)), x^3(\Pi_{\mathcal{J}}(p)))$ , dove  $c$  è una eventuale costante additiva. La carta globale  $(\mathbb{V}^4, \sigma_{\mathcal{J}})$  è detta **sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali** con  $\mathcal{J}$ .  $\diamond$

Dati due riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  con associate coordinate cartesiane ortonormali solidali, rispettivamente  $(t, x^1, x^2, x^3)$  e  $(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ , la funzione  $\sigma_{\mathcal{J}'} \circ \sigma_{\mathcal{J}}^{-1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , ovvero la “legge di trasformazione delle coordinate non primate nelle coordinate primate”, ha sempre la forma

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j(t) x^j + c^i(t), \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (2.2)$$

dove  $c \in \mathbb{R}$  è una costante, le funzioni  $\mathbb{R} \ni t \mapsto c^i(t)$  e  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^i_j(t)$  sono  $C^\infty$  e, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice di coefficienti  $R^i_j(t)$  è una matrice ortogonale reale  $3 \times 3$ . La prima identità



è ovvia dal fatto che entrambi i sistemi di coordinate usano il tempo assoluto come coordinata temporale a meno di una costante additiva. La seconda identità si prova (vedere gli esercizi) usando il fatto che, per ogni fissato  $t \in \mathbb{R}$ , le trasformazioni  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} \circ (\Pi_{\mathcal{J}'}|_{\Sigma_t})^{-1} : E_{\mathcal{J}'} \rightarrow E_{\mathcal{J}}$  sono isometrie di spazi euclidei (e quindi isometrie affini), in quanto composizioni di isometrie.

#### Osservazioni 2.4.

(1) Si noti che ci sono infiniti sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali con un fissato riferimento  $\mathcal{J}$ . Questa infinità è parametrizzata dalla scelta dell'origine  $O \in E_{\mathcal{J}}$ , dalla scelta della base ortonormale in  $V_{\mathcal{J}}$ , ma anche della scelta della costante indeterminata nella definizione del tempo assoluto.

(2)\* Dal punto di vista fisico, le coordinate solidali con i riferimenti sono le coordinate naturali dello spaziotempo. Lo spaziotempo è assunto essere una varietà proprio per l'esistenza di diversi sistemi di coordinate, associate ai diversi riferimenti, che lo identificano con  $\mathbb{R}^4$ . Ci si deve quindi chiedere, a questo punto, se la struttura differenziabile indotta su  $\mathbb{V}^4$  dai sistemi di coordinate solidali con i riferimenti coincida davvero con la struttura differenziabile che abbiamo a priori assunto esistere su  $\mathbb{V}^4$  nella definizione 2.1. In altre parole ci chiediamo se i sistemi di coordinate solidali con i riferimenti appena definiti siano  $C^k$ -compatibili (nel senso della definizione 1.7) con i sistemi di coordinate locali che abbiamo già assunto esistere dicendo che lo spaziotempo è una varietà differenziabile. La risposta, come deve essere, è positiva in quanto vale la seguente proposizione tecnica, basata sul fatto che la funzione tempo assoluto è non singolare. La dimostrazione di essa è fornita in una soluzione (in appendice) ad uno degli esercizi seguenti.

**Proposizione 2.2.** *\*Ogni sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con un arbitrariamente assegnato riferimento  $\mathcal{J}$  di  $\mathbb{V}^4$  è  $C^\infty$ -compatibile con le carte locali già presenti su  $\mathbb{V}^4$  (cioè appartiene alla struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ ).*

#### Esercizi 2.1.

1.\* Dimostrare la proposizione 2.2.

2. Dimostrare che, dati due riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  con associate coordinate cartesiane ortonormali solidali, rispettivamente  $(t, x^1, x^2, x^3)$  e  $(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ , la funzione  $\sigma_{\mathcal{J}'} \circ \sigma_{\mathcal{J}}^{-1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , ovvero la “legge di trasformazione delle coordinate non primate nelle coordinate primate”, ha la forma (2.2) dove  $c \in \mathbb{R}$  è una costante, le funzioni  $\mathbb{R} \ni t \mapsto c^i(t)$  e  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^i_j(t)$  sono  $C^\infty$  e, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice di coefficienti  $R^i_j(t)$  è una matrice ortogonale reale  $3 \times 3$ .

3. Sia  $\mathcal{J}$  un riferimento con coordinate cartesiane ortonormali solidali  $(t, x^1, x^2, x^3)$ . Considerare un secondo sistema di coordinate (globale) su  $\mathbb{V}^4$ ,  $(t', x'^1, x'^2, x'^3)$ , connesso al precedente dalle (2.2) (con funzioni  $\mathbb{R} \ni t \mapsto c^i(t)$  e  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^i_j(t)$  con le caratteristiche dette sopra). Mostrare che:

(i) esiste un riferimento  $\mathcal{J}'$  per cui le coordinate  $(t', x'^1, x'^2, x'^3)$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con esso;

(ii) Se  $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$  le funzioni  $\mathbb{R} \ni t \mapsto c^i(t)$  e  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^i_j(t)$  sono costanti. Viceversa, se tali funzioni sono costanti, i riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  sono, dal punto di vista fisico, lo stesso riferimento, nel senso che individuano la stessa classe di linee di universo dei punti di quiete eventualmente

etichettate in modo differente per  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  e con una eventuale differente scelta dell'origine della coordinata temporale.

### Osservazioni 2.5.

(1) Anche se ogni fissato riferimento  $\mathcal{S}$  identifica lo spaziotempo con lo spazio affine  $\mathbb{E}^1 \times E_{\mathcal{S}}$ , non è possibile dotare lo spaziotempo di una *struttura affine* privilegiata, facendolo diventare uno spazio affine  $\mathbb{A}^4$ , per la quale le coordinate cartesiane solidali con ogni riferimento (incluendo le coordinate temporali!), cioè le coordinate cartesiane di ogni spazio affine  $\mathbb{E}^1 \times E_{\mathcal{S}}$ , siano sistemi di coordinate cartesiane di  $\mathbb{A}^4$ . La ragione è nella forma generale delle equazioni (2.2). Se fissiamo un riferimento  $\mathcal{S}$  e consideriamo due eventi  $p$  e  $q$ , possiamo associare alla coppia  $(p, q)$  un vettore  $p - q$  definito dalle componenti  $(t_p - t_q, x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q)$ , dove abbiamo introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ . Se cambiamo sistema di coordinate continuando ad usare coordinate solidali con lo stesso  $\mathcal{S}$ , scopriamo che la legge di trasformazione delle componenti di  $p - q$  è correttamente una trasformazione affine, della forma (2.2), con coefficienti  $c^i$  nulli e dove i coefficienti  $R^i_j(t)$  non dipendono dal tempo. Tuttavia se passiamo ad un altro riferimento  $\mathcal{S}'$  e proviamo ad associare alla stessa coppia  $(p, q)$  un vettore  $p - q$  definito dalle componenti  $(t'_p - t'_q, x'_p - x'_q, y'_p - y'_q, z'_p - z'_q)$ , dove abbiamo introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}'$ , scopriamo che, in generale, le componenti di tale vettore non si trasformano secondo una trasformazione affine passando al precedente riferimento. Questo è dovuto alla dipendenza temporale dei coefficienti  $R^i_j(t)$  e  $c^i(t)$  in (2.2) che appare cambiando riferimento ed al fatto che siamo liberi di scegliere gli eventi  $p$  e  $q$  non contemporanei. In definitiva: non è possibile, usando i sistemi di coordinate cartesiani solidali con i riferimenti possibili nello spaziotempo, definire una nozione di *vettore*  $p - q$  che risulti essere indipendente dal riferimento.

(2)\* In virtù del fatto che ogni sistema di coordinate cartesiano solidale con un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  è un sistema di coordinate della struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , si ha anche che esso definisce un diffeomorfismo tra  $\mathbb{V}^4$  e  $\mathbb{R} \times E_{\mathcal{S}}$ . Questo risultato si può enunciare in termini geometrico differenziali (vedi Appendice), dicendo che  $\mathbb{V}^4$  è un *fibrato con base  $\mathbb{R}$ , fibra standard  $\mathbb{E}^3$  e proiezione canonica  $T : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$* , data dal tempo assoluto. Di conseguenza lo spaziotempo è un *fibrato trivializzabile* (che significa diffeomorfo alla varietà prodotto della base e della fibra standard), tuttavia questa identificazione non è unica e non c'è alcun modo di fissarne una privilegiata, proprio perché significherebbe scegliere un sistema di riferimento come più importante di tutti gli altri.

Si osservi ancora che le storie dei punti materiali si identificano con le sezioni di tale fibrato, inoltre la base  $\mathbb{R}$  può essere sostituita da  $\mathbb{E}^1$  a seconda che si pensi o no di avere fissato, convenzionalmente, un origine per il tempo, ovvero fatto una scelta per la funzione  $T$ .

## 2.3 Cinematica assoluta del punto materiale

Ci occuperemo ora della descrizione del moto di un punto materiale rispetto ad un assegnato sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , introdurremo il concetto di velocità ed accelerazione e vedremo come

quest'ultima si decompone su una terna associata alla curva descritta dal punto materiale nello spazio  $E_{\mathcal{J}}$ .

### 2.3.1 Derivazione di curve in spazi affini

Se  $\mathbb{A}^n$  è uno spazio affine con spazio delle traslazioni  $V$  e  $P = P(t)$  con  $t \in (a, b)$  descrive una curva  $C^k$ , i vettori ( $p \leq k$ ) per  $\tau \in (a, b)$ :

$$\frac{d^p P}{dt^p} \Big|_{t=\tau} \in V$$

sono definiti usando la struttura differenziabile di  $\mathbb{A}^n$  indotta da quella affine. Fissate coordinate cartesiane di origine  $O$  e con assi  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ , la curva  $P = P(t)$  sarà individuata da una curva  $x^i = P^i(t)$  in  $\mathbb{R}^n$  di classe  $C^k$ . Definiamo allora:

$$\frac{d^p P}{dt^p} \Big|_{t=\tau} := \sum_{i=1}^n \frac{d^p P^i}{dt^p} \Big|_{t=\tau} \mathbf{e}_i . \quad (2.3)$$

Similmente, se  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) \in V$  con  $t \in (a, b)$  descrive una curva a valori nello spazio delle traslazioni di uno spazio affine  $\mathbb{A}^n$ , definiamo per  $\tau \in (a, b)$ , purché il secondo membro esista

$$\frac{d^p \mathbf{v}}{dt^p} \Big|_{t=\tau} := \sum_{i=1}^n \frac{d^p v^i}{dt^p} \Big|_{t=\tau} \mathbf{e}_i . \quad (2.4)$$

dove le  $v^i(t)$  sono le componenti di  $\mathbf{v}(t)$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$  di  $V$ . Vogliamo provare che le due definizioni sono ben poste, cioè sono indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate cartesiane nel primo caso e dalla scelta della base nel secondo.

Dall'esercizio 1.2.1, le coordinate di  $P(t)$ ,  $P'^j(t)$  in un nuovo sistema di coordinate cartesiane su  $\mathbb{A}^n$  sono connesse alle  $P^i(t)$  dalla trasformazione lineare non omogenea:

$$P'^j(t) = \sum_{i=1}^n B^j_i(P^i(t) + b^i)$$

dove  $\mathbf{e}'_j = \sum_k (B^{-1})^k_j \mathbf{e}_k$ . Di conseguenza:

$$\frac{d^p P'^j}{dt^p} = \sum_{i=1}^n B^j_i \frac{d^p P^i}{dt^p} ,$$

e quindi

$$\sum_j \frac{d^p P'^j}{dt^p} \mathbf{e}'_j = \sum_{i,j,k} (B^{-1})^k_j B^j_i \frac{d^p P^i}{dt^p} \mathbf{e}_k = \sum_{i,k} \delta^k_i \frac{d^p P^i}{dt^p} \mathbf{e}_k = \sum_i \frac{d^p P^i}{dt^p} \mathbf{e}_i .$$

La dimostrazione nel secondo caso è analoga.

**Osservazioni 2.6.** Lasciamo la prova al lettore del fatto che il calcolo delle derivate sopra menzionate può essere svolto, del tutto equivalentemente, facendo uso della funzione che associa vettori a coppie di punti in spazi affini. Per esempio, con la definizione data sopra di derivata, restringendoci al caso della derivata prima, risulta che:

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P(\tau + h) - P(\tau))$$

per la fissata curva  $P = P(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , dove si deve intendere che i due membri esistono sempre contemporaneamente.

### 2.3.2 Grandezze cinematiche elementari

Possiamo dare le definizioni fondamentali della cinematica: la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto ad un fissato riferimento  $\mathcal{J}$  in cui è data la legge oraria del moto del punto.

**Definizione 2.6.** Consideriamo un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  ed un punto materiale descritto da una linea di universo  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{V}^4$ . Possiamo rappresentare questa linea di universo nello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  come una curva, che per costruzione è differenziabile,

$$t \mapsto P_{\gamma}(t) := \Pi_{\mathcal{J}}(\gamma(t)) .$$

La curva sopra scritta è detta **legge oraria** della linea di universo  $\gamma$  nel riferimento  $\mathcal{J}$ . La **velocità di  $\gamma$  rispetto a  $\mathcal{J}$ , all'istante  $\tau$** , è il vettore di  $V_{\mathcal{J}}$ :

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{J}}(\tau) := \left. \frac{dP_{\gamma}}{dt} \right|_{t=\tau} .$$

L'**accelerazione di  $\gamma$  rispetto a  $\mathcal{J}$ , all'istante  $\tau$** , è il vettore di  $V_{\mathcal{J}}$ :

$$\mathbf{a}|_{\mathcal{J}}(\tau) := \left. \frac{d^2 P_{\gamma}}{dt^2} \right|_{t=\tau} .$$

◇

### Esercizi 2.2.

1. Considerare, in un piano nello spazio di quiete del riferimento  $\mathcal{J}$ ,  $E_{\mathcal{J}}$ , coordinate polari piane  $r, \phi$  ( $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ) riferite a coordinate cartesiane ortogonali  $x, y$ . Esprimere la velocità,  $\mathbf{v}$ , e l'accelerazione,  $\mathbf{a}$ , rispetto ad  $\mathcal{J}$  di un punto vincolato a muoversi nel piano usando le coordinate polari ed i versori  $\mathbf{e}_r$  (tangente alla curva coordinate  $r$  ed uscente dall'origine) ed  $\mathbf{e}_{\phi}$  (tangente alla curva coordinata  $\phi$  con verso dato da  $\theta$  crescente). Provare in particolare che, indicando con il punto la derivata rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_{\phi} , \tag{2.5}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_{\phi} \tag{2.6}$$

**2.** Considerare, nello spazio di quiete del riferimento  $\mathcal{J}$ ,  $E_{\mathcal{J}}$ , coordinate polari sferiche  $r, \phi, \theta$ , ( $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ) riferite a coordinate cartesiane ortogonali  $x, y, z$ . Esprimere la velocità e l'accelerazione rispetto ad  $\mathcal{J}$  di un punto usando le coordinate polari ed i versori  $\mathbf{e}_r$  (tangente alla curva coordinate  $r$  ed uscente dall'origine),  $\mathbf{e}_\phi$  (tangente alla curva coordinata  $\phi$  con verso dato da  $\phi$  crescente) ed  $\mathbf{e}_\theta$  (tangente alla curva coordinata  $\theta$  con verso dato da  $\theta$  crescente). Provare, in particolare che:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ & + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**3.** Considerare, nello spazio di quiete del riferimento  $\mathcal{J}$ ,  $E_{\mathcal{J}}$ , coordinate cilindriche  $r, \phi, z$  ( $r > 0$ ,  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ) riferite a coordinate cartesiane ortogonali  $x, y, z$ . Esprimere la velocità e l'accelerazione rispetto ad  $\mathcal{J}$  di un punto usando le coordinate polari ed i versori  $\mathbf{e}_r$  (tangente alla curva coordinate  $r$  ed uscente dall'origine),  $\mathbf{e}_\phi$  (tangente alla curva coordinata  $\phi$  con verso dato da  $\phi$  crescente) ed  $\mathbf{e}_z$  (tangente alla curva coordinata  $z$  con verso positivo). Provare in particolare che, indicando con il punto la derivata rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \quad (2.10)$$

**4.\*** Gli esercizi 2.2.2 e 2.2.3, per quanto riguarda il calcolo dell'accelerazione, possono essere risolti in maniera più rapida usando la derivata covariante rispetto alla connessione affine di Levi-Civita di  $\mathbb{E}^3 = E_{\mathcal{J}}$  associata al prodotto scalare. Vale in coordinate locali curvilinee arbitrarie  $x^1, x^2, x^3$ , se  $(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$  sono le coordinate di  $P(t)$  al variare del tempo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.11)$$

dove i simboli di connessione  $\Gamma^i_{jk}$  sono, al solito, definiti come, rispetto al tensore metrico  $\sum_{ik} g_{ik} dx^i \otimes dx^k$  (ed al suo inverso di componenti  $g^{rs}$ ):

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{r=1}^3 \frac{1}{2} g^{ir} \left( \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right) \quad (2.12)$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}$  sono i vettori della base associata alle coordinate connessi ai versori tramite  $\mathbf{e}_i = (g_{ii})^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Per esempio, nel caso delle coordinate polari sferiche, se  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \phi$ ,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  si ha:  $\mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\mathbf{e}_\theta = r^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\mathbf{e}_\phi = (r \sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi}$ . Spiegare il perché di questo risultato.

### 2.3.3 Cinematica per punti materiali vincolati a curve e superfici ferme

Spesso il moto di punti materiali è *vincolato*, cioè costretto ad avvenire in insiemi geometrici fissati, che possono essere curve o superfici. Ci occuperemo qui della situazione in cui il moto avviene su curve o superfici ferme rispetto ad un sistema di riferimento. Un punto tecnicamente importante è quello di sviluppare tecniche matematiche per poter di decomporre la velocità e l'accelerazione del punto materiale rispetto a basi vettoriali associate agli insiemi dati. Sviluppando la dinamica del punto materiale vincolato, vedremo che sarà fisicamente importante poter decomporre l'accelerazione del punto materiale studiato in *componente tangente* e *componente normale* alla superficie o alla curva su cui avviene il moto.

Consideriamo una curva  $\Gamma$ , di equazione  $P = P(u)$  con  $u \in (a, b)$ , in *quiete* rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ . In altre parole, l'equazione della curva, in coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ , è tale che in essa non compaia esplicitamente il tempo (il parametro  $u$  non è il tempo). Richiederemo che la curva sia di classe  $C^1$  (in modo in particolare che sia rettificabile [GiustiI]) e che sia *regolare*, ossia il vettore tangente sia ovunque non nullo su  $\Gamma$ :

$$\frac{dP}{du} \neq 0, \quad \text{per } u \in (a, b).$$

Supponiamo che un punto materiale sia vincolato a muoversi su tale curva. Notiamo che la curva  $\Gamma$  ammette una parametrizzazione privilegiata che ora introduciamo. Definiamo, fissato un punto  $O = P(u_0)$  sulla curva:

$$s(u) := \int_{u_0}^u \left\| \frac{dP}{du'} \right\| du'. \quad (2.13)$$

Dal teorema fondamentale del calcolo, la funzione  $(a, b) \ni u \mapsto s(u)$ , detta **ascissa curvilinea**, risulta essere  $C^1$  con derivata sempre positiva data dall'integrando in (2.13). In virtù di ciò essa è strettamente crescente e quindi invertibile con inversa  $C^1$ . Di conseguenza  $s$  può essere usato per riparametrizzare  $\Gamma$ . Dalla teoria elementare delle curve [GiustiI] è noto che  $s(u)$  altro non è che la *lunghezza* del segmento di curva tra  $P(u_0)$  e  $P(u)$ . Tale lunghezza è definita con il segno: è positiva per punti successivi a  $P(u_0)$  e negativa per punti precedenti  $P(u_0)$ , il senso di percorrenza essendo stato fissato dal parametro iniziale  $u$ .

Cambiamo ora parametro, per descrivere la stessa  $\Gamma$ , usando un nuovo parametro  $v = v(u)$ , nell'ipotesi che la funzione  $v = v(u)$  sia  $C^1$  con derivata strettamente positiva. In tali ipotesi la funzione  $v = v(u)$  risulta essere biettiva con inversa  $C^1$  e la curva  $\Gamma$  potrà essere descritta da una funzione  $P(v) := P(u(v))$  con  $v \in (v(a), v(b))$ . Possiamo anche in questo caso definire l'ascissa curvilinea  $s = s(v)$  tramite la (2.13). Direttamente dalla (2.13) troviamo che

$$s(u) = \int_{u_0}^u \left\| \frac{dP}{du'} \right\| du' = \int_{v(u_0)}^{v(u)} \left\| \frac{dP}{du'} \right\| \frac{du'}{dv'} dv' = \int_{v(u_0)}^{v(u)} \left\| \frac{dP}{dv'} \right\| dv' = s(v(u)).$$

In questo senso l'ascissa curvilinea è *invariante* sotto riparametrizzazioni di  $\Gamma$  (date da funzioni differenziabili con continuità e con derivata ovunque strettamente positiva).

Supponiamo ora di parametrizzare  $\Gamma$  con il parametro  $s$ . Scriveremo pertanto  $P(s) := P(u(s))$  con  $s \in (s_a, s_b)$ . Per prima cosa notiamo che il vettore tangente alla curva associato al parametro  $s \in (s_a, s_b)$ :

$$\mathbf{t}(s) := \frac{dP}{ds} \quad (2.14)$$

ha norma unitaria. Infatti dalla (2.13), usando  $s$  come parametro, ed applicando il primo teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$1 = \frac{ds}{ds} = \left\| \frac{dP}{ds} \right\|.$$

Nel seguito, dato che non ci sarà ambiguità, indicheremo con  $\cdot$  il prodotto scalare nello spazio euclideo  $E_{\mathcal{J}}$ . Un secondo versore associato a  $\Gamma$  si può definire quando  $\mathbf{t}$  non è costante. Si tratta del **versore normale**:

$$\mathbf{n}(s) := \rho(s) \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \text{con } \rho(s) := \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|^{-1}. \quad (2.15)$$

$\rho(s)$  è detto **raggio di curvatura** nel punto  $P(s)$ . Se  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  sono entrambi definiti, allora  $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ :

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \rho \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\rho}{2} \frac{d\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}{ds} = \frac{\rho}{2} \frac{d}{ds} 1 = 0.$$

Se esistono  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ , un terzo versore normale ad entrambi, detto **binormale**, si definisce come:

$$\mathbf{b}(s) := \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s). \quad (2.16)$$

I versori  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ , quando esistono, formano una terna *ortonormale destrorsa* per costruzione. Tale terna è detta **terna intrinseca** (o **terna di Frenet**) di  $\Gamma$  nel punto  $P(s)$ .

### Osservazioni 2.7.

(1) L'ascissa curvilinea  $s$  è definita a meno della scelta dell'origine di  $\Gamma$  (il punto in cui vale  $s = 0$ ) per cui, se  $s$  è un'ascissa curvilinea, lo è anche  $s'(s) := s + c$ , dove  $c \in \mathbb{R}$  è una costante arbitrariamente fissata. I versori della terna intrinseca, essendo costruiti con derivate in  $s$ , non risentono dell'ambiguità nella definizione di  $s$ .

(2) Per una curva  $\Gamma$  regolare vale  $\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = 0$  per ogni  $s \in (s_1, s_2)$  se e solo se  $\Gamma$  è riparametrizzabile (usando un parametro  $u$  con  $u = u(s)$  di classe  $C^1$  con derivata ovunque non nulla) come un segmento di retta per  $s \in (s_1, s_2)$ . Infatti, se  $\Gamma$  è riparametrizzabile come un segmento di retta tra  $P(s_1)$  e  $P(s_2)$ , allora  $P(s(u)) = P(s_1) + u(P(s_2) - P(s_1))$  tra i suoi punti detti. Applicando la definizione di ascissa curvilinea, si ha subito che  $s(u) = u \|P(s_2) - P(s_1)\|$  e quindi, come ci si aspettava intuitivamente, deve essere

$$P(s) = P(s_1) + s \frac{P(s_2) - P(s_1)}{\|P(s_2) - P(s_1)\|}$$

da cui  $\mathbf{t} = \frac{P(s_2) - P(s_1)}{\|P(s_2) - P(s_1)\|}$  è costante e  $\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = 0$ . Se viceversa  $\left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = 0$ , vuol dire che  $\mathbf{t}$  è costante e di conseguenza, integrando l'equazione  $\frac{dP(s)}{ds} = \mathbf{t}$  in  $(s_1, s_2)$ , deve valere l'equazione del segmento di retta:

$$P(s) = P(s_1) + s\mathbf{t}.$$

Se un punto materiale (con linea di universo  $\gamma$ ) è vincolato a muoversi sulla curva regolare  $\Gamma$ , ferma nel riferimento  $\mathcal{S}$ , la posizione del punto al variare del tempo è completamente determinata dall'ascissa curvilinea  $s$  pensata come funzione del tempo  $s = s(t)$ . Pertanto si devono poter esprimere la velocità e l'accelerazione del punto rispetto a  $\mathcal{S}$  in termini di  $s$  e di altre caratteristiche geometriche della curva. Supporremo che  $\Gamma$  non sia parametrizzabile come un segmento di retta, in modo tale che esista, in ogni suo punto, la terna intrinseca. Se la curva ha equazione  $P = P(s)$ , la legge oraria del punto materiale sarà scrivibile come  $P(t) = P(s(t))$ . Applicando la definizione di velocità e di vettore tangente si ha immediatamente:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{t}(s(t)), \quad (2.17)$$

dove abbiamo ommesso la specificazione del riferimento  $|\mathcal{S}$  per semplicità. Derivando un'altra volta nel tempo si ha

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t}(s(t)) + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

da cui, usando la definizione di  $\mathbf{n}$ , si ha l'espressione dell'accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{t}(s(t)) + \frac{1}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n}(s(t)). \quad (2.18)$$

L'accelerazione appare decomposta in componente tangente e componente normale alla curva di vincolo, ciò sarà di centrale importanza sviluppando la dinamica del punto materiale vincolato.

### Esempi 2.1.

1. Si consideri la curva (elica),  $P = P(u)$ , in coordinate cartesiane ortonormali data dalle equazioni parametriche  $x(u) = \cos u$ ,  $y(u) = \sin u$ ,  $z = u$ , con  $u \in \mathbb{R}$ . Scriviamone la terna intrinseca rispetto alla base di versori  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . L'ascissa curvilinea si ottiene integrando

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{dP(u')}{du'} \right\| du' = \int_0^u \sqrt{(-\sin u')^2 + (\cos u')^2 + 1} du' = \int_0^u \sqrt{2} du'.$$

Quindi  $s(u) = \sqrt{2}u$  se scegliamo l'origine di  $s$  nel punto di coordinate  $(1, 0, 0)$ . In definitiva la curva ha equazioni parametriche:  $x(s) = \cos(s/\sqrt{2})$ ,  $y(s) = \sin(s/\sqrt{2})$ ,  $z = (s/\sqrt{2})$ . Il calcolo diretto produce, per la terna intrinseca:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sin(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_x + \cos(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n}(s) = - \left( \cos(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_x + \sin(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_y \right), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_x - \cos(s/\sqrt{2}) \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \right). \quad (2.21)$$



Dato che la base  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è ortonormale come  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , la trasformazione di sopra si inverte immediatamente scambiando la matrice della trasformazione con la sua trasposta:

$$\mathbf{e}_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s/\sqrt{2})\mathbf{t}(s) - \cos(s/\sqrt{2})\mathbf{n}(s) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s/\sqrt{2})\mathbf{b}(s), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(s/\sqrt{2})\mathbf{t}(s) - \sin(s/\sqrt{2})\mathbf{n}(s) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(s/\sqrt{2})\mathbf{b}(s), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{t}(s) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}(s). \quad (2.24)$$

### Esercizi 2.3.

1. Si consideri la curva  $\Gamma$ ,  $C^1$  e regolare in  $\mathbb{E}^3$ , parametrizzata tramite la sua ascissa curvilinea  $P = P(s)$ ,  $s \in (a, b)$ . Si dimostri che se  $\Gamma$  è contenuta in un piano  $\Pi$  e non è riparametrizzabile come un segmento di retta in ogni sottointervallo di  $(a, b)$ , allora il versore binormale  $\mathbf{b}$  è costante su  $\Gamma$  ed è perpendicolare a  $\Pi$ .

2. Si consideri la curva  $\Gamma$ ,  $C^1$  e regolare in  $\mathbb{E}^3$ , parametrizzata tramite la sua ascissa curvilinea  $P = P(s)$ ,  $s \in (a, b)$ . Dimostrare che se il vettore binormale  $\mathbf{b}$  esiste, è non nullo ed è costante su  $\Gamma$ , allora la curva è tutta contenuta in un piano normale a  $\mathbf{b}$ .

3. Dimostrare che valgono le *formule di Darboux*, per una curva  $C^1$  regolare parametrizzata tramite la sua ascissa curvilinea  $P = P(s)$ ,  $s \in (a, b)$  (nell'ipotesi che i vettori e gli scalari scritti esistano):

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -\frac{\mathbf{t}(s)}{\rho(s)} - \frac{\mathbf{b}(s)}{\tau(s)} = \Omega(s) \wedge \mathbf{n}(s), \quad (2.25)$$

$$\frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} = -\frac{\mathbf{n}(s)}{\tau(s)} = \Omega(s) \wedge \mathbf{b}(s), \quad (2.26)$$

$$\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} = -\frac{\mathbf{n}(s)}{\rho(s)} = \Omega(s) \wedge \mathbf{t}(s), \quad (2.27)$$

dove  $\tau$ , definito dalla (2.26), è detto *raggio di torsione* e

$$\Omega(s) := \rho(s)^{-1}\mathbf{b}(s) - \tau(s)^{-1}\mathbf{t}(s)$$

è il *vettore di Darboux* nel punto  $P(s)$ .

Passiamo a considerare un punto materiale vincolato ad una superficie ferma in un riferimento  $\mathcal{S}$ . In altre parole, in coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$  le equazioni che determinano  $S$  non contengono esplicitamente il tempo. Assumeremo che tale superficie  $S$  sia descritta, nello spazio euclideo  $\mathbb{E}^3 = E_{\mathcal{S}}$ , da equazioni parametriche  $P = P(u, v)$ , con  $(u, v) \in D$  insieme aperto (e connesso) di  $\mathbb{R}^2$ . Assumeremo che la superficie sia *regolare*, cioè la funzione  $P = P(u, v)$  sia di classe  $C^1$  almeno e valga:

$$\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \neq 0 \quad \text{per ogni } (u, v) \in D.$$

Nelle ipotesi fatte i tre vettori  $\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v}, \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}$  costituiscono, punto per punto, su  $S$ , una base vettoriale. Notare che il terzo vettore, per costruzione è sempre perpendicolare a  $S$ . Per studiare la cinematica e, più ancora, per studiare la dinamica di un punto materiale vincolato a  $S$ , è conveniente parametrizzare il moto del punto tramite le coordinate  $(u, v) = (u(t), v(t))$  e quindi esprimere la velocità e l'accelerazione usando la base vettoriale sopra introdotta oppure quella dei *versori* associati ai vettori della base. Si osservi che è possibile, entro certi limiti, modificare la scelta dei parametri  $u, v$  per descrivere  $S$  in modo da semplificare i calcoli. In particolare, quando è possibile, è molto conveniente scegliere i parametri  $u, v$  in modo tale che la base di versori detta sopra sia ortonormale.

### Esempi 2.2.

1. Si consideri la porzione di cono  $S$  di equazioni  $0 < \kappa z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $\kappa > 0$  fissato) riferita a coordinate ortonormali  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  in  $\mathbb{E}^3 = E_{\mathcal{J}}$ . Possiamo parametrizzare  $S$  tramite  $u = x$  e  $v = y$  e le equazioni parametriche risultano  $x = u, y = v, z = \kappa^{-1}\sqrt{u^2 + v^2}$  dove il dominio di tali coordinate è  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 + v^2\}$ . Si verifica immediatamente che la condizione di regolarità, in coordinate cartesiane

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0 \quad \text{per ogni } (u, v) \in D,$$

è soddisfatta. Definiamo la funzione  $\zeta := \sqrt{(x^2 + y^2) + z(x, y)^2} = \sqrt{(1 + \kappa^{-2})(x^2 + y^2)}$  di chiaro significato geometrico (distanza tra un punto di coordinate  $\mathbf{x} \in C$  ed il vertice  $O$  del cono) ed indichiamo con  $\phi$  l'ordinaria coordinata angolare polare piana nel piano  $x, y$ . Se riparametrizziamo la superficie con coordinate  $\zeta \in (0, +\infty)$  e  $\phi \in (-\pi, \pi)$  (le coordinate non sono globali perché la semiretta a  $\phi = \pm\pi$  non è coperta)  $S$ , la base vettoriale associata a tali coordinate può essere fissata come ortonormale.

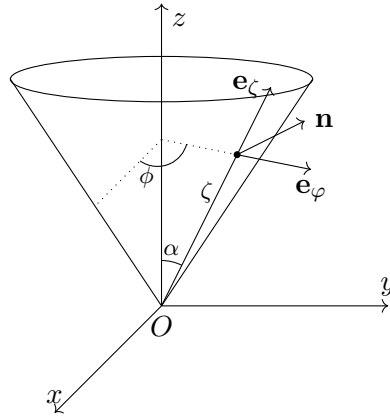


Figura 2.3: Illustrazione dell'esempio 2.2.1.

Un punto sul cono è descritto da

$$x = (\sin \alpha) \zeta \cos \phi, \quad y = (\sin \alpha) \zeta \sin \phi, \quad z = (\cos \alpha) \zeta,$$

dove  $\kappa = \tan \alpha$ . I versori  $\mathbf{e}_\zeta$  e  $\mathbf{e}_\phi$  tangenti alle curve coordinate  $\zeta$  e  $\phi$  (diretti nella direzione in cui crescono tali coordinate), ed il loro prodotto vettore  $\mathbf{n} := \mathbf{e}_\zeta \wedge \mathbf{e}_\phi$  normale a  $S$ , sono, rispetto alla base cartesiana:

$$\mathbf{e}_\zeta = \sin \alpha \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \alpha \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \alpha \mathbf{e}_z, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{n} = -\cos \alpha \cos \phi \mathbf{e}_x - \cos \alpha \sin \phi \mathbf{e}_y + \sin \alpha \mathbf{e}_z. \quad (2.30)$$

Queste relazioni si invertono (prendendo la trasposta della matrice di trasformazione) in

$$\mathbf{e}_x = \sin \alpha \cos \phi \mathbf{e}_\zeta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi - \cos \alpha \cos \phi \mathbf{n}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \alpha \sin \phi \mathbf{e}_\zeta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi - \cos \alpha \sin \phi \mathbf{n}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \alpha \mathbf{e}_\zeta + \sin \alpha \mathbf{n}. \quad (2.33)$$

Assumiamo ora che  $\zeta = \zeta(t)$ ,  $\phi = \phi(t)$  descrivano l'evoluzione del punto  $P(t)$  su  $S$ . La posizione di  $P(t)$  può essere individuata dal vettore posizione:  $P(t) - O = \zeta(t) \mathbf{e}_\zeta(t)$ . La derivata nel tempo definisce la velocità del punto nel riferimento  $\mathcal{S}$  in cui il cono  $S$  è immobile. Bisogna tenere conto del fatto che  $\mathbf{e}_\zeta$  varia nel tempo. Indicando con il punto la derivata temporale si ha:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \zeta(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t).$$

La derivata temporale dei versori si ottiene derivando il secondo membro di (2.28)-(2.30) (assumendo  $\zeta = \zeta(t)$ ,  $\phi = \phi(t)$ ) e quindi usando (2.31)-(2.33) nel risultato. Il calcolo fornisce:

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = \dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{e}_\phi, \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi} \sin \alpha \mathbf{e}_\zeta + \dot{\phi} \cos \alpha \mathbf{n}, \quad (2.35)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\phi} \cos \alpha \mathbf{e}_\phi, \quad (2.36)$$

da cui

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\phi}(t) \zeta(t) \sin \alpha \mathbf{e}_\phi(t). \quad (2.37)$$

Abbiamo espresso la velocità sulla base associata alla superficie su cui il punto è vincolato. Derivando (2.37) nel tempo

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\zeta}(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t) + \dot{\phi}(t) \dot{\zeta}(t) \sin \alpha \mathbf{e}_\phi(t) + \ddot{\phi}(t) \zeta(t) \sin \alpha \mathbf{e}_\phi(t) + \dot{\phi}(t) \zeta(t) \sin \alpha \dot{\mathbf{e}}_\phi(t),$$

e procedendo come sopra (usando le espressioni ottenute per le derivate dei versori), si ottiene infine l'espressione dell'accelerazione decomposta in parte normale e parte tangente alla superficie conica:

$$\mathbf{a}(t) = \left( \ddot{\zeta}(t) - \dot{\phi}(t)^2 \zeta(t) \sin^2 \alpha \right) \mathbf{e}_\zeta(t) + \left( \ddot{\phi}(t) \zeta(t) + 2 \dot{\phi}(t) \dot{\zeta}(t) \right) \sin \alpha \mathbf{e}_\phi(t) + \frac{\dot{\phi}(t)^2 \zeta(t) \sin 2\alpha}{2} \mathbf{n}(t). \quad (2.38)$$

**2.** Le formule degli esercizi 2.2.2 e 2.2.3 permettono di scrivere velocità ed accelerazione per un punto materiale vincolato a muoversi rispettivamente su una superficie sferica e su una superficie cilindrica. Descrivendo la prima in coordinate polari sferiche  $r, \phi, \theta$  ed individuando la superficie fissando  $r = R$ , le coordinate  $\phi$  e  $\theta$  risultano essere coordinate ammissibili sulla superficie con  $\mathbf{e}_\phi \perp \mathbf{e}_\theta$ . Il versore normale alla superficie  $\mathbf{n}$  risulta coincidere con  $\mathbf{e}_r$ . L'espressione per velocità ed accelerazione usando la base ortonormale di tali versori è quindi:

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{a} = (R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + (R\ddot{\phi} \sin \theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\phi - (R\dot{\theta}^2 + R\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{n}. \quad (2.40)$$

Nel caso della superficie cilindrica descritta da  $r = R$  in coordinate cilindriche  $r, \phi, z$ , le coordinate  $\phi, z$  sono coordinate ammissibili sulla superficie, vale  $\mathbf{e}_\phi \perp \mathbf{e}_z$  ed il versore normale è ancora  $\mathbf{e}_r$ . Infine:

$$\mathbf{v} = R\dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{a} = R\ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z - R\dot{\phi}^2 \mathbf{n}. \quad (2.42)$$

## 2.4 Cinematica relativa del punto materiale

In questa sezione ci occupiamo delle relazioni che intercorrono tra le varie descrizioni del moto di uno stesso punto materiale che vengono date in due (o più) differenti riferimenti. Queste relazioni sono il contenuto matematico della **cinematica relativa**.

Consideriamo un riferimento  $\mathcal{S}$ . Scegliamo un punto (come entità puramente geometrica)  $P \in E_{\mathcal{S}}$  ed un vettore  $\mathbf{v} \in V_{\mathcal{S}}$ . Questi due oggetti matematici vivono nello spazio di quiete del riferimento, tuttavia possono essere identificati *biunivocamente* con analoghi oggetti matematici,  $P(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  rispettivamente, in un fissato spazio assoluto  $\Sigma_t$  quando è fissato un tempo  $t$ . Semplicemente basta definire  $P(t) := (\Pi_{\mathcal{S}} \upharpoonright_{\Sigma_t})^{-1}(P)$  e  $\mathbf{v}(t) := d(\Pi_{\mathcal{S}} \upharpoonright_{\Sigma_t})^{-1}(\mathbf{v})$ . Viceversa oggetti matematici  $P(t)$  e  $\mathbf{v}(t)$  rispettivamente, in un fissato spazio assoluto possono essere pensati come nello spazio euclideo di quiete di un riferimento  $\mathcal{S}'$  invertendo le relazioni sopra scritte (ed usando  $\mathcal{S}'$  diverso da  $\mathcal{S}$  se necessario):  $P' := \Pi_{\mathcal{S}'} \upharpoonright_{\Sigma_t}(P(t))$  e  $\mathbf{v}' := d(\Pi_{\mathcal{S}'} \upharpoonright_{\Sigma_t})(\mathbf{v}(t))$ . Tutte queste identificazioni sono ottenute tramite isomorfismi (isometrie affini e isomorfismi di spazi vettoriali rispettivamente), per cui *la struttura delle operazioni ammissibili tra gli enti considerati è preservata dalle identificazioni*, per esempio, la differenza di due punti in  $\Sigma_t$  diventa la differenza tra i corrispondenti punti nello spazio  $E_{\mathcal{S}'}$ .

Se  $\gamma$  è una linea di universo di un punto materiale che, nel riferimento  $\mathcal{S}$ , all'istante  $t$ , ha velocità  $\mathbf{v}|_{\mathcal{S}}(t)$ , quest'ultima può essere pensata come nello spazio assoluto  $\Sigma_t$  piuttosto che nello spazio euclideo di quiete di  $\mathcal{S}$ . Oppure può essere pensata nello spazio euclideo di quiete di un *altro* riferimento  $\mathcal{S}'$ . In questo modo, possiamo confrontare le velocità possedute da *uno stesso* punto materiale, ma riferite a *due differenti* sistemi di riferimento. *Per questa ragione, se non ci saranno ambiguità, d'ora in poi indicheremo con lo stesso simbolo due punti appartenenti a spazi euclidei diversi (es.  $E_{\mathcal{S}}, \Sigma_t$ ), ma identificati tramite  $\Pi_{\mathcal{S}}$ . Useremo la stessa convenzione per i vettori dei corrispondenti spazi delle traslazioni. Similmente indicheremo i prodotti scalari*

con il semplice puntino  $\cdot$  (omettendo anche la dipendenza temporale), eccetto nelle situazioni in cui le differenti strutture metriche verranno confrontate.

### 2.4.1 Vettore $\mathbf{u}$ e formule di Poisson

Consideriamo una funzione  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{u}(t) \in V_t$  che associa ad ogni istante  $t$  un vettore nello spazio assoluto corrispondente  $\Sigma_t$  (quindi più precisamente nello spazio delle traslazioni  $V_t$ ). Diremo che tale funzione è *differenziabile*, se le componenti di  $t \mapsto d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})(\mathbf{u}(t))$  sono funzioni differenziabili del tempo rispetto ad una base ortonormale di  $V_{\mathcal{J}}$  arbitraria.

**Osservazioni 2.8.** Si prova immediatamente, identificando i vettori con punti degli spazi di quiete e quindi usando le trasformazioni (2.2) tra sistemi di coordinate cartesiani solidali con differenti sistemi di riferimento, che la differenziabilità di una curva  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{u}(t) \in V_t$  non dipende dal riferimento usato.

Assegnata una funzione  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{u}(t) \in V_t$  differenziabile, consideriamo due basi ortonormali  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V_{\mathcal{J}}$  e  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in V_{\mathcal{J}'}$  riferite agli spazi delle traslazioni di due *differenti* sistemi di riferimento  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  rispettivamente. Avremo che in ogni  $\Sigma_t$ :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 u^i(t) \mathbf{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \mathbf{e}'_j(t).$$

Similmente, nel riferimento  $\mathcal{J}$ , dove ogni  $\mathbf{e}_i$  è un vettore costante nel tempo:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 u^i(t) \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \mathbf{e}'_j(t).$$

In questa formula  $\mathbf{u}(t)$  è pensato quindi come un vettore di  $V_{\mathcal{J}}$ , per cui dovrebbe essere indicato con  $d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})(\mathbf{u}(t))$ , ma noi usiamo una notazione alleggerita per motivi euristici. Infine, nel riferimento  $\mathcal{J}'$ , dove ogni  $\mathbf{e}'_j$  è un vettore costante nel tempo:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 u^i(t) \mathbf{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \mathbf{e}'_j.$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}$  possiamo derivare rispetto al tempo  $\mathbf{u}(t)$  derivando semplicemente le componenti di  $\mathbf{u}(t)$  rispetto alla base di elementi  $\mathbf{e}_i$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t) := \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} u^i(t) \mathbf{e}_i.$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}'$  possiamo derivare rispetto al tempo  $\mathbf{u}(t)$ , semplicemente derivando le componenti di  $\mathbf{u}(t)$  rispetto alla base di elementi  $\mathbf{e}'_j$ :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}'} \mathbf{u}(t) := \sum_{j=1}^3 \frac{d}{dt} u'^j(t) \mathbf{e}'_j.$$

Possiamo quindi trasportare nello spaziotempo, più precisamente su ogni  $\Sigma_t$ , questi vettori ottenendo, rispettivamente

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t) := \sum_{i=1}^3 \frac{du^i(t)}{dt} \mathbf{e}_i(t) ,$$

e

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}'} \mathbf{u}(t) := \sum_{j=1}^3 \frac{du'^j(t)}{dt} \mathbf{e}'_j(t) .$$

Si osservi che ora i versori *dipendono* dal tempo, ma le derivate agiscono *solo* sulle componenti, *quando queste sono riferite alla base associata al riferimento rispetto al quale si calcola la derivata*. Enunciamo ora tutto in termini di una definizione formale.

**Definizione 2.7.** (**Derivata temporale rispetto ad un riferimento.**) Si consideri un curva  $(a, b) \ni t \mapsto \mathbf{u}(t) \in V_t$ .

(a) Diremo che tale curva è **differenziabile** se le componenti di  $(a, b) \ni t \mapsto d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})(\mathbf{u}(t)) \in V_{\mathcal{J}}$  rispetto ad una base ortonormale dello spazio di quiete con un riferimento  $\mathcal{J}$  sono funzioni differenziabili<sup>3</sup>.

(b) In tal caso, per ogni  $t \in (a, b)$ , la **derivata di  $\mathbf{u}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$**  è definita come il vettore di  $V_t$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t) := \sum_{i=1}^3 \frac{du^i(t)}{dt} \mathbf{e}_i(t) ,$$

dove  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  definiscono una base ortonormale di  $V_{\mathcal{J}}$  in cui  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u^i \mathbf{e}_i$  e usiamo la convenzione per cui  $\mathbf{e}_i(t) := d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})^{-1}(\mathbf{e}_i)$  per  $i = 1, 2, 3$ .  $\diamond$

### Osservazioni 2.9.

(1) Per costruzione, la derivata rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  non dipende dalla base scelta in  $V_{\mathcal{J}}$  e più in generale dal sistema di coordinate ortonormali solidale con il riferimento. La prova, riducendosi allo spazio di quiete di  $\mathcal{J}$  tramite  $d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})$ , è la stessa che abbiamo dato nella sezione 2.3.1. In tale sede abbiamo provato che la derivata di una curva e di una curva di vettori, in uno spazio euclideo, è indipendente dalla scelta del sistema di coordinate cartesiane, nel primo caso, e dalla scelta della base nel secondo.

L'indipendenza suddetta appare immediatamente evidente se si osserva che per costruzione vale l'identità:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} = d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})^{-1} \frac{d}{dt} d(\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t}) .$$

Da questa espressione risulta anche evidente che  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}}$  soddisfi le usuali proprietà dell'operatore di derivazione, come per esempio le solite proprietà di linearità quando applicata a combinazioni

---

<sup>3</sup>Come osservato prima se tale questa condizione è verificata per un riferimento  $\mathcal{J}$  lo sarà anche per tutti gli altri riferimenti  $\mathcal{J}'$ .

lineari (con coefficienti costanti) di funzioni a valori vettoriali, ma anche:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} f(t) \mathbf{u}(t) = \frac{df}{dt} \mathbf{u}(t) + f(t) \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t), \quad (2.43)$$

se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile e  $\mathbf{u}$  è come precisato sopra.

(2) Se  $\gamma$  è una linea di universo in  $\mathbb{V}^4$ , per la definizione 2.6, la velocità di  $\gamma$  rispetto a  $\mathcal{J}$  può essere calcolata derivando  $\Pi_{\mathcal{J}}(\gamma(t))$  rappresentato in coordinate cartesiane ortogonali di origine  $O_{\mathcal{J}}$  e assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  in  $E_{\mathcal{J}}$ . Equivalentemente, tale velocità si ottiene derivando la curva a valori vettoriali in  $V_t$ ,  $t \mapsto \Pi_{\mathcal{J}}(\gamma(t)) - O_{\mathcal{J}}$ . In questo approccio possiamo applicare la definizione della derivata rispetto ad un riferimento e vedere la velocità come un vettore in  $\Sigma_t$  dato da:

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} (\gamma(t) - O_{\mathcal{J}}(t)), \quad (2.44)$$

dove  $O_{\mathcal{J}}(t) = (\Pi_{\mathcal{J}} \upharpoonright_{\Sigma_t})^{-1}(O_{\mathcal{J}})$  e  $O_{\mathcal{J}} \in E_{\mathcal{J}}$ .

La questione che ora ci interessa studiare è la relazione che intercorre tra l'operatore di derivazione  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}}$  e l'operatore di derivazione  $\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}'}$ , se  $\mathcal{J}$  è differente da  $\mathcal{J}'$ . La questione è di grande interesse fisico perché permette di costruire la cinematica relativa: permette di scrivere le velocità e l'accelerazione di un punto materiale in un riferimento quando sono note in un altro riferimento ed il moto relativo tra i due riferimenti è assegnato. Vale il seguente famoso teorema dovuto a Poisson.

**Teorema 2.2.** (Formule di Poisson) *Siano  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  due riferimenti e  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \in V_{\mathcal{J}'}$  una base ortonormale destrorsa nello spazio delle traslazioni di  $\mathcal{J}'$ . Posto:*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}'_j(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t), \quad (2.45)$$

vale:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge. \quad (2.46)$$

**Dimostrazione.** Rappresentiamo tutti vettori che consideriamo nello spazio  $V_{\mathcal{J}}$ . In tale spazio i vettori  $\mathbf{e}_i$  non dipendono dal tempo, mentre lo dipendono i vettori  $\mathbf{e}'_j$ . Consideriamo allora che, per una generica curva differenziabile  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ , se teniamo conto della (2.43) abbiamo che:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \left( \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \mathbf{e}'_j(t) \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{du'^j}{dt} \mathbf{e}'_j(t) + \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t).$$

In altre parole,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}'} \mathbf{u}(t) + \sum_{j=1}^3 u'^j(t) \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) .$$

Per terminare la dimostrazione, tenendo conto della linearità nell'argomento di destra del prodotto vettoriale, è sufficiente provare che

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t) \wedge \mathbf{e}'_j(t) ,$$

cioè, per come abbiamo definito  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}$ ,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) = \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \wedge \mathbf{e}'_j(t) . \quad (2.47)$$

Dimostriamo la (2.47) concludendo la dimostrazione. Usando la nota relazione generale:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

e il fatto che  $\mathbf{e}'_r(t) \cdot \mathbf{e}'_s(t) = \delta_{rs}$ , il secondo membro di questa presunta identità è scrivibile come

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \wedge \mathbf{e}'_j(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ \delta_{kj} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) - \left( \left( \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \cdot \mathbf{e}'_j(t) \right) \mathbf{e}'_k(t) \right] .$$

Si osservi ora che nel secondo membro:

$$\sum_{k=1}^3 \delta_{kj} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) ,$$

per cui:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \wedge \mathbf{e}'_j(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \left( \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \cdot \mathbf{e}'_j(t) \right) \mathbf{e}'_k(t) .$$

Ulteriormente:

$$\left( \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \cdot \mathbf{e}'_j(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}'_k(t) \cdot \mathbf{e}'_j(t)) - \mathbf{e}'_k(t) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) = 0 - \mathbf{e}'_k(t) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) ,$$

da cui

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \wedge \mathbf{e}'_j(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{e}'_k(t) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) \right) \mathbf{e}'_k(t) .$$



Se, nell'ultima somma usiamo la formula:

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{f}_k \cdot \mathbf{s}) \mathbf{f}_k ,$$

per la decomposizione di generico vettore  $\mathbf{s}$  su una base ortonormale  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$  di uno spazio vettoriale reale  $n$ -dimensionale dotato di prodotto scalare indicato con  $\cdot$ , l'identità trovata si può infine scrivere come:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) \right) \wedge \mathbf{e}'_j(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_j(t) ,$$

che è proprio (2.47). La dimostrazione è conclusa.  $\square$

### Osservazioni 2.10.

(1) La definizione di  $\omega_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}$  non dipende in realtà dalle basi scelte negli spazi di quiete dei due riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$ , ma solo dai due riferimenti. Infatti la base scelta in  $\mathcal{J}$  non gioca alcun ruolo nella (2.45) (si tenga conto anche di (1) nelle osservazioni 2.9). Per quanto riguarda la base degli  $\mathbf{e}'_j$  scelta nello spazio delle traslazioni  $V_{\mathcal{J}'}$  dello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  di  $\mathcal{J}$ , si osservi che vale quanto segue. Se  $\mathbf{f}'_j = \sum_k R^k_j \mathbf{e}'_k$ , con  $j = 1, 2, 3$  definisce un'altra base ortonormale nello stesso spazio, allora la (2.45) riproduce comunque lo stesso vettore  $\omega_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}$  valendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \mathbf{f}'_j(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{f}'_j(t) &= \sum_{i,j,k=1}^3 R^k_j R^i_j \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_i(t) = \sum_{i,k=1}^3 \delta_{ki} \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_i(t) \\ &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}'_k(t) \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{e}'_k(t) , \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto delle relazioni di ortonormalità  $\sum_{j=1}^3 R^k_j R^i_j = \delta_{ki}$  e dell'indipendenza dal tempo dei coefficienti  $R^p_q$ .

(2) Come al solito, i vettori  $\omega_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t)$  si possono vedere come appartenenti allo spazio delle traslazioni del riferimento  $\mathcal{J}$ , oppure  $\mathcal{J}'$ , oppure di un qualsiasi altro riferimento  $\mathcal{J}''$ , oppure – infine – dello spazio delle traslazioni di  $\Sigma_t$ . Questa possibilità deve essere tenuta in considerazione in tutto ciò che segue.

Vale la seguente proposizione che stabilisce, in particolare, la *legge di composizione* dei vettori  $\omega$ .

**Proposizione 2.3. (Legge di composizione dei vettori  $\omega$ )** *Siano  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{J}'$  e  $\mathcal{J}''$  tre sistemi di riferimento nello spaziotempo  $\mathbb{V}^4$ . Ad ogni fissato tempo  $t \in \mathbb{R}$  valgono i seguenti fatti.*

(a) **Legge di composizione:**

$$\omega_{\mathcal{J}''|\mathcal{J}}(t) = \omega_{\mathcal{J}''|\mathcal{J}'}(t) + \omega_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t) . \quad (2.48)$$

(b) Legge di inversione:

$$\omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) = -\omega_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}'}(t) . \quad (2.49)$$

(c) Assolutezza della derivata di  $\omega$ :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}'} \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) . \quad (2.50)$$

◇

**Dimostrazione.** (a) Valgono contemporaneamente le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}'} + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge , \\ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}'} &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}''} + \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t) \wedge , \\ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}''} + \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Inserendo la seconda nella prima si trova anche:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}} = \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{J}''} + (\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t)) \wedge ,$$

che, per confronto con (2.51), fornisce, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ :

$$(\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) - \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t)) \wedge = 0 .$$

Lo zero a secondo membro deve essere interpretato come *l'operatore nullo*. In altre parole, la formula di sopra si interpreta come segue. Per ogni curva differenziabile  $(a, b) \ni t \mapsto \mathbf{v}(t) \in V_t$ , per ogni  $t \in (a, b)$  vale:

$$(\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) - \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t)) \wedge \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} . \quad (2.52)$$

Se  $t_0 \in (a, b)$ , sia  $\mathbf{u}_0 := (\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t_0) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t_0) - \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t_0))$ . Possiamo facilmente costruire una curva differenziabile  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{v}(t) \in V_t$  (basta lavorare in coordinate cartesiane ortonormali solidali con qualche riferimento) tale che, esattamente per  $t = t_0$ , valga  $\|\mathbf{v}(t_0)\| = c > 0$  e  $\mathbf{v}(t_0) \perp \mathbf{u}_0$ . La (2.52) implica per  $t = t_0$  che

$$c \|\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t_0) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t_0) - \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t_0)\| = 0 .$$

Dato che  $c > 0$  dobbiamo concludere che

$$\omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}'}(t_0) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t_0) - \omega_{\mathcal{J}''}|_{\mathcal{J}}(t_0) = \mathbf{0} .$$

Dato che ciò vale per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$ , concludiamo che (a) è vera.

(b) Segue subito da (a) scegliendo  $\mathcal{J}'' = \mathcal{J}$ , essendo, come si prova immediatamente dalla

definizione (2.45):  $\omega_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{0}$ .

(c) Da (2.46) si ricava:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}'} \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) + \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}'} \omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) .$$

□

### Esempi 2.3.

1. Consideriamo due sistemi di riferimento  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  con coordinate cartesiane ortonormali solidali rispettivamente  $t, x, y, z$ , con origine  $O \in E_{\mathcal{J}}$  e assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V_{\mathcal{J}}$ , e  $t', x', y', z'$  con origine  $O' \in E_{\mathcal{J}'}$  e assi  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in V_{\mathcal{J}'}$ . Supponiamo che la relazione tra questi due sistemi di coordinate sia:

$$x = x' \cos \phi(t) - y' \sin \phi(t) + X(t) , \quad (2.53)$$

$$y = x' \sin \phi(t) + y' \cos \phi(t) + Y(t) , \quad (2.54)$$

$$z = z' + Z(t) , \quad (2.55)$$

dove  $\phi = \phi(t)$ ,  $X = X(t)$ ,  $Y = Y(t)$  e  $Z = Z(t)$  sono funzioni differenziabili assegnate. Tenendo conto che le differenze di coordinate di un punto individuano coordinate di vettori a causa della struttura affine degli spazi di quiete, abbiamo immediatamente che la legge di trasformazione per le componenti di un vettore  $u = \sum_i u^i \mathbf{e}_i = \sum_j u'^j \mathbf{e}'_j \in V_t$

$$u^1 = u'^1 \cos \phi(t) - u'^2 \sin \phi(t) , \quad (2.56)$$

$$u^2 = u'^1 \sin \phi(t) + u'^2 \cos \phi(t) , \quad (2.57)$$

$$u^3 = u'^3 , \quad (2.58)$$

Possiamo infine ricavare la legge di trasformazione dei versori, notando che  $\mathbf{e}'_k = \sum_j \delta_k^j \mathbf{e}'_j$ , da cui

$$\mathbf{e}'_1 = \cos \phi(t) \mathbf{e}_1 + \sin \phi(t) \mathbf{e}_2 , \quad (2.59)$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\sin \phi(t) \mathbf{e}_1 + \cos \phi(t) \mathbf{e}_2 , \quad (2.60)$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 . \quad (2.61)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare  $\omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}$  direttamente dalla (2.45) ottenendo:

$$\omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \mathbf{e}_3 . \quad (2.62)$$

Se ammettiamo che entrambe le terne di assi siano destrorse, notiamo che quando  $\phi(t) = \nu t$  con  $\nu > 0$  il moto della terna primata rispetto a quella non primata è una rotazione uniforme in senso antiorario (se guardata dall'alto) e  $\omega = \nu \mathbf{e}_3$ , che è diretto verso l'alto, coincide con il vettore velocità angolare delle trattazioni elementari.

**2.** Consideriamo il caso di una trasformazione di coordinate generica tra sistemi di coordinate cartesiane ortogonali solidali con  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  rispettivamente. Sappiamo dall'esercizio 2.1.2 che tale legge di trasformazione è:

$$\begin{cases} t = t' + c, \\ x^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j(t) x'^j + c^i(t), \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (2.63)$$

dove  $c \in \mathbb{R}$  è una costante, le funzioni  $\mathbb{R} \ni t \mapsto c^i(t)$  e  $\mathbb{R} \ni t \mapsto R^i_j(t)$  sono  $C^\infty$  e, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice di coefficienti  $R^i_j(t)$  è una matrice ortogonale reale  $3 \times 3$ .

La corrispondente legge di trasformazione per i versori è, con ovvie notazioni,

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^3 R^i_j(t) \mathbf{e}_i.$$

Il calcolo di  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$  con la (2.45) fornisce:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^3 R^i_j(t) \frac{dR^k_j(t)}{dt} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k.$$

Assumendo la base ortonormale  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  di tipo destrorso vale:

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k = \sum_{h=1}^3 \epsilon_{ikh} \mathbf{e}_h, \quad (2.64)$$

dove abbiamo introdotto il **simbolo di Ricci**  $\epsilon_{ijk}$  che vale: 1 se  $ijk$  è una permutazione ciclica di 123, oppure  $-1$  se  $ijk$  è una permutazione non ciclica di 123, 0 altrimenti. In definitiva, se valgono le leggi di trasformazione (2.63), il vettore  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t)$  è scrivibile come:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,h,k=1}^3 \epsilon_{ikh} R^i_j(t) \frac{dR^k_j(t)}{dt} \mathbf{e}_h. \quad (2.65)$$

**3.** Un disco rigido è vincolato a stare in un piano verticale  $\Pi$ . In  $\Pi$  il disco ruota attorno al proprio asse di moto uniforme con velocità angolare  $d\theta/dt = \nu$  costante, con  $\theta$  angolo delle coordinate polari piane in  $\Pi$  di origine  $O$  data dal centro del disco. Il piano  $\Pi$  ruota, rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ , attorno alla retta verticale  $z \in \Pi$ , che non interseca il disco, con la legge  $\phi(t) = \sin(\lambda t)$ , dove  $\phi$  è il solito angolo polare nel piano normale a  $z$ . Si considera un riferimento  $\mathcal{S}'$  solidale con il disco (cioè nel quale il disco è sempre in quiete) e si vuole conoscere  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ .

Il problema si risolve componendo i vettori  $\boldsymbol{\omega}$ . In un riferimento  $\mathcal{S}''$  solidale con il piano  $\Pi$ , il riferimento  $\mathcal{S}'$ , solidale con il disco, ha un vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , per l'esempio (1) dato da:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}''} = \nu \mathbf{n}_\Pi$ , dove  $\mathbf{n}_\Pi$  è il versore normale al piano e *disposto in modo tale che la rotazione del disco avvenga in senso antiorario guardando il disco dalla punta di  $\mathbf{n}_\Pi$* . Al solito questa orientazione dell'asse

di rotazione si dice *positivo* rispetto al verso in cui l'angolo di rotazione cresce. Il riferimento  $\mathcal{J}''$  è in rotazione attorno all'asse  $z$  nel giudizio di  $\mathcal{J}$ . Usando nuovamente l'esempio (1), abbiamo che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}''}|\mathcal{J} = \frac{d\phi}{dt}\mathbf{e}_z = \lambda \cos(\lambda t)\mathbf{e}_z$ , dove  $\mathbf{e}_z$  è il versore parallelo a  $z$  ed orientato positivamente rispetto all'angolo  $\phi$ . Usando la legge di composizione dei vettori  $\boldsymbol{\omega}$  si ha infine:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|\mathcal{J}(t) = \lambda \cos(\lambda t)\mathbf{e}_z + \nu \mathbf{n}_{\Pi}(t) .$$

Volendo si può esplicitare la dipendenza temporale di  $\mathbf{n}_{\Pi}$ , tenendo conto che esso ruota solidalmente al piano  $\Pi$ . Per fare ciò si considerino altri due versori mutuamente ortogonali  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , tali che formino con  $\mathbf{e}_z$  (nell'ordine detto), una terna ortonormale destrorsa solidale con  $\mathcal{J}$ . In questo caso, con le ipotesi fatte:  $\mathbf{n}_{\Pi}(t) = \cos(\phi(t) + \alpha)\mathbf{e}_x + \sin(\phi(t) + \alpha)\mathbf{e}_y$  per qualche costante  $\alpha$ . In definitiva:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|\mathcal{J}(t) = \nu \cos(\sin(\lambda t) + \alpha)\mathbf{e}_x + \nu \sin(\sin(\lambda t) + \alpha)\mathbf{e}_y + \lambda \cos(\lambda t)\mathbf{e}_z .$$

#### Esercizi 2.4.

1. Si considerino due sistemi di coordinate ortonormali destrorse solidali rispettivamente con i riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\hat{\mathcal{J}}$  e con assi, rispettivamente,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  e  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ed origini, rispettivamente,  $O$  e  $\hat{O}$ . Si supponga che  $O = \hat{O}$  (in ogni  $\Sigma_t$ ) ad ogni istante. Introduciamo i cosiddetti **angoli di Eulero**:  $\psi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  che individuano la terna di  $\mathcal{J}$  partendo da quella di  $\hat{\mathcal{J}}$  con la seguente procedura.

(i) Si ruota la terna associata ad  $\hat{\mathcal{J}}$  attorno ad  $\hat{\mathbf{e}}_3$ , di un angolo  $\psi$ , in senso positivo rispetto a  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Alla fine della rotazione l'asse  $\hat{\mathbf{e}}_1$  si è spostato sulla cosiddetta **retta dei nodi**, individuata dal versore  $\mathbf{N}$  normale a  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ed  $\mathbf{e}_3$ .

(ii) La terna ottenuta in (i) viene ora ruotata attorno alla retta dei nodi in senso positivo di un angolo  $\theta$ . In questo modo l'asse  $\hat{\mathbf{e}}_3$  si sposta su un nuovo asse, che indichiamo con  $\mathbf{e}_3$ .

(iii) La terna ottenuta in (ii) viene ruotata di un angolo  $\phi$  in senso positivo attorno a  $\mathbf{e}_3$ . In questo modo  $\mathbf{N}$  si sposta sul nuovo asse, che indichiamo con  $\mathbf{e}_1$ .

La terna finale ottenuta con questa procedura è quella associata a  $\mathcal{J}$ :  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ .  $\mathbf{e}_3$  e  $\mathbf{e}_1$  sono gli assi ottenuti sopra, in (ii) e (iii) rispettivamente, e  $\mathbf{e}_2$  è l'asse raggiunto dall'asse  $\hat{\mathbf{e}}_2$  della terna iniziale alla fine delle tre rotazioni. Per costruzione  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ .

Si esprima terna associata ad  $\mathcal{J}$  in funzione di quella associata a  $\hat{\mathcal{J}}$  usando gli angoli di Eulero. Provare cioè che vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= -(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= \sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3 . \end{aligned}$$

2. In riferimento all'esercizio precedente, provare che:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_3 , \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) \mathbf{e}_1 + (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi) \mathbf{e}_2 - \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_3 , \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 . \end{aligned}$$

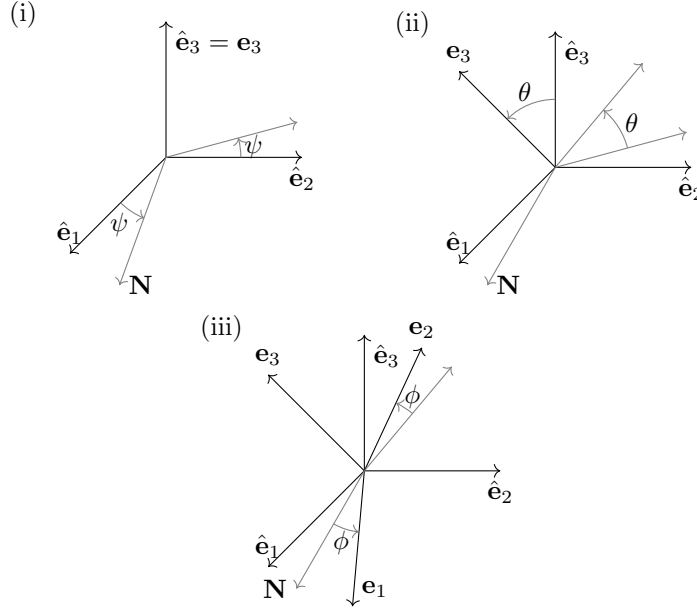


Figura 2.4: Step (i),(ii) e (iii) della procedura specificata nell'esercizio 2.4.1.

**3.** In riferimento ai due esercizi precedenti, ammettiamo che la terna  $\mathcal{S}$  abbia un moto determinato, rispetto alla terna solidale con  $\hat{\mathcal{S}}$ , da funzioni note  $\phi = \phi(t), \psi = \psi(t), \theta = \theta(t)$ . Si esprima  $\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{S}}|\mathcal{S}}$  in funzione delle derivate temporali degli angoli di Eulero e degli angoli di Eulero stessi nella base solidale con  $\mathcal{S}$ . Verificare che, indicando con il punto le derivate temporali degli angoli di Eulero:

$$\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{S}}|\mathcal{S}} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \mathbf{e}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \mathbf{e}_3.$$

**\*4.** Consideriamo  $R \in SO(3)$  come operatore che agisce sui vettori di  $\mathbb{E}^3$ . Per ogni  $R$  detto esiste sempre un versore  $\mathbf{u}$  tale che  $R(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , tale versore è chiamato **asse di rotazione di  $R$** . (In riferimento a coordinate cartesiane ortonormali  $R$  è individuato da una matrice a coefficienti reali. Si può sempre pensare tale matrice come caso particolare di una matrice complessa unitaria a coefficienti reali. Dal teorema spettrale è noto che ogni matrice unitaria è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono della forma  $e^{ic}$  per qualche  $c \in \mathbb{R}$ . Dato che il polinomio caratteristico della matrice considerata è reale, gli autovalori devono essere:  $\lambda_1 = e^{ib} \in \mathbb{R}$ , cioè  $\lambda_1 = \pm 1$ , unitamente a due autovalori complessi coniugati:  $\lambda_2 = e^{ia}$  e  $\lambda_3 = e^{-ia}$ . Dato che il determinante della matrice è pari al prodotto  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  e sappiamo che, per  $R \in SO(3)$ , tale determinante vale 1, facendo tutti i casi possibili concludiamo facilmente che  $\lambda_1 = 1$ .)

Si dimostri che se la relazione tra i versori di due riferimenti è, all'istante  $t$ ,  $\mathbf{e}'_k(t) = R_t(\mathbf{e}_k)$  per  $k = 1, 2, 3$ , allora vale la relazione notevole:

$$R_t(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t)) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t).$$

In altre parole, il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  è un **asse istantaneo di rotazione**.

### 2.4.2 Velocità ed accelerazione al variare del riferimento

Useremo ora le formule di Poisson, ed il vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , per scrivere le formule che connettono le velocità e le accelerazioni di un punto materiale calcolate rispetto a due differenti riferimenti. Consideriamo due riferimenti  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  con sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali rispettivamente con origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , e con origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ . Sia poi una linea di universo  $\gamma$  descrivente il moto di un punto materiale nello spaziotempo. Nel seguito, come consuetudine,  $P(t) := \gamma(t)$ . Vale allora banalmente:

$$P - O = P - O' + O' - O. \quad (2.66)$$

Usando l'identità di Poisson

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge,$$

tenendo conto dell'espressione (2.44) per la velocità di  $P$  rispetto a  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$ , derivando (2.66) nel tempo, giungiamo alla relazione (omettiamo di scrivere esplicitamente il tempo  $t$  per non appesantire la notazione):

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O') + \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} (O' - O),$$

ossia

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O') + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}. \quad (2.67)$$

Convienne riscrivere l'equazione di sopra come:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{v}_P^{(tr)}, \\ \mathbf{v}_P^{(tr)} := \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O'), \end{cases} \quad (2.68)$$

dove  $\mathbf{v}_P^{(tr)}$  è la **velocità di trascinamento** di  $\mathcal{J}'$  rispetto a  $\mathcal{J}$  in  $P$ . Si tratta della velocità che  $\mathcal{J}$  assegna al punto  $P$  quando è pensato fermo in  $\mathcal{J}'$ . Derivando ancora (2.67) rispetto a  $\mathcal{J}$ :

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O')) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}.$$

Applicando (2.46) al primo ed al secondo addendo a secondo membro,  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}}$  uguaglia:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O') + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O')) + \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}},$$

dove  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} := d\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}/dt = d\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}/dt$ . Raccogliendo i vari termini:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{a}_P^{(tr)} + \mathbf{a}_P^{(C)}, \\ \mathbf{a}_P^{(tr)} := \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O'), \\ \mathbf{a}_P^{(C)} := 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}, \end{cases} \quad (2.69)$$

dove  $\mathbf{a}_P^{(tr)}$  è l'**accelerazione di trascinamento** di  $\mathcal{S}'$  rispetto a  $\mathcal{S}$  in  $P$ . Si tratta della accelerazione che  $\mathcal{S}$  assegna al punto  $P$  quando quest'ultimo è pensato come in quiete (con accelerazione nulla) con  $\mathcal{S}'$ .  $\mathbf{a}_P^{(C)}$  è infine la ben nota **accelerazione di Coriolis**.

### Osservazioni 2.11.

(1) Precisiamo che si può provare che  $\mathbf{v}_P^{(tr)}$ ,  $\mathbf{a}_P^{(tr)}$  e  $\mathbf{a}_P^{(C)}$  non dipendono dalla scelta di  $O'$ . Riguardo ad  $\mathbf{a}_P^{(C)}$  non c'è, in realtà, nulla da provare! Dimostriamo l'indipendenza dalla scelta di  $O'$  per la velocità di trascinamento. Se  $O'_1 \neq O'$  è in quiete con  $\mathcal{S}'$ , da (2.67), ponendo  $P = O'_1$  segue che vale l'identità:  $\mathbf{v}_{O'_1}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (O'_1 - O') + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}}$ , cioè:

$$\mathbf{v}_{O'_1}|_{\mathcal{S}} - \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (O'_1 - O') = \mathbf{0}$$

Usando la seconda delle (2.68), valutando la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_P^{(tr1)}$  dello stesso  $P$ , ma riferendosi a  $O'_1$  invece che ad  $O'$ , si ricava subito che:

$$\mathbf{v}_P^{(tr1)} - \mathbf{v}_P^{(tr)} = \mathbf{v}_{O'_1}|_{\mathcal{S}} - \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (O'_1 - O') = \mathbf{0},$$

per cui  $\mathbf{v}_P^{(tr1)} = \mathbf{v}_P^{(tr)}$ .

Molto più rapidamente si può notare che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}$  non dipendono dalla scelta di  $O'$  (e  $\mathbf{O}$ ) pertanto  $\mathbf{v}_P^{(tr)}$  in (2.68) deve esserne indipendente. Per l'accelerazione di trascinamento si può procedere analogamente.

(2) Si osservi che, con ovvie notazioni, dalle identità:  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} + \mathbf{v}_{P,\mathcal{S}'}^{(tr)}|_{\mathcal{S}}$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \mathbf{v}_{P,\mathcal{S}}^{(tr)}|_{\mathcal{S}'}$  si ricava che deve essere:  $\mathbf{v}_{P,\mathcal{S}'}^{(tr)}|_{\mathcal{S}} = -\mathbf{v}_{P,\mathcal{S}}^{(tr)}|_{\mathcal{S}'}$ .

(3) Se, in uno spazio euclideo tridimensionale, un punto  $Q$  viene ruotato di un angolo  $\Delta\theta$  attorno all'asse passante per  $O$  e diretto lungo il versore  $\mathbf{n}$  (assumendo la rotazione positiva rispetto a tale asse),  $Q'$  è il punto raggiunto, vale la relazione

$$Q' = Q + \Delta\theta \mathbf{n} \wedge (Q - O) + \Delta\theta \mathbf{O}(\Delta\theta),$$

dove  $\mathbf{O}(\Delta\theta) \rightarrow \mathbf{0}$  per  $\Delta\theta \rightarrow 0$ . Lasciamo la prova di ciò al lettore (basta rappresentare la rotazione in coordinate cartesiane ortonormali di origine  $\mathbf{O}$  e con asse  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  ed infine sviluppare con Taylor le funzioni trigonometriche che appaiono nella matrice di rotazione).

Se  $P$  è un punto materiale in quiete in  $\mathcal{S}'$  (con origine  $O'$ ) la cui curva di universo è differenziabile, vale, usando lo sviluppo di Taylor nel tempo in (2.67), la relazione che esprime la posizione di  $P$  nello spazio di quiete di  $\mathcal{S}$  al tempo  $t + \Delta t$  in funzione di quella al tempo  $t$ :

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}}(t)\Delta t + \Delta t \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}(t) \wedge (P(t) - O'(t)) + \Delta t \mathbf{O}(\Delta t) \quad (2.70)$$

dove  $\mathbf{O}(\Delta t)$  è una funzione infinitesima per  $\Delta t \rightarrow 0$ . La (2.70) mostra che, *al primo ordine in  $\Delta t$* , il moto di  $P$  in  $\mathcal{S}$  è un moto dato da una traslazione con velocità  $\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}}(t)$ , unitamente ad una rotazione destrorsa attorno ad  $O'(t)$  rispetto all'asse  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}(t)$ , di un angolo  $|\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}(t)|\Delta t$ . In questo modo si può pensare  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}$  come un *asse istantaneo di rotazione* (esiste una seconda



interpretazione più matematica dovuta all'esercizio 2.4.4).

### Esercizi 2.5.

1. Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse solidali con  $\mathcal{S}$ ,  $x, y, z$  centrate in  $O$  e due dischi materiali rigidi  $D$  e  $D'$  vincolati a rimanere nel piano  $z = 0$  dello spazio di quiete di  $\mathcal{S}$ . I dischi hanno rispettivamente raggi  $R > 0$  e  $r > 0$  e centri  $O$  e  $O'$  disposto lungo l'asse  $x$ . I due dischi sono sempre tangenti, essendo  $\|O - O'\| = r + R$ . Le posizioni angolari dei due dischi sono individuate dai due angoli  $\Theta$  e  $\theta$  che  $S - O$  e  $S' - O'$  formano rispettivamente con l'asse  $x$ , dove  $S \in D$  e  $S' \in D'$  sono punti materiali dei dischi fissati una volta per tutte, e gli angoli detti sono orientati positivamente rispetto all'asse  $\mathbf{e}_z$ . Determinare la relazione tra l'angolo  $\theta$  e l'angolo  $\Theta$  nell'ipotesi che i due dischi *rotolino senza strisciare* nel loro punto geometrico di contatto  $Q$ . Per definizione, questo significa che i punti materiali  $P \in D$  e  $P' \in D'$  che corrispondono ad ogni istante, al punto di contatto  $Q$ , hanno sempre la stessa velocità in  $\mathcal{S}$  (e quindi in ogni sistema di riferimento!).

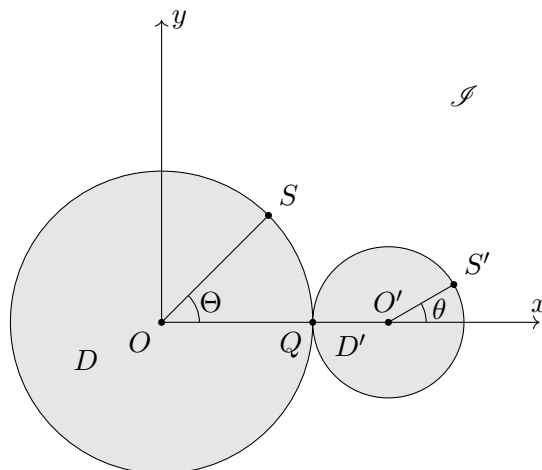


Figura 2.5: Illustrazione dell'esercizio 2.5.1.

2. Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse solidali con  $\mathcal{S}$ ,  $x, y, z$  centrate in  $O$  e due dischi materiali rigidi  $D$  e  $D'$  vincolati a rimanere nel piano  $z = 0$  dello spazio di quiete di  $\mathcal{S}$ . I dischi hanno rispettivamente raggi  $R > 0$  e  $r > 0$  e centri  $O$  e  $O'$ . Il secondo punto,  $O'$  si muove su una guida circolare di centro  $O$  e raggio  $R + r$ , in modo che i due dischi siano sempre tangenti. Individuiamo la posizione del primo disco con l'angolo polare  $\Theta$  di un punto fissato del disco, misurato rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . La posizione del secondo disco attorno a  $O'$  è similmente individuata dall'angolo polare  $\theta$  di un punto fissato di  $D'$ , misurato rispetto ad assi  $x'$  e  $y'$ , paralleli a  $x$  e  $y$  ed uscenti da  $O'$ . La posizione di  $O'$  è, infine, determinata dall'angolo polare  $\phi$  che  $O' - O$  individua rispetto all'asse  $x$  e con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . Determinare la relazione tra gli angoli  $\theta$ ,  $\Theta$

e  $\phi$ , nell'ipotesi che i due dischi *rotolino senza strisciare* nel loro punto geometrico di contatto  $Q$ . Per definizione, questo significa che i punti materiali  $P \in D$  e  $P' \in D'$  che corrispondono ad ogni istante, al punto di contatto  $Q$ , hanno sempre la stessa velocità in  $\mathcal{S}$  (e quindi in ogni sistema di riferimento!).

## Capitolo 3

# Dinamica del punto e dei sistemi di punti materiali

La meccanica classica si spinge oltre alla cinematica occupandosi di **dinamica**, ossia del problema della determinazione del moto di un corpo quando sono assegnate le “condizioni iniziali” (lo stato di moto del sistema ad un tempo fissato) e le “interazioni” con altri corpi, intese come le cause del moto stesso. Le interazioni vengono descritte, in fisica classica, dal concetto di *forza* che sarà introdotto tra breve. Dal punto di vista matematico, le forze sono delle funzioni del moto del sistema. La determinazione del moto è ricondotta in ultimi termini alla soluzione di un *sistema di equazioni differenziali* costruito con le funzioni descriventi le forze e con particolari costanti fisiche associate ai punti materiali del sistema fisico, dette *masse* dei punti stessi.

### 3.1 Primo principio della dinamica

Per poter introdurre la dinamica è necessario selezionare una classe privilegiata di sistemi di riferimento detti *inerziali*. Vediamo prima di tutto come tale classe viene determinata dal punto di vista fisico. L'idea di fondo è di studiare il moto dei corpi quando sono posti a distanza molto grande dagli altri corpi dell'universo. Ricordiamo che la nostra idealizzazione di corpo è quella del *punto materiale*, cioè un corpo fisico la cui struttura interna non sia rilevante e la cui evoluzione spaziotemporale sia descrivibile da una linea di universo.

#### 3.1.1 Sistemi di riferimento inerziali

Avendo a disposizione un unico punto materiale nell'universo e non avendo selezionato alcun riferimento privilegiato, non hanno alcun senso fisico proposizioni riguardanti lo stato di moto del punto: lo stato di moto del punto dipende dalla scelta del riferimento, ed il moto può essere fissato arbitrariamente scegliendo opportunamente il riferimento. Se consideriamo invece un insieme di più di un punto materiale, in generale non è possibile trovare un riferimento in cui poter assegnare, rispetto ad esso, uno stato di moto scelto a piacimento a *ciascuno* dei punti

materiali *contemporaneamente*.

Il **Principio d'inerzia** o **Primo principio della dinamica** dichiara quale sia lo stato di moto di un numero arbitrario di corpi quando si trovano a distanze grandissime, reciprocamente e da tutti gli altri corpi dell'universo. Punti materiali che soddisfano tale requisito di "lontananza" (in una porzione della loro linea di universo) sono detti **isolati** (in tale porzione di linea di universo). Proprio perché non è in generale possibile fissare lo stato di moto di tanti punti materiali contemporaneamente mediate una scelta opportuna del riferimento, il principio d'inerzia ha un contenuto fisico altamente non banale.

### C1. Principio d'inerzia.

*Esiste una classe di sistemi di riferimento in ciascuno dei quali tutti i punti materiali isolati si muovono con moto **rettilineo uniforme**, cioè a velocità costante in modulo, direzione e verso, dipendente dal punto materiale considerato. Tali sistemi di riferimento si dicono **sistemi di riferimento inerziali**.*

#### Osservazioni.

(1) Ci siamo riferiti ad una classe di sistemi di riferimento inerziali e non ad uno solo perché, come sarà mostrato tra poco, se  $\mathcal{S}$  è un sistema di riferimento inerziale e  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  hanno moto relativo rettilineo uniforme allora  $\mathcal{S}'$  stesso è inerziale.

(2) È chiaro che dal punto di vista pratico è molto difficile stabilire con certezza se un riferimento sia inerziale o no. I riferimenti inerziali posso comunque essere determinati a posteriori sviluppando la teoria fino a livelli più accessibili dal punto di vista sperimentale<sup>1</sup>.

(3) L'esistenza di sistemi di riferimento inerziali è in realtà negata da sviluppi successivi della fisica: dalla Teoria della Relatività Generale. Tuttavia anche in tale ambito si vede che sistemi di riferimento con ottima approssimazione inerziali possono esser comunque definiti in regioni dell'universo relativamente piccole dal punto di vista cosmologico, ma più grandi dello stesso sistema solare, e contenenti una quantità di massa di ordini di grandezza inferiori alla massa totale dell'universo.

A tal fine supporremo di selezionare nell'universo una regione spaziale  $\Omega$  come detto in cui svilupperemo la teoria della meccanica classica e quando parleremo di corpi **sufficientemente lontani** o **isolati** intenderemo corpi in  $\Omega$  che distino l'uno dall'altro una distanza pari al raggio della regione stessa o più.

(4) Si noti che, nell'enunciare il primo principio della dinamica, abbiamo accuratamente evitato di parlare di *forze* per evitare un circolo vizioso, in un certo senso "tradizionale", che purtroppo si trova in diversi testi.

---

<sup>1</sup>Per esempio, una volta sviluppata la dinamica ed introdotto il concetto di centro di massa, si prova che preso un insieme di corpi sufficientemente lontani dagli altri ma non isolati tra di essi, il centro di massa del sistema deve essere in quiete in un riferimento inerziale. Se uno dei corpi  $C$  dell'insieme ha massa molto maggiore degli altri, il moto del suo centro di massa deve essere vicino a quello del centro di massa dell'insieme, per cui c'è un riferimento inerziale in cui il centro di massa del corpo  $C$  è con buona approssimazione in quiete. Tale situazione si ha per il sistema solare, dove  $C$  è il sole: un sistema di riferimento inerziale è con buona approssimazione quello in cui il centro di massa del sole è in quiete e in cui le *stelle fisse* sono viste come immobili.

### 3.1.2 Trasformazioni di Galileo

Studieremo ora il moto relativo tra riferimenti inerziali. Per prima cosa stabiliamo quando un riferimento è in moto *rettilineo uniforme rispetto ad un altro riferimento*.

**Definizione 3.1.** Consideriamo due sistemi di riferimento  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$ , diremo che  $\mathcal{I}$  è in moto **rettilineo uniforme rispetto al riferimento**  $\mathcal{I}'$  se la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_P^{(tr)}$  di  $P \in E_{\mathcal{I}}$  rispetto a  $\mathcal{I}'$  soddisfa:

- (i) è indipendente da  $P \in E_{\mathcal{I}}$ ,
- (ii) è costante nel tempo.

Tale velocità di trascinamento, indicata con  $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}'}$  è detta **velocità di trascinamento di  $\mathcal{I}$  rispetto a  $\mathcal{I}'$** .  $\diamond$

Abbiamo la seguente utile proposizione che caratterizza il moto rettilineo uniforme tra riferimenti.

**Proposizione 3.1.** Siano  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$  due sistemi di riferimento in  $\mathbb{V}^4$ . Valgono i seguenti fatti.

(a) Se  $\mathcal{I}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}'$ , siano  $t, x^1, x^2, x^3, t', x'^1, x'^2, x'^3$  coordinate cartesiane ortonormali solidali rispettivamente con  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$  con origini, rispettivamente  $O \in E_{\mathcal{I}}, O' \in E_{\mathcal{I}'}$  e assi, rispettivamente  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V_{\mathcal{I}}, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in V_{\mathcal{I}'}$ , allora la legge di trasformazione tra questi sistemi di coordinate è una **trasformazione di Galileo**, cioè una trasformazione da  $\mathbb{R}^4$  in  $\mathbb{R}^4$  di forma:

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = c^i + tv^i + \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $c \in \mathbb{R}, c^i \in \mathbb{R}$  e  $v^i \in \mathbb{R}$  sono costanti, e i coefficienti costanti  $R^i_j$  definiscono una matrice ortogonale reale  $3 \times 3$ . Vale ulteriormente

$$\mathbf{v}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}'} := \sum_{i=1}^3 v^i \mathbf{e}'_i. \quad (3.2)$$

(b) Se viceversa, rispetto a una coppia di sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali, rispettivamente con  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$ , valgono le relazioni (3.1), allora  $\mathcal{I}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}'$  con velocità di trascinamento data da (3.2).

(c) Se il riferimento  $\mathcal{I}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento  $\mathcal{I}'$ , allora  $\mathcal{I}'$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}$  e  $\mathbf{v}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}'} = -\mathbf{v}_{\mathcal{I}'}|_{\mathcal{I}}$ .

(d) Se  $\mathcal{I}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}'$  e  $\mathcal{I}'$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}''$ , allora  $\mathcal{I}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{I}''$ .

(e) Se  $\mathcal{S}$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{S}'$  allora  $\omega_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ ,  $\omega_{\mathcal{S}|\mathcal{S}'}$ , l'accelerazione di trascinamento e di Coriolis di  $\mathcal{S}'$  rispetto a  $\mathcal{S}$  e le analoghe accelerazioni di  $\mathcal{S}$  rispetto a  $\mathcal{S}'$  sono tutte nulle ad ogni istante.

**Dimostrazione.** (a) Nel caso generale, la trasformazione di coordinate tra i due riferimenti  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  deve avere la forma (vedi esercizio 2.1.2):

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j(t) x^j + c^i(t), \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.3)$$

dove le funzioni sono tutte  $C^\infty$  e i coefficienti  $R^i_j(t)$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$  definiscono una matrice ortogonale. La linea di universo del punto  $O \in E_{\mathcal{S}}$ , corrispondente a  $(0, 0, 0)$  per  $\mathcal{S}$ , ha quindi equazione  $x'^i(t') = c^i(t' - c)$  per  $\mathcal{S}'$ . Derivando nel tempo, per definizione si devono ottenere le componenti della velocità di trascinamento di  $O$  rispetto a  $\mathcal{S}'$  espresse nella base  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in V_{\mathcal{S}'}$ . Per ipotesi queste componenti non devono dipendere dal tempo. Concludiamo che, indicando con  $v^i$  le costanti  $dc^i(t' - c)/dt'$ , (3.3) si riscrive:

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j(t) x^j + v^i t + c^i, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove le  $c^i$  sono ulteriori costanti. La velocità di trascinamento del generico punto  $P \in E_{\mathcal{S}}$  di coordinate  $(x^1, x^2, x^3)$  per  $\mathcal{S}$ , avrà, dalla (3.4), componenti  $v^i + \sum_j x^j dR^i_j(t)/dt$  rispetto alla base  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ . Per ipotesi queste componenti non possono dipendere dal punto, cioè dalle coordinate  $x^i$  pertanto, derivando rispetto alla generica coordinata  $x^k$ , otteniamo che devono valere le condizioni  $dR^i_k(t)/dt = 0$  per ogni scelta di  $i$  e  $k$  e per ogni tempo  $t$ . Concludiamo che vale (3.2).

(b) Si consideri una linea di universo  $t \mapsto P(t) \in \mathbb{V}^4$  (con  $P(t) \in \Sigma_t$ ) che descriva l'evoluzione di un punto  $P$  dello spazio di quiete di  $\mathcal{S}$  individuato nelle coordinate di  $\mathcal{S}$  da  $(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$ . In tali coordinate (solidali con  $\mathcal{S}$ ) la linea di universo sarà quindi descritta da  $x^i(t) = y^i$  costante e  $t = t$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}'$  la stessa linea di universo sarà descritta da

$$x'^i(t') = c^i + (t' - c)v^i + \sum_j R^i_j y^j.$$

Le coordinate  $c^i$  determinano un punto  $Q$  in  $E_{\mathcal{S}'}$  a  $t' = c$ . Derivando nel tempo, rispetto a  $\mathcal{S}'$ , il vettore

$$P(t) - Q := \sum_i (x'^i(t') - c^i) \mathbf{e}'_i$$

si ottiene la velocità di del punto  $P$  rispetto a  $\mathcal{S}'$ . Il risultato è banalmente il vettore costante nel tempo ed indipendente da  $P \in E_{\mathcal{S}}$ :  $\sum_{i=1}^3 v^i \mathbf{e}'_i$ .

(c) La tesi segue immediatamente da (2) nelle osservazione 2.11 nel caso generale, tuttavia presentiamo anche una prova diretta nel caso in esame. Nelle ipotesi fatte vale (3.1) in coordinate solidali con  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}$  rispettivamente. Possiamo invertire (3.1) ottenendo

$$\begin{cases} t = t' - c, \\ x^j = \sum_{i=1}^3 (R^{-1})^j_i (c v^i - c^i) - t' \sum_{i=1}^3 (R^{-1})^j_i v^i + \sum_{i=1}^3 (R^{-1})^j_i x'^i, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.5)$$

Per il punto (b),  $\mathcal{S}'$  è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{S}$  e

$$\mathbf{v}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}} = - \sum_{i,j=1}^3 (R^{-1})^j_i v^i \mathbf{e}_j.$$

Essendo per costruzione  $\sum_{j=1}^3 (R^{-1})^j_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i$  si ha che vale (3.2).

(d) Si prova immediatamente scegliendo tre sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali rispettivamente con i tre riferimenti. La trasformazione tra le coordinate associate a  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  e la trasformazione tra le coordinate associate a  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}''$  devono essere della forma (3.1) per (a). La trasformazione tra le coordinate associate a  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}''$  si ottiene allora componendo le precedenti trasformazioni. Per verifica diretta si trova subito che la trasformazione ottenuta è ancora di tipo (3.1) per cui, da (b),  $\mathcal{S}$  è in moto rettilineo uniforme per  $\mathcal{S}''$ .

(e) Segue per computo diretto da (3.1) e da (c).  $\square$

La trasformazione (3.1) è individuata dalla quaterna  $(c, \vec{c}, \vec{v}, R) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times O(3)$ , dove  $\vec{c} := (c^1, c^2, c^3)$ ,  $\vec{v} := (v^1, v^2, v^3)$  e  $R$  denota la matrice del gruppo  $O(3)$  delle matrici ortogonali reali  $3 \times 3$ , individuata dai coefficienti  $R^i_j$ . La quaterna corrisponde a 10 parametri reali (si tenga conto che ogni matrice di  $O(3)$  è determinata da 3 numeri reali). Dato che la composizione di funzioni è associativa, che la composizione di trasformazioni di Galileo è ancora una trasformazione di Galileo, l'inversa di una trasformazione di Galileo è una trasformazione di Galileo ed, infine, la trasformazione di Galileo con parametri  $(0, \vec{0}, \vec{0}, I)$  è la trasformazione identità, concludiamo che l'insieme delle trasformazioni (3.1), viste come trasformazioni da  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$ , al variare di  $(c, \vec{c}, \vec{v}, R) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times O(3)$ , ha la struttura algebrica di gruppo rispetto alla composizione di funzioni. Questo gruppo si chiama **gruppo di Galileo**.

### Esercizi 3.1.

1. Siano assegnati tre sistemi di riferimento  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  e  $\mathcal{S}''$  tali che, rispetto a coordinate ortonormali solidali con ciascuno di essi, la trasformazione di coordinate da  $\mathcal{S}'$  a  $\mathcal{S}$  è di Galileo ed è individuata dalla quadrupla  $(c_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, R_1)$ , la trasformazione di coordinate da  $\mathcal{S}''$  a  $\mathcal{S}'$  è di Galileo individuata dalla quadrupla  $(c_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, R_2)$ . Provare che la trasformazione di coordinate da  $\mathcal{S}''$  a  $\mathcal{S}$  ottenuta componendo le precedenti due è la trasformazione di Galileo individuata dalla quadrupla:

$$(c_1 + c_2, R_2 \vec{c}_1 + c_1 \vec{v}_2 + \vec{c}_2, R_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2, R_2 R_1) .$$

2. Provare che  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times O(3)$  dotato della legge di composizione

$$(c_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, R_2) \circ (c_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, R_1) := (c_1 + c_2, R_2 \vec{c}_1 + c_1 \vec{v}_2 + \vec{c}_2, R_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2, R_2 R_1) ,$$

ha la struttura di gruppo dove, in particolare, l'elemento neutro è dato da  $(0, \vec{0}, \vec{0}, I)$  e l'elemento inverso è

$$(c, \vec{c}, \vec{v}, R)^{-1} = (-c, -R^{-1}(\vec{c} + c\vec{v}), -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}) .$$

3.\* Provare che il gruppo di Galileo è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo  $GL(5, \mathbb{R})$ , delle matrici reali non singolari  $5 \times 5$ .

### 3.1.3 Moto relativo di riferimenti inerziali

Quello che vogliamo provare ora è il seguente fondamentale risultato che riguarda il moto relativo tra sistemi di riferimento inerziali.

**Teorema 3.1.** *Assumiamo che, per ogni riferimento  $\mathcal{J}$  ed ogni evento  $p \in \mathbb{V}^4$ , sia disponibile un punto materiale la cui linea di universo attraversi  $p$  con velocità (rispetto a  $\mathcal{J}$ ) di valore e direzione arbitraria e che il punto sia isolato per qualche intervallo temporale finito attorno a  $p$ . Valgono allora i fatti seguenti.*

- (a) *Se  $\mathcal{J}$  è un riferimento inerziale, un altro riferimento  $\mathcal{J}'$  è anch'esso inerziale se e solo se è in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{J}$ .*
- (b) *Le trasformazioni tra coordinate cartesiane ortonormali solidali con riferimenti inerziali sono le trasformazioni del gruppo di Galileo.*
- (c) *Se  $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$  sono entrambi inerziali,  $\omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}$ , l'accelerazione di trascinamento e di Coriolis di  $\mathcal{J}'$  rispetto a  $\mathcal{J}$  sono sempre nulle.*

**Dimostrazione.** (a) supponiamo che  $\mathcal{J}$  sia inerziale e che  $\mathcal{J}'$  sia in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{J}$ . In tal caso, riferendosi a sistemi di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  rispettivamente, avremo la legge di trasformazione

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = c^i + tv^i + \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Se  $\gamma$  è la linea di universo di un punto isolato, per  $\mathcal{J}$  deve dare luogo ad una curva  $P = P(t)$  con velocità costante  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^3 u^j \mathbf{e}_j$ . In coordinate  $x^j$ , solidali con  $\mathcal{J}$ , la legge oraria varrà dunque forma  $x^j(t) = tu^j + x_0^j$ , per  $j = 1, 2, 3$  e  $t \in \mathbb{R}$ , dove le  $x_0^j$  sono costanti. Per (3.6), la legge oraria di  $\gamma$  nelle coordinate  $x'^i$  solidali con  $\mathcal{J}'$  sarà :

$$x'^i(t') = c^i + (t' - c)v^i + \sum_{j=1}^3 R^i_j((t' - c)u^j + x_0^j) .$$



Il calcolo della velocità fornisce immediatamente il vettore costante  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = \sum_{i=1}^3 (v^i + R^i_j u^j) \mathbf{e}'_i$ . Quindi *ogni punto materiale isolato* si muove, per  $\mathcal{J}'$ , di moto rettilineo uniforme:  $\mathcal{J}'$  è inerziale. Supponiamo viceversa che  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  siano entrambi inerziali. Vogliamo studiare il moto, in entrambi i riferimenti, di un punto materiale isolato  $P$ , tenendo conto delle relazioni (2.69):

$$\begin{cases} \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{a}_P^{(tr)} + \mathbf{a}_P^{(C)}, \\ \mathbf{a}_P^{(tr)} := \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O'), \\ \mathbf{a}_P^{(C)} := 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} . \end{cases}$$

$O'$  è un punto arbitrario in quiete con  $\mathcal{J}'$ . Nel caso in esame, dato che  $P$  è isolato ed entrambi i riferimenti sono inerziali, deve essere  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = \mathbf{0}$  ad ogni istante (nell'intervallo di tempo in cui il punto è isolato). Sostituendo nella prima formula riportata sopra si ha che, ad ogni istante e per ogni punto materiale isolato  $P$ , deve valere:

$$\mathbf{a}_P^{(tr)} + \mathbf{a}_P^{(C)} = \mathbf{0} .$$

ossia

$$\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O') + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = \mathbf{0}$$

Scegliendo il punto materiale isolato con velocità nulla in  $\mathcal{J}'$  e coincidente con  $O'$ , concludiamo che deve essere, all'istante considerato:  $\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{0}$ . Dato che possiamo fare lo stesso ragionamento per ogni istante, il risultato trovato deve essere valido ad ogni istante. In definitiva deve essere:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O') + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = \mathbf{0} , \quad (3.7)$$

ad ogni istante e per ogni punto materiale isolato  $P$ . Scegliendo nuovamente  $P$  coincidente con  $O'$  ed animato di velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} \neq \mathbf{0}$  perpendicolare al valore di  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}$  nell'istante considerato, si ottiene da (3.7):

$$\|\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}\| \|\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}\| = 0$$

da cui  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} = \mathbf{0}$  nell'istante considerato e quindi in ogni istante. Questo risultato inserito nelle (2.68):  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O') + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}$ , prova che ogni punto  $P$  in quiete con  $\mathcal{J}'$  ha velocità rispetto a  $\mathcal{J}$ , pari a  $\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}$  indipendentemente da  $P$ . D'altra parte, avendo anche trovato sopra che  $\frac{d\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}}{dt}|_{\mathcal{J}} (= \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}}) = \mathbf{0}$  per ogni istante, concludiamo che la velocità dei punti in quiete con  $\mathcal{J}'$  è *costante nel tempo e non dipende dal punto*. Per definizione,  $\mathcal{J}'$  è dunque in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathcal{J}$ .

(b) la prova è conseguenza immediata di (a) di questo teorema e dei primi due punti della proposizione 3.1.

(c) Segue immediatamente da (b). □

### Esercizi 3.2.

1. Si consideri la *grande ruota* di un *luna park*. Si assuma approssimativamente che il riferimento solidale con la terra,  $\mathcal{J}$ , sia un riferimento inerziale e si consideri un secondo riferimento

$\hat{\mathcal{S}}$  solidale con un sedile (libero di rimanere nella posizione orizzontale quando la ruota gira) della grande ruota (in movimento). Quanto vale il vettore  $\omega_{\hat{\mathcal{S}}|\mathcal{S}}$ ? Il riferimento  $\hat{\mathcal{S}}$  è inerziale?

### Osservazioni 3.1.

(1) Attraverso le coordinate cartesiane ortonormali solidali con ogni fissato riferimento *inerziale*  $\mathcal{S}$  è possibile dotare lo spaziotempo di una *struttura affine* privilegiata. La ragione è nella forma generale delle equazioni che definiscono il gruppo di Galileo (3.4). Se fissiamo un riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  e consideriamo due eventi  $p$  e  $q$ , possiamo associare alla coppia  $(p, q)$  un vettore  $p - q$  definito dalle componenti  $(t_p - t_q, x_p - x_q, y_p - y_q, z_p - z_q)$ , dove abbiamo introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ . Se passiamo ad un altro riferimento *inerziale*  $\mathcal{S}'$  e proviamo ad associare alla stessa coppia  $(p, q)$  un vettore  $p - q$  definito dalle componenti  $(t'_p - t'_q, x'_p - x'_q, y'_p - y'_q, z'_p - z'_q)$ , dove abbiamo introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}'$ , scopriamo le componenti di tale vettore si trasformano secondo una trasformazione affine passando al precedente riferimento. Questo è dovuto alla non dipendenza temporale dei coefficienti  $R^i_j$  e  $c^i$  in (3.4) che appare cambiando riferimento ed al fatto che siamo liberi di scegliere gli eventi  $p$  e  $q$  non contemporanei. In definitiva: i sistemi di coordinate cartesiani solidali con i riferimenti inerziali nello spaziotempo, definiscono il vettore  $p - q$  in maniera indipendente dal riferimento inerziale, dando luogo ad una struttura affine sullo spaziotempo individuata dall'applicazione che associa ad ogni coppia di eventi  $(p, q)$  il vettore  $p - q$ .

(2)\* Con un ampliamento del formalismo ed introducendo la *connessione affine* su  $\mathbb{V}^4$  individuata dalla struttura affine descritta sopra, si può verificare che le *geodetiche* di tale connessione che soddisfano l'ulteriore requisito  $\langle V, dT \rangle \neq 0$  ovunque, dove  $V$  è il vettore tangente in ogni evento alla geodetica, sono nient'altro che i *moti inerziali dei punti materiali*. Il tempo assoluto è un parametro affine di tali geodetiche. In questo senso la meccanica classica e le teorie relativistiche sono più vicine di quanto si possa immaginare.

## 3.2 Formulazione generale della dinamica classica dei sistemi di punti materiali

Veniamo a spiegare come procede la costruzione della dinamica una volta assunta l'esistenza della classe di riferimenti inerziali con le caratteristiche dette. Considerando punti materiali *isolati*, cioè sufficientemente lontani gli uni dagli altri, sappiamo che il loro moto, descritto dal primo principio della dinamica, è rettilineo uniforme in ogni riferimento inerziale. Il problema è ora di spiegare cosa accada al moto dei punti quando essi *non* siano più isolati. L'esperienza mostra che il loro moto diventa accelerato.

### 3.2.1 Masse, Impulsi e Forze

Se abbiamo un sistema di punti materiali, diremo che esso è **isolato** quando i punti di esso sono lontani dagli altri corpi dell'universo non appartenenti all'insieme (i punti dell'insieme possono essere invece arbitrariamente vicini gli uni agli altri).

Per procedere con la formulazione della dinamica, si assume che i punti materiali abbiano associata a ciascuno di essi una grandezza fisica chiamata **massa** che sia additiva e si conservi. Attraverso la massa si può enunciare la legge di conservazione dell'*impulso* o *quantità di moto*. Abbiamo il seguente principio che formalizza quanto detto.

#### C2. Impulso e massa.

*Si assume che per ogni punto materiale  $Q$  esista una costante detta **massa**,  $m > 0$ , tale che valgano i due seguenti fatti.*

**(a) Principio di conservazione impulso.** *In ogni riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e per ogni coppia di punti materiali  $Q, Q'$ , costituenti un sistema isolato*

$$m\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}} + m'\mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{I}},$$

*è un vettore costante nel tempo, anche se non lo sono separatamente  $\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}}$  e  $\mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{I}}$ . Il vettore  $\mathbf{p} := m\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}}$  è detto **impulso** o anche **quantità di moto** del punto materiale  $Q$  rispetto a  $\mathcal{I}$ .*

**(b) Principio di conservazione/additività della massa.** *Nei processi in cui un punto materiale si decompone in più punti materiali (oppure più punti materiali si fondono in un unico punto materiale), la massa dell'unico punto materiale iniziale (finale) è pari alla somma delle masse dei costituenti finali (iniziali).*

#### Osservazioni 3.2.

**(1)** Le masse sono indipendenti dal riferimento, mentre gli impulsi non lo sono e si trasformano, cambiando riferimento, tenendo conto della legge (2.68):

$$\mathbf{p}_{\mathcal{I}} = \mathbf{p}_{\mathcal{I}'} + m\mathbf{v}_Q^{(tr)}. \quad (3.8)$$

Tuttavia, se entrambi  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$  sono inerziali, a causa del teorema 3.1, che sancisce in particolare che la velocità di trascinamento è costante nel tempo ed indipendente dal punto, e coincide con  $\mathbf{v}_{\mathcal{I}'}|_{\mathcal{I}}$ , la formula di sopra si semplifica in

$$\mathbf{p}_{\mathcal{I}} = \mathbf{p}_{\mathcal{I}'} + m\mathbf{v}_{\mathcal{I}'}|_{\mathcal{I}}. \quad (3.9)$$

**(2)** Possiamo assumere che la massa un punto materiale di riferimento  $P_1$  valga 1 ed, attraverso il principio di conservazione dell'impulso, misurare le masse di ogni altro punto materiale  $P_2$  facendolo interagire con  $P_1$ , assumendo tutti gli altri corpi lontani.  $m_{P_2}$  è l'unico numero che soddisfa, per  $t \neq t'$  istanti arbitrari:  $m_{P_2}(\mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{I}}(t') - \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{I}}(t)) = 1(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{I}}(t') - \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{I}}(t))$ , quando i punti non hanno velocità costante nel tempo (a causa della loro interazione).

Passiamo quindi ad introdurre la nozione di *forza* per gestire le interazioni tra punti materiali vicini.

### C3. Secondo principio della dinamica (prima parte).

Si assume che presi due punti materiali  $Q$  e  $Q'$  di masse  $m$  e  $m'$  rispettivamente, costituenti un sistema isolato e per ogni riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , esistano due funzioni differenziabili dette **funzioni di forza** o semplicemente **forze** agenti sui punti materiali,  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}} : \Sigma_t \times \Sigma_t \times V_t \times V_t \rightarrow V_t$  e  $\mathbf{F}'_{\mathcal{J}} : \Sigma_t \times \Sigma_t \times V_t \times V_t \rightarrow V_t$  tali che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , valga il **secondo principio della dinamica**,

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_Q|_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{F}_{\mathcal{J}}(Q(t), Q'(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t)) , \\ m'\mathbf{a}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{F}'_{\mathcal{J}}(Q'(t), Q(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t)) . \end{cases} \quad (3.10)$$

Più precisamente  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}}$  è detta la **forza che agisce su  $Q$  a causa di  $Q'$**  e  $\mathbf{F}'_{\mathcal{J}}$  è detta **forza che agisce su  $Q'$  a causa di  $Q$** .  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}}$  è detta **reazione associata a  $\mathbf{F}'_{\mathcal{J}}$**  e  $\mathbf{F}'_{\mathcal{J}}$  è detta **reazione associata a  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}}$** .

Al variare del riferimento inerziale, si assume che le funzioni di forza siano **invarianti in valore**, cioè siano tali da soddisfare la relazione:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{J}}(P_1, P_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{F}_{\mathcal{J}'}(P_1, P_2, \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2) , \quad (3.11)$$

per  $P_1, P_2 \in \Sigma_t$  e  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V_t$  e dove abbiamo definito  $\mathbf{u}' := \mathbf{u} + \mathbf{u}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}'}$  per ogni  $\mathbf{u} \in V_t$ .

Come diremo più in generale tra poco, riferendosi a coordinate  $x^1, x^2, x^3$  cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$ , le equazioni di sopra diventano un *sistema di equazioni differenziali del secondo ordine* che *determina completamente* le leggi orarie dei punti, una volta note posizioni e velocità di essi ad un istante  $t_0$  arbitrario.

Dal punto di vista fisico, una volta formulata il secondo principio, bisogna determinare le varie leggi di forza che esistono in natura e che dipendono da ulteriori caratteristiche dei punti materiali (per esempio la carica elettrica che è associata alla legge di forza di Coulomb).

### Osservazioni 3.3.

(1) Per non violare la prima legge della dinamica, ogni forza fisicamente sensata deve decrescere ed annullarsi quando la distanza tra i punti cresce, in modo da fornire accelerazioni nulle per corpi sufficientemente lontani.

(2) Il requisito di invarianza (3.11) segue dalla richiesta di validità delle (3.10) in ogni riferimento inerziale. In fatti, sappiamo che se  $\hat{\mathcal{J}}$  è un secondo riferimento inerziale, esso sarà legato al precedente da una trasformazione di Galileo e pertanto  $\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{J}}|\mathcal{J}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}|\hat{\mathcal{J}}} = 0$  e l'accelerazione di trascinamento di ogni punto in quiete in uno dei due riferimenti è nulla se riferita all'altro. Usando (2.69) troviamo che *l'accelerazione di punto  $P$  ad un istante di tempo fissato non varia se si cambia riferimento, passando da un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$  ad un altro riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$* :  $\mathbf{a}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathbf{a}_Q|_{\mathcal{J}}$  e  $\mathbf{a}_{Q'}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathbf{a}_{Q'}|_{\mathcal{J}}$ . Di conseguenza le (3.10) si possono riscrivere, dove i primi membri sono riferiti a  $\hat{\mathcal{J}}$ , ma i secondi a  $\mathcal{J}$ :

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}}(t) = \mathbf{F}_{\mathcal{J}}(Q(t), Q'(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t)) , \\ m'\mathbf{a}_{Q'}|_{\hat{\mathcal{J}}}(t) = \mathbf{F}'_{\mathcal{J}}(Q'(t), Q(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t)) . \end{cases}$$

Ma, dato che il secondo principio vale anche in  $\mathcal{J}$ :

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_Q|_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{F}_{\mathcal{J}}(Q(t), Q'(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t)) , \\ m'\mathbf{a}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{F}'_{\mathcal{J}}(Q'(t), Q(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t)) . \end{cases}$$

Visto che  $m, m'$  non dipendono dal riferimento, concludiamo che deve valere (3.11), se si assume la possibilità di dare ai punti materiali e in un istante dato, qualsiasi posizione e velocità.

**Osservazioni 3.4.** *In virtù della validità della (3.11), d'ora in avanti ometteremo l'indice  $\mathcal{J}$  che specifica il riferimento inerziale nel quale sono assegnate le funzioni di forza. Nello stesso modo ometteremo la specificazione  $|_{\mathcal{J}}$  nelle accelerazioni quando è sottointeso che sono valutate rispetto ad un riferimento inerziale (non importa quale per quanto spiegato sopra!). Quale sia il riferimento inerziale usato sarà specificato dalle velocità che appaiono nelle funzioni di forza. Si osservi che potrebbe ancora accadere che le funzioni forza abbiano una forma funzionale differente al variare del riferimento inerziale. Affronteremo questo problema nella Sezione 3.4.1 rispondendo che la forma funzionale è in realtà la stessa come conseguenza del principio di invarianza galileiana.*

La conservazione dell'impulso unitamente al secondo principio della dinamica, implica immediatamente quello che, nella presentazione tradizionale, viene chiamato **terzo principio della dinamica** per un sistema di due punti materiali<sup>2</sup> o **principio di azione e reazione** che mette in relazione la forza agente su  $Q$  con quella agente su  $Q'$ :

$$\mathbf{F}(Q(t), Q'(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t)) = -\mathbf{F}'(Q'(t), Q(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t)) .$$

Il principio di azione e reazione **in forma forte** richiede che le funzioni di forza siano applicate lungo la congiungente  $Q(t) - Q'(t)$ ; tale richiesta servirà ad ottenere, come teorema, la conservazione del momento angolare per sistemi di punti:

**C3. Secondo principio della dinamica (seconda parte).** *Per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , se  $Q(t) - Q'(t)$  non è il vettore nullo,*

$$\mathbf{F}(Q(t), Q'(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t))$$

*e*

$$\mathbf{F}'(Q'(t), Q(t), \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}(t), \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}(t))$$

*sono diretti lungo la direzione di tale vettore (con versi opposti).*

### 3.2.2 Sovrapposizione delle forze.

Se un punto materiale,  $Q$ , interagisce contemporaneamente con più punti materiali si assume che la funzione forza totale applicata a  $Q$  sia data dalla somma delle funzioni forza che si hanno

---

<sup>2</sup>Per noi è un semplice corollario dei nostri principi.

considerando tutte le coppie di punti possibili con  $Q$  fisso.

#### C4. Principio di sovrapposizione delle forze.

Si assume che se è dato un sistema di  $N$  punti materiali  $Q_1, \dots, Q_N$ , valga per ogni punto  $Q_k$ , in ogni riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , il **secondo principio della dinamica in forma completa**

$$m_k \mathbf{a}_{Q_k}(t) = \sum_{k \neq i=1}^{i=N} \mathbf{F}_{ki}(Q_k(t), Q_i(t), \mathbf{v}_{Q_k}|_{\mathcal{I}}(t), \mathbf{v}_{Q_i}|_{\mathcal{I}}(t)) ,$$

dove la funzione  $\mathbf{F}_{ki}$  è la forza agente su  $Q_k$  e dovuta a  $Q_i$ , ottenuta allontanando sufficientemente tutti gli altri punti del sistema.

**Osservazione.** È ben noto che il principio di azione e reazione risulta essere già falso considerando forze elettromagnetiche in presenza di cariche in moto. Meno noto è il fatto che anche il principio di sovrapposizione risulta essere non valido per sistemi fisici non troppo sofisticati. Ciò accade per esempio considerando sistemi fisici quali tre o più molecole polarizzabili. Tali molecole cambiano la loro struttura e di conseguenza la forza elettrica che esercitano sulle altre molecole come conseguenza del campo elettrico nel quale sono immerse, cioè delle forze elettriche alle quali sono sottoposte.

Se  $\mathbf{x}_k$  denota la terna di coordinate determinanti  $Q_k$  in riferimento ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con il riferimento  $\mathcal{I}$ , l'insieme delle equazioni

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_k(t)}{dt^2} = m_k^{-1} \mathbf{F}_i \left( \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t), \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_N(t)}{dt} \right) , \quad k = 1, 2, \dots, N , \quad (3.12)$$

dove, per  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbf{F}_i \left( \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t), \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_N(t)}{dt} \right) := \sum_{k \neq i=1}^{i=N} \mathbf{F}_{ki} \left( \mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_i(t), \frac{d\mathbf{x}_k(t)}{dt}, \frac{d\mathbf{x}_i(t)}{dt} \right) , \quad (3.13)$$

costituisce ancora un sistema di equazioni differenziali su cui si applicano le stesse considerazioni sull'esistenza e l'unicità delle soluzioni accennate nel caso di due corpi.

### 3.2.3 Problema fondamentale della dinamica e determinismo

Il problema di determinare il **moto del sistema**, cioè la *legge oraria*, dei punti materiali di un sistema, quando sono assegnate le leggi di forza agenti su ciascun punto e sono date *condizioni iniziali*, cioè posizione e velocità di ogni punto del sistema ad un certo istante rispetto ad un fisso riferimento inerziale, si dice **problema fondamentale della dinamica**. In definitiva, con alcune generalizzazioni molto importanti che diremo tra poco, il problema si riduce a risolvere, in coordinate cartesiane ortogonali solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , il sistema di equazioni differenziali (3.12) quando sono assegnati i dati iniziali  $\mathbf{x}_k(t_0)$  e  $\frac{d\mathbf{x}_k(t)}{dt}|_{t=t_0}$  per  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Tutta la teoria è basata sul seguente teorema che discuteremo, indebolendone le ipotesi e migliorandone la tesi, e proveremo nel prossimo capitolo:

**Teorema 3.2.** Se  $\mathbf{F} : I \times D \times D' \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $D, D' \subset \mathbb{R}^n$  aperti non vuoti e  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto, è una funzione con  $\mathbf{F} \in C^1(I \times D \times D'; \mathbb{R}^n)$ , si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \left( t, \mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right). \quad (3.14)$$

Per ogni  $(t_0, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \in \mathbb{R} \times D \times D'$  esiste un intervallo aperto che include  $t_0$  sul quale è definita un'unica funzione di classe  $C^2$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  che soddisfa le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  e  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}|_{t=t_0} = \dot{\mathbf{x}}_0$  e che risolve (3.14).

### Osservazioni 3.5.

(1) Assumendo opportune ipotesi di regolarità sulle funzioni di forza, almeno localmente, il secondo principio della dinamica determina il moto, *nel futuro, ma anche nel passato*, se sono assegnate condizioni iniziali. Questo risultato matematico prende il nome di **determinismo** ed ha enorme importanza in fisica classica.

(2) Dal punto di vista euristico la validità del teorema 3.2 è plausibile se si rafforzano ulteriormente le ipotesi, assumendo  $\mathbf{F}$  di classe  $C^\infty$  e più fortemente di classe analitica reale. Infatti, inserendo le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  e  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}|_{t=t_0} = \dot{\mathbf{x}}_0$  nel secondo membro di (3.14), il primo membro fornisce la derivata seconda della soluzione incognita  $\mathbf{x}(t)$  in  $t_0$ . Tenendo conto di tale informazione e reiterando la procedura, si ottiene la derivata terza di  $\mathbf{x}(t)$  in  $t_0$ . Iterando all'infinito la procedura si ottengono tutte le derivate di  $\mathbf{x}(t)$  in  $t_0$ ,  $\frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n}|_{t_0}$ . A questo punto, ci si aspetta che, se la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n} \Big|_{t_0} \frac{(t - t_0)^n}{n!}$$

converge in un intorno di  $t_0$ , la funzione di  $t$  ottenuta in tal modo sia una soluzione di (3.14) con le assegnate condizioni iniziali. È chiaro che, nella classe delle soluzioni analitiche, se non vuota, questa è l'unica soluzione locale con le assegnate condizioni iniziali.

Si osservi ancora che se, per l'equazione differenziale considerata, non fosse stato possibile separare a primo membro la derivata seconda lasciando a secondo membro una funzione delle derivate di ordine più basso, la procedura euristica presentata sopra non avrebbe avuto garanzia di funzionare. Dimostreremo nel prossimo capitolo il teorema 3.2 usando un'altra procedura che richiede meno ipotesi.

### Esempi 3.1.

1. Tre punti materiali  $P_1, P_2, P_3$  sono connessi, a due a due, da molle di lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $\kappa > 0$ . Vogliamo scrivere le leggi di forza per ciascuno di essi ed il sistema di equazioni che ne determina il moto.

La legge di forza di una molla di estremi  $P$  e  $Q$  e di lunghezza nulla a riposo è semplicemente

$$\mathbf{F}_P(P, Q) = -\kappa(P - Q), \quad (3.15)$$

dove  $\mathbf{F}_P$  è la forza esercitata dalla molla in  $P$ . Avremo dunque che, per  $i \neq k$ :

$$\mathbf{F}_{ki}(P_k, P_i) = -\kappa(P_k - P_i) .$$

Notare che il principio di azione e reazione è automaticamente soddisfatto. Il sistema di equazioni che determina il moto per i tre punti è dunque:

$$m_k \mathbf{a}_{P_k}(t) = \sum_{k \neq i=1}^{i=3} -\kappa(P_k - P_i) \quad k = 1, 2, 3 . \quad (3.16)$$

**2.** Consideriamo ancora tre punti  $P_1, P_2, P_3$  sottoposti alla forza gravitazionale. Vogliamo scrivere il sistema di equazioni che ne determina il moto.

La forza gravitazionale che si esercita tra due punti materiali  $P, Q$  di masse  $m_P, m_Q$  rispettivamente, ha la struttura

$$\mathbf{F}_P(P, Q) = -G \frac{m_P m_Q}{\|P - Q\|^3} (P - Q) , \quad (3.17)$$

dove  $G > 0$  è la costante gravitazionale.

Il sistema di equazioni che determina il moto per i tre punti è dunque:

$$m_k \mathbf{a}_{P_k}(t) = \sum_{k \neq i=1}^{i=3} -G \frac{m_{P_k} m_{P_i}}{\|P_k - P_i\|^3} (P_k - P_i) \quad k = 1, 2, 3 . \quad (3.18)$$

Si ha una formula analoga nel caso di forza coulombiana, ma in tal caso le masse nella legge di forza devono essere sostituite dalle cariche elettriche dei punti materiali ed il segno della costante  $G$  deve essere negativo.

### 3.3 Situazioni dinamiche più generali

Non sempre lo schema newtoniano esposto nelle precedenti sezioni può essere implementato completamente nella forma vista. In particolare il problema fondamentale della dinamica deve, in alcuni casi, essere impostato in modo differente. Vediamo tre casi di grande rilevanza.

#### 3.3.1 Moto assegnato per un sottosistema: forze dipendenti dal tempo

Il primo caso interessante è quando, in un sistema di  $N$  punti materiali interagenti tra di essi, alcuni di loro,  $P_{k+1}, \dots, P_N$ , hanno moto in qualche modo assegnato<sup>3</sup>. I rimanenti punti materiali,  $P_1, P_2, \dots, P_k$  avranno funzioni di forza della forma, per  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t, P_1, \dots, P_k, \mathbf{v}_{P_1}, \dots, \mathbf{v}_{P_k}) .$$

---

<sup>3</sup>Questo è un caso tipico quando si hanno alcuni punti materiali costituenti un sistema isolato e uno di essi ha una massa enormemente più grande di quella dei rimanenti. Con buona approssimazione, tanto migliore quanto la sua massa è superiore a quella degli altri, tale corpo si muove di moto rettilineo uniforme in un (qualunque) riferimento inerziale.



La dipendenza temporale esplicita tiene conto del moto, assegnato, dei rimanenti punti  $P_{k+1}, \dots, P_N$ . Il secondo principio della dinamica, per il sistema dei punti  $P_i$ , con  $i = 1, \dots, k$ , può essere esteso alla forma più generale

$$m_i \mathbf{a}_{P_i} = \mathbf{F}_i(t, P_1, \dots, P_k, \mathbf{v}_{P_1}, \dots, \mathbf{v}_{P_k}), \quad \text{con } i = 1, \dots, k. \quad (3.19)$$

Dal punto di vista matematico, passando in coordinate cartesiane ortonormali solidali con un riferimento inerziale, il sistema di equazioni differenziali che nasce dal sistema (3.19) rientra nella stessa teoria del caso già visto del teorema 3.2, e, se le funzioni di forza sono sufficientemente regolari, il sistema

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} = m_i^{-1} \mathbf{F}_i \left( t, \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t), \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_k(t)}{dt} \right), \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.20)$$

ammette una ad una sola soluzione quando sono assegnate le posizioni e le velocità dei punti ad un istante. Si osservi che abbiamo un sistema di  $3k$  equazioni scalari e le funzioni incognite sono effettivamente  $3k$ .

In questo approccio si possono fare ricadere situazioni in cui un punto materiale interagisce con un sistema più complesso per esempio dato da un fluido di moto assegnato in un riferimento noto (assumendo che il moto non sia apprezzabilmente cambiato dalla presenza del punto materiale). In tal caso l'azione dinamica dell'ambiente esterno sul punto è ancora rappresentata da una funzione forza in generale dipendente esplicitamente dal tempo.

### Esempi 3.2.

**1.** Il primo esempio, del tutto banale, è quello di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sottoposto alla forza di una molla di lunghezza nulla a riposo e di costante elastica  $\kappa$ , di cui uno dei due estremi,  $O$ , è vincolato a rimanere immobile in un riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . (Dal punto di vista pratico ciò si ottiene attaccando tale estremo ad un corpo di massa  $M \gg m$ .) In questo caso l'equazione che determina il moto di  $P$  è semplicemente

$$m \mathbf{a}_P = -\kappa(P - O). \quad (3.21)$$

**2.** Considerando un punto materiale  $P$  di massa  $m$  immerso in un liquido in quiete nel riferimento  $\mathcal{S}'$ , la forza agente sul punto materiale a causa dell'**attrito viscoso** del liquido è espressa, in certi regimi di velocità, dalla forma funzionale valida nel riferimento inerziale  $\mathcal{S}$

$$\mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}) = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}. \quad (3.22)$$

dove  $\gamma > 0$  è un coefficiente che descrive l'attrito tra punto materiale e liquido. Se  $\mathcal{S}' \neq \mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  è inerziale, possiamo lavorare direttamente nel riferimento  $\mathcal{S}'$  e la forma della forza di sopra si semplifica ottenendo alla fine le equazioni del moto (assumendo che sul punto non agiscano altre forze)

$$m \mathbf{a}_P = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}. \quad (3.23)$$

Questa equazione può essere risolta come equazione differenziale con procedure standard, una volta trascritta in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}'$ .

**3.** In riferimento all'esempio precedente, assumiamo ora che  $\mathcal{S}'$  non sia inerziale, ma il suo moto sia assegnato rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . In questo caso non possiamo ridurci a lavorare in  $\mathcal{S}'$ , perché in esso gli assiomi della dinamica non sono verificati (discuteremo in seguito cosa accade volendo riformulare la meccanica in riferimenti non inerziali). Rimaniamo in  $\mathcal{S}$  ed esprimiamo  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}$  in funzione di  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$ . Dalle equazioni (2.68) abbiamo che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}'} \wedge (P - O) + \mathbf{v}_O|_{\mathcal{S}'}$  dove  $O \in E_{\mathcal{S}}$  è un punto in quiete con  $\mathcal{S}$  (tipicamente l'origine delle coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ ). Le *funzioni del tempo*  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}'} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}'}(t)$  e  $\mathbf{v}_O|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{S}'}(t)$  sono note perché si dal fatto che il moto relativo di  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  è assegnato. In definitiva, le equazioni del moto per  $P$  (assumendo che sul punto non agiscano altre forze)

$$m\mathbf{a}_P = -\gamma\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t) - \gamma\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}'} \wedge (P - O) - \gamma\mathbf{v}_O|_{\mathcal{S}'}(t). \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Vincoli geometrici: reazioni vincolari

Un altro caso, di grande interesse matematico, della situazione in cui non è possibile usare completamente lo schema della dinamica esposto sopra, è quello in cui punti materiali  $P_1, P_2, \dots, P_k$  devono anche soddisfare *equazioni di vincolo* di tipo geometrico/cinematico. Per esempio, si può richiedere che uno o più punti sottoposto a varie funzioni di forza debba avere comunque moto confinato su una curva o su una superficie, oppure che siano soddisfatte richieste sulla velocità del punto (o dei punti) oppure, infine, che siano soddisfatte delle richieste di carattere metrico, per esempio il moto di due o più punti, sottoposti a forze assegnate, deve comunque essere tale che la distanza tra i punti sia fissata e costante nel tempo. In tutte queste situazioni si assume ancora che, a causa del vincolo, vi sia una forza (in aggiunta a quella già presenti) agente sul punto materiale. Tale forza, detta **reazione vincolare**, è indicata con la lettera  $\phi$ . Si suppone che tale forza soddisfi, per ipotesi, il principio di azione e reazione (terzo principio) rispetto alla struttura del vincolo e che contribuisca all'equazione generalizzata per il secondo principio<sup>4</sup>:

$$m_i\mathbf{a}_{P_i} = \mathbf{F}_i(t, P_1, \dots, P_k, \mathbf{v}_{P_1}, \dots, \mathbf{v}_{P_k}) + \phi_i, \quad \text{con } i = 1, \dots, k. \quad (3.25)$$

Non è però assegnata la forza  $\phi$  come funzione della posizione e velocità del punto sottoposto al vincolo, *anche se in linea di principio si assume che ciò sarebbe possibile se si esaminasse in dettaglio la struttura fisica del vincolo*. In pratica, però, la forza  $\phi$  risulta essere un *incognita* del problema del moto come lo è la legge oraria del moto stesso. Affinché il problema complessivo sia risolvibile, bisogna accompagnare l'equazione differenziale (più in generale il sistema di equazioni differenziali), derivante dall'applicazione del secondo principio, con alcune informazioni suppletive. In primo luogo l'equazione del vincolo stesso. Non è detto che ciò sia sufficiente e deve essere spesso aggiunta una **caratterizzazione costitutiva del vincolo** che fissa qualche relazione tra le componenti della reazione vincolare. L'uso delle relazioni aggiuntive serve, quando possibile, a determinare un sistema di equazioni differenziali, *che non contenga*

<sup>4</sup>In taluni testi si distingue tra *forze attive*, che sono quelle di cui è nota la forma funzionale da noi indicate con  $\mathbf{F}$ , e le *forze reattive*,  $\phi$ , di cui non è data la forma funzionale e che sono dovute ai vincoli.

le reazioni vincolari incognite  $\phi$ , per il quale siano noti teoremi di esistenza ed unicità se fissati condizioni iniziali. Questo sistema, quando esiste, viene detto **sistema di equazioni pure di movimento**. Le reazioni vincolari  $\phi$  vengono successivamente determinate, quando possibile, una volta nota l'equazione oraria e facendo uso del secondo e del terzo principio della dinamica. Vediamo alcuni esempi, nel caso di un *singolo* punto materiale, per chiarire il significato di quanto detto. Negli esercizi tratteremo il caso di più punti materiali. Il caso di uno o più punti materiali può essere trattato in modo del tutto generale introducendo la *formulazione Lagrangiana* della meccanica ed il postulato dei vincoli ideali che non tratteremo a questo livello.

### Esempi 3.3.

1. Consideriamo un punto vincolato ad una curva regolare  $\Gamma$ , diversa da un segmento di retta, solidale con un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e di equazione  $P = P(u)$ . Se  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}})$  denota la legge di forza complessiva agente su  $P$  di espressione assegnata, escludendo la reazione vincolare  $\phi$ , il secondo principio della dinamica fornisce:

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P) + \phi(t) ,$$

che non è in grado di determinare il moto anche assegnando l'equazione della curva  $\Gamma$  come  $P = P(u)$ . È conveniente, dato che il moto avviene su  $\Gamma$ , descrivere  $P$  tramite l'ascissa curvilinea  $s$  parametrizzata, a sua volta, nel tempo:  $s = s(t)$ . Usando (2.18), in riferimento alla *terna intrinseca* della curva  $\Gamma$  introdotta nella sezione 2.3.3, il secondo principio può essere riscritto

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{t}(s(t)) + \frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{n}(s(t)) &= F^t(t, P(s(t)), \mathbf{v}_P) \mathbf{t}(s(t)) + F^n(t, P(s(t)), \mathbf{v}_P) \mathbf{n}(s(t)) \\ &+ F^b(t, P(s(t)), \mathbf{v}_P) \mathbf{b}(s(t)) + \phi^t(t) \mathbf{t}(s(t)) + \phi^n(t) \mathbf{n}(s(t)) + \phi^b(t) \mathbf{b}(s(t)) . \end{aligned}$$

Anche la velocità che compare come argomento conviene che sia riscritta in termini dell'ascissa curvilinea e del versore tangente come in (2.17):  $\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{t}(s(t))$ . In altri termini, il secondo principio fornisce il sistema di tre equazioni

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F^t \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) + \phi^t(t) , \quad (3.26)$$

$$\frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = F^n \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) + \phi^n(t) , \quad (3.27)$$

$$0 = F^b \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) + \phi^b(t) . \quad (3.28)$$

La più semplice caratterizzazione costitutive del vincolo dato dalla curva  $\Gamma$  è quella di **curva liscia**. Questa caratterizzazione costitutiva si esplica nella richiesta che la componente di  $\phi$

tangente a  $\Gamma$  sia sempre nulla. In tal caso le equazioni di sopra si semplificano in

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F^t \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right), \quad (3.29)$$

$$\frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = F^n \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) + \phi^n(t), \quad (3.30)$$

$$0 = F^b \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) + \phi^b(t). \quad (3.31)$$

L'equazione (3.29) non contiene le funzioni incognite componenti della reazione vincolare inoltre essa ricade nella classe di equazioni differenziali trattate nel teorema 3.2. Pertanto, assegnando posizione e velocità iniziale (tangente a  $\Gamma$ !), queste vengono tradotte in condizioni iniziali per la funzione  $s = s(t)$  che si determina univocamente dall'equazione (3.29). L'equazione (3.29) è pertanto un'**equazione pura di movimento** per il sistema considerato.

Una volta nota la legge oraria  $s = s(t)$ , sostituendo tale funzione a primo membro di (3.30) e (3.31), si determinano le funzioni incognite  $\phi^n$  e  $\phi^b$ .

**2.** Consideriamo nuovamente un punto vincolato ad una curva regolare  $\Gamma$ , diversa da un segmento di retta, solidale con un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e di equazione  $P = P(u)$ , sottoposto alla forza  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}})$  assegnata, in modo di arrivare nuovamente alle equazioni (3.28). Una differente e più fisica relazione costitutiva del vincolo dato dalla curva  $\Gamma$  è quella di **curva scabra**. Questa caratterizzazione costitutiva si esplica nella richiesta che la componente tangente  $\phi^t$  della reazione vincolare  $\phi$  agente su  $P$  a causa di  $\Gamma$  sia connessa alla componente normale  $\phi^n \mathbf{n} + \phi^b \mathbf{b}$  dalla relazione

$$|\phi^t(t)| \leq \mu_s \sqrt{(\phi^n(t))^2 + (\phi^b(t))^2}, \quad (3.32)$$

fino a quando il punto  $P$  è fermo rispetto a  $\Gamma$  (cioè è in quiete in  $\mathcal{I}$ ) e dove  $\mu_s > 0$  è un coefficiente detto **coefficiente d'attrito statico**. Quando il punto è in movimento vale invece

$$\phi^t(s(t)) = - \frac{\frac{ds}{dt}}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} \mu_d \sqrt{(\phi^n(t))^2 + (\phi^b(t))^2}, \quad (3.33)$$

dove  $\mu_d > 0$  è un coefficiente detto **coefficiente d'attrito dinamico** con, solitamente,  $\mu_d < \mu_s$ . Il coefficiente  $\frac{ds}{dt} / \left| \frac{ds}{dt} \right|$  moltiplicato per  $\mathbf{t}$  individua il versore della velocità del punto per cui, nella fase di movimento,  $\phi^t \mathbf{t}$  è sempre diretto lungo la velocità ma con verso opposto. Nel caso in esame, assumendo inizialmente il punto in movimento, l'equazione pura di movimento si ottiene come segue. Da (3.27) e (3.28) ricaviamo

$$\frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - F^n \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) = \phi^n(t), \quad (3.34)$$

$$-F^b \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) = \phi^b(t). \quad (3.35)$$

Da queste abbiamo che, per (3.33), vale:

$$\phi^t(s(t)) = -\frac{\mu_d \frac{ds}{dt}}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} \sqrt{\left[ \frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - F^n \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right) \right]^2 + F^b \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right)^2}.$$

Inserendo l'espressione ottenuta per  $\phi(s(t))$  nella (3.26) si ottiene l'equazione che non contiene le reazioni vincolari incognite, ma solo la funzione  $s = s(t)$  incognita, ed è quindi l'equazione pura di movimento,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = m^{-1} F^t \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right) - \frac{\mu_d \frac{ds}{dt}}{m \left| \frac{ds}{dt} \right|} \sqrt{\left[ \frac{m}{\rho(s(t))} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - F^n \left( t, s, \frac{ds}{dt} \right) \right]^2 + F^b \left( t, s(t), \frac{ds}{dt} \right)^2}. \quad (3.36)$$

Quest'equazione ricade ancora nel dal teorema 3.2 purché, oltre che la curva  $\Gamma$ , la funzione della forza attiva sia regolare sufficientemente e purché la soluzione  $s = s(t)$  non annulli la sua derivata prima (si osservi che in virtù di ciò il coefficiente  $\frac{ds}{dt}/\left| \frac{ds}{dt} \right|$  è costante e vale  $\pm 1$  durante il moto). Una volta determinata la funzione  $s = s(t)$  per fissate condizioni iniziali, si ricavano la reazione vincolare in funzione del tempo,  $\phi = \phi(t)$ , ottenendola direttamente dalle equazioni (3.26)-(3.27), avendo sostituito in  $s(t)$  la soluzione dell'equazione pura di movimento. Se per  $t = t_1$  vale, per la soluzione considerata,  $ds/dt|_{t=t_1} = 0$ , il moto del punto si ferma in  $s_1 = s(t_1)$  e, a partire da quell'istante, il suo stato di moto deve essere studiato usando la relazione costitutiva (3.32), unitamente alle equazioni (3.26)-(3.27) semplificate in

$$-F^t(t, s_1, 0) = \phi^t(t), \quad (3.37)$$

$$-F^n(t, s_1, 0) = \phi^n(t), \quad (3.38)$$

$$-F^b(t, s_1, 0) = \phi^b(t). \quad (3.39)$$

Fino a quando, al variare di  $t$  il vincolo:

$$|F^t(t, s_1, 0)| < \mu_s \sqrt{F^n(t, s_1, 0)^2 + F^b(t, s_1, 0)^2}, \quad (3.40)$$

è soddisfatto il punto rimane in quiete. Se per  $t = t_2$  i due membri della disuguaglianza coincidono, il punto ricomincia a muoversi e il moto deve essere studiato con l'equazione (3.36) con condizioni iniziali  $s(t_2) = s_1$  e  $ds/dt|_{t=t_2} = 0$ . Il coefficiente singolare  $\frac{ds}{dt}/\left| \frac{ds}{dt} \right|$  deve essere rimpiazzato dal segno di  $F^t(t_2, s_1, 0)$ , perché si assume che il moto cominci nella direzione della forza che ha vinto l'attrito statico.

**3.** Passiamo a considerare il caso in cui un punto materiale  $P$  di massa  $m$  si muove vincolato ad una superficie  $S$ , che assumeremo sferica di raggio  $R$  e centro  $O$  (ma quando diciamo è generale) in quiete nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Se  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}})$  denota la legge di forza complessiva agente su  $P$  di espressione assegnata, escludendo la reazione vincolare  $\phi$ , il secondo principio della dinamica fornisce:

$$m\mathbf{a}_P = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P) + \phi(t).$$

Possiamo parametrizzare il punto sulla sfera con coordinate polari standard  $\theta$  e  $\phi$  ed esprimere queste in funzione del tempo  $\theta = \theta(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ . Cercheremo l'equazione pura di movimento in queste variabili una volta imposta una caratterizzazione costitutiva del vincolo. Ancora una volta è conveniente decomporre questa equazione nella terna di vettori associata al vincolo, data in questo caso dalla (2.40). In definitiva il secondo principio si traduce in, dove è sottointeso che  $\theta = \theta(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  e, per brevità notazionale, le derivate rispetto al tempo sono indicate con il punto:

$$\begin{aligned} & m(R\ddot{\theta} - R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + m(R\ddot{\varphi} \sin \theta + 2R\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi - m(R\dot{\theta}^2 + R\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{n} \\ & = F^n(t, P((\theta, \varphi)), \mathbf{v}_P(\theta, \varphi)) \mathbf{e}_r + F^\theta(t, P((\theta, \varphi)), \mathbf{v}_P(\theta, \varphi)) \mathbf{e}_\theta + F^\varphi(t, P(\theta, \varphi), \mathbf{v}_P(\theta, \varphi)) \mathbf{e}_\varphi \\ & \quad + \phi^n(t) \mathbf{e}_r + \phi^\theta(t) \mathbf{n}(s(t)) \mathbf{e}_\theta + \phi^\varphi(t) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Separando le equazioni sulle tre componenti e facendo uso di (2.39)

$$\mathbf{v}_P = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi ,$$

si trova infine il seguente sistema di equazioni differenziali

$$m \left( R \frac{d^2 \theta}{dt^2} - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t) \right) = F^\theta \left( t, \theta(t), \varphi(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) + \phi^\theta(t) , \quad (3.41)$$

$$m \left( R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \theta(t) + 2R \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta(t) \right) = F^\varphi \left( t, \theta(t), \varphi(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) + \phi^\varphi(t) , \quad (3.42)$$

$$-m \left( R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta(t) \right) = F^n \left( t, \theta(t), \varphi(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) + \phi^n(t) . \quad (3.43)$$

La caratterizzazione costitutiva di **superficie liscia** richiede che le componenti di  $\phi$  tangenti alla superficie siano nulle. Inserendo questa richiesta nel sistema di sopra si trova il **sistema di equazioni pure di movimento**

$$m \left( R \frac{d^2 \theta}{dt^2} - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t) \right) = F^\theta \left( t, \theta(t), \varphi(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) , \quad (3.44)$$

$$m \left( R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \theta(t) + 2R \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta(t) \right) = F^\varphi \left( t, \theta(t), \varphi(t), \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) , \quad (3.45)$$

in cui non appare la reazione vincolare incognita ma solo le funzioni  $\theta = \theta(t)$  e  $\varphi = \varphi(t)$  che individuano il moto del punto. In effetti, il sistema di sopra, con debite ipotesi di regolarità ammette una sola soluzione per fissate condizioni iniziali  $\theta(t_0) = \theta_0$  e  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  in quanto ricade nei casi considerati dal teorema<sup>5</sup> 3.2. La reazione vincolare, ridotta alla sola componente normale alla superficie si ottiene in funzione del tempo, quando è stato determinato il moto, direttamente dalla (3.43). Come commento finale dobbiamo sottolineare che le coordinate  $\theta, \varphi$  *non ricoprono completamente la sfera*, pertanto lo studio completo del moto del punto sulla sfera richiede l'utilizzo di più di una carta.

---

<sup>5</sup>Si osservi che se  $\sin \theta = 0$  il sistema di equazioni non può essere scritto in forma normale, tuttavia  $\sin \theta = 0$  definisce punti,  $\theta = 0, \pi$  in cui il sistema di coordinate polari sferiche non è ben definito: dove le coordinate sono ben definite, il sistema è scrivibile in forma normale.

### 3.3.3 Dinamica in riferimenti non inerziali: forze inerziali

Cosa succede se si tenta di riformulare le equazioni della dinamica in un riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$  di cui è assegnato il moto rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ ? È possibile ripristinare lo schema basato sul secondo principio della dinamica in modo da avere ancora un sistema di equazioni differenziali che assicuri, sotto certe ipotesi, il determinismo?

Per semplicità trattiamo il caso di un punto materiale  $P$ . Se  $\mathcal{J}$  è un riferimento inerziale avremo, al solito, che il secondo principio della dinamica (tenendo conto delle varie estensioni descritte sopra) si esprime come:

$$m_P \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}) + \phi, \quad (3.46)$$

Abbiamo scritto esplicitamente  $|_{\mathcal{J}}$  per enfatizzare il fatto che l'accelerazione è valutata rispetto al riferimento (inerziale)  $\mathcal{J}$ . Possiamo ora esprimere velocità ed accelerazione di  $P$  rispetto a  $\mathcal{J}$  in termini delle analoghe quantità valutate rispetto a  $\mathcal{J}'$  per mezzo delle equazioni (2.68)-(2.69). Se  $O' \in E_{\mathcal{J}'}$  è in quiete con  $\mathcal{J}'$  si ha che:

$$\begin{aligned} m_P \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + m_P (\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O')) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O') + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}) \\ = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge (P - O') + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}) + \phi \end{aligned}$$

Convienne riscrivere l'equazione di sopra come:

$$m_P \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = \mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \phi(t) + \mathbf{F}_{\mathcal{J}'}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}), \quad (3.47)$$

avendo definito

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{J}'}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}):= -m_P \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t) - m_P \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge (P - O')) - 2m_P \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} \\ - m_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge (P - O'). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con una certa improprietà di scrittura, sopra  $\mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'})$  indica in realtà la funzione a valori vettoriali,  $\mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t) \wedge (P - O'(t)) + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t))$ , in cui *le funzioni del tempo*:  $\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t)$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}(t)$  sono note, dato che il moto di  $\mathcal{J}'$  rispetto a  $\mathcal{J}$  è assegnato.

Da tutto ciò si evince che: se vogliamo riavere la formulazione della dinamica in termini di “ $F = ma$ ” in un sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$ , compatibilmente con la meccanica sviluppata in sistemi di riferimento inerziali, siamo costretti ad aggiungere delle nuove funzioni di forza. Queste nuove funzioni di forza, rappresentate dal secondo membro di (3.48), sono correttamente funzione della posizione e della velocità del punto nel riferimento *non inerziale*. Ciò assicura il determinismo in base al teorema 3.2 purché tali funzioni siano sufficientemente regolari. Tali funzioni dipendono dal moto, che deve essere noto, del riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$  rispetto ad un riferimento inerziale ( $\mathcal{J}$  nel nostro caso).

Le funzioni di forza  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}'}$  vengono dette **forze apparenti** o **forze inerziali** agenti su  $P$ ; per contrasto, quelle introdotte nelle sezioni precedenti lavorando in riferimenti inerziali (incluso le reazioni vincolari) si dicono **forze vere**. Si osservi che le forze inerziali su  $P$  *non soddisfano il*

*principio di azione e reazione*, non ha senso dire che siano causate da qualche altro punto materiale  $P'$  (qualche altro sistema materiale) ed, infine, hanno valori che *dipendono dal riferimento* al contrario delle forze vere che hanno lo stesso valore in ogni riferimento, *inerziale e non*.

Nell'ambito della meccanica classica le forze inerziali non rappresentano interazioni, ma sono solo un espediente matematico. Nell'ambito della Teoria della Relatività Generale questo punto di vista verrà completamente ribaltato, mostrando che le forze inerziali, o meglio i corrispondenti matematici della nuova formulazione della dinamica, descrivono un'interazione che ha la stessa natura dell'interazione gravitazionale.

Esiste una classificazione più specifica delle forze inerziali:

$$\mathbf{F}_c(t, P) := -m_P \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) \wedge (P - O'))$$

si dice **forza centrifuga** mentre

$$\mathbf{F}^{(Coriolis)}(t, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} ) := -2m_P \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}(t) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}$$

si dice **forza di Coriolis**. Si osservi che la seconda non agisce se il punto materiale  $P$  ha velocità nulla in  $\mathcal{S}'$ . La prima invece, pensando  $\mathbf{F}_c$  applicata a  $P$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$  uscente da  $O'$ , è nel piano contenente  $P - O'$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ , è perpendicolare a  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$  e punta nella direzione uscente dall'asse  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ . In fine la sua norma vale  $m|\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}|^2 R$  dove  $R > 0$  è il *braccio* di  $P - O'$  rispetto a  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$  (pari a  $\|P - O'\| |\sin \alpha|$  dove  $\alpha$  è l'angolo tra  $P - O'$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ ).

### Esempi 3.4.

1. L'esempio più semplice che possiamo dare è sicuramente il seguente. Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  immobile nel riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . Consideriamo un secondo riferimento  $\mathcal{S}'$ , non inerziale, il cui moto rispetto a  $\mathcal{S}$  è di pura rotazione uniforme attorno all'asse  $z$ , con velocità angolare  $\omega > 0$ . In altre parole, rispetto a coordinate cartesiane ortogonali  $x, y, z$  e  $x', y', z'$  solidali rispettivamente con  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , valgono le trasformazioni  $z' = z$ ,  $x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)$  e  $y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t)$ . In questo modo  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} = \omega \mathbf{e}_z$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}'$  il moto di  $P$  è descritto come un moto rotatorio uniforme attorno al punto  $O \equiv O'$  di coordinate  $(0, 0, 0)$  per entrambi i riferimenti. Se  $(x_p, y_p, 0)$  sono le coordinate di  $P$  per  $\mathcal{S}'$ , il punto  $P$  in  $\mathcal{S}$  ha legge oraria  $x'_P(t) = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t)$ ,  $y'_P(t) = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t)$  (e  $z'_P(t) = 0$ ). Quindi, in particolare  $\mathbf{v}_{\mathcal{S}'}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} \wedge (P(t) - O)$ .

Sappiamo dalla fisica elementare che, dal punto di vista dinamico, il moto rotatorio uniforme per il punto materiale  $P$  avviene se la forza complessiva che agisce su  $P$  è *centripeta*, cioè parallela ed equiversa a  $-(P(t) - O)$ <sup>6</sup>, ed ha modulo  $\omega^2 R$ , dove  $R$  è la distanza da  $P$  dall'asse di rotazione. La forza apparente  $\mathbf{F}_c(t, P)$  è invece *centrifuga*, per cui da sola non è in grado di fornire la forza centripeta necessaria. In realtà il calcolo diretto di tutta la forza inerziale che appare in  $\mathcal{S}'$  tramite la (3.48) produce direttamente

$$\mathbf{F}_{\mathcal{S}'}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}) := -m \mathbf{a}_O|_{\mathcal{S}}(t) - m \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} \wedge (P - O)) - 2m \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}$$

<sup>6</sup>Attenzione che questo è vero nel caso considerato, perché  $P - O$  è perpendicolare a  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}}$ .



$$-m\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O)$$

(ricordare che  $O \equiv O'$  nella situazione considerata) dove il primo e l'ultimo addendo a secondo membro sono nulli per ipotesi, mentre la forza centrifuga e quella di Coriolis sono uguali, rispettivamente a (notare che  $\boldsymbol{\omega} \perp (P - O)$  nella situazione in esame):

$$\mathbf{F}_c(t, P) = -m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P(t) - O)) = -m\omega \mathbf{e}_z \wedge (\omega \mathbf{e}_z \wedge (P(t) - O)) = m\omega^2(P(t) - O),$$

$$\mathbf{F}^{(Coriolis)}(t, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}) = -2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = -2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P(t) - O)) = -2m\omega^2(P(t) - O).$$

La somma delle due forze produce proprio la forza centripeta necessaria pari a  $-m\omega^2(P(t) - O)$ .

**2.** Consideriamo un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato alla circonferenza liscia  $\Gamma$  di raggio  $R$  centrata nell'origine  $O'$ , e giacente nel piano  $y' = 0$ , di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali  $x', y', z'$  solidali con il sistema di riferimento  $\mathcal{J}'$ . Tale riferimento non è inerziale e vale  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} = \omega \mathbf{e}_{z'}$ , con  $\omega > 0$  costante, dove  $\mathcal{J}$  è un riferimento inerziale con coordinate cartesiane ortonormali solidali  $x, y, z$  di origine  $O \equiv O'$  e con asse  $z$  sempre coincidente con l'asse  $z'$  di  $\mathcal{J}'$ . Si suppone che  $P$  sia sottoposto alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_{z'}$ , oltre che alla reazione vincolare,  $\boldsymbol{\phi}$ , dovuta a  $\Gamma$ . Vogliamo ricavare l'equazione pura di movimento del punto nel riferimento  $\mathcal{J}'$ .

Convien usare la terna intrinseca di  $\Gamma$ . Parametizziamo la circonferenza con l'angolo  $\varphi$  tra  $P - O$  e  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'}$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_{y'}$ . Con tale scelta per l'angolo  $\varphi$ , introduciamo coordinate polari piane  $\varphi, r$  nel piano  $z', x'$ . Il versore tangente  $\mathbf{t}$  coincide con  $\mathbf{e}_\varphi$ , il vettore normale  $\mathbf{n}$  coincide con  $-\mathbf{e}_r$  ed il vettore binormale coincide con  $\mathbf{e}_{y'}$ . Il raggio di curvatura vale semplicemente  $\rho = R$  costantemente. Un calcolo immediato fornisce la funzione ascissa curvilinea  $s = s(\varphi)$  nella forma  $s = R\varphi$ , avendo scelto la sua origine nel punto più in alto in cui  $\Gamma$  interseca l'asse  $z'$ .

Le equazioni pure di movimento si ottengono proiettando l'espressione del secondo principio della dinamica lungo il versore tangente a  $\Gamma$ , dopo avere espresso velocità ed accelerazione in termini dell'ascissa curvilinea. L'espressione del secondo principio della dinamica è dunque, nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$ ,

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = -mg \mathbf{e}_{z'} + \boldsymbol{\phi} + \mathbf{F}_{\mathcal{J}'}$$

e, passando alla coordinata ascissa curvilinea come in (1) in esempi 3.3,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi(s(t)) - \frac{m}{R} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r(s(t)) = -mg \mathbf{e}_{z'} + \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{F}_{\mathcal{J}'}(t, P(t), \mathbf{v}_{\mathcal{J}'}(t)).$$

L'equazione pura di movimento si ottiene prendendo il prodotto scalare di ambo membri con  $\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_{z'} + \cos \varphi \mathbf{e}_{x'}$ . In questo modo, tenendo conto che la reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  è normale a  $\Gamma$  e che  $\varphi = s/R$ , si ha

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \sin \left( \frac{s(t)}{R} \right) + [-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge (P - O)) - 2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}] \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.49)$$

dove abbiamo trascurato il primo e l'ultimo addendo a secondo membro di (3.48), essendo essi nulli nelle nostre ipotesi. Vale ancora:

$$P(t) - O = R \left( \sin \left( \frac{s(t)}{R} \right) \mathbf{e}_{x'} + \cos \left( \frac{s(t)}{R} \right) \mathbf{e}_{z'} \right)$$

da cui

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}(t) = \frac{ds}{dt} \left( \cos \left( \frac{s(t)}{R} \right) \mathbf{e}_{x'} - \sin \left( \frac{s(t)}{R} \right) \mathbf{e}_{z'} \right) .$$

Essendo  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} = \omega \mathbf{e}_{z'}$ , il prodotto scalare a secondo membro in (3.49) vale, con qualche passaggio (in particolare l'ultimo addendo nel prodotto scalare in (3.49) fornisce contributo nullo),

$$m\omega^2 R \sin \left( \frac{s(t)}{R} \right) \cos \left( \frac{s(t)}{R} \right) .$$

L'equazione pura di movimento risulta quindi essere, passando alla variabile  $\varphi := s/R$ :

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m\omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0 . \quad (3.50)$$

### Esercizi 3.3.

1. Si considerino due punti materiali  $P$  e  $Q$ , entrambi di massa  $m$ , vincolati sulla curva liscia  $\Gamma$  di equazione  $x = \cos u$ ,  $y = \sin u$ ,  $z = u$  con  $u \in \mathbb{R}$ , dove  $x, y, z$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . Si supponga che i punti siano sottoposti, oltre alla reazione vincolare dovuta alla curva  $\Gamma$ , alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e che siano legati l'un l'altro attraverso una molla ideale di lunghezza nulla a riposo e costante elastica  $\kappa$ . Si scriva il sistema delle equazioni pure di movimento dei due punti.

2. In riferimento all'esempio 3.4.2, si dimostri che la quantità :

$$E = \frac{1}{2}m \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{m\omega^2 R^2}{4} \cos \left( \frac{2s(t)}{R} \right) - mgR \cos \left( \frac{s(t)}{R} \right) ,$$

è costante durante ogni moto del sistema (il valore costante dipende dalla soluzione considerata). Qual'è il significato fisico di  $E$ ?

## 3.4 Alcuni commenti sulla formulazione generale sulla dinamica newtoniana

### 3.4.1 Invarianza galileiana della meccanica classica

Per come sono state formulate, le leggi della dinamica C2-C4 hanno la proprietà notevole di avere la stessa forma quando sono scritte in coordinate cartesiane ortonormali solidali con un sistema di riferimento inerziale, al variare del sistema inerziale. La prova è immediata considerando le varie leggi separatamente. Tale proprietà di invarianza viene estesa anche alla forma

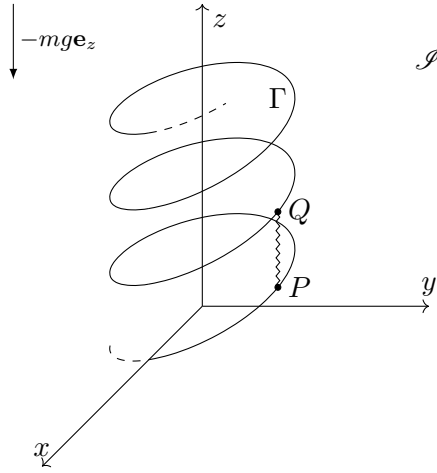


Figura 3.1: Illustrazione dell'esercizio 3.3.1.

funzionale delle forze ed ha un significato fisico profondo. Vediamo come si impone e come si formalizza tale principio. Torniamo al caso di due punti materiali, quanto segue si può banalmente estendere al caso di più punti materiali usando il principio di sovrapposizione delle forze. Ora interpreteremo l'azione del gruppo di Galileo in senso *attivo*. In altre parole, considerando la generica trasformazione di Galileo:

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = c^i + tv^i + \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.51)$$

stiamo usando un *unico* sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidali con un *fissato* riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . Ora le coordinate non primate sono quelle di un evento  $p$ , quelle primate (nello stesso sistema di coordinate) sono quelle dell'evento  $p'$  (diverso dal primo) ottenuto dopo aver fatto agire la trasformazione su  $p$ . Il gruppo di Galileo è composto da alcuni sottogruppi che elenchiamo<sup>7</sup>. Il gruppo delle **traslazioni temporali**, che include le trasformazioni, con  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} t' = t + c, \\ x'^i = x^i, \quad i=1,2,3; \end{cases} \quad (3.52)$$

<sup>7</sup>Ricordiamo che un sottoinsieme  $S$  di un gruppo  $G$  è detto **sottogruppo** di  $G$  se è chiuso rispetto alla legge di composizione grupale, rispetto al calcolo dell'elemento inverso e contiene l'elemento neutro di  $G$ . In tal caso ovviamente,  $S$  è a sua volta un gruppo rispetto alla legge di composizione di  $G$ . La verifica che gli insiemi di trasformazioni seguenti formano ciascuno un sottogruppo del gruppo di Galileo è immediata.

il gruppo delle **traslazioni spaziali**, corrispondenti alle trasformazioni, per ogni terna di numeri  $(c^1, c^2, c^3) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{cases} t' = t, \\ x'^i = c^i + x^i, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.53)$$

Si osservi che tale gruppo altro non è che il gruppo delle traslazioni standard  $V_{\mathcal{J}}$  dello spazio euclideo di quiete  $E_{\mathcal{J}}$ , essendo  $(c^1, c^2, c^3)$  la rappresentazione in componenti di una traslazione. Il gruppo delle **rotazioni**, corrispondenti alle trasformazioni, con  $R \in O(3)$ ,

$$\begin{cases} t' = t, \\ x'^i = \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j, \quad i=1,2,3; \end{cases} \quad (3.54)$$

ed, infine, il gruppo delle **trasformazioni pure di Galileo**, corrispondenti alle trasformazioni, con  $(v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} t' = t, \\ x'^i = tv^i + x^i, \quad i=1,2,3. \end{cases} \quad (3.55)$$

Nell'assegnare la forma generale delle funzioni di forza che si esercitano *due punti materiali isolati dal resto da tutti gli altri*, si è assunta l'indipendenza esplicita dal tempo assoluto  $t$ . Tale è equivalente all'invarianza delle funzioni di forza sotto l'azione delle traslazioni temporali: per ogni  $\Delta t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{F}(t + \Delta t, Q, Q', \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) = \mathbf{F}(t, Q, Q', \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) .$$

Questa richiesta di invarianza cade sotto il nome di postulato di **omogeneità temporale**. Analogamente si assumono altri tre postulati. Uno è quello di **omogeneità spaziale** che richiede che le funzioni forza siano invarianti sotto l'azione del gruppo delle traslazioni spaziali. In altre parole, per ogni vettore  $\mathbf{u}$  deve valere:

$$\mathbf{F}(t, Q + \mathbf{u}, Q' + \mathbf{u}, \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) = \mathbf{F}(t, Q, Q', \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) .$$

È ovvio che ciò implichi che le funzioni di forza possano dipendere *solo dai vettori differenza*  $Q(t) - Q'(t)$ , cioè dalle posizioni relative dei punti materiali ad ogni fissato tempo. Un altro postulato è quello dell'**isotropia spaziale** che richiede che se  $g_{O,R}$  è una qualsiasi isometria, associata alla matrice ortogonale  $R$  ed al punto  $O$  che ruota i punti di  $\Sigma_t$  attorno ad  $O \in \Sigma_t$ , della rotazione  $R$  (in altre parole  $g_{O,R}(P) := O + R(P - O)$ ), valga<sup>8</sup>:

$$\mathbf{F}(t, g_{O,R}(Q), g_{O,R}(Q'), R\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, R\mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) = (R\mathbf{F})(t, Q, Q', \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{J}}) .$$

Questo requisito corrisponde ad una forma di “invarianza” delle funzioni forza sotto l'azione del gruppo delle rotazioni. Tuttavia, in base all'identità di sopra, le forze non sono *invarianti* sotto

---

<sup>8</sup>Si tenga conto che  $\mathbf{F}$  è un vettore, per cui l'azione delle rotazioni agisce anche sulla sua direzione. L'equazione dice semplicemente che “ruotare gli argomenti della funzione  $\mathbf{F}$  è equivalente a ruotare il vettore  $\mathbf{F}$ ”.

la'zione delle rotazioni come lo erano sotto l'azione delle traslazioni, dato che a secondo membro appare la rotazione  $R$  che agisce sul valore della forza considerata. L'identità scritta sopra prende allora il nome di **equivarianza** delle funzioni di forza sotto l'azione del gruppo delle rotazioni. Il principio di isotropia dello spazio può non essere valido in questa versione elementare se si assume una nozione più complessa di punto materiale in cui al punto è associato, nel suo sistema di quiete, qualche vettore di significato fisico (momento elettrico, momento magnetico, *spin*, ecc.) Infine il requisito di **invarianza galileiana pura** assume che le leggi di forza siano invarianti sotto trasformazioni di Galileo pure. Per ogni vettore  $\mathbf{V}$  deve essere:

$$\mathbf{F}(t, Q + t\mathbf{V}, Q' + t\mathbf{V}, \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} + \mathbf{V}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{S}} + \mathbf{V}) = \mathbf{F}(t, Q, Q', \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}}, \mathbf{v}_{Q'}|_{\mathcal{S}}) .$$

Tale principio, unitamente al principio di omogeneità spaziale, impone che nelle funzioni di forza appaia solo la *differenza delle velocità* dei punti materiali rispetto a  $\mathcal{S}$ .

Dato che ogni elemento del gruppo di Galileo si costruisce moltiplicando elementi dei 4 sottogruppi menzionati sopra, risulta che le leggi di forza di coppie di punti materiali (isolati dal resto dell'universo) siano invarianti sotto l'azione di ogni elemento del gruppo di Galileo.

La proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo (incluso qui e sotto nel termine “invarianza” l'*equivarianza* rispetto al sottogruppo delle rotazioni per motivi storici) viene assunta, in meccanica classica, a rango di *principio generale* che deve essere soddisfatto da ogni legge formulata in meccanica (non solo dalle leggi di forza):

**C5. Principio di relatività galileiana.** *Tutte le leggi della meccanica classica, in particolare le leggi di forza, sono invarianti sotto l'azione attiva del gruppo di Galileo.*

### Osservazioni 3.6.

(1) Il principio di relatività galileiana ha un'importantissima conseguenza sulle soluzioni delle equazioni del moto per un sistema di punti materiali. Consideriamo un esperimento in cui si studiano  $n$  punti materiali in coordinate cartesiane ortonormali solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . Fissiamo delle condizioni iniziali per i punti assegnando posizioni e velocità di essi al tempo generico  $t_0$  e consideriamo la soluzione ottenuta dalle equazioni di Newton tenendo conto del principio di sovrapposizione. Dal principio di invarianza galileiana e dal fatto che le equazioni di Newton ammettono una sola soluzione quando sono assegnate condizioni iniziali, segue facilmente il seguente risultato (la cui prova è lasciata per esercizio). Se facciamo agire una trasformazione  $g$  del gruppo di Galileo su una soluzione del problema del moto (quindi la stessa trasformazione su ogni punto e per ogni istante), l'evoluzione temporale degli  $n$  punti individuata in questo modo non è altro che la soluzione dello stesso problema del moto, ma con condizioni iniziali trasformate secondo l'azione di  $g$ .

(2) Esiste una formulazione “duale” del principio di invarianza galileiana, basata sul fatto che ogni trasformazione del gruppo di Galileo si può interpretare passivamente: come legge di trasformazione tra le coordinate di due differenti sistemi di riferimento inerziali. È facile convincersi che, da questo punto di vista, il principio suddetto può essere riformulato come segue.

**C5.' Principio di relatività galileiana.** *Tutte le leggi della meccanica hanno la stessa forma*

in coordinate cartesiane ortonormali solidali con ogni sistema di riferimento inerziale. In particolare, se in coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}$  la legge di forza sul  $k$ -esimo punto materiale è definita dalle funzioni componenti

$$f_{Q_k}^i = \mathcal{F}^i(x_{Q_1}^1, x_{Q_1}^2, x_{Q_1}^3, \dots, x_{Q_N}^1, x_{Q_N}^2, x_{Q_N}^3, v_{Q_1}^1, v_{Q_1}^2, v_{Q_1}^3, \dots, v_{Q_N}^1, v_{Q_N}^2, v_{Q_N}^3),$$

nelle coordinate cartesiane ortonormali solidali con un altro  $\mathcal{I}' \in \mathfrak{I}$ , la legge di forza sul  $k$ -esimo punto ha ancora componenti della forma

$$f_{Q_k}'^i = \mathcal{F}^i(x_{Q_1}'^1, x_{Q_1}'^2, x_{Q_1}'^3, \dots, x_{Q_N}'^1, x_{Q_N}'^2, x_{Q_N}'^3, v_{Q_1}'^1, v_{Q_1}'^2, v_{Q_1}'^3, \dots, v_{Q_N}'^1, v_{Q_N}'^2, v_{Q_N}'^3),$$

essendo le funzioni  $\mathcal{F}^i$  le stesse di sopra.

Ora l'osservazione (1) può essere riformulata in *termini passivi* come segue. Consideriamo un esperimento in cui si studiano  $n$  punti materiali (tra di essi interagenti ma isolati con l'esterno) in coordinate cartesiane ortonormali solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Fissiamo delle condizioni iniziali per i punti assegnando posizioni e velocità di essi al tempo generico  $t_0$  e consideriamo la soluzione ottenuta dalle equazioni di Newton tenendo conto del principio di sovrapposizione. Passiamo ad un nuovo riferimento inerziale  $\mathcal{I}' \neq \mathcal{I}$ , assegnando, per lo stesso sistema fisico di prima (isolato all'esterno ma internamente interagente), condizioni iniziali, che in componenti siano identiche alle componenti delle condizioni iniziali date in  $\mathcal{I}$ . Risulta che l'evoluzione del sistema fisico, letta nelle coordinate di  $\mathcal{I}'$  con le nuove condizioni iniziali, sarà *esattamente* la stessa che nel primo caso letta in coordinate di  $\mathcal{I}$  e con le vecchie condizioni iniziali. In questo senso *non è in alcun modo possibile privilegiare un riferimento inerziali rispetto agli altri tramite i risultati di esperimenti di pura meccanica*.

In definitiva vediamo che il principio di invarianza galileiano sancisce che tutti i riferimenti inerziali sono completamente equivalenti ai fini della formulazione e dell'applicazione della meccanica classica e che quindi non ha alcun senso fisico privilegiarne uno nei confronti degli altri. Per questo motivo lo stesso principio viene spesso enunciato dai fisici in modo matematicamente più ambiguo come segue:

**C5'". Principio di invarianza galileiana.(Formulazione fisica).** *Non è in alcun modo possibile privilegiare un sistema di riferimento nella classe dei sistemi di riferimento inerziali tramite i risultati di esperimenti di pura meccanica.*

(3) In una formulazione più avanzata della meccanica e della fisica in generale, si può mostrare il legame profondo che connette le proprietà di invarianza sotto gruppi di trasformazione, con l'esistenza di quantità fisiche che si conservano durante l'evoluzione del sistema (in particolare: impulso, momento angolare ed energia). Vedremo ciò diffusamente nella parte di queste dispense relative al teorema di Noether in meccanica lagrangiana.

### 3.4.2 Il fallimento del programma newtoniano

Malgrado tutto, sappiamo oggi che il programma newtoniano di descrivere le interazioni in termini di forze tra punti materiali è fallito. Il problema sorge radicalmente alla base di tutta la costruzione: la struttura dello spaziotempo che conosciamo non è quella che viene assunta

nel programma galileiano-newtoniano della fisica classica (sia pure letto in chiave moderna). Sappiamo che in realtà la struttura dello spaziotempo è più correttamente descritta dalle teorie relativistiche che si discostano pesantemente dalla formulazione classica quando le velocità in gioco sono grandi (vicine a quelle della luce) e in regimi di campo gravitazionale forte. Forse nessuna struttura di spaziotempo può descrivere accuratamente il mondo fisico come potrebbe risultare dai fenomeni non locali di natura quantistica. Restringendoci alla descrizione della nozione di forza come la abbiamo esposta sopra, il primo assioma a cadere, già in situazioni al limite della fisica classica è sicuramente il principio di azione e reazione (in forma forte e debole), nel caso in cui si lavori con forze tra cariche elettriche in movimento relativo accelerato. Il problema sorge a causa della finitezza della velocità di propagazione delle perturbazioni del campo elettromagnetico generato e responsabile delle forze sulle cariche. Un aspetto interessante della questione è che la conservazione dell'impulso (del momento angolare e dell'energia) continua a valere, malgrado non valga il principio di azione e reazione, purché si tenga conto dell'impulso (del momento angolare e dell'energia) del campo elettromagnetico. In questo modo, malgrado il programma newtoniano sia certamente fallito, conteneva già in termini di teoremi, rielaborati e diventati poi principi, alcuni degli ingredienti fondamentali dei successivi programmi della fisica moderna.

### 3.4.3 Un commento sul cosiddetto “Principio di Mach”

Nella visione di Mach ed Einstein il moto inerziale a velocità costante di un punto materiale isolato, cioè lontano da tutti gli altri corpi dell'universo deve essere in qualche modo *imposto* dalle altre masse dell'universo, sia pur lontanissime, tramite qualche forma di interazione. Questo in essenza è il contenuto fisico del “principio di Mach”.

In ogni caso, tale interazione *non può essere descritta in termini di forze* perché queste ultime descrivono, per definizione, le interazioni tra corpi “vicini”. Per tale motivo il principio d'inerzia non può avere spiegazione dinamica all'interno della meccanica classica e deve essere assunto come principio.

Nell'ottica del Principio di Mach i sistemi di riferimento inerziali altro non sarebbero che “segnaposti” per le masse lontane, e solo rispetto a tali corpi lontani, o rispetto al loro “moto medio”, avviene il moto rettilineo uniforme dei punti materiali isolati<sup>9</sup>.

Per Mach ed Einstein i sistemi di riferimento inerziali non avrebbero quindi senso di esistere se l'universo fosse vuoto o contenesse un unico corpo (al contrario di Newton che dichiarò nei *Principia* che essi esisterebbero ugualmente nel famoso discorso riguardo al cosiddetto “secchio di Newton”). Einstein speculò a lungo sul significato fisico un'eventuale interazione che rendesse conto del moto inerziale, pensando che avesse la stessa natura della gravitazione. Tale idea però non può essere sviluppata nella meccanica classica proprio perché l'interazione gravitazionale è classicamente descritta da una forza. Anche tramite questo tipo di speculazioni Einstein giun-

---

<sup>9</sup>In relazione con ciò si osservi che l'esperienza prova che un ottimo sistema di riferimento inerziale è quello, che risulta esistere, simultaneamente in quiete con le lontanissime cosiddette “stelle fisse” e con il centro di massa del sole.

se a formulare la teoria della Relatività Generale dove, almeno in parte, il Principio di Mach può essere sviluppato anche se non completamente.



## Capitolo 4

# Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie

In questo capitolo introdurremo la teoria elementare dei *sistemi dinamici* in termini di *sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. Dal punto di vista fisico, gli strumenti ed i risultati matematici che introdurremo sono fondamentali per dare senso all'idea di *determinismo* della meccanica classica. Infatti, uno dei fini sarà quello di dimostrare il teorema 3.2 che estenderemo, indebolendo le ipotesi e potenziando la tesi. La dimostrazione di tale teorema sancisce il successo della dinamica newtoniana ai fini della descrizione e della previsione dei fenomeni fisici nell'ambito della meccanica classica.

In tutto il capitolo  $\mathbb{K}$  indica indifferentemente il campo  $\mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{C}$ . In entrambi i casi,  $\mathbb{K}^n$  indica lo spazio vettoriale con campo  $\mathbb{K}$  e di dimensione  $n$  costruito in modo standard.

### 4.1 Sistemi di equazioni differenziali

La nozione fondamentale è quella di *sistema di equazioni differenziali del prim'ordine in forma normale*.

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  (con  $N = 1, 2, \dots$ , fissato) un insieme aperto non vuoto e sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione arbitraria. Un **sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine in forma normale** è un'equazione:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) , \quad (4.1)$$

per la quale si cercano **soluzioni**, cioè funzioni differenziabili della forma  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto, che risolvono (4.1) su  $I$ .

Il sistema è detto propriamente **equazione differenziale ordinaria del prim'ordine in forma normale** se  $n = 1$ . Il sistema è detto **autonomo** se  $\mathbf{f}$  non dipende esplicitamente dalla variabile  $t$ . Infine, se  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è una soluzione di (4.1):

(a) l'insieme  $\{(t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \mid t \in I\} \subset \Omega$  è detto **curva integrale** associata alla soluzione;

(b) l'insieme  $\{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{K}^n \mid t \in I\}$  è detto **orbita** associata alla soluzione.

#### 4.1.1 Riduzione al prim'ordine.

Si può definire analogamente un sistema di equazioni differenziali ordinarie di grado  $k > 1$  in forma normale come:

$$\frac{d^k \mathbf{x}}{dt^k} = \mathbf{f} \left( t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}} \right), \quad (4.2)$$

in cui la funzione incognita soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  è richiesta essere differenziabile fino all'ordine  $k$  su qualche intervallo  $I \ni t$ . la condizione di *normalità* è la richiesta che la derivata di ordine più alto compaia, *da sola*, a primo membro. Trattando la dinamica newtoniana, come abbiamo visto nel capitolo 3, si arriva a scrivere un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale, quando si applica il secondo principio della dinamica ad un sistema di punti materiali (tenendo conto dei vari casi visti nella sezione 3.3 incluso il caso di equazioni pure di movimento). La legge oraria dei punti materiali costituenti il sistema è una soluzione del sistema di equazioni differenziali. I sistemi di equazioni differenziali, per descrivere l'evoluzione di alcuni sistemi, nascono in vari contesti della fisica, ma anche di altre discipline come la biologia, la chimica, la biomatematica (dinamica delle popolazioni). In generale si tratta di sistemi di equazioni differenziali di ordine differente dal secondo. Il secondo ordine è tipico della fisica meccanica e, più in generale, della fisica.

Studiare il caso  $k = 1$  non è restrittivo in quanto ci si può sempre ridurre a tale situazione partendo da  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 1$ . Si consideri, a tal fine, il sistema (4.2) con  $k > 1$ . Definiamo le nuove variabili

$$\mathbf{y}_r := \frac{d^r \mathbf{x}}{dt^r}, \quad \text{per } r = 1, 2, \dots, k-1.$$

Con queste variabili, il sistema (4.2) di ordine  $k$  è equivalente al sistema del prim'ordine, nella nuova variabile  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) \in \mathbb{R}^{kn}$ ,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{X}(t)), \quad (4.3)$$

dove

$$\mathbf{g} : (t, (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1})) \mapsto (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{k-1}(t))).$$

In questo modo, il sistema (4.3) si scrive esplicitamente:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{k-1}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{k-1}(t)), \\ \frac{d\mathbf{y}_{k-2}}{dt} &= \mathbf{y}_{k-1}, \\ \dots &= \dots \\ \frac{d\mathbf{y}_1}{dt} &= \mathbf{y}_2, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{y}_1. \end{aligned}$$

Risulta allora evidente che ogni soluzione  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  di (4.3), con  $t \in I$ , definisce una soluzione di (4.2)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , con  $t \in I$ , estraendo la prima componente della funzione  $\mathbf{X}$ ; viceversa, ogni soluzione di (4.2)  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , con  $t \in I$ , definisce una soluzione di (4.3) data da  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}(t), d\mathbf{x}/dt, \dots, d^{k-1}\mathbf{x}/dt^{k-1})$  con  $t \in I$ .

Riferendoci alle soluzioni  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ , con  $t \in I$  discusse nell'osservazione precedente, notiamo ancora che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  soddisfa le  $k - 1$  condizioni, per  $t_0 \in I$ ,

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \quad \frac{d\mathbf{x}^{k-1}}{dt^{k-1}}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(k-1)}.$$

se e solo se  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$  soddisfa la condizione

$$\mathbf{X}(t_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(k-1)}).$$

#### 4.1.2 Problema di Cauchy.

Passiamo ad introdurre la seconda definizione fondamentale, quella di *problema di Cauchy*, che introduce la nozione di *condizioni iniziali*.

Se  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto, il **problema di Cauchy** per un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine in forma normale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (4.4)$$

consiste nel determinare le soluzioni del sistema (4.4) che soddisfano ulteriormente un'assegnata **condizione iniziale**

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

dove  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ .

In altre parole si cercano le funzioni differenziabili della forma  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto che contiene  $t_0$ , che risolvono (4.4) su  $I$  ed ulteriormente verificano  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

**Osservazioni 4.1.** Possiamo formulare analogamente il problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali di ordine  $k > 1$ .

$$\frac{d^k \mathbf{x}}{dt^k} = \mathbf{f} \left( t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}} \right),$$

cercando le soluzioni del sistema che soddisfino  $k - 1$  **condizioni iniziali**:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \quad \frac{d\mathbf{x}^{k-1}}{dt^{k-1}}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(k-1)}.$$

In base a quanto spiegato nella sezione 4.1.1, questo problema di Cauchy è completamente equivalente ad un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del prim'ordine: c'è una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni del problema di Cauchy di ordine  $k$  e quello di ordine 1 associato. Per questo motivo, nel seguito, studieremo i problemi di esistenza ed unicità per sistemi di Cauchy del prim'ordine unicamente.

### 4.1.3 Integrali primi.

Una nozione utile in varie applicazioni, specialmente alla fisica, della teoria delle equazioni differenziali è la nozione di *integrale primo* che ora definiremo. Non ci occuperemo più di tale nozione fino al capitolo 5.

**Definizione 4.1. (Integrale primo.)** Se  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto, consideriamo un sistema di equazioni differenziali (4.2). Una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  è detta **integrale primo** del sistema, se per ogni soluzione del sistema (4.2)  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  vale:

$$F\left(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1}\mathbf{x}}{dt^{k-1}}\right) = c$$

per qualche costante  $c \in \mathbb{K}$  dipendente, in generale, dalla soluzione considerata.  $\diamond$

## 4.2 Alcune nozioni e risultati preparatori per il teoremi di esistenza e unicità.

Per provare un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy dato dalla (4.4) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , quando la funzione  $\mathbf{f}$  è sufficientemente regolare (localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x}$ ), introdurremo lo spazio di Banach delle funzioni continue su un compatto  $K$  a valori in  $\mathbb{K}^n$ ,  $C^0(K; \mathbb{K}^n)$ , e dimostreremo il teorema del punto fisso per le mappe di contrazione in spazi metrici. Da questo teorema, dopo aver trasformato il problema di Cauchy in un'equazione integrale coinvolgente una certa mappa di contrazione su un sottoinsieme chiuso di  $C^0(K; \mathbb{K}^n)$ , proveremo il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy, nelle forme locali e globali.

### 4.2.1 Lo spazio di Banach $C^0(K; \mathbb{K}^n)$ .

Particolari tipi di spazi metrici sono gli *spazi normati* che hanno una struttura molto più ricca degli spazi metrici.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale  $V$  sul campo  $\mathbb{K}$  (che può essere  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$  indifferentemente come detto all'inizio), si dice **spazio normato** se è dotato di un'applicazione, detta **norma**,  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  che gode delle seguenti proprietà.

- (N1) **positività stretta**: per ogni  $\mathbf{v} \in V$  vale  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  con  $\mathbf{v} = 0$  se  $\|\mathbf{v}\| = 0$ ,
- (N2) **omogeneità**:  $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $\mathbf{v} \in V$ ,
- (N3) **disuguaglianza triangolare**:  $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$  per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  in  $V$ .

### Osservazioni 4.2.

(1) Si noti che (N2) implica che  $\|\mathbf{0}\| = 0$ . Quindi ogni norma soddisfa:  $\|\mathbf{v}\| = 0$  se e solo se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Se (N1) vale in forma debole (**semipositività**):  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  (senza richiedere che  $\|\mathbf{v}\| = 0$

implichi  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) e valgono (N2) e (N3),  $\|\cdot\|$  è detta **seminorma** su  $V$ .

(2) Ogni spazio normato  $V$  con norma  $\|\cdot\|$  ha una naturale struttura di spazio metrico, ed una conseguente topologia metrica, se si definisce la distanza:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

(3) Come gli spazi metrici, gli spazi normati sono spazi di Hausdorff. Pertanto, negli spazi normati vale la proprietà di unicità del limite.

#### Esempi 4.1.

1. L'esempio più semplice di spazio normato è quello costruito sullo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^n$  o  $\mathbb{R}^n$  con norma  $\|\cdot\|$  data dalla norma euclidea standard:

$$\|(c_1, \dots, c_n)\| := \sqrt{|c_1|^2 + \dots + |c_n|^2}$$

dove  $|\cdot|$  è il valore assoluto su  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ .

2. Se  $K$  è uno spazio topologico compatto (per esempio un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$  chiuso e limitato)  $C^0(K; \mathbb{K})$  indica l'insieme delle funzioni *continue* definite su  $K$  a valori in  $\mathbb{K}^n$ , che al solito può essere  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ . Possiamo dotare tale insieme della struttura di spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{K}$ , definendo il prodotto per scalare e la somma di funzioni tramite

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \text{per ogni } f \in C^0(K; \mathbb{K}^n), \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } x \in K$$

e

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad \text{per ogni } f, g \in C^0(K; \mathbb{K}^n) \text{ e } x \in K.$$

Lo spazio  $C^0(K; \mathbb{K}^n)$  assume una struttura di spazio normato definendo la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Tale norma è ben definita in quanto, per ogni  $f \in C^0(K; \mathbb{K}^n)$ , la funzione  $K \ni x \mapsto \|f(x)\|$  è continua (essendo composizione di funzioni continue) ed è quindi limitata essendo definita su un insieme compatto, mentre le proprietà (N1), (N2) e (N3) per  $\|\cdot\|_\infty$  valgono banalmente come conseguenza delle analoghe proprietà valide per  $\|\cdot\|$  punto per punto, e di note proprietà dell'estremo superiore.

Ricordiamo che se  $X$  è uno spazio metrico con distanza  $d$ , una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  è detta **successione di Cauchy** se vale la **condizione di Cauchy**: per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  quando  $n, m > N_\epsilon$ .

Dovrebbe essere ben noto che ogni successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  che converge ad un limite  $x \in X$  è automaticamente di Cauchy. Infatti, in tali ipotesi, per ogni  $\eta > 0$  deve valere  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < 2\eta$  se  $n > M_\eta$  e  $m > M_\eta$  per qualche  $M_\eta \in \mathbb{N}$ . Ma allora, per ogni fissato  $\epsilon > 0$ , definendo  $N_\epsilon := M_\eta$  con  $\eta = \epsilon/2$ , si ha la condizione di Cauchy per la successione

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Ricordiamo che uno spazio metrico è detto **completo** se vale anche il viceversa, cioè se ogni successione di Cauchy converge a qualche elemento dello spazio.

**Definizione 4.2.** Uno spazio normato  $V$  è detto **spazio di Banach** se è completo come spazio metrico.  $\diamond$

Ricordiamo che gli spazi  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  sono completi [Giusti] per cui sono esempi elementari di spazi di Banach. Da ciò segue facilmente che  $\mathbb{K}^n$  dell'esempio 4.1.1 è completo. La dimostrazione è molto semplice. Consideriamo una successione  $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$  dove  $\mathbf{u}_m = (v_{1m}, \dots, v_{nm})$ . Se  $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$  è di Cauchy, sono di Cauchy le successioni  $\{v_{im}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ , per ogni fissato  $i = 1, 2, \dots, n$ , essendo  $|v_{ip} - v_{iq}| \leq \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\|$ . Se  $v_i \in \mathbb{K}$  è il limite a cui tende  $\{v_{im}\}_{m \in \mathbb{N}}$ , è immediato verificare che  $\mathbf{u}_n = (v_{1n}, \dots, v_{nn}) \rightarrow (v_1, \dots, v_n) =: \mathbf{u}$  per  $n \rightarrow +\infty$  dato che

$$\|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}\|^2 = |v_{1m} - v_1|^2 + \dots + |v_{nm} - v_n|^2 \rightarrow 0, \quad \text{per } m \rightarrow +\infty.$$

Il seguente teorema sarà di grande utilità nella teoria delle equazioni differenziali.

**Teorema 4.1.** Se  $K$  è uno spazio topologico compatto, lo spazio normato  $C^0(K; \mathbb{K}^n)$  con norma  $\|\cdot\|_\infty$  è uno spazio di Banach.  $\diamond$

**Dimostrazione.** Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0(K; \mathbb{K}^n)$  una successione di Cauchy. Vogliamo dimostrare che esiste  $f \in C^0(K)$  tale che  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Dato che  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy, per ogni fissato  $x \in K$ , è di Cauchy anche la successione dei vettori di  $\mathbb{K}^n$ :  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ . Infatti:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \sup_{z \in K} \|f_n(z) - f_m(z)\| = \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon, \quad \text{se } n, m < N_\epsilon.$$

In questo modo, dato che  $\mathbb{K}^n$  è completo, punto per punto viene definita la funzione:

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Vogliamo ora provare che  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e che  $f \in C^0(K; \mathbb{K}^n)$ .

Dato che la successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $N_\epsilon$  tale che, se  $n, m > N_\epsilon$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon, \quad \text{per tutti gli } x \in K.$$

D'altra parte, dalla definizione di  $f$ , per un fissato  $x \in K$  e per ogni  $\epsilon'_x > 0$ , esisterà  $N_{x, \epsilon'_x}$  tale che, se  $m > N_{x, \epsilon'_x}$  vale  $\|f_m(x) - f(x)\| < \epsilon'_x$ .

Usando entrambi i fatti abbiamo subito che, se  $n > N_\epsilon$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| < \epsilon + \epsilon'_x$$

dove abbiamo scelto  $m > \max(N_\epsilon, N_{x, \epsilon'_x})$ . In definitiva, se  $n > N_\epsilon$ , vale

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon + \epsilon'_x, \quad \text{per ogni } \epsilon'_x > 0.$$

Dato che  $\epsilon'_x > 0$  è arbitrario, la disuguaglianza di sopra vale anche per  $\epsilon'_x = 0$ , eventualmente diventando un'uguaglianza. In questo modo si perde la dipendenza da  $x$ . In definitiva, per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tale che, se  $n > N_\epsilon$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon, \quad \text{per tutti gli } x \in K. \quad (4.5)$$

Quindi  $\{f_n\}$  converge a  $f$  *uniformemente*. Per un noto teorema di analisi elementare [GiustiI], (di cui riportiamo la dimostrazione immediatamente dopo questa dimostrazione per comodità)  $f$  è allora continua essendo limite uniforme di funzioni continue. Dunque  $f \in C^0(K; \mathbb{K}^n)$ .

Dato che (4.5) vale per ogni  $x \in K$ , vale anche prendendo l'estremo superiore degli  $x$  in  $K$ : per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tale che  $\sup_{x \in K} \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$ , se  $n > N_\epsilon$ . In altre parole

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow +\infty.$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Lemma 4.1.** *Sia  $X$  spazio topologico e si supponga che  $g_n \rightarrow g$  uniformemente per  $n \rightarrow +\infty$  dove  $g_n : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  sono funzioni continue e  $g : X \rightarrow \mathbb{K}^n$  è una funzione. Allora  $g$  è continua su  $X$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** Fissiamo  $x \in X$ . Per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $n > 0$  per cui  $\|g(z) - g_n(z)\| < \epsilon/3$  per ogni  $z \in X$  a causa dell'uniforme convergenza della successione. D'altra parte, dato che  $g_n$  è continua in  $x$ , esiste un intorno  $G_x \subset X$  di  $x$  tale che, per ogni  $y \in G_x$  valga  $\|g_n(x) - g_n(y)\| < \epsilon/3$ . Mettendo tutto insieme, abbiamo ottenuto che, per ogni fissato  $\epsilon > 0$  esiste un intorno  $G_x$  di  $x$  tale che, se  $y \in G_x$ :

$$\|g(x) - g(y)\| < \|g(x) - g_n(x)\| + \|g_n(x) - g_n(y)\| + \|g_n(y) - g(y)\| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Di conseguenza, dato che  $x \in X$  era qualsiasi, abbiamo provato che  $g$  è continua su  $X$ .  $\square$

Per ultimo dimostriamo la seguente elementare proposizione.

**Proposizione 4.1.** *Se  $Y$  è un sottoinsieme non vuoto e chiuso di uno spazio metrico completo  $X$  con distanza  $d$ ,  $Y$  è uno spazio metrico completo rispetto alla restrizione della distanza  $d$  a  $Y \times Y$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** È ovvio che  $Y$  dotato della restrizione di  $d$  a  $Y \times Y$  è uno spazio metrico. Se  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  è una successione di Cauchy, è successione di Cauchy anche nello spazio metrico  $X$ . Dato che  $X$  è completo, esiste  $y \in X$  con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ . Dato che  $Y$  è chiuso, esso contiene i suoi punti di accumulazione, pertanto:  $y \in Y$ . Abbiamo provato che ogni successione di Cauchy in  $Y$  ammette un limite in  $Y$ . Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### 4.2.2 Teorema del punto fisso in spazi metrici completi.

In uno spazio metrico esistono particolari applicazioni che giocano un ruolo centrale nella dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy. Si tratta delle cosiddette *mappe di contrazione*.

**Definizione 4.3.** Sia  $X$  uno spazio metrico con norma  $d$ . Una funzione,  $G : X \rightarrow X$  è detta **mappa di contrazione**, se esiste un numero reale  $\lambda \in [0, 1)$  per cui:

$$d(G(x), G(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \text{per ogni coppia } (x, y) \in X \times X. \quad (4.6)$$

◇

#### Osservazioni 4.3.

- (1) Notare che è esplicitamente *escluso* il valore  $\lambda = 1$ .
- (2) La (4.6) implica immediatamente che: *ogni mappa di contrazione è continua* nella topologia metrica sullo spazio  $X$ . Infatti, dalla (4.6) segue che se  $x \rightarrow y$  allora  $G(x) \rightarrow G(y)$ .
- (3) La definizione vale anche per spazi normati usando la distanza associata alla norma. Si osservi che la funzione  $G$  in tal caso *non* è richiesta essere lineare.

Concludiamo con il *teorema del punto fisso* (di Banach-Caccioppoli) che ha molteplici conseguenze in matematica e nelle sue applicazioni (specialmente in fisica).

**Teorema 4.2. (del punto fisso.)** Sia  $G : X \rightarrow X$  una mappa di contrazione sullo spazio metrico completo (e non vuoto)  $X$ . Esiste, ed è unico, un elemento  $z \in X$ , detto **punto fisso**, tale che:

$$G(z) = z. \quad (4.7)$$

◇

#### Dimostrazione.

*Esistenza del punto fisso.* Si consideri la successione, dove  $x_0 \in X$  è arbitrario, definita per induzione da  $x_{n+1} = G(x_n)$ . Vogliamo provare che questa successione è di Cauchy. Dato che  $X$  è completo esisterà il limite  $x \in X$  della successione. Proveremo infine che tale limite è un punto fisso.

Assumiamo, senza perdere generalità che  $m \geq n$ . Se  $m = n$  banalmente  $d(x_m, x_n) = 0$ , se  $m > n$  possiamo usare ripetutamente la disuguaglianza triangolare ottenendo:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n). \quad (4.8)$$

Consideriamo il generico termine a secondo membro:  $d(x_{p+1}, x_p)$ . Vale:

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_p) &= d(G(x_p), G(x_{p-1})) \leq \lambda d(x_p, x_{p-1}) = \lambda d(G(x_{p-1}), G(x_{p-2})) \leq \lambda^2 d(x_{p-1}, x_{p-2}) \\ &\leq \cdots \leq \lambda^p d(x_1, x_0). \end{aligned}$$



Quindi, per ogni  $p = 1, 2, \dots$  vale la disuguaglianza  $d(x_{p+1}, x_p) \leq \lambda^p d(x_1, x_0)$ . Inserendo questa nel secondo membro di (4.8) otteniamo la stima:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{p=n}^{m-1} \lambda^p = d(x_1, x_0) \lambda^n \sum_{p=0}^{m-n-1} \lambda^p \leq \lambda^n d(x_1, x_0) \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^p \leq d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$$

dove abbiamo usato il fatto che, se  $0 \leq \lambda < 1$ ,  $\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^p = (1-\lambda)^{-1}$ . Concludiamo che:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0) \frac{\lambda^n}{1-\lambda}. \quad (4.9)$$

Nelle nostre ipotesi  $|\lambda| < 1$  per cui  $d(x_1, x_0) \lambda^n / (1-\lambda) \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi  $d(x_m, x_n)$  può essere reso piccolo a piacere scegliendo il più piccolo tra  $m$  ed  $n$  sufficientemente grande. Questo risultato implica immediatamente che la successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sia di Cauchy. Dato che  $X$  è completo, sarà  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in X$  per qualche  $x$ . Dato che  $G$  è continua essendo una mappa di contrazione:

$$G(x) = G\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x,$$

per cui  $G(x) = x$  come volevamo provare.

*Unicità del punto fisso.* Supponiamo che  $x$  e  $x'$  soddisfino entrambi  $G(x) = x$  e  $G(x') = x'$ . Vale allora

$$d(x, x') = d(G(x), G(x')) \leq \lambda d(x, x').$$

Se fosse  $d(x, x') \neq 0$ , dividendo il primo e l'ultimo membro per  $d(x, x')$ , otterremmo la disuguaglianza  $1 \leq \lambda$  che è impossibile per ipotesi. Quindi deve essere  $d(x, x') = 0$  da cui  $x = x'$  per la stretta positività della distanza.  $\square$

### 4.2.3 Funzioni lipschitziane.

Come ultimo ingrediente, per applicare la tecnologia matematica introdotta al teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy, introduciamo la nozione di *funzione (localmente) lipschitziana*. Questa nozione serve a specificare il grado di regolarità della funzione che compare a secondo membro nell'equazione differenziale che definisce il problema di Cauchy.

**Definizione 4.4.** Siano  $p \geq 0$  e  $n, m > 0$  naturali fissati e  $\Omega \subset \mathbb{K}^p \times \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto.  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$  è detta **localmente lipschitziana** (nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  quando  $p > 0$ ), se per ogni  $q \in \Omega$  esiste una costante  $L_q \geq 0$  tale che, in un aperto  $O_q \ni q$ , valga:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{x}')\| \leq L_q \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|, \quad \text{per ogni coppia } (\mathbf{z}, \mathbf{x}), (\mathbf{z}, \mathbf{x}') \in O_q. \quad (4.10)$$

Se  $O_q = \Omega$ , la funzione  $\mathbf{F}$  è detta **lipschitziana** (nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  quando  $p > 0$ ).

$\diamond$

**Osservazioni 4.4.** Nella (4.10) le coppie  $(\mathbf{z}, \mathbf{x}), (\mathbf{z}, \mathbf{x}')$  hanno *lo stesso* primo elemento  $\mathbf{z}$ .

**Esempi 4.2.**

1. Usiamo le solite notazioni  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^p)$  e, per una funzione  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega = A \times B$  con  $A \subset \mathbb{R}^p$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  aperti non vuoti, usiamo la notazione  $\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = (F^1(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \dots, F^m(\mathbf{z}, \mathbf{x}))$ . La classe delle funzioni localmente lipschitziane è grandissima. Per esempio, vale la seguente proposizione.

**Proposizione 4.2.**  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega$  suddetto è sicuramente localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x}$  se, per ogni  $\mathbf{z} \in A$ , tutte le funzioni  $B \ni \mathbf{x} \mapsto F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x})$  sono differenziabili e le derivate parziali, al variare di  $(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ , definiscono funzioni continue<sup>1</sup> su  $\Omega$ .

**Dimostrazione.** Consideriamo  $q = (\mathbf{z}_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  e siano  $B_{\mathbf{x}_0} \subset \mathbb{R}^n$  e  $B'_{\mathbf{z}_0} \subset \mathbb{R}^p$  palle aperte di raggio finito (non nullo) centrate rispettivamente in  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{z}_0$  tali che

$$\overline{B'_{\mathbf{z}_0}} \times \overline{B_{\mathbf{x}_0}} \subset \Omega.$$

Se  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B_{\mathbf{x}_0}}$ , il segmento  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  è tutto contenuto in  $\overline{B_{\mathbf{x}_0}}$  per  $t \in [0, 1]$ , inoltre  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_2$ .

Se  $\mathbf{z} \in B'_{\mathbf{z}_0}$  e per ogni fissato  $k = 1, 2, \dots, m$ , possiamo applicare il teorema di Lagrange alla funzione  $[0, 1] \ni t \mapsto f(t) := F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}(t))$ , in modo che  $f(1) - f(0) = 1f'(\xi)$  per qualche  $\xi \in (0, 1)$  che dipenderà da  $k$  e da  $\mathbf{z}$ . Questa identità si riscrive in termini di  $F^k$

$$F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_2) - F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_1) = F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}(1)) - F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}(0)) = \sum_{j=1}^n (x_2^j - x_1^j) \left. \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{x}(\xi))},$$

Di conseguenza, applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\left| F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_2) - F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_1) \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_2^j - x_1^j|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{x}(\xi))}^2} \leq \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{x}(\xi))}^2}.$$

Dato che le derivate nell'ultimo membro sono continue sul compatto  $\overline{B'_{\mathbf{z}_0}} \times \overline{B_{\mathbf{x}_0}}$  esisterà  $M_k \in [0, +\infty)$  con, su  $\overline{B'_{\mathbf{z}_0}} \times \overline{B_{\mathbf{x}_0}}$ ,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{x})}^2} \leq M_k.$$

---

<sup>1</sup>Tenendo conto che condizione sufficiente affinché una funzione di più variabili sia differenziabile su un aperto è che esistono e siano continue le derivate parziali su tale aperto, la richiesta completa equivale alla condizione che le funzioni

$$\Omega \ni (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mapsto \left. \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{x})}, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n,$$

esistano e siano funzioni continue su  $\Omega$ .

In definitiva, sull'intorno aperto di  $q$ ,  $B'_{\mathbf{z}_0} \times B_{\mathbf{x}_0}$ , vale la stima, per ogni  $k$

$$\left| F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_2) - F^k(\mathbf{z}, \mathbf{x}_1) \right| \leq M_k \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

Se infine  $M := \sqrt{\sum_{k=1}^m M_k^2}$ , si ha immediatamente che sull'intorno aperto di  $q$ ,  $B'_{\mathbf{z}_0} \times B_{\mathbf{x}_0}$ :

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mathbf{x}_1)\| \leq M \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|.$$

Questa disuguaglianza prova quanto volevamo dimostrare.  $\square$

Si osservi che la tesi della proposizione vale anche rimpiazzando  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente con  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{C}^m$  e richiedendo che, posto  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$  (con, dunque  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  parte reale ed immaginaria di  $\mathbf{x}$  rispettivamente), tutte le derivate parziali  $\frac{\partial}{\partial u^i} \operatorname{Re} F^k$ ,  $\frac{\partial}{\partial u^i} \operatorname{Im} F^k$ ,  $\frac{\partial}{\partial v^i} \operatorname{Re} F^k$ ,  $\frac{\partial}{\partial v^i} \operatorname{Im} F^k$  esistano e siano funzioni continue di tutte le variabili  $\mathbf{z}, \mathbf{x}$ . La prova è lasciata per esercizio.

**2.** Dall'esempio precedente segue, in particolare, che ogni  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  è localmente lipschitziana.

**3.** Usando le solite convenzioni  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^p)$  e considerando sempre una funzione  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ , si possono estendere le osservazioni appena fatte al caso di funzione lipschitziana e non solo *localmente* tale. Segue immediatamente dal discorso appena fatto che  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  è lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se ristretta ad ogni aperto limitato della forma  $A \times C$  con  $A \subset \mathbb{R}^p$ ,  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{A \times C} \subset \Omega$  e dove  $C$  è convesso. In tal caso, infatti, le derivate prime delle varie componenti sono sicuramente limitate sul compatto  $\overline{A \times C}$ , essendo funzioni continue; inoltre l'ipotesi di convessità permette di scegliere i punti  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  arbitrariamente in  $C$ , essendo sicuri che il segmento che unisce tali punti sia tutto contenuto in  $C$ . L'argomento usato sopra basato sul teorema di Lagrange prova la lipschitzianità nella variabile  $\mathbf{x} \in C$ .

Se  $\Omega$  è convesso (per es.  $\Omega = \mathbb{R}$ ) e tutte le derivate prime di  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  sono limitate su  $\Omega$ , allora  $\mathbf{F}$  è lipschitziana su  $\Omega$ .

**4.** La funzione continua  $f(x) = |x|$ , da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , è localmente lipschitziana nella variabile  $x$ , anche se *non è differenziabile per  $x = 0$* . Dimostriamolo. Per  $x \neq 0$ , c'è un intorno aperto di tale punto in cui la funzione è  $C^\infty$ , per cui vale quanto detto nell'esempio precedente. Consideriamo infine un intorno di  $x = 0$ ,  $I := (-\epsilon, \epsilon)$  (con  $\epsilon > 0$ ). Se  $x_1, x_2 \in I$  sia, senza perdere generalità  $|x_2| \geq |x_1|$ , allora  $|x_2| = |x_2 - x_1 + x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_1|$  da cui  $|x_2| - |x_1| \leq |x_2 - x_1|$ . Ossia, nelle ipotesi fatte  $||x_2| - |x_1|| \leq |x_2 - x_1|$ , che significa

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|, \quad \text{per ogni coppia } x_1, x_2 \in I.$$

**5.** La funzione continua da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

*non* è invece localmente lipschitziana (nella variabile  $x$  ovviamente). Se escludiamo il punto  $x = 0$  dal dominio, ovviamente la funzione è localmente lipschitziana per l'esempio 3, essendo in tale

dominio  $C^\infty$ . Il problema è quindi il comportamento della funzione attorno a  $x = 0$ . Mostriamo che per ogni fissato intorno aperto  $I$  di 0 non esiste alcuna costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che, se  $x_1, x_2 \in I$ , valga  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq c|x_2 - x_1|$ . Possiamo assumere  $I := (-\epsilon, \epsilon)$ , con  $\epsilon > 0$ , in quanto, se  $c$  non esiste per gli intervalli del tipo detto, non può esistere nemmeno per gli intorni<sup>2</sup>. Procediamo *per assurdo*. Assumiamo che esista una costante  $c \in \mathbb{R}$  che verifichi  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq c|x_2 - x_1|$  per ogni coppia  $x_1, x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Scegliamo  $x_2 := z \in (0, \epsilon)$  e  $x_1 = -z$ . La disuguaglianza  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq c|x_2 - x_1|$  si scrive allora  $\sqrt{z} \leq 2cz$ . Di conseguenza deve valere  $2c \geq 1/\sqrt{z}$  per ogni  $z > 0$  arbitrariamente piccolo. Questo è impossibile comunque fissiamo il valore della costante  $c$ .

### 4.3 Teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

Siamo ora in grado di enunciare e provare i teoremi di esistenza ed unicità del problema di Cauchy nella forma locale e globale.

#### 4.3.1 Teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy.

Cominciamo a dimostrare che in un intorno sufficientemente piccolo delle condizioni iniziali, il problema di Cauchy ammette una sola soluzione se la funzione  $\mathbf{f}$  che appare nell'equazione differenziale è continua, e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x}$ .

**Teorema 4.3. (Esistenza ed unicità locale)** *Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  e si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.12)$$

*C'è un intervallo aperto  $I \ni t_0$  in cui esiste, ed è unica, la soluzione di (4.12),  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Inoltre tale funzione è necessariamente in  $C^1(I)$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** Prima di tutto notiamo che ogni soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  di (4.12) è necessariamente di classe  $C^1$ . Infatti è sicuramente continua in quanto differenziabile, ma allora, direttamente da  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$  concludiamo che  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  deve essere continua essendo il secondo membro dell'equazione una funzione continua di  $t$  in quanto composizione di funzioni continue.

Passiamo all'esistenza ed all'unicità. Supponiamo che  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  sia differenziabile e soddisfi (4.12). Tenendo conto del secondo teorema fondamentale del calcolo ed integrando (4.12) (la derivata di  $\mathbf{x}(t)$  è continua),  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  deve soddisfare,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau, \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (4.13)$$

---

<sup>2</sup>ogni intorno aperto di 0 include un intervallo del tipo detto!

Viceversa, se  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è continua e soddisfa (4.13) allora, per il primo teorema fondamentale del calcolo ( $\mathbf{f}$  è continua),  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  è differenziabile e soddisfa (4.12).

Concludiamo che funzioni continue  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , definite su un intervallo aperto  $I \ni t_0$  e che risolvono l'equazione integrale (4.13), sono tutte e sole le soluzioni di (4.12) definite sullo stesso intervallo  $I$ . Invece di risolvere (4.12) risolviamo il problema integrale equivalente (4.13).

*Dimostrazione dell'esistenza.* Fissiamo, una volta per tutte, un insieme aperto  $Q \ni (t_0, \mathbf{x}_0)$  a chiusura compatta e con  $\overline{Q} \subset \Omega$ . Prendendo  $\overline{Q}$  sufficientemente piccolo possiamo sfruttare anche la locale lipschitzianità di  $\mathbf{f}$  nella variabile  $\mathbf{x}$ . Nel seguito:

- (i)  $0 \leq M := \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \mid (t, \mathbf{x}) \in \overline{Q}\}$ ;
- (ii)  $L \geq 0$  è la costante per cui  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}')\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$  se  $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}') \in \overline{Q}$ ;
- (iii)  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon\}$  per  $\epsilon > 0$ .

Consideriamo un intervallo chiuso  $J_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  con  $\delta > 0$  e consideriamo lo spazio di Banach  $C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n)$  delle funzioni continue  $\mathbf{X} : J_\delta \rightarrow \mathbb{K}^n$ . In questo spazio definiamo la funzione  $G$ , che associa ad ogni funzione  $\mathbf{X}$  la nuova funzione  $G(\mathbf{X})$  definita da

$$G(\mathbf{X})(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau)) d\tau, \quad \text{per ogni } t \in J_\delta.$$

Si osservi che  $G(\mathbf{X}) \in C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n)$  se  $\mathbf{X} \in C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n)$  per le proprietà di continuità della funzione integrale (come funzione dell'estremo superiore quando l'integrando è continuo). Mostriamo che  $G$  è una mappa di contrazione su un sottoinsieme chiuso di  $C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n)$  dato dalla palla chiusa<sup>3</sup> di raggio  $\epsilon > 0$ :

$$\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)} := \{\mathbf{X} \in C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n) \mid \mathbf{X}(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0), \forall t \in J_\delta\},$$

se  $0 < \delta < \min\{\epsilon/M, 1/L\}$  e  $\delta, \epsilon > 0$  sono piccoli a sufficienza da soddisfare  $J_\delta \times B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset Q$ .

In tutto il seguito assumeremo quindi sempre di aver scelto  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  in modo che valga  $J_\delta \times B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset Q$ .

Se  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  vale, assumendo  $t \geq t_0$ :

$$\|G(\mathbf{X})(t) - \mathbf{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau))\| d\tau \leq \int_{t_0}^t M d\tau \leq \delta M.$$

Assumendo  $t \leq t_0$  si ottiene la stessa maggiorazione finale, tenendo conto che si deve cambiare il segno degli integrali nelle ultime due maggiorazioni. Quindi  $G(\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}) \subset \mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  se  $\delta > 0$  è sufficientemente piccolo da soddisfare  $\delta < \epsilon/M$  (rispettando il vincolo  $J_\delta \times B_\epsilon \subset Q$ ).

Se  $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  si ha, per ogni  $t \in J_\delta$  con  $t \geq t_0$ :

$$G(\mathbf{X})(t) - G(\mathbf{X}')(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}'(\tau))] d\tau,$$

---

<sup>3</sup>Si osservi che si può anche scrivere  $\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)} = \{\mathbf{X} \in C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n) \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|_\infty \leq \epsilon\}$ , dove  $\mathbf{X}_0$  indica qui la funzione che vale costantemente  $\mathbf{x}_0$  su  $J_\delta$ . Pertanto  $\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  è la palla chiusa di raggio  $\epsilon$  centrata in  $\mathbf{X}_0$  dello spazio di Banach  $C^0(J_\delta; \mathbb{K}^n)$ .

$$\|G(\mathbf{X})(t) - G(\mathbf{X}')(t)\| \leq \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}'(\tau))] d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}'(\tau))\| d\tau.$$

Dato che nelle nostre ipotesi vale la maggiorazione lipschitziana

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}')\| < L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

si ha ancora, sempre assumendo  $t \geq t_0$ :

$$\|G(\mathbf{X})(t) - G(\mathbf{X}')(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{X}'(\tau)\| d\tau \leq \delta L \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\infty.$$

Infine, prendendo l'estremo superiore anche del primo membro si ha:

$$\|G(\mathbf{X}) - G(\mathbf{X}')\|_\infty \leq \delta L \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\|_\infty.$$

Per  $t \leq t_0$  si trova lo stesso risultato. Concludiamo che, se vale (in aggiunta a quanto richiesto sopra)  $\delta < 1/L$ ,  $G : \mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)} \rightarrow \mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  è una mappa di contrazione sull'insieme chiuso  $\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$ . Tale insieme è chiuso in uno spazio metrico completo per cui vale la proposizione 4.1 e  $\mathcal{B}_\epsilon^{(\delta)}$  è, a sua volta, spazio metrico completo. Per il teorema 4.2 esisterà un punto fisso per  $G$ , cioè una funzione continua  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{K}^n$  con  $t \in J_\delta$ , che soddisfa la (4.13) per definizione di  $G$ . La restrizione di tale funzione all'intervallo aperto  $I := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  è quindi una soluzione del problema di Cauchy (4.12).

*Dimostrazione dell'unicità.* Consideriamo, nell'intervallo  $I := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  ottenuto sopra, una seconda soluzione  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$  dell'equazione integrale (4.13) a priori differente dalla soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Per costruzione, per ogni intervallo chiuso  $J_{\delta'} := [t_0 - \delta', t_0 + \delta']$  con  $0 < \delta' < \delta$  la funzione  $G : \mathcal{B}_\epsilon^{(J_{\delta'})} \rightarrow \mathcal{B}_\epsilon^{(J_{\delta'})}$  è ancora una mappa di contrazione e  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$  è un suo punto fisso. (In particolare, il fatto che la restrizione di  $\mathbf{x}'$  a  $J_{\delta'}$  sia nello spazio metrico completo  $\mathcal{B}_\epsilon^{(J_{\delta'})}$ , segue subito dalla disuguaglianza provata prima,  $\|G(\mathbf{x}') - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \delta' M < \epsilon$ , osservando che  $G(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'$ .) Un altro punto fisso è la restrizione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  all'intervallo  $J_{\delta'}$ . Per l'unicità del punto fisso le due soluzioni devono coincidere in  $[t_0 - \delta', t_0 + \delta']$ . Dato che  $\delta'$  è fissabile arbitrariamente in  $(0, \delta)$ , le due soluzioni coincidono su  $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ .  $\square$

Più avanti sarà utile il seguente lemma che è stato provato nella dimostrazione del problema precedente.

**Lemma 4.2.** *In riferimento alle ipotesi del teorema 4.3, sia  $Q \ni (t_0, \mathbf{x}_0)$  un insieme aperto chiusura compatta con  $\overline{Q} \subset \Omega$  sul quale  $\mathbf{f}$  è lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x}$  con costante  $L \geq 0$ . Posto  $M := \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \mid (t, \mathbf{x}) \in \overline{Q}\}$  e  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon\}$ , se  $\delta, \epsilon > 0$  sono piccoli a sufficienza da soddisfare:*

$$(i) \ 0 < \delta < \min\{\epsilon/M, 1/L\},$$

$$(ii) \ [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset Q,$$

*allora  $I := (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  è un intervallo su cui vale la tesi del teorema 4.3 e la soluzione soddisfa*

$(t, \mathbf{x}(t)) \in I \times B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $t \in I$ .  $\diamond$

#### Osservazioni 4.5.

(1) La richiesta di locale lipschitzianità non è necessaria per l'*esistenza* di una soluzione. Esiste infatti un teorema, dovuto a Peano ed esteso da Picard, che prova l'esistenza di una soluzione per un qualsiasi problema di Cauchy con  $\mathbf{f}$  continua, ma non necessariamente lipschitziana. L'esempio classico è il problema di Cauchy con  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

dove  $f$  è la funzione che non è localmente lipschitziana in ogni intorno di  $(t, x) = (0, 0)$  definita in (4.11). Tuttavia la funzione di classe  $C^1$  per  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$x(t) := \begin{cases} t^2/4 & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

risolve il problema di Cauchy.

Altri teoremi di esistenza (ma non di unicità) per le soluzioni del problema di Cauchy, sono basati su altre forme del teorema del punto fisso che richiedono ipotesi più deboli della locale lipschitzianità, come il *teorema del punto fisso di Schauder* che generalizza al caso infinito dimensionale il più noto *teorema del punto fisso di Brouwer*.

(2) La richiesta di lipschitzianità è generalmente necessaria per avere l'*unicità* della soluzione. A titolo di esempio, si osservi che, in aggiunta alla soluzione (4.14), il problema di Cauchy nell'esempio precedente ammette anche la soluzione  $x(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Esempi 4.3.

1. In questo esempio trattiamo un modo formale per determinare soluzioni di una classe di equazioni differenziali dette *a variabili separabili*. La procedura è molto utile nella pratica ma è in generale valida solo localmente. Consideriamo un'equazione differenziale della forma (normale) a **variabili separabili**:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y(x)) \quad (4.15)$$

dove le due funzioni  $f = f(x)$  e  $g = g(y)$ , rispettivamente definite sugli intervalli aperti  $I$  e  $J$  in  $\mathbb{R}$  siano funzioni continue e  $g$  sia localmente lipschitziana. Se  $y = y(x)$  soddisfa l'equazione detta in  $I$  o in un intervallo aperto incluso in  $I$ , allora deve essere una funzione di classe  $C^1$  su tale intervallo per costruzione. Supponiamo di fissare la condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$  con  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ . Nelle ipotesi fatte su  $f$  e  $g$  esiste un'unica soluzione locale  $y = y(x)$  (in un intervallo aperto che contiene  $x_0$ ) per problema di Cauchy dato dall'equazione (4.15) con le condizioni iniziali  $y(x_0) = y_0$ . Se vale  $g(y_0) \neq 0$ , allora la funzione  $1/g(y)$  sarà ben definita, con segno

costante pari a quello di  $g(y_0)$ , e continua in un intervallo aperto che include  $y_0$ . Dovrà allora valere, fintanto che  $1/g(y(x))$  è ben definita sul dominio della soluzione:

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{g(y(x))} = f(x) . \quad (4.16)$$

Integrando membro a membro (i due integrandi sono continui e quindi integrabili):

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{dx'} \frac{1}{g(y(x'))} dx' = \int_{x_0}^x f(x') dx' . \quad (4.17)$$

Cambiando infine variabile nell'integrale a primo membro in (4.17) abbiamo:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy'}{g(y')} = \int_{x_0}^x f(x') dx' \quad (4.18)$$

Questa identità fornisce la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita. È fondamentale notare che se  $g(y_0) = 0$ , la procedura non può essere usata, ma è comunque chiaro che la soluzione costante  $y(x) = y_0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , è l'unica a soddisfare il problema di Cauchy (ed è anche massimalmente estesa). Se si lascia cadere l'ipotesi della locale lipschitzianità di  $g$ , l'unicità di tale soluzione (ma anche di ogni altra cambiando le condizioni iniziali) non è assicurata.

Se non fissiamo alcuna condizione iniziale, dall'equazione differenziale (4.15) ricaviamo comunque l'identità, valida per le soluzioni dell'equazione detta, purché i due membri esistano:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C , \quad (4.19)$$

dove  $C$  è una qualsiasi costante d'integrazione. L'identità (4.19) individua implicitamente una classe di possibili soluzioni al variare del parametro  $C \in \mathbb{R}$ . La costante  $C$  viene fissata dalle condizioni iniziali, la garanzia che la soluzione trovata sia (localmente) l'unica possibile, si deve però discutere separatamente in base al teorema di unicità.

**2.** Consideriamo l'equazione differenziale  $\frac{dy}{dx} = xy^2$  con condizione iniziale  $y(0) = 1$ . Siamo nelle ipotesi per poter applicare la tecnica delle variabili separabili descritta sopra, ottenendo:

$$\int_1^y \frac{dy'}{y'^2} = \int_0^x x' dx'$$

e quindi:

$$-\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{1} = \frac{x^2}{2} - 0 ,$$

da cui:

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2} .$$

Tale funzione è definita per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$  ed è l'unica soluzione del problema di Cauchy posto in un intorno di  $x = 0$ . In realtà, in virtù del teorema 4.5 che dimostreremo sotto, la



sua restrizione sull'intervallo  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  è l'unica soluzione *massimale* del problema di Cauchy considerato: ogni altra soluzione nell'intorno di  $x = 0$  è una restrizione di essa. Si osservi ancora che i punti  $x = \pm\sqrt{2}$  sono fuori dal dominio della soluzione per il problema di Cauchy considerato in cui la condizione iniziale era assegnata a  $x = 0$ . Tuttavia non c'è alcun problema nell'assegnare la condizione iniziale per  $x = \sqrt{2}$  studiando dunque un *nuovo* problema di Cauchy, indipendente dal precedente, e ottenendo un'altra soluzione (che deve esistere ed essere unica, dato che siamo sempre nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità). Se con la stessa equazione differenziale  $\frac{dy}{dx} = xy^2$  imponiamo la condizione iniziale  $y(\sqrt{2}) = 1$  possiamo ottenerne la soluzione con i metodi descritti precedentemente. Volendo usare la procedura (4.19), abbiamo:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx + C ,$$

e cioè:

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C .$$

Da cui:

$$y(x) = \frac{2}{2C - x^2} .$$

Imponendo la condizione iniziale  $x(\sqrt{2}) = 1$  abbiamo infine:

$$1 = \frac{2}{2C - 2}$$

da cui si ricava che  $C = 2$  e quindi:

$$y(x) = \frac{2}{4 - x^2} .$$

Questa soluzione del problema di Cauchy è ben definita in  $x \in (-2, +2)$ . In realtà, in virtù del teorema 4.5 che dimostreremo sotto, tale funzione è l'unica soluzione *massimale* del problema di Cauchy: ogni altra soluzione nell'intorno di  $x = \sqrt{2}$  è una restrizione di essa.

**3.** Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3} .$$

Il secondo membro definisce una funzione  $C^1$  ovunque in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  su cui è di conseguenza localmente lipschitziana. La funzione non è però localmente lipschitziana nell'intorno dell'origine. Pertanto scegliendo condizioni iniziali  $y(x_0) = y_0 \neq 0$  vale il teorema di esistenza ed unicità, ma non c'è garanzia di unicità se si sceglie la condizione iniziale  $y(x_0) = 0$ . Usando la (4.19), si ha la classe di soluzioni definita implicitamente da:

$$\int y^{-1/3} dy = \int dx + C ,$$

da cui:

$$y(x) = \pm \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3} , \tag{4.20}$$

dove il segno davanti al secondo membro in (4.20) deve coincidere con quello di  $y_0$  per continuità. Si vede subito che ogni fissata condizione iniziale  $y(0) = y_0 \neq 0$  determina un solo valore

$$C = C_0 := \frac{3}{2}(y_0^2)^{1/3}.$$

In questo modo

$$y(x) = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}x + (y_0^2)^{1/3}\right)^3},$$

per  $x > -C_0$ , è una soluzione locale (l'unica) del problema di Cauchy considerato. In realtà, in virtù del teorema 4.5 che dimostreremo sotto, tale funzione è l'unica soluzione *massimale* del problema di Cauchy: ogni altra soluzione nell'intorno di  $x = 0$  è una restrizione di essa.

La classe di soluzioni (4.20), in realtà contiene anche una soluzione che soddisfa la condizione iniziale patologica  $y(0) = 0$ . Tale soluzione è data da  $y(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3}$  se  $x \geq 0$ , e si prolunga in  $y(x) = 0$  se  $x < 0$  dando luogo ad una funzione  $C^1(\mathbb{R})$  che soddisfa il problema di Cauchy considerato. Tuttavia questa *non* è l'unica soluzione del problema di Cauchy considerato (come ci si aspetta dalla non validità delle ipotesi del teorema di unicità), dato che anche la soluzione costante  $y(x) = 0$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , soddisfa lo stesso problema di Cauchy.

#### 4.3.2 Condizione per gli integrali primi.

Mostriamo come il teorema di esistenza ed unicità implichi una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia un integrale primo (definizione 4.1). Enunciamo il teorema nel caso di sistemi di grado 1, lasciamo al lettore l'estensione (ovvia) al caso generale.

**Teorema 4.4.** *Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ . Una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  ovunque differenziabile è un integrale primo per il sistema di equazioni differenziali*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

*se e solo se vale:*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} F|_{(t, \mathbf{x})} + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(t, \mathbf{x})} = 0, \quad \text{per ogni } (t, \mathbf{x}) \in \Omega. \quad (4.21)$$

◇

**Dimostrazione.** Si supponga che valga la condizione (4.21). Se  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  con  $t \in I$  intervallo aperto in  $\mathbb{R}$  è una soluzione del sistema, allora

$$\frac{d}{dt} F(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} F|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0,$$

per cui  $I \ni t \mapsto F(t, \mathbf{x}(t))$  è costante su ogni soluzione. Viceversa, se  $F$  differenziabile è integrale primo, allora vale

$$\frac{d}{dt}F(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}F|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0,$$

su ogni soluzione. D'altra parte per il teorema 4.3, per ogni punto  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  c'è una soluzione del sistema di equazioni differenziali che soddisfa  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  e pertanto:

$$\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}F|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} + \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{(t_0, \mathbf{x}_0)} = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione in virtù dell'arbitrarietà del punto  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ .  $\square$

### 4.3.3 Teorema di esistenza ed unicità globale per il problema di Cauchy.

Ci occupiamo ora di dimostrare l'esistenza e l'unicità delle soluzioni "in grande". Per prima cosa dimostriamo la seguente proposizione.

**Proposizione 4.3.** *Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  e si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Se  $\mathbf{x}_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $\mathbf{x}_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{K}^n$  sono due soluzioni del problema di Cauchy (4.22) definite sugli intervalli aperti  $I_1 \ni t_0$  e  $I_2 \ni t_0$  rispettivamente, allora

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t), \quad \text{se } t \in I_1 \cap I_2.$$

$\diamond$

**Dimostrazione.** Per il teorema 4.3, le due soluzioni coincideranno sicuramente nell'intervallo  $I$  che contiene  $t_0$  in cui vale il teorema di unicità locale. Se  $I \supset I_1 \cap I_2$  non c'è nulla da provare. Supponiamo quindi che  $I \subsetneq I_1 \cap I_2$ . Per fissare le idee lavoriamo nell'intorno destro di  $t_0$  (la prova per l'intorno sinistro è analoga). Sappiamo dunque che, per un certo  $t_1 > t_0$ , vale  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$  se  $t_0 \leq t < t_1$ . Sia  $t_2 > t_1$  l'estremo destro di  $I_1 \cap I_2$ , eventualmente  $t_2 = +\infty$ . Vogliamo mostrare che  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$  se  $t_0 \leq t < t_2$ .

Sia

$$s := \sup\{T \in \mathbb{R} \mid t_0 \leq T < t_2, \quad \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \text{ se } t_0 \leq t < T.\}$$

Tale estremo superiore esiste perché l'insieme considerato è non vuoto, e vale  $s < +\infty$  se  $t_2 < +\infty$  perché, in tal caso, l'insieme è superiormente limitato. Se fosse  $s < t_2$  (e quindi  $s$  sarebbe necessariamente finito anche se  $t_2 = +\infty$ ) avremmo, per continuità, che  $\mathbf{x}_1(s) = \mathbf{x}_2(s)$ , dato

che le due soluzioni sono continue e coincidono per tutti i punti precedenti a  $s$ . Impostando il problema di Cauchy con la stessa funzione  $\mathbf{f}$  e condizione iniziale  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_1(s)$ , avremmo che esiste un intervallo aperto  $I_s \ni s$  in cui il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Ne conseguirebbe che in un intorno destro di  $s$  varrebbe ancora  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ . Ma questo sarebbe impossibile per la definizione di  $s$ . Concludiamo che  $s = t_2$ . Pertanto per la definizione di  $s$ ,  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$  se  $t_0 \leq t < t_2$ .  $\square$

Passiamo a considerare le *soluzioni massimali* di un problema di Cauchy. La seguente definizione precisa cosa intendiamo per soluzione massimale. Dal punto di vista intuitivo, intendiamo una soluzione che non possa essere estesa in una soluzione più grande dello stesso problema di Cauchy. Si osservi che una soluzione può essere massimale pur non essendo definita su tutto  $(-\infty, +\infty)$ .

**Definizione 4.5.** Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  e si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Una soluzione di (4.23)  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I \ni t_0$  intervallo aperto, è detta **soluzione massimale** se non esiste alcuna altra soluzione di (4.23)  $\mathbf{x}' : I' \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I' \ni t_0$  intervallo aperto, soddisfacente le condizioni:

- (i)  $I' \supsetneq I$ ,
- (ii)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'(t)$  se  $t \in I$ .

Una soluzione massimale  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è detta:

**completa**, se  $I = (-\infty, +\infty)$ ;

**completa nel futuro**, se  $I = (a, +\infty)$  con  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ;

**completa nel passato**, se  $I = (-\infty, b)$  con  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Le definizioni date si estendono banalmente al caso di un problema di Cauchy riferito ad un sistema di equazioni differenziali di ordine  $n > 1$ .  $\diamond$

L'esistenza di soluzioni massimali è una diretta conseguenza del Lemma di Zorn assumendo solo che il problema di Cauchy (4.23) ammetta almeno una soluzione (indipendentemente dall'unicità di essa locale o globale). Consideriamo la classe  $C$  di tutte le soluzioni del problema di Cauchy (4.23)  $\mathbf{x}_J : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ , dove  $J \ni t_0$  è ogni intervallo aperto sul quale si può definire una soluzione. Questo insieme ammette una relazione d'ordine parziale data da  $\mathbf{x}_J \leq \mathbf{x}_{J'}$  se e solo se  $J \subset J'$  e  $\mathbf{x}_{J'}|_J = \mathbf{x}_J$ . Con tale relazione d'ordine parziale i sottoinsiemi totalmente ordinati di  $C$  ammettono un limite superiore (dato dalla soluzione ottenuta unendo tutti i domini delle soluzioni dell'insieme totalmente ordinato). Dal lemma di Zorn (o dal principio del buon ordinamento o dall'assioma della scelta) segue allora che  $C$  ha qualche elemento massimale, cioè il problema di Cauchy (4.23) possiede qualche soluzione massimale.

Si osservi però che non è affatto ovvio che, se due soluzioni massimali esistono allora debbano

coincidere. Tuttavia, se  $\mathbf{f}$  è tale da rispettare le richieste di continuità e locale lipschitzianità, vale il seguente risultato che prova l'esistenza e l'unicità delle soluzioni massimali come conseguenza della proposizione 4.3.

**Teorema 4.5. (Esistenza ed unicità globale)** *Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  e si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.24)$$

*Esiste ed è unica la soluzione massimale  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Tale soluzione è di classe  $C^1$ .*

*Inoltre, se  $\mathbf{x}_J : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $J \ni t_0$  intervallo aperto, è un'altra soluzione di (4.24), allora*

- (i)  $J \subset I$ ,
- (ii)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_J(t)$  se  $t \in J$ .  $\diamond$

**Dimostrazione.** L'insieme  $\mathfrak{S}$  dei domini di tutte le soluzioni del problema di Cauchy (4.24) è non vuoto (per il teorema 4.3) ed ogni soluzione  $\mathbf{x}_J : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $J \ni t_0$  intervallo aperto, è univocamente determinata dal suo dominio per la proposizione 4.3: se due soluzioni del problema di Cauchy (4.24) esistono sullo stesso intervallo aperto  $J$  allora devono coincidere. Definiamo quindi  $I := \cup_{J \in \mathfrak{S}} J$ .  $I$  è unione di aperti per cui è aperto, ma è anche unione di connessi con un punto in comune ( $t_0$ ) per cui è un connesso che contiene quel punto. Come noto dalla topologia di  $\mathbb{R}$ , i connessi aperti di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli aperti. Per costruzione  $I$  è dunque un intervallo aperto che contiene  $t_0$ . Definiamo infine la funzione su  $I$ :

$$\mathbf{x}_I(t) := \mathbf{x}_J(t), \quad \text{se } t \in J \text{ e per } J \in \mathfrak{S}.$$

La definizione di  $\mathbf{x}_I$  è ben posta perché dalla proposizione 4.3 segue facilmente che se  $t \in J \cap J'$  con  $J, J' \in \mathfrak{S}$ , allora  $\mathbf{x}_J(t) = \mathbf{x}_{J'}(t)$ . Pertanto si ha anche che  $\mathbf{x}_I \upharpoonright_J = \mathbf{x}_J$  per ogni  $J \in \mathfrak{S}$  e perciò  $\mathbf{x}_I$  risolve il problema di Cauchy se ristretta ad ogni  $J \in \mathfrak{S}$  e quindi anche su tutto  $I$ . Concludiamo che  $\mathbf{x}_I$  è una soluzione del nostro problema di Cauchy che, per costruzione, è anche una soluzione massimale.

Passiamo ora al problema dell'unicità delle soluzioni massimali del problema di Cauchy considerato. Se esistono due soluzioni massimali del problema di Cauchy (4.24), esse devono coincidere sull'intersezione dei loro domini per la proposizione 4.3. Tuttavia i due domini devono coincidere, altrimenti una delle due soluzioni (o entrambe) non sarebbe massimale (perché si potrebbe prolungare fuori dal suo dominio usando l'altra soluzione massimale). Ogni soluzione (massimale o no) deve essere di classe  $C^1$  dato che  $\mathbf{f}$  è continua.  $\square$

Il teorema appena provato ha una conseguenza immediata riguardante i problemi di Cauchy per equazioni differenziali di ordine superiore. Il risultato è espresso nel seguente corollario che, in particolare, prova anche il teorema 3.2.

**Corollario al teorema 4.5.** Sia  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^m$  dove  $\Omega = I \times D$  con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto e  $D \subset \mathbb{K}^m \times \cdots \times \mathbb{K}^m$  insieme aperto non vuoto e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\mathbf{x}}{dt^{n-1}}\right), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}\mathbf{x}}{dt^{n-1}}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (4.25)$$

dove  $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_0^{(n-1)}) \in \Omega$  è fissato arbitrariamente.

Se, posto  $\mathbf{X} := (\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \in \Omega$ , la funzione  $\mathbf{f}$  soddisfa:

(i) è continua su  $\Omega$ ,

(ii)  $I \times D \ni (t, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{X})$  è localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{X} \in D$  (in particolare, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , questo accade se le derivate delle componenti di  $\mathbf{f}$  in ogni componente di  $\mathbf{X} \in D$  sono funzioni continue su  $\Omega$ ),

allora esiste ed è unica una soluzione massimale del problema di Cauchy (4.25). Tale soluzione è di classe  $C^n$ .

**Dimostrazione.** Passiamo al sistema del prim'ordine equivalente a (4.25)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t)), \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

come spiegato nella sezione 4.1.1. Dalla discussione nella sezione 4.1.1, si ha facilmente che la funzione  $I \times D \ni (t, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{F}(t, \mathbf{X})$  risulta essere continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{X}$  se lo è la funzione  $I \times D \ni (t, \mathbf{X}) \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{X})$  (in particolare, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la condizione di Lipschitz vale se le derivate delle componenti di  $\mathbf{f}$  in ogni componente di  $\mathbf{X} \in D$  sono funzioni continue su  $\Omega$ ). Possiamo applicare tale teorema 4.5 concludendo la dimostrazione.  $\square$

#### 4.3.4 Equazioni differenziali lineari.

Consideriamo un'equazione differenziale di ordine  $n$  su  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$  indifferentemente,

$$p_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)x = q(t), \quad (4.26)$$

dove le funzioni  $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  e  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  sono tutte continue e la funzione, incognita dell'equazione,  $x = x(t)$  assume valori su  $\mathbb{K}$  ed è supposta differenziabile  $n$  volte. L'equazione scritta sopra è detta **equazione differenziale lineare non omogenea**. La non omogeneità è dovuta alla presenza del cosiddetto **termine noto**: la funzione  $q$ . Nell'insieme aperto  $U \subset \mathbb{R}$  in cui  $p_0(t) \neq 0$ , si può riportare l'equazione di sopra in forma normale

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + P_n(t)x = Q(t), \quad (4.27)$$

avendo definito  $P_k(t) := p_k(t)/p_1(t)$  e  $Q(t) := q(t)/p(t)$  su  $U$ . I punti  $t \in \mathbb{R}$  per cui  $p_1(t) = 0$  si dicono **punti singolari** e devono essere studiati a parte.

Se  $J \subset U$  è un intervallo aperto, consideriamo il problema di Cauchy di ordine  $n$  su  $\Omega = J \times \mathbb{K}$  dato dall'equazione (4.27), con l'aggiunta delle condizioni iniziali, se  $t_0 \in J$ ,

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (4.28)$$

dove  $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{K}$ .

Con la tecnica esposta nella sezione 4.1.1, il problema di Cauchy suddetto si può sempre ridurre ad un problema del primo'ordine su  $\Omega := J \times \mathbb{K}^n$  della forma:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.29)$$

dove:  $J \ni t_0$ ,  $\mathbf{x}(t) := (x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^t$ . Inoltre  $\mathbf{x}_0 := (x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)})^t$  e, per ogni  $t \in I$ ,  $A(t) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  è una matrice  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$  la cui ultima riga è data dal vettore riga  $(P_n(t), \dots, P_1(t))$  e i coefficienti delle precedenti righe valgono 0 oppure  $-1$  in conformità con le  $n - 1$  relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \dots &= \dots \\ \frac{dx_{n-2}}{dt} &= x_{n-1}. \end{aligned}$$

Infine il vettore colonna  $\mathbf{b}(t)$  ha coefficienti tutti nulli, eccettuato l'ultimo che vale  $Q(t)$ . Il problema di Cauchy (4.29) è ben posto in quanto la funzione a secondo membro

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := -A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

è continua ed è sicuramente localmente lipschitziana nelle ipotesi fatte: la costante di Lipschitz può essere presa come  $\sup_{t \in J'} \|A(t)\|$ , su ogni insieme  $J' \times B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ , dove  $J' \ni t_0$  è un intervallo aperto la cui chiusura è contenuta in  $J$  e  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{K}^n$  una palla aperta centrata in  $\mathbf{x}_0$  di raggio  $\epsilon > 0$  arbitrario. Di conseguenza c'è sempre un'unica soluzione massimale del sistema considerato.

In riferimento al problema di Cauchy del prim'ordine su  $\Omega = J \times \mathbb{K}^n$  (4.29) (e quindi all'equivalente problema di Cauchy di ordine  $n$ ), dimostriamo che la soluzione massimale ha come dominio in  $t$  tutto l'intervallo  $J$ . *Pertanto, se  $J = \mathbb{R}$ , la soluzione massimale è anche completa.*

**Proposizione 4.4.** *La soluzione massimale del problema di Cauchy del prim'ordine su  $\Omega = J \times \mathbb{K}^n$  (4.29) (e quindi dell'equivalente problema di Cauchy di ordine  $n$ ) ha come dominio in  $t$  tutto l'intervallo  $J$ .*

**Dimostrazione.** Consideriamo inizialmente il caso di sistema omogeneo, per cui il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.30)$$

dove

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := -A(t)\mathbf{x}, \quad \text{con } (t, \mathbf{x}) \in \Omega := J \times \mathbb{K}^n,$$

e  $J \ni t \mapsto A(t)$  è una funzione a valori matriciali continua.

Sia  $(\alpha, \omega) \subset J$  il dominio della soluzione massimale. Definiamo, in riferimento al lemma 4.2,  $Q = (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta) \times B_E(\mathbf{x}_0)$  con  $E, \Delta > 0$  in modo che

$$J \supset [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta] \supset (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta).$$

la costante di Lipschitz su  $Q$  può essere fissata come  $L = \max_{t \in [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]} \|A(t)\|$  (se  $L = 0$  tutta la discussione diventa banale per cui assumeremo d'ora in poi che  $L > 0$ ), mentre il massimo di  $\|\mathbf{f}\|$  è, evidentemente,  $M = LE$ .

Se  $\omega$  non è l'estremo destro di  $J$ , rimanendo in  $J$ , possiamo scegliere  $\Delta$  sufficientemente grande in modo che  $J \supset [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$  e  $t_0 + \Delta > \omega$ . Consideriamo quindi la soluzione massimale  $\mathbf{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Per il lemma 4.2, se  $t_1 \in (\alpha, \omega)$ , la soluzione massimale deve essere comunque ben definita nell'intervallo  $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$  ed assumere valori in  $B_\epsilon(\mathbf{x}(t_1))$  purché,  $0 < \epsilon < E$  e  $\delta < \min(1/L, \epsilon/M)$  cioè  $\delta < (\epsilon/E)(1/L)$ . Fissiamo  $t_1 < \omega$  in modo tale che  $|\omega - t_1| < 1/(2L)$ . Allora, fissando  $\epsilon$  abbastanza vicino a  $E$ , si può prendere  $\delta$  sufficientemente piccolo da soddisfare  $\delta < (\epsilon/E)(1/L)$ , ma anche  $|t_1 - \omega| < \delta$ . Questo significa che  $t_1 + \delta > \omega$ , per cui la soluzione massimale, che è definita sicuramente in  $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$  è anche definita nell'intorno destro di  $\omega$ .  $\omega$  non può dunque essere l'estremo destro dell'intervallo massimale su cui è definita la soluzione. L'unica possibilità è che  $\omega$  coincida con l'estremo destro di  $J$ . Con la stessa procedura si prova che  $\alpha$  coincide con l'estremo sinistro di  $J$ . Pertanto la soluzione massimale è definita su tutto  $J$ . Consideriamo infine il problema non omogeneo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.31)$$

dove

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := -A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \text{con } (t, \mathbf{x}) \in \Omega := J \times \mathbb{K}^n,$$

con  $J \ni t \mapsto A(t)$  funzione a valori matriciali e  $J \ni t \mapsto \mathbf{b}(t) \in \mathbb{K}^n$  funzione a valori vettoriali. Entrambe le funzioni sono continue.

Per computo diretto (lasciato per esercizio) si vede che, per  $t \in J$ ,

$$\mathbf{x}(t) = G(t)^{-1} \left( \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t G(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right) \quad (4.32)$$



è la soluzione (su tutto  $J$ ) del problema (4.31). La matrice  $G(t)$ ,  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ , è la trasposta della matrice la cui  $k$ -esima colonna è, al variare di  $t$ , la soluzione massimale su  $J$  del problema omogeneo associato

$$\begin{cases} \frac{d \mathbf{g}_{(k)}}{dt} = -A(t)^t \mathbf{g}_{(k)}(t), \\ \mathbf{g}_{(k)}(t_0) = \delta_{(k)}. \end{cases} \quad (4.33)$$

dove  $\delta_{(k)}$  è la  $k$ -esima colonna della matrice identità. Per costruzione, la soluzione del problema non omogeneo che abbiamo esibito è definita su tutto  $J$  e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

#### 4.3.5 Struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare.

Vogliamo ora occuparci della struttura dell'insieme di tutte le soluzioni massimali dell'equazione (4.27). Consideriamo pertanto il problema di Cauchy di ordine  $n$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ , con equazione lineare omogenea:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + P_n(t)x = 0, \quad (4.34)$$

dove le funzioni  $P_k$  sono continue su  $J$ , e con condizioni iniziali generiche, se  $t_0 \in J$ ,

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = x_0^{(n-1)}, \quad (4.35)$$

dove  $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{K}$ .

Consideriamo due soluzioni definite su tutto  $J$  dell'equazione (4.34):  $x$  e  $x'$ . Data la linearità dell'equazione, è chiaro che se  $a, b \in \mathbb{K}$ , la funzione  $J \ni t \mapsto ax(t) + bx'(t)$  è ancora soluzione della stessa equazione differenziale. Da ciò si conclude immediatamente che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (4.34) definite su tutto  $J$  costituisce uno *spazio vettoriale* sul campo  $\mathbb{K}$ , con operazioni di spazio vettoriale definite “punto per punto” come segue.

Se  $a, b \in \mathbb{K}$  e  $x, x' : J \rightarrow \mathbb{K}$  risolvono (4.34):  $(ax + bx')(t) := ax(t) + bx'(t)$ , per ogni  $t \in J$ . (4.36)

Vogliamo determinare la dimensione di tale spazio vettoriale. Fissiamo una volta per tutte un punto  $t_0 \in J$ . Dal teorema di unicità, ogni soluzione della (4.34) è biunivocamente determinata dai suoi dati iniziali (4.35). Inoltre l'insieme dei possibili dati iniziali  $(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)})$  ricopre tutto  $\mathbb{K}^n$ . Se  $x$  e  $x'$  soddisfano le condizioni iniziali rispettivamente:

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

e

$$x'(t_0) = x'_0, \quad \frac{dx'}{dt}(t_0) = x_0'^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x'}{dt^{n-1}}(t_0) = x_0'^{(n-1)},$$

la soluzione  $x'' := ax + bx'$  soddisfa banalmente le condizioni iniziali (ed è l'unica a fare ciò):

$$x''(t_0) = ax_0 + bx'_0, \quad \frac{dx''}{dt}(t_0) = ax_0^{(1)} + bx_0'^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x''}{dt^{n-1}}(t_0) = ax_0^{(n-1)} + bx_0'^{(n-1)}.$$

Questo dimostra immediatamente che l'applicazione che associa  $(x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$  all'unica soluzione massimale del problema di Cauchy con equazione (4.34) con dati iniziali (4.35), è un omomorfismo di spazi vettoriali. Dato che la corrispondenza tra dati iniziali e soluzioni è biunivoca, concludiamo che tale omomorfismo è in isomorfismo e pertanto conserva le dimensioni degli spazi vettoriali identificati. Siamo giunti a poter affermare che vale la seguente proposizione.

**Proposizione 4.5.** *L'insieme delle soluzioni massimali dell'equazione differenziale lineare omogenea sull'intervallo  $J \subset \mathbb{R}$*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + P_n(t)x = 0,$$

dove le funzioni  $P_k$  sono continue su  $J$ , è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  rispetto alla legge di composizione (4.36) ed ha dimensione pari all'ordine stesso  $n$ .

Passiamo ora a studiare l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare *non* omogenea:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + P_n(t)x = Q(t), \quad (4.37)$$

dove le funzioni  $P_k$  e  $Q$  sono, al solito, continue su  $J$ . L'insieme di tutte le soluzioni  $s : J \rightarrow \mathbb{K}$  di questa equazione si può scrivere come

$$\{s = s_0 + x \mid x : J \rightarrow \mathbb{K} \text{ è soluzione di (4.34)}\},$$

dove  $s_0 : J \rightarrow \mathbb{K}$  è una qualsiasi fissata soluzione di (4.37). (Abbiamo ancora una volta usato la definizione di somma di funzioni “punto per punto”  $(s_0 + x)(t) := s_0(t) + x(t)$  per ogni  $t \in J$ .) Infatti, se  $s$  e  $s_0$  risolvono (4.37), per linearità dell'equazione differenziale, la loro differenza risolve (4.34). Viceversa, se  $s_0$  risolve (4.37) e  $x$  risolve (4.34), ancora una volta per linearità,  $s_0 + x$  risolve (4.37). Abbiamo provato la seguente proposizione.

**Proposizione 4.6.** *L'insieme delle soluzioni massimali dell'equazione differenziale lineare non omogenea sull'intervallo  $J \subset \mathbb{R}$*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + P_n(t)x = Q(t),$$

dove le funzioni  $Q$  e  $P_k$  sono continue su  $J$ , ha la seguente struttura:

$$\{s = s_0 + x \mid x : J \rightarrow \mathbb{K} \text{ è soluzione di (4.34)}\},$$

dove  $s_0 : J \rightarrow \mathbb{K}$  è una qualsiasi fissata soluzione dell'equazione omogenea (4.37).

**Osservazioni 4.6.** Tutto quanto visto fino ad ora si generalizza facilmente al caso in cui si considera il problema di Cauchy di ordine  $n$  che usa l'equazione, nell'incognita  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{K}^m$ , per ogni  $t \in U \subset \mathbb{R}$  insieme aperto,

$$p_0(t) \frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} \mathbf{x}}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t) \mathbf{x} = \mathbf{q}(t). \quad (4.38)$$

Sopra, per ogni  $t \in U$ , le  $p_k(t)$  sono *matrici*  $m \times m$  con elementi in  $\mathbb{K}$  e  $\mathbf{q}(t)$  è un *vettore* colonna in  $\mathbb{K}^m$  ed, al variare di  $t \in U$ , le funzioni suddette sono continue. Se su  $U$  vale  $\det p_0(t) \neq 0$ , si può riportare l'equazione di sopra in forma normale

$$\frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} \mathbf{x}}{dt^{n-1}} + \cdots + P_n(t) \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t), \quad (4.39)$$

avendo definito  $P_k(t) := (p_0(t))^{-1} p_k(t)$  e  $\mathbf{Q}(t) := (p_0(t))^{-1} \mathbf{q}(t)$ . Il problema di Cauchy si può impostare su  $\Omega = J \times \mathbb{K}^m$  dove  $J \subset U$  è un intervallo aperto. Ci si riduce ad un problema di Cauchy di ordine 1 in  $J \times \mathbb{K}^{n \cdot m}$  con la solita procedura e pertanto valgono i risultati esposti prima.

#### Esempi 4.4.

1. Consideriamo ora, come esempio, le **equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti di grado  $n$** :

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x(t) = 0. \quad (4.40)$$

Quest'equazione la pensiamo come definita su  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ . Il caso  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  si ottiene per restrizione. I coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  sono dunque dei numeri fissati. Si osservi che l'equazione considerata si può riscrivere come:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = -a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} - \cdots - a_n x(t). \quad (4.41)$$

Un'osservazione elementare ma importante è la seguente. Dato che le funzioni a secondo membro sono derivabili (perchè esiste il primo membro!), possiamo derivare membro a membro l'identità scritta sopra, ottenendo che ogni soluzione dell'equazione è di classe  $C^{n+1}$ . Dato che la procedura può essere ripetuta all'infinito, concludiamo che: *ogni soluzione dell'equazione (4.40) è in realtà di classe  $C^\infty$* .

Vogliamo ora scrivere esplicitamente la classe di tutte le soluzioni massimali dell'equazione suddetta. Dato che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , la generica soluzione sarà una combinazione lineare di  $n$  soluzioni particolari e linearmente indipendenti di (4.40). La strategia che seguiremo è la seguente.

(i) Per prima cosa cerchiamo le soluzioni massimali,  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dell'equazione di grado 1 e non omogenea

$$\left( \frac{d}{dt} - b \right) x(t) = f(t), \quad (4.42)$$

dove  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua assegnata e  $b \in \mathbb{C}$  una costante e dove abbiamo usato la notazione, per ogni costante  $a$ :

$$\left( \frac{d}{dt} + a \right) x(t) := \frac{dx}{dt} + ax(t) .$$

(ii) Poi mostriamo che l'equazione (4.40) si può riscrivere:

$$\left( \frac{d}{dt} - b_1 \right) \left( \frac{d}{dt} - b_2 \right) \cdots \left( \frac{d}{dt} - b_n \right) x(t) = 0 , \quad (4.43)$$

dove  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sono le soluzioni in  $\mathbb{C}$ , eventualmente alcune di esse coincidenti, dell'equazione algebrica in  $\chi \in \mathbb{C}$ :

$$\chi^n + a_1 \chi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \chi + a_n = 0 . \quad (4.44)$$

(iii) Conoscendo la soluzione generale di (4.42), cioè la classe di tutte le soluzioni di tale equazione al variare di tutte le possibili condizioni iniziali, ed applicando ricorrentemente la formula ad ogni elemento di tale classe nel modo che vedremo, si ricava la classe completa delle soluzioni di (4.42).

Partiamo dal punto (i). Sappiamo, dall'esempio 4, che le soluzioni di (4.42) sono scrivibili come  $s(t) = s_0(t) + x(t)$  con  $t \in \mathbb{R}$ , dove  $s_0$  è una soluzione particolare fissata arbitrariamente di (4.42) e  $x$  spazia nell'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea:

$$\left( \frac{d}{dt} - b \right) x(t) = 0 . \quad (4.45)$$

Le soluzioni di quest'ultima si ottengono immediatamente (per esempio usando la tecnica delle variabili separabili) come, per  $c \in \mathbb{C}$  fissato arbitrariamente,

$$x(t) = ce^{bt} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Si vede che, effettivamente, abbiamo uno spazio vettoriale di dimensione 1 (sul campo  $\mathbb{C}$ ). Per computo diretto, si vede che una soluzione particolare della (4.42) è

$$s_0(t) = e^{bt} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-b\tau} d\tau , \quad t \in \mathbb{R} , \quad (4.46)$$

dove  $t_0 \in \mathbb{R}$  è un punto fissato arbitrariamente. In definitiva, fissato  $t_0 \in \mathbb{R}$  arbitrariamente, tutte le soluzioni di (4.42) si ottengono al variare di  $c \in \mathbb{C}$  come:

$$x_c(t) = ce^{bt} + e^{bt} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-b\tau} d\tau , \quad t \in \mathbb{R} , \quad (4.47)$$

Passiamo al punto (ii). Definendo  $I = \frac{d^0}{dt^0}$  come l'operatore identità, consideriamo l'insieme  $\mathcal{D}$  degli operatori differenziali

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n \frac{d^0}{dt^0} : C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

al variare dei numeri  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  ed infine al variare dell'ordine  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Si verifica facilmente che  $\mathcal{D}$  è un *anello commutativo* rispetto alla somma definita come, per ogni  $D, D' \in \mathcal{D}$

$$(D + D')(f) := D(f) + D'(f), \quad \text{per ogni } f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$$

ed al prodotto definito come la composizione operatoriale: per ogni  $D, D' \in \mathcal{D}$

$$(DD')(f) := D(D'(f))$$

e con elemento neutro additivo dato dall'operatore nullo  $O : C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  con  $(Of)(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e ogni  $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  e con elemento neutro moltiplicativo dato dall'operatore  $I = \frac{d^0}{dt^0}$ .

Se  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  indica l'anello dei polinomi, nell'incognita  $\chi$ , di ordine arbitrario e sul campo  $\mathbb{C}$ , l'applicazione

$$F : a_0\chi^n + a_1\chi^{n-1} + \dots + a_n \mapsto a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \frac{d^0}{dt^0} x(t)$$

è un omomorfismo di anelli con unità moltiplicativa ed è biettiva. Come è immediato provare, usando in particolare il fatto che  $\frac{d^n}{dt^n} \frac{d^m}{dt^m} = \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}$ , si verifica che  $F$  conserva i prodotti e le somme e  $F(1) = I$ , per cui è un omomorfismo di anelli con unità moltiplicativa. La suriettività di  $F$  è di immediata verifica, per l'iniettività è sufficiente dimostrare che se, per  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ ,  $F(p)$  è l'operatore nullo di  $\mathcal{D}$ , allora  $p$  è il polinomio nullo. In effetti se  $p(\chi) = a_0\chi^n + a_1\chi^{n-1} + \dots + a_n$  e  $F(p) = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \frac{d^0}{dt^0}$  è l'operatore nullo, dovendo essere  $(a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \frac{d^0}{dt^0})(f) = 0$  e scegliendo per  $f$  la funzione che vale costantemente 1, si ha  $a_n = 0$  per cui  $a_n = 0$ . Scegliendo  $f$  come la funzione che vale  $t$  e reiterando la procedura, si ha che  $a_{n-1} = 0$  e via di seguito, trovando alla fine che  $p$  è il polinomio nullo come richiesto. In definitiva  $F$ , come sostenuto, è un *isomorfismo di anelli con unità moltiplicativa*.

Dato che, per il *teorema fondamentale dell'algebra*, ogni polinomio di  $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ ,

$$p(\chi) = \chi^n + a_1\chi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\chi + a_n$$

è decomponibile come prodotto di polinomi elementari:

$$p(\chi) = (\chi - b_1) \cdots (\chi - b_n)$$

dove  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sono le  $n$  soluzioni di  $p(\chi) = 0$ , attraverso l'isomorfismo  $F$  giungiamo a dimostrare che vale la decomposizione (4.43).

Passiamo al punto (iii). L'equazione differenziale iniziale (4.40) è equivalente all'equazione (4.43):

$$\left(\frac{d}{dt} - b_1\right) \left(\frac{d}{dt} - b_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) = 0,$$

cioè

$$\left(\frac{d}{dt} - b_1\right) \left[ \left(\frac{d}{dt} - b_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) \right] = 0.$$

Tenendo conto di della soluzione generale (4.47) dell'equazione (4.45), concludiamo che deve essere, per  $c_1 \in \mathbb{C}$ :

$$\left(\frac{d}{dt} - b_2\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) = c_1 e^{b_1 t}.$$

Possiamo iterare la procedura ottenendo

$$\left(\frac{d}{dt} - b_3\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) = c_2 e^{b_2 t} + c_1 e^{b_2 t} \int_{t_0}^t e^{b_1 \tau} e^{-b_2 \tau} d\tau.$$

Notiamo che, se  $b_1 \neq b_2$ , si trova, raggruppando le costanti a fattore delle stesse funzioni esponenziali,

$$\left(\frac{d}{dt} - b_3\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) = k_2 e^{b_2 t} + k_1 e^{b_1 t}.$$

Se invece  $b_1 = b_2$ , il calcolo diretto fornisce

$$\left(\frac{d}{dt} - b_3\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_n\right) x(t) = k_2 e^{b_1 t} + k_1 t e^{b_1 t}.$$

In entrambi i casi  $k_1$  e  $k_2$  sono costanti arbitrarie in  $\mathbb{C}$ . Per esercizio, si può provare, iterando la procedura fino ad avere a primo membro solo la funzione  $x = x(t)$ , la ricetta che fornisce la soluzione generale dell'equazione (4.40)

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x(t) = 0.$$

Tale ricetta è la seguente. Si cercano le soluzioni in  $\mathbb{C}$  del polinomio, detto **polinomio caratteristico** associato

$$\chi^n + a_1 \chi^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \chi + a_n.$$

Si raggruppano le soluzioni per soluzioni coincidenti:

$b_1$  con molteplicità  $m_1$ ,

$b_2$  con molteplicità  $m_2$ ,

...

$b_k$  con molteplicità  $m_k$ ,

in modo che  $1 \leq m_j \leq n$  e  $m_1 + \cdots + m_k = n$ . La soluzione generale dell'equazione differenziale (4.40) si scrive allora, al variare delle  $n$  costanti  $C_{j,r_j} \in \mathbb{C}$  con  $j = 1, 2, \dots, k$  e  $r_j = 1, \dots, m_j$ :

$$x(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{r_j=1}^{m_j} C_{j,r_j} t^{r_j-1} e^{b_j t}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \quad (4.48)$$

Nella pratica: se la soluzione  $b \in \mathbb{C}$  del polinomio caratteristico ha molteplicità 1 (cioè non ci sono radici coincidenti con quel valore) essa contribuisce alla soluzione generale con la sola funzione esponenziale  $e^{bt}$ . Se ha molteplicità 2, contribuisce con due funzioni:  $e^{bt}$  e  $t e^{bt}$ . Se ha molteplicità  $m$ , contribuisce con  $m$  funzioni  $e^{bt}$ ,  $t e^{bt}$ ,  $t^2 e^{bt}$ , ...,  $t^{m-1} e^{bt}$ . Ognuna di queste  $n$

soluzioni contribuisce in questo modo alla soluzione generale ed infine, tutti i singoli contributi vanno sommati avendoli preventivamente moltiplicati per  $n$  costanti complesse  $C_{j,r_j}$  arbitrarie.

Si può giustificare la forma (4.48) per la soluzione generale dell'equazione differenziale (4.40) da un altro punto di vista. Si dimostra facilmente che le  $n$  soluzioni particolari  $\mathbb{R} \ni t \mapsto t^{r_j-1}e^{b_j t}$ , ottenute al variare delle soluzioni del polinomio caratteristico  $p(\chi) = 0$  e tenendo conto delle molteplicità corrispondenti, sono linearmente indipendenti. *Tali soluzioni formano quindi una base dello spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea iniziale, che sappiamo essere di dimensione  $n$  e quindi la forma generale della soluzione (4.48) non è altro che l'elemento generico dello spazio vettoriale delle soluzioni.*

**2.** È chiaro che il metodo descritto sopra si può applicare anche per l'equazione (4.40) nel caso in cui i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  siano tutti *reali* e siano assegnate condizioni iniziali *reali*:  $x(t_0) = x_0, \frac{dx}{dt}(t_0) = x_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(t_0) = x_0^{(n-1)}$ . In tal caso, l'unica soluzione del problema di Cauchy corrispondente deve essere reale e questo accade anche considerando equazioni differenziali lineari *non omogenee*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = f(t),$$

purchè anche la funzione continua  $f$  sia reale.

Infatti, se  $x = x(t)$  è tale soluzione, la sua complessa coniugata  $\bar{x} = \overline{x(t)}$  soddisfa l'equazione differenziale con coefficienti (e funzione  $f$ ) dati dai complessi coniugati dei corrispondenti termini dell'equazione iniziale di partenza. Essendo tali coefficienti (e la funzione  $f$ ) reali,  $\bar{x}$  dovrà soddisfare la stessa equazione differenziale di  $x$ . Soddisferà anche le condizioni iniziali di  $x$ , dato che esse sono espresse da numeri reali. Conseguentemente  $\bar{x}(t) = x(t)$  per ogni  $t$  in virtù del teorema di unicità. Questa identità non dice altro che  $x(t)$  è un numero reale per ogni  $t$ .

Il fatto che sia i coefficienti  $a_k$  che le condizioni iniziali siano numeri reali non assicura che siano reali le soluzioni del polinomio caratteristico  $p(\chi) = 0$ . Tuttavia, se le condizioni iniziali sono reali, le soluzioni del problema di Cauchy saranno reali come detto prima. Per esprimere esplicitamente, nel caso di equazione omogenea, tali soluzioni è comodo tenere conto in (4.48) dell'identità di Eulero con  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  per ogni  $b_j = \alpha_j + i\beta_j$  *soluzione complessa* di  $p(\chi) = 0$ :

$$e^{b_j t} = e^{\alpha_j t} (\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t)) .$$

Se il polinomio caratteristico è reale, le soluzioni complesse di  $p(\chi) = 0$  possono apparire solo a coppie, con la stessa molteplicità, in cui una è complessa coniugata dell'altra. In tal caso ogni *coppia* di soluzioni *complesse coniugate*  $b_j = \alpha_j + i\beta_j$  e  $b_{j'} = \alpha_j - i\beta_j$  (che devono avere la stessa molteplicità  $m_j = m_{j'}$ ) contribuisce alla soluzione generale dell'equazione differenziale con corrispondenti contributi:

$$t^{r_j-1} e^{\alpha_j t} C_{j,r_j} (\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t))$$

e

$$t^{r_j-1} e^{\alpha_j t} C_{j',r_{j'}} (\cos(\beta_j t) - i \sin(\beta_j t)) .$$

Combinando insieme queste soluzioni possiamo scrivere un contributo complessivo dato da:

$$t^{r_j-1} e^{\alpha_j t} (A_{j,r_j} \cos(\beta_j t) + B_{j,r_j} \sin(\beta_j t)) , \quad (4.49)$$

dove  $A_{j,r_j}$  e  $B_{j,r_j}$  sono coefficienti ottenuti come:

$$A_{j,r_j} = C_{j,r_j} + C_{j',r_{j'}} \quad \text{e} \quad B_{j,r_j} = i(C_{j,r_j} - C_{j',r_{j'}}) .$$

Nel caso in cui la soluzione completa sia reale, i coefficienti  $A_{j,r_j}$  e  $B_{j,r_j}$  devono risultare anch'essi reali: le parti immaginarie devono annullarsi vicendevolmente per fare sì che la (4.49) sia una soluzione reale. Concludiamo che, nel caso in cui (1) *tutti i coefficienti dell'equazione differenziale siano reali* e (2) *i dati di Cauchy siano reali*, allora la soluzione generale della (4.40) ha ancora la struttura (4.48) dove però le costanti  $C_{j,r_j}$  sono tutte *reali* per quanto riguarda il contributo delle soluzioni  $b_j$  reali del polinomio caratteristico, mentre le eventuali soluzioni complesse coniugate del polinomio caratteristico  $b_j, b_{j'}$  forniscono contributi della forma (4.49) con  $A_{j,r_j}$  e  $B_{j,r_j}$  *reali*.

**3.** A titolo di esempio della situazione discussa al punto precedente, consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti reali:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} - 2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 0 ,$$

di cui vogliamo trovare le soluzioni in corrispondenza di ogni possibile scelta di condizioni iniziali *reali*:  $x(0) = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = x_0^{(1)}$ ,  $\frac{d^2 x}{dt^2}(0) = x_0^{(2)}$ ,  $\frac{d^3 x}{dt^3}(0) = x_0^{(3)}$ . Sappiamo che le soluzioni devono essere reali e si ottengono con la procedura detta sopra. Il polinomio caratteristico si fattorizza come:

$$p(\chi) = (\chi - 1)^2(\chi + i)(\chi - i) .$$

Abbiamo dunque una soluzione reale che vale 1 con molteplicità 2 e due soluzioni complesse coniugate  $\pm i$  (che dunque hanno parte reale nulla e parte immaginaria pari a 1). La prima soluzione contribuisce alla soluzione generale dell'equazione differenziale con le soluzioni particolari  $e^t$  e  $te^t$ . Le due soluzioni complesse coniugate contribuiscono con le soluzioni particolari  $\sin t$  e  $\cos t$ . La soluzione generale *reale* dell'equazione data è allora:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + A \cos t + B \sin t .$$

Le costanti reali  $C_1, C_2, A, B \in \mathbb{R}$  per il momento del tutto arbitrarie, vengono determinate imponendo che la soluzione generale soddisfi le 4 condizioni iniziali (reali)  $x(0) = x_0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = x_0^{(1)}$ ,  $\frac{d^2 x}{dt^2}(0) = x_0^{(2)}$ ,  $\frac{d^3 x}{dt^3}(0) = x_0^{(3)}$ .

Se invece siamo interessati alla soluzione generale *complessa* dell'equazione iniziale, essa è:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{it} + C_4 e^{-it} .$$

dove ora  $C_1, C_2, C_3, C_4$  variano in  $\mathbb{C}$ .

**4.** Consideriamo infine il caso di un'equazione lineare a coefficienti costanti *non omogenea*:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = f(t) . \quad (4.50)$$



dove la funzione  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua assegnata sull'intervallo aperto  $J \subset \mathbb{R}$ . Sappiamo, dalla proposizione 4.6 e tenendo conto di quanto ottenuto nell'esempio 1, che l'insieme delle soluzioni della (4.50) ha la forma:

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{j=1}^k \sum_{r_j=1}^{m_j} C_{j,r_j} t^{r_j-1} e^{b_j t}, \quad \text{con } t \in J \quad (4.51)$$

dove le  $C_{j,r_j}$  sono costanti arbitrarie in  $\mathbb{C}$ , i  $b_j$  (con  $j = 1, \dots, k$  e  $\sum_{j=1}^k m_j = n$ ) sono le radici (in  $\mathbb{C}$ ) del polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (4.40) e  $m_j$  è la molteplicità di ciascuna di tali soluzioni. Infine  $x_0 : J \rightarrow \mathbb{C}$  è una soluzione particolare (arbitrariamente fissata) dell'equazione non omogenea (4.50). Come ottenere una tale soluzione? Esistono varie procedure per le quali si rimanda ai testi di teoria delle equazioni differenziali. Qui vogliamo solo osservare che esiste sempre un modo standard di costruire tale soluzione basandosi sulla formula (4.46) che fornisce una soluzione particolare dell'equazione (4.45), tenendo conto che, come visto nell'esempio 1, l'equazione (4.50) può essere riscritta come:

$$\left(\frac{d}{dt} - b_1\right)^{m_1} \left(\frac{d}{dt} - b_2\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{d}{dt} - b_k\right)^{m_k} x(t) = f(t). \quad (4.52)$$

in cui:

$$\left(\frac{d}{dt} - b\right)^m := \left(\frac{d}{dt} - b\right) \cdots m \text{ volte} \cdots \left(\frac{d}{dt} - b\right).$$

Applicando ripetutamente la formula (4.46), si ottiene una soluzione particolare come voluto. Per esempio, consideriamo il caso di un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t). \quad (4.53)$$

e siano  $b_1 \neq b_2$  le radici del polinomio caratteristico dell'omogenea associata. Possiamo allora riscrivere la (4.53) come:

$$\left(\frac{d}{dt} - b_1\right) \left(\frac{d}{dt} - b_2\right) x = f.$$

La formula (4.46) implica allora che, se  $x$  soddisfa:

$$\left(\frac{d}{dt} - b_2\right) x = e^{b_1 t} \int_{t_0}^t f(\tau) e^{-b_1 \tau} d\tau,$$

per  $t_0 \in J$  fissato arbitrariamente, allora  $x$  soddisfa anche (4.50). Possiamo usare un'altra volta la (4.46) dove ora la funzione  $f$  che appare in essa a secondo membro coincide con la funzione di  $t$  definita dal secondo membro dell'identità scritta sopra. In questo modo si ottiene la soluzione particolare della (4.53):

$$x_0(t) = e^{b_2 t} \int_{t_1}^t e^{(b_1 - b_2)\tau_1} \left( \int_{t_0}^{\tau_1} e^{-b_1 \tau} f(\tau) d\tau \right) d\tau_1,$$

dove  $t_1 \in J$  è un secondo punto fissato arbitrariamente. Per costruzione, infatti, se applichiamo  $(\frac{d}{dt} - b_1)(\frac{d}{dt} - b_2)$  al secondo membro otteniamo  $f$  come voluto. Si osservi che la formula rimane valida anche se  $b_1 = b_2$ , dato che l'ipotesi  $b_1 \neq b_2$  non è stata in realtà usata. La procedura si estende al caso di equazioni di ordine arbitrario in modo diretto.

#### Esercizi 4.1.

1. Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ , con  $D \subset \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto. Si supponga infine che valga, per un fissato  $T \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{f}(t - T, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times D.$$

Si scelga  $k \in \mathbb{Z}$  arbitrariamente. Provare che  $\mathbf{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^n$  è soluzione massimale del problema di Cauchy per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases},$$

se e solo se  $\mathbf{x}'(t) := \mathbf{x}(t - kT)$  con  $t \in (\alpha + kT, \omega + kT)$  è una soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}'(t)), \\ \mathbf{x}'(t_0 - kT) = \mathbf{x}_0. \end{cases},$$

2. Sia  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$  una funzione localmente lipschitziana, con  $D \subset \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto. Si scelga  $T \in \mathbb{R}$  arbitrariamente. Provare che  $\mathbf{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^n$  è soluzione massimale del problema di Cauchy autonomo per  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases},$$

se e solo se  $\mathbf{x}'(t) := \mathbf{x}(t - T)$  con  $t \in (\alpha + T, \omega + T)$  è una soluzione massimale del problema di Cauchy autonomo

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}'(t)), \\ \mathbf{x}'(t_0 - T) = \mathbf{x}_0. \end{cases},$$

3. Si consideri un punto materiale di massa  $m > 0$  vincolato a stare su un piano orizzontale liscio in quiete in un riferimento inerziale. Si supponga che il punto sia sottoposto alla forza, con  $g > 0$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \kappa r \mathbf{e}_r - mg \mathbf{e}_z,$$

dove è stato introdotto un sistema di coordinate cilindriche solidali con il piano  $r, \varphi, z$  rispetto all'origine  $O$  ed il piano ha equazione  $z = 0$ . Studiare il moto del punto nei due casi  $\kappa > 0$  e  $\kappa < 0$ . Nel caso  $\kappa < 0$  si determini la legge oraria del punto (soluzione massimale) con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}(0) = v(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ .

4. Si consideri un punto materiale di massa  $m > 0$  vincolato a muoversi su un piano orizzontale liscio in quiete in un riferimento inerziale. Si supponga che il punto sia sottoposto alla forza, con  $\kappa < 0, \beta > 0, g > 0$ ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \kappa r \mathbf{e}_r - \beta \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v} - mg \mathbf{e}_z,$$

dove è stato introdotto un sistema di coordinate cilindriche solidali con il piano  $r, \varphi, z$  rispetto all'origine  $O$  ed il piano ha equazione  $z = 0$ . Studiare il moto del punto.

5. Si consideri un punto materiale di massa  $m > 0$  posto su un piano orizzontale liscio in quiete in un riferimento inerziale. Si supponga che il punto sia sottoposto alla forza, con  $\kappa, \gamma > 0, g > 0$ ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \kappa r \mathbf{e}_r - \gamma \mathbf{v} - mg \mathbf{e}_z,$$

dove è stato introdotto un sistema di coordinate cilindriche solidali con il piano  $r, \varphi, z$  rispetto all'origine  $O$  ed il piano ha equazione  $z = 0$ . Studiare il moto del punto nei due casi  $\kappa > 0$  e  $\kappa < 0$ .

#### 4.3.6 Completezza di soluzioni massimali.

Ci occupiamo ora di alcune questioni tecniche riguardanti la completezza di soluzioni massimali nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità globale 4.5. Per prima cosa proviamo una proposizione che spiega cosa succede ad una soluzione massimale non completa. L'idea intuitiva è che una soluzione massimale  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  può non essere completa se, per grandi valori del parametro  $t$ , avvicinandosi alla frontiera di  $I$ , la curva integrale fatta dai punti  $\{(t, \mathbf{x}(t)) \mid t \in I\}$  tenda ad "uscire" dal dominio  $\Omega$ , cioè tenda a qualche punto sulla frontiera  $\mathcal{F}(\Omega)$ , dove  $\Omega$  è il dominio della funzione  $\mathbf{f}$  che appare in (4.24). In realtà può anche accadere che per grandi  $t$ , avvicinandosi alla frontiera di  $I$ , la curva integrale non tenda a nulla.

#### Esempi 4.5.

1. Il primo esempio è banale. Consideriamo il problema di Cauchy su  $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

La soluzione massimale è ovviamente  $x : (-1, 1) \ni t \mapsto t$ . Questa non è completa e, per  $t \rightarrow +1$ ,  $(t, x(t)) \rightarrow (1, 1) \in \mathcal{F}(\Omega)$ . L'incompletezza di questo esempio è in qualche modo artificiale.

2. Questo secondo caso è molto meno artificiale ed il risultato è in qualche modo inaspettato. Si consideri  $\Omega = \mathbb{R}^2$  e su di esso il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili si ottiene la soluzione:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Questa è l'unica soluzione, evidentemente massimale, del problema di Cauchy. L'unicità è assicurata dal teorema di unicità globale dato che siamo banalmente nelle ipotesi. La soluzione non è completa nel futuro e, per  $t \rightarrow 1^-$ , accade che  $(t, x(t))$  non tende a nulla, in quanto diverge.

**3.** Consideriamo infine un caso ancora più complicato sull'insieme  $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{t^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t^2}, \\ x(2/\pi) = 1, \quad y(2/\pi) = 0. \end{cases}.$$

Sull'insieme  $\Omega$ , il secondo membro del sistema scritto sopra definisce una funzione di classe  $C^1$  per cui siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità globale. Una soluzione del problema di Cauchy scritto è

$$\begin{cases} x(t) = \sin(1/t), \\ y(t) = \cos(1/t), \end{cases} \quad t \in (0, +\infty). \quad (4.54)$$

La soluzione, che è evidentemente massimale, è unica per il teorema suddetto. In questo caso però il limite per  $t \rightarrow 0^+$  della soluzione non tende ad alcun valore e nemmeno diverge. Tuttavia possiamo trovare una successione di punti  $t_k$  in  $(0, +\infty)$  che tende a  $0^+$  per  $k \rightarrow +\infty$  e tale che  $(t_k, \mathbf{x}(t_k))$  tende ad un punto sulla frontiera  $\mathcal{F}(\Omega)$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Per esempio, è sufficiente scegliere  $t_0 \in (0, +\infty)$  arbitrariamente e definire  $t_k = t_0/(1 + 2\pi k t_0)$  (in modo che  $1/t_k = 2\pi k + 1/t_0$ ),  $k = 1, 2, \dots$ . In tal modo  $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_0)$  costantemente per ogni  $k = 1, 2, \dots$  e pertanto esiste il limite di  $(t_k, \mathbf{x}(t_k))$  e converge al punto  $(0, \mathbf{x}(t_0)) \in \mathcal{F}(\Omega)$ . L'esistenza di una simile successione era preclusa nell'esempio precedente.

Possiamo provare la seguente proposizione generale.

**Proposizione 4.7.** *Nelle ipotesi del teorema 4.5 per  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$ , sia  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I = (\alpha, \omega)$ , una soluzione massimale del problema di Cauchy (4.24).*

**(a)** *Se  $\mathbf{x}$  non è completa nel futuro e  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I$  è tale che  $t_k \rightarrow \omega$  per  $k \rightarrow +\infty$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_\omega \in \mathbb{K}^n$ , allora deve essere:*

$$(\omega, \mathbf{x}_\omega) \in \mathcal{F}(\Omega).$$

**(b)** *Se  $\mathbf{x}$  non è completa nel passato e  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I$  è tale che  $t_k \rightarrow \alpha$  per  $k \rightarrow +\infty$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{K}^n$ , allora deve essere:*

$$(\alpha, \mathbf{x}_\alpha) \in \mathcal{F}(\Omega).$$

◇

**Dimostrazione.** Diamo la dimostrazione per il caso (a), quella per il caso (b) è del tutto analoga. Useremo il lemma 4.2. Supponiamo, per assurdo, che la soluzione non sia completa nel futuro e che, per il limite della successione considerata, valga  $(\omega, \mathbf{x}_\omega) \in \Omega$ . Consideriamo un aperto  $Q \subset \Omega$  che soddisfi  $(\omega, \mathbf{x}_\omega) \in Q$  e  $\overline{Q} \subset \Omega$ . Scegliamo  $Q$  in modo che su  $\overline{Q}$  valga la condizione di lipschitzianità locale  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}')\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$  se  $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}') \in \overline{Q}$ ; con costante  $L \geq 0$ . Quindi definiamo  $M := \max\{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \mid (t, \mathbf{x}) \in \overline{Q}\}$ . Per fissare le idee prendiamo  $\overline{Q}$  della forma

$$[\omega - \Delta, \omega + \Delta] \times B_E(\omega),$$

dove  $\Delta > 0$  e  $B_E(\omega)$  è la palla chiusa in  $\mathbb{K}^n$  centrata in  $\omega$  e con raggio  $E > 0$ .

Dato che  $t_k \rightarrow \omega$  e  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{x}_\omega$ , per  $k \rightarrow +\infty$ , scegliendo  $k$  sufficientemente grande possiamo trovare  $\delta > 0$  e  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccoli da soddisfare contemporaneamente le tre condizioni ( $B_\epsilon(\mathbf{x}(t_k))$  è la palla chiusa di raggio  $\epsilon$  centrata in  $t_k$ ):

- (1)  $|t_k - \omega| < \delta$ ,
- (2)  $[t_k - \delta, t_k + \delta] \times B_\epsilon(\mathbf{x}(t_k)) \subset [\omega - \Delta, \omega + \Delta] \times B_E(\mathbf{x}_\omega)$ ,
- (3)  $\delta < \min\{\epsilon/M, 1/L\}$ .

Se  $M = 0$ ,  $\mathbf{f} \equiv 0$  su  $Q$  e, a partire dal primo  $t_k$  per cui  $(t_k, \mathbf{x}(t_k)) \in Q$  l'orbita diventa costante per cui  $\omega = +\infty$  e la soluzione è completa nel futuro contrariamente alle nostre ipotesi. Quindi deve essere  $M > 0$ . In questa situazione, per soddisfare (3), è sufficiente prendere  $\epsilon = 2\delta M$  e quindi scegliere  $0 < \delta < 1/(2L)$ . Si può scegliere  $\delta > 0$  piccolo a sufficienza in modo che valgano anche (1) e (2), questo è sempre possibile visto che  $(t_k, \mathbf{x}(t_k))$  può essere reso arbitrariamente vicino a  $(\omega, \mathbf{x}_\omega)$  per ipotesi.

La prima condizione assicura che  $\omega \in (t_k - \delta, t_k + \delta)$ . Le rimanenti due condizioni, in base al lemma 4.2, assicurano che esista una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}'(t)), \\ \mathbf{x}'(t_k) = \mathbf{x}(t_k). \end{cases} \quad (4.55)$$

definita in tutto l'intervallo  $(t_k - \delta, t_k + \delta)$ . Tale soluzione, per costruzione è un'estensione dell'originale soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Infatti soddisfa la stessa equazione differenziale e si raccorda con la soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  per  $t = t_k$  ed è definita anche nell'intorno destro di  $\omega$ , dato che  $\omega \in (t_k - \delta, t_k + \delta)$ . Questo è impossibile visto che  $\mathbf{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{K}^n$  è una soluzione massimale.  $\square$

La proposizione 4.7 ha delle importanti conseguenze sulla completezza delle soluzioni massimali di un problema di Cauchy quando valgono alcune condizioni aggiuntive. Elenchiamo tali conseguenze in un'unica proposizione.

**Proposizione 4.8.** *Nelle ipotesi su  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  date nel teorema 4.5, si supponga che  $\Omega = \mathbb{R} \times D$  con  $D \subset \mathbb{K}^n$  aperto non vuoto.*

*Sia  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ , con  $I = (\alpha, \omega)$ , una soluzione massimale del problema di Cauchy (4.24) valgano i seguenti fatti.*

**(a)** *Se l'orbita di  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è contenuta in un compatto  $K \subset D$  per  $t \geq T \in I$ , allora*

$\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è completa nel futuro.

(b) Se l'orbita di  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è contenuta in un compatto  $K \subset D$  per  $t \leq T \in I$ , allora  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è completa nel passato.

(c) Se  $D = \mathbb{K}^n$  e  $\sup_{(t, \mathbf{x}) \in \Omega} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| < +\infty$  allora  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è completa.

(d) Se  $\mathbf{f}$  non dipende dalla variabile  $t$  (cioè il sistema di equazioni differenziali associato è autonomo) e il supporto di  $\mathbf{f}$  (definito rispetto alla topologia di  $D$ ) è compatto, allora  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  è completa.

◇

### Dimostrazione.

(a) Supponiamo che la soluzione non sia completa nel futuro, per cui  $I = (\alpha, \omega)$  con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Consideriamo una successione  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (T, \omega)$  con  $t_k \rightarrow \omega$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Dato che  $K \supset \{\mathbf{x}(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  è compatto in uno spazio metrico, è anche compatto per successioni, pertanto esisterà una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}(t_{k_p})\}_{p \in \mathbb{N}}$  convergente a qualche  $\mathbf{x}_\omega \in K$ . Per la proposizione 4.7 deve essere  $(\omega, \mathbf{x}_\omega) \in \partial\Omega$ . Essendo  $\Omega = \mathbb{R} \times D$  deve necessariamente essere  $\mathbf{x}_\omega \in \mathcal{F}(D)$ , che è impossibile visto che  $\mathbf{x}_\omega \in K \subset D$  e  $\mathcal{F}(D) \cap D = \emptyset$  essendo  $D$  aperto. Quindi  $\omega = +\infty$ .

(b) La prova è strettamente analoga a quella data per il caso (a).

(c) Supponiamo che la soluzione non sia completa nel futuro, per cui  $I = (\alpha, \omega)$  con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Consideriamo le palle chiuse  $B_k \subset \mathbb{K}^n$  centrate nell'origine e di raggio  $k = 1, 2, \dots$ . Deve accadere che, per ogni  $k \in \mathbb{N}$  esiste  $t_k \in (\alpha, \omega)$ , con  $t_k > t_{k-1}$  e  $\mathbf{x}(t_k) \notin B_k$ . Altrimenti, a partire da qualche  $T \in (\alpha, \omega)$  l'orbita sarebbe confinata in uno dei compatti  $B_k$  e per (a) dovrebbe essere  $\omega = +\infty$ . Allora, dato che  $\{\|\mathbf{x}(t_k)\|\}_{k \in \mathbb{N}}$  non è limitato e tenendo conto del fatto che  $t_k - t_0 < \omega - t_0 < +\infty$ , concludiamo che il rapporto incrementale della prima componente di  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  (della parte reale di essa se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ),  $(x^1(t_k) - x^1(t_0))/(t_k - t_0)$  deve divergere per  $k \rightarrow +\infty$ . Per il teorema di Lagrange (applicato separatamente alle componenti del vettore  $\mathbf{x}(t_k)$  che sono in numero finito) esisterà una sottosuccessione di punti  $\tau_{k_j}$ , con  $t_0 \leq \tau_{k_j} \leq t_{k_j}$ , per cui l'insieme  $\{\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(\tau_{k_j})\|\}_{j \in \mathbb{N}}$  non è limitato. Direttamente dall'equazione differenziale,  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ , concludiamo che  $\mathbf{f}$  non può essere limitata. Questo contraddice le ipotesi, per cui  $\omega = +\infty$ . Con una dimostrazione analoga, usando (b), si prova che  $\alpha = -\infty$ .

(d) Indichiamo con  $\text{supp}_D \mathbf{f}$  il supporto di  $\mathbf{f}$  nella topologia di  $D$ , cioè la chiusura dell'insieme  $\{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0\}$ , rispetto alla topologia relativa di  $D$ . Per definizione quindi  $\text{supp}_D \mathbf{f} \subset D$  e  $\text{supp}_D \mathbf{f}$  è compatto<sup>4</sup>. Se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ , una soluzione, e quindi l'unica, del sistema considerato è  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  per  $t \in \mathbb{R}$ . Questa soluzione è completa per costruzione. Se  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , l'orbita non può comunque entrare, per qualche punto  $t_1 \neq t_0$ , nell'insieme  $\{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}$  per lo stesso motivo. In questo caso l'orbita è sicuramente tutta confinata in  $\{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0\}$  e quindi nel compatto  $\text{supp}_D \mathbf{f} \subset D$ . Allora per (a) e (b) la soluzione è completa. □

<sup>4</sup>La compattezza non dipende dalla topologia relativa, per cui se  $\text{supp}_D \mathbf{f}$  è compatto rispetto a  $D$  lo è rispetto a  $\mathbb{K}^n$ .

## 4.4 \*Confronto tra equazioni differenziali, dipendenza dalle condizioni iniziali e da parametri.

In questa sezione ci occuperemo di alcune questioni tecniche riguardanti l'andamento qualitativo delle soluzioni dei problemi di Cauchy. Essenzialmente ci occupiamo di capire cosa succede, dal punto di vista matematico, alle soluzioni quando si cambia “qualcosa” nel problema di Cauchy in funzione del cambiamento apportato. Possiamo cambiare due cose: la funzione  $\mathbf{f}$  oppure la condizione iniziale (eventualmente entrambe).

### 4.4.1 Lemma di Gronwall e sue conseguenze.

Il seguente risultato molto tecnico, benché elementare ed apparentemente inutile, è invece di fondamentale importanza nella teoria dei sistemi di equazioni differenziali. Il lemma di Gronwall ha infatti importanti conseguenze nello studio dell'andamento *nel tempo* delle soluzioni di un problema di Cauchy (con funzione  $\mathbf{f}$  lipschitziana), quando si parte da condizioni iniziali differenti, ma “vicine”. Si vede allora che le due orbite si allontanano secondo una certa legge esponenziale il cui andamento è fissato dalla costante di Lipschitz. Una seconda conseguenza si ha invece quando si considerano due soluzioni di due *differenti* problemi di Cauchy imponendo la *stessa* condizione iniziale. Anche in questo caso, al variare del tempo le orbite si allontanano seguendo una legge esponenziale regolata dalla costante di Lipschitz.

**Teorema 4.6.** (\*Lemma di Gronwall) *Siano  $h : [t_0, t_1] \rightarrow [0, +\infty)$  e  $u : [t_0, t_1] \rightarrow [0, +\infty)$  (con  $t_1 > t_0$ ) due funzioni continue. Se, per qualche scelta di  $a, b \in (0, +\infty)$ , vale*

$$h(t) \leq a + b \int_{t_0}^t h(s)u(s)ds, \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_1] \quad (4.56)$$

*allora vale anche*

$$h(t) \leq ae^{b \int_{t_0}^t u(s)ds}, \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_1]. \quad (4.57)$$

◇

**\*Dimostrazione.** Posto

$$V(t) := \int_{t_0}^t h(s)u(s)ds,$$

la (4.56) implica che

$$\frac{dV}{dt} \leq u(t)(a + bV(t)),$$

ovvero, equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \left| \frac{a + bV(t)}{a} \right| - b \int_{t_0}^t u(s)ds \right) \leq 0.$$

La funzione tra parentesi vale 0 per  $t = t_0$ , per cui è non positiva se  $t > t_0$ . Di conseguenza

$$\ln \left| \frac{a + bV(t)}{a} \right| \leq b \int_{t_0}^t u(s) ds ,$$

e quindi (tenendo conto che l'argomento del logaritmo è non negativo per costruzione)

$$a + bV(t) \leq ae^{b \int_{t_0}^t u(s) ds} ,$$

ossia, da (4.56),

$$h(t) \leq ae^{b \int_{t_0}^t u(s) ds} .$$

Questo completa la dimostrazione.  $\square$

Il lemma di Gronwall produce il seguente notevole risultato.

**Teorema 4.7.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  un aperto non vuoto e  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  due funzioni continue e localmente lipschitziane rispetto alla variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ . Si supponga che ulteriormente:*

*(i)  $\mathbf{f}$  sia lipschitziana su tutto  $\Omega$  rispetto a  $\mathbf{x}$  ed alla costante  $K$ ;*

*(ii) valga  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \epsilon$ , per qualche  $\epsilon \geq 0$ , per ogni  $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ .*

*Se  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  e  $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{K}^n$  sono soluzioni di problemi di Cauchy rispettivamente individuati da  $\mathbf{f}$ , con condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , e  $\mathbf{g}$ , con condizione iniziale  $\mathbf{y}(\tau_0) = \mathbf{y}_0$ , e si considerano sullo stesso intervallo finito  $(\alpha, \beta) \ni t_0, \tau_0$  con  $[\alpha, \beta] \subset I \cap J$ , allora vale la stima:*

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq (\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + M|t_0 - \tau_0| + \epsilon|\alpha - \beta|) e^{K|t-t_0|} , \quad \text{per ogni } t \in (\alpha, \beta), \quad (4.58)$$

avendo definito

$$M := \max\{\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t))\| \mid t \in [\alpha, \beta]\} .$$

$\diamond$

**\*Dimostrazione.** Dimostriamo la tesi per  $t \in [t_0, \beta)$ , nell'altro semi intervallo la dimostrazione è del tutto analoga. Vale

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^t \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s)) ds .$$

Sottrando membro a membro si trova:

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))] ds + \int_{t_0}^{\tau_0} \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s)) ds ,$$

che si può riscrivere, sottraendo e aggiungendo uno stesso integrale:

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))] ds$$



$$+ \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) - \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s))] ds + \int_{t_0}^{\tau_0} \mathbf{g}(s, \mathbf{y}(s)) ds .$$

Nelle nostre ipotesi, sfruttando la disuguaglianza triangolare, note stime integrali e la disuguaglianza che definisce la lipschitzianità, si ha di conseguenza che

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + K \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)\| ds + \epsilon|\beta - \alpha| + M|\tau_0 - t_0| .$$

Consideriamo ora che, se  $\epsilon > 0$ , vale:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + M|\tau_0 - t_0| + \epsilon|\beta - \alpha| > 0 . \quad (4.59)$$

In tal caso (4.58) è immediata conseguenza del lemma di Gronwell usando  $a := \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + M|\tau_0 - t_0| + \epsilon|\beta - \alpha|$ ,  $t_1 := \beta$ ,  $h(t) := \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|$  e  $u(t) = 1$  costantemente ed infine,  $b := K$ . Se nelle ipotesi del nostro teorema  $\epsilon = 0$ , cioè  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| = 0$  per ogni  $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ , allora vale anche  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| \leq \epsilon$  per ogni  $\epsilon > 0$ . In tal caso possiamo sfruttare la dimostrazione appena fatta ottenendo che, per ogni  $t$  fissato:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq (\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + M|t_0 - \tau_0| + \epsilon|\alpha - \beta|) e^{K|t-t_0|}$$

per ogni  $\epsilon > 0$ . Dato che questo vale, per ogni fissato  $t$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , deve anche essere, per tale valore di  $t$ :

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq (\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + M|t_0 - \tau_0|) e^{K|t-t_0|} ,$$

per cui abbiamo mostrato la tesi anche per  $\epsilon = 0$ .  $\square$

Ci sono diversi casi possibili in cui si può applicare il teorema provato. Esaminiamone due in particolare.

(1) Si considera un unico sistema di equazioni differenziali ( $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ ), ma si considerano due distinte condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  allo stesso  $t_0 = \tau_0$ . Il teorema dice che in tal caso, per  $t \in (\alpha, \beta)$ , vale la stima:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| e^{K|t-t_0|} .$$

(2) Si considera la stessa condizione iniziale, ma due distinti sistemi di equazioni differenziali, uno relativo a  $\mathbf{f}$  e l'altro a  $\mathbf{g}$ , con  $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_\infty \leq \epsilon$  su  $\Omega$ . Il teorema dice che in tal caso, per  $t \in (\alpha, \beta)$  vale la stima:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \epsilon e^{K|t-t_0|} .$$

#### 4.4.2 Regolarità della dipendenza dai dati di Cauchy e questioni connesse.

Un problema importante, specie nelle applicazioni fisiche è la regolarità con cui dipendono, dalle condizioni iniziali e da altri eventuali parametri, le soluzioni massimali di un'equazione differenziale. Tale problema è stato studiato a lungo a partire da Poincaré . Citiamo senza dimostrazione il seguente teorema onnicomprensivo (si veda il capitolo 12 di [Lee03] dove i risultati sottostanti

sono più in generale dimostrati su varietà differenziabili di cui  $\mathbb{K}^n$  è un caso particolare).

**Teorema 4.8.** *Si consideri una funzione  $\mathbf{f} : \Lambda \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}^n$  dove:*

- (i)  $\Lambda \subset \mathbb{K}^l$  è un aperto non vuoto i cui elementi sono indicati con  $\lambda$ ;
- (ii)  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$  è un aperto non vuoto i cui elementi sono indicati con  $(t, \mathbf{x})$ ;
- (iii)  $\mathbf{f}$  è continua su  $\Lambda \times \Omega$  e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ .

Se

$$(\lambda, t_0, \mathbf{x}_0, t) \mapsto \mathbf{x}_{\lambda, t_0, \mathbf{x}_0}(t), \quad \text{con } (\lambda, t_0, \mathbf{x}_0) \in \Lambda \times \Omega, \quad (4.60)$$

indica la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\lambda, t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (4.61)$$

dove  $t \in I_{\lambda, t_0, \mathbf{x}_0} \subset \mathbb{R}$ , allora valgono i seguenti fatti.

(a) *L'insieme*

$$\Gamma := \{(t, \lambda, t_0, \mathbf{x}_0) \mid (\lambda, t_0, \mathbf{x}_0) \in \Lambda \times \Omega, t \in I_{\lambda, t_0, \mathbf{x}_0}\}$$

è un insieme aperto in  $\mathbb{R} \times \Lambda \times \Omega$ .

(b) *La funzione (4.60) da  $\Gamma$  in  $\mathbb{K}^n$  è una funzione continua congiuntamente in tutte le sue variabili.*

(c) *Se  $\mathbf{f}$  è di classe  $C^k(\Lambda \times \Omega)$ , allora la funzione (4.60), da  $\Gamma$  in  $\mathbb{K}^n$  è di classe  $C^{k-1}(\Gamma)$ .*

(d) *Se  $\mathbf{f}$  è analitica in tutte le variabili congiuntamente allora è tale la funzione (4.60) da  $\Gamma$  in  $\mathbb{K}^n$ .*

## 4.5 \*Problema di Cauchy su varietà differenziabili.

Il problema di Cauchy può essere studiato anche su varietà differenziabili  $M$  di classe  $C^k$  con  $k > 1$ . Esso però deve essere riformulato nel linguaggio dei campi vettoriali.

**Definizione 4.6.** Se  $\mathbf{X}$  è un campo vettoriale di classe  $C^0$  (almeno) sulla varietà differenziabile  $M$ , una **curva integrale**  $\gamma : I \rightarrow M$  del campo  $\mathbf{X}$ , dove  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto, è una curva di classe  $C^1$  (almeno) tale che

$$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{X}(\gamma(t)), \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (4.62)$$

◇

Al solito  $\dot{\gamma}(t)$  denota il vettore tangente a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  in cui il parametro vale  $t$  (vedi Appendice A). L'identità (4.62) in coordinate locali  $(U, \phi)$  in cui

$$\mathbf{X}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n X^i(x^1, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

ed in cui la curva  $\gamma$  è parametrizzata come  $x^i = x^i(t)$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , si esprime come

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.63)$$

Questa non è altro che un'equazione differenziale autonoma su  $\Omega = \mathbb{R} \times U$ .

Il caso in cui il campo  $\mathbf{X}$  dipende parametricamente da  $t$  può essere inglobato nel caso precedente in vari modi. La via più diretta è quella di passare alla varietà prodotto  $M' := \mathbb{R} \times M$ , e definendo su essa il campo

$$\mathbf{X}' := \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{X},$$

dove  $u \in \mathbb{R}$  è la coordinata naturale di  $\mathbb{R}$ . Il problema di determinare le curve integrali a  $\mathbf{X}'$ :

$$\dot{\gamma}'(t) = \mathbf{X}'(\gamma'(t)), \quad \text{per ogni } t \in I, \quad (4.64)$$

si riduce in coordinate locali  $u, x^1, \dots, x^n$  al sistema di equazioni:

$$\frac{du}{dt} = 1, \quad (4.65)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(u(t), x^1(t), \dots, x^n(t)) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.66)$$

Una maniera meno rigida è quella di fare uso di una struttura di varietà fibrata (vedi l'appendice A)  $E$ , in cui la fibra è diffeomorfa a  $M$  e la base è l'asse  $\mathbb{R}$ . Tale struttura, in coordinate locali naturali di  $E$  adattate alla fibrazione riproduce il sistema di sopra. La scelta viene solitamente suggerita dal problema fisico concreto. Nel seguito di questa sezione ci restringeremo al caso autonomo.

#### 4.5.1 Problema di Cauchy, esistenza ed unicità globali.

In base a quanto detto precedentemente, il problema di Cauchy, per un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  almeno continuo sulla varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^1$  (o superiore), si può pensare come il problema di determinare le curve integrali  $\gamma : I \rightarrow M$  del campo  $\mathbf{X}$ , dove  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto del campo  $\mathbf{X}$  che soddisfino un'assegnata condizione iniziale  $\gamma(t_0) = p_0$ :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= \mathbf{X}(\gamma(t)), \\ \gamma(t_0) &= p_0. \end{cases} \quad (4.67)$$

**Definizione 4.7.** Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale almeno continuo sulla varietà differenziabile  $M$ . si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$ :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= \mathbf{X}(\gamma(t)), \\ \gamma(t_0) &= p_0. \end{cases} \quad (4.68)$$

Una soluzione di (4.68)  $\gamma : I \rightarrow M$ , con  $I \ni t_0$  intervallo aperto, è detta **soluzione massimale** se non esiste alcuna altra soluzione di (4.68)  $\gamma' : I' \rightarrow M$ , con  $I' \ni t_0$  intervallo aperto, soddisfacente le condizioni:

- (i)  $I' \supsetneq I$ ,
- (ii)  $\gamma(t) = \gamma'(t)$  se  $t \in I$ .

Una soluzione massimale  $\gamma : I \rightarrow M$  è detta:

**completa**, se  $I = (-\infty, +\infty)$ ;

**completa nel futuro**, se  $I = (a, +\infty)$  con  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ;

**completa nel passato**, se  $I = (-\infty, b)$  con  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Il campo  $\mathbf{X}$  è detto **completo** quando tutte le soluzioni massimali di (4.68) sono complete.  $\diamond$

Analogamente al caso in  $\mathbb{K}^n$ , vale il seguente teorema di esistenza ed unicità globale.

**Teorema 4.9. (Esistenza ed unicità globale)** *Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  sulla varietà differenziabile  $M$ . Si consideri il problema di Cauchy per  $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$ :*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= \mathbf{X}(\gamma(t)), \\ \gamma(t_0) &= p_0. \end{cases} \quad (4.69)$$

*Esiste ed è unica la soluzione massimale  $\gamma : I \rightarrow M$ .*

*Inoltre, se  $\gamma_J : J \rightarrow M$ , con  $J \ni t_0$  intervallo aperto, è un'altra soluzione di (4.69), allora*

- (i)  $J \subset I$ ,
- (ii)  $\gamma(t) = \gamma_J(t)$  se  $t \in J$ .  $\diamond$

**Dimostrazione.** Per prima cosa si osservi che in ogni sistema di coordinate locali, il problema di Cauchy scritto sopra si riduce ad un problema di Cauchy autonomo su un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Essendo il campo di classe  $C^1$ , siamo nelle ipotesi di locale lipschitzianità e pertanto, in ogni sistema locale di coordinate la soluzione locale esiste ed è unica. Ogni punto raggiunto da  $\gamma$  cade in un sistema di coordinate locali per definizione di varietà stessa. Per questo motivo il lemma 4.2 continua a valere, con la stessa dimostrazione, anche rimpiazzando  $\Omega$  con  $\mathbb{R} \times M$ . Tenuto conto di ciò, la dimostrazione è identica a quella data per il teorema 4.5.  $\square$

## 4.5.2 Completezza delle soluzioni.

Possiamo anche dare qualche risultato sulla completezza delle soluzioni. Per prima cosa enunciamo un risultato preliminare.

**Proposizione 4.9.** *Nelle ipotesi su  $\mathbf{X}$  del teorema 4.9, sia  $\gamma : I \rightarrow M$ , con  $I = (\alpha, \omega)$ , una soluzione massimale del problema di Cauchy (4.69).*

**(a)** *Se  $\gamma$  non è completa nel futuro, non può esistere alcuna successione  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I$  tale che  $t_k \rightarrow \omega$  per  $k \rightarrow +\infty$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(t_k) \in M$ .*

(b) Se  $\gamma$  non è completa nel passato, non può esistere alcuna successione  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I$  tale che  $t_k \rightarrow \alpha$  per  $k \rightarrow +\infty$  ed esiste  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(t_k) \in M$ .

◇

**Dimostrazione.** La dimostrazione è la stessa data per la proposizione 4.7, riducendosi ad un sistema di coordinate locali. □

La proposizione 4.9 ha delle importanti conseguenze sulla completezza delle soluzioni massimali di un problema di Cauchy quando valgono alcune condizioni aggiuntive. Elenchiamo tali conseguenze in un'unica proposizione.

**Proposizione 4.10.** Nelle ipotesi su  $\mathbf{X}$  date nel teorema 4.9, se  $\gamma : I \rightarrow M$ , con  $I = (\alpha, \omega)$ , una soluzione massimale del problema di Cauchy (4.69) valgono i seguenti fatti.

(a) Se l'orbita di  $\gamma : I \rightarrow M$  è contenuta in un compatto  $K \subset M$  per  $t \geq T \in I$ , allora  $\gamma : I \rightarrow M$  è completa nel futuro.

(b) Se l'orbita di  $\mathbf{x} : I \rightarrow M$  è contenuta in un compatto  $K \subset M$  per  $t \leq T \in I$ , allora  $\mathbf{x} : I \rightarrow M$  è completa nel passato.

(c) Se  $M$  è compatta o, più debolmente,  $\mathbf{X}$  ha supporto compatto, allora ogni soluzione massimale  $\mathbf{x} : I \rightarrow M$  è completa, cioè  $\mathbf{X}$  è completo. ◇

**Dimostrazione.**

(a) Supponiamo che la soluzione non sia completa nel futuro, per cui  $I = (\alpha, \omega)$  con  $\omega \in \mathbb{R}$ . Consideriamo una successione  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (T, \omega)$  con  $t_k \rightarrow \omega$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Per ogni  $p \in M$ , sia  $(U, \phi)$  una carta locale con  $U \ni p$ . Per ogni  $U$  prendiamo un aperto  $V \ni p$  tale che  $\bar{V}$  sia compatto e sia incluso completamente in  $U$ . La classe delle carte locali  $(V, \phi|_V)$  definisce, per costruzione, un atlante di  $M$ . Dato che  $K$  è compatto ed è ricoperto dalla classe degli aperti  $V$  suddetti, possiamo estrarre, da tale classe, un sottoricoprimento finito. Ci sarà quindi una classe finita carte locali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, N}$  ed una corrispondente classe finita di compatti  $\bar{V}_i$ , tali che  $\cup_{i=1}^N \bar{V}_i \supset K$  e  $\bar{V}_i \subset U_i$ . Dato che i punti  $\gamma(t_k)$  sono infiniti, almeno uno dei compatti, diciamo  $\bar{V}_j$ , ne dovrà contenere una quantità infinita. Ci sarà dunque una sottosuccessione  $\{\gamma(t_{k_r})\}_{r \in \mathbb{N}} \subset \bar{V}_j$ .  $\bar{V}_j$  si può identificare con un compatto di  $\mathbb{R}^n$  dato che  $\bar{V}_j \subset U_j$  e  $U_j$  è identificato con un aperto di  $\mathbb{R}^n$  da un omeomorfismo  $\phi_j$ . Per la proprietà di sequenziale compattezza dei compatti di  $\mathbb{R}^n$ , deve esistere una sotto successione di  $\{\gamma(t_{k_r})\}_{r \in \mathbb{N}}$ , che indichiamo con  $\{\gamma(t_{k_{r_s}})\}_{s \in \mathbb{N}}$ , che ammette limite nel compatto  $\bar{V}_j$ . Ma questo significa che, posto  $\tau_s := t_{k_{r_s}}$ , la successione  $\{\tau_s\}_{s \in \mathbb{N}}$  soddisfa  $\tau_s \rightarrow \omega$  per  $s \rightarrow +\infty$  ed esiste il limite, in  $M$ , di  $\gamma(\tau_s)$ . Questo è vietato dalla proposizione 4.9. Di conseguenza  $\gamma$  deve essere completa nel futuro. La dimostrazione di (a) è essenzialmente identica con ovvie modifiche.

(c) Se  $\mathbf{X}$  ha supporto compatto, ogni curva integrale massimale di  $\mathbf{X}$  che ha almeno un punto fuori dal supporto di  $\mathbf{X}$  deve essere una curva costante per il teorema di unicità. In tal caso è completa per costruzione. Le rimanenti curve integrali hanno, per definizione, orbita inclusa in un compatto: il supporto di  $\mathbf{X}$ . Per (a) e (b) anche tali soluzioni sono complete. □

Un secondo risultato di completezza, che generalizza (c) in proposizione 4.8, richiede qualche nozione di geometria Riemanniana, il *teorema di Hopf-Rinow* [doCarmo92] in particolare.

**Teorema 4.10.** *Sia  $(M, g)$  una varietà differenziabile Riemanniana  $C^\infty$  tale che le geodetiche associate alla metrica  $g$  siano complete (cioè definite per tutti i valori in  $(-\infty, +\infty)$  del parametro affine). Se  $\mathbf{X}$  è un campo vettoriale  $C^\infty$  su  $M$  tale che*

$$\sup_{p \in M} g_p(\mathbf{X}(p), \mathbf{X}(p)) < +\infty ,$$

*allora le soluzioni massimali del problema di Cauchy (4.69) associato a  $\mathbf{X}$  sono complete.*

**Dimostrazione.** Prendiamo una soluzione massimale  $\gamma : (\alpha, \omega) \rightarrow M$  e, nelle ipotesi del teorema, supponiamo per assurdo che  $\omega < +\infty$  (l'altro caso è analogo). Sia  $t_0$  un punto in  $(\alpha, \omega)$  e consideriamo la funzione

$$[t_0, \omega) \ni t \mapsto d(x(t_0), x(t)) =: f(t) ,$$

dove  $d$  è la distanza indotta dalla metrica  $g$  su  $M$ . Questa funzione è continua per costruzione. Se fosse limitata avremmo un assurdo perché, per il teorema di Hopf-Rinow [doCarmo92] (dato che la varietà è geodeticamente completa) le palle metriche chiuse di raggio finito sono compatte e la soluzione sarebbe confinata in un compatto per  $t > t_0$  che produrrebbe  $\omega = +\infty$  in base alla proposizione 4.10. Dato che la funzione  $f$  è continua e quindi limitata in ogni intervallo  $[t_0, u]$  con  $t_0 < u < \omega$ , deve accadere che esiste una successione  $t_n \rightarrow \omega$  per cui  $d(x(t_0), x(t_n)) \rightarrow +\infty$ . Se  $s = s(t)$  è l'ascissa curvilinea sulla soluzione valutata a partire da qualche punto sulla curva, vale per  $t_n \rightarrow \omega$

$$\left| \frac{ds}{dt} \right|_{u_n} = \frac{|s(t_n) - s(t_0)|}{t_n - t_0} \geq \frac{d(x(t_0), x(t))}{t_n - t_0} \rightarrow +\infty ,$$

dove abbiamo applicato il teorema di Lagrange e i punti  $u_n$  cadono in  $[t_0, t_n]$ . Questo è impossibile perché, per definizione di ascissa curvilinea,

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = g_{\gamma(t)}(\mathbf{X}(\gamma(t)), \mathbf{X}(\gamma(t)))$$

è limitata per ipotesi.  $\square$

Lavorando in carte locali, il teorema 4.8 può essere esteso facilmente anche nel caso di equazioni differenziali su varietà giungendo al seguente risultato (per una dimostrazione dettagliata si veda il capitolo 12 di [Lee03]):

**Teorema 4.11.** *Si consideri una classe di campi vettoriali  $\{\mathbf{X}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  sulla varietà differenziabile  $M$ , dove  $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$  è un aperto non vuoto e la funzione  $\mathbf{X} : (\lambda, x) \mapsto \mathbf{X}_\lambda(x)$  è congiuntamente*

continua su  $\Lambda \times M$  e di classe  $C^1(M)$  per ogni fissato  $\lambda \in \Lambda$ . Se

$$(\lambda, x_0, t) \mapsto \mathbf{x}_{\lambda, x_0}(t), \quad \text{con } (\lambda, x_0) \in \Lambda \times M, \quad (4.70)$$

indica la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \mathbf{X}_{\lambda}(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.71)$$

dove  $t \in I_{\lambda, x} \subset \mathbb{R}$ , allora valgono i seguenti fatti.

(a) L'insieme

$$\Gamma := \{(t, \lambda, x_0) \mid (\lambda, x) \in \Lambda \times M, t \in I_{\lambda, x_0}\}$$

è un insieme aperto in  $\mathbb{R} \times \Lambda \times M$ .

(b) La funzione (4.70) da  $\Gamma$  in  $M$  è una funzione continua congiuntamente in tutte le sue variabili (in riferimento a un atlante su  $M$ ).

(c) Se  $\mathbf{X}$  è di classe  $C^k(\Lambda \times M)$ , allora la funzione (4.70), e la sua derivata in  $t$  a  $(\lambda, x_0)$  fissati sono funzioni di classe  $C^{k-1}(\Gamma)$  congiuntamente in tutte le variabili.  $\diamond$

### 4.5.3 Gruppi di diffeomorfismi locali ad un parametro.

Consideriamo una varietà differenziabile  $M$  (per esempio  $\mathbb{R}^n$ ) ed un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ , su di essa. Consideriamo infine, per ogni  $p \in M$  la soluzione massimale  $I_p \ni t \mapsto \gamma_p(t)$  del problema di Cauchy (4.69) dove  $p_0 = p$  e  $t_0 = 0$ . Consideriamo l'applicazione

$$\Gamma \ni (t, p) \mapsto \gamma_p(t) =: \phi_t^{(\mathbf{X})}(p)$$

dove  $p \in M$  e  $t \in I_p$ . In base al teorema 4.11 l'insieme  $\Gamma \subset \mathbb{R} \times M$  è aperto e include tutti i punti  $(0, p)$  per  $p \in M$ , inoltre in base al teorema 4.11 e per definizione di soluzione massimale, valgono le due seguenti proprietà di immediata verifica:

(i) l'applicazione  $\Gamma \ni (t, p) \mapsto \phi_t^{(\mathbf{X})}(p)$  è di classe  $C^{k-1}$  congiuntamente nelle due variabili  $t$  e  $p$ ,

(ii)  $\phi_0^{(\mathbf{X})}(p) = p$  per ogni  $p \in M$ ,

(iii)  $\phi_t^{(\mathbf{X})}(\phi_{t'}^{(\mathbf{X})}(p)) = \phi_{t+t'}^{(\mathbf{X})}(p)$  se  $(p, t), (p, t'), (p, t+t') \in \Gamma$ .

#### Osservazioni 4.7.

(1) Per un fissato  $p \in M$ , la proprietà (iii) vale sicuramente, se  $|t|$  e  $|t'|$  sono sufficientemente piccoli dato che la soluzione massimale dell'equazione differenziale definente  $\phi^{(\mathbf{X})}$  con condizione iniziale  $p$  a  $t = 0$  è sicuramente definita in un intervallo aperto  $I_p$  non vuoto.

(2) La condizione (iii) vale per ogni coppia  $t, t' \in \mathbb{R}$  quando le soluzioni massimali di (4.69) sono complete, e ciò accade in particolare se  $\mathbf{X}$  ha supporto compatto e quindi tutte le volte in cui  $M$  è compatta per (c) del teorema 4.9.

(3) Se  $t, -t \in I_p$ , (i) e (ii) implicano che  $\phi_t^{(\mathbf{X})}(\phi_{-t}^{(\mathbf{X})}(p)) = p$ . Non possiamo però concludere immediatamente che  $\phi_{-t}^{(\mathbf{X})} = (\phi_t^{(\mathbf{X})})^{-1}$ , dato che non è detto che variando l'argomento  $p$ , il valore di

$t$  possa tenersi costante:  $t$  deve essere preso all'interno del dominio  $I_p$  della soluzione massimale dell'equazione differenziale definente  $\phi^{(\mathbf{X})}$  con condizione iniziale  $p$  a  $t = 0$  e  $I_p$  può dipendere da  $p$ . Approfondiamo la situazione. Per un fissato  $q \in M$ , dato che la funzione  $(t, p) \mapsto \phi_t^{(\mathbf{X})}(p)$  è continua congiuntamente nelle due variabili che variano in un aperto, la controimmagine di un intorno aperto  $V_q$  di  $q = \phi_0^{(\mathbf{X})}(q)$  deve essere un intorno aperto  $F$  di  $(0, q)$ .  $F$  conterrà un aperto di forma  $(-\epsilon, \epsilon) \times U_q$ , dove  $U_q$  è un secondo intorno aperto di  $q$ , se scegliamo  $\epsilon > 0$  e  $U_q$  sufficientemente piccoli. Per questa via concludiamo che, posto  $J_q := (-\epsilon/2, \epsilon/2)$ , se  $t, t' \in J_q$  allora  $t, t', t + t' \in (-\epsilon, \epsilon)$  e quindi  $\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)$ ,  $\phi_{t'}^{(\mathbf{X})}(p)$ ,  $\phi_{t+t'}^{(\mathbf{X})}(p)$  sono ben definiti se  $p \in U_q$ . Riassumendo abbiamo ottenuto che ogni punto  $q \in M$  ammette un suo intorno aperto  $U_q \subset M$  ed un intervallo aperto  $J_q \ni 0$  tali che, la proprietà (iii) è valida per ogni  $p \in U_q$  ed ogni coppia  $t, t' \in J_q$ . Si osservi che, con la stessa scelta di  $J_q$  e  $U_q$ , se  $t \in J_q$  sia  $\phi_t^{(\mathbf{X})}$  che  $\phi_{-t}^{(\mathbf{X})}$  (e ovviamente  $\phi_{t-t}^{(\mathbf{X})}$ ) sono ben definiti. Possiamo finalmente concludere che le funzioni  $\phi_t^{(\mathbf{X})}$  definiscono dei *diffeomorfismi locali* su  $M$ : per ogni  $q \in M$  e prendendo un qualsiasi  $t \in J_q$ , essi identificano diffeomorficamente un intorno aperto di  $q$ ,  $U_q \subset M$ , con un corrispondente aperto, dipendente da  $t$ ,  $V_{q,t} := \phi_t^{(\mathbf{X})}(U_q)$ . Restringendo le applicazioni a questa coppia di intorni aperti vale effettivamente  $\phi_{-t}^{(\mathbf{X})}|_{V_{q,t}} = (\phi_t^{(\mathbf{X})}|_{U_q})^{-1}$ . Inoltre, scegliendo  $t, t' \in J_q$  la composizione  $\phi_t^{(\mathbf{X})} \circ \phi_{t'}^{(\mathbf{X})}$  è ben definita su  $U_q$  e produce  $\phi_{t+t'}^{(\mathbf{X})}$ .

Mostriamo che la procedura per costruire l'insieme di diffeomorfismi locali  $\phi_t^{(\mathbf{X})}$  a partire da un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  può essere invertita.

**Teorema 4.12.** *Si consideri una varietà differenziabile  $M$  dotata di un'applicazione della forma  $A \ni (t, x) \mapsto \phi_t(x) \subset M$ , dove  $A \subset \mathbb{R} \times M$  è un aperto non vuoto tale che, se  $(t_x, x) \in A$ , allora l'insieme dei numeri  $t$  con  $(t, x) \in A$  è un intervallo aperto che include lo zero. Si assuma che  $\phi$  soddisfi le seguenti proprietà:*

- (i) *l'applicazione  $(t, p) \mapsto \phi_t(p)$  e la sua derivata in  $t$  (a  $p$  fissato) sono ciascuna di classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) congiuntamente nelle due variabili  $t$  e  $p$ ,*
- (ii)  *$\phi_0(p) = p$  per ogni  $p \in M$ ,*
- (iii)  *$\phi_t(\phi_{t'}(p)) = \phi_{t+t'}(p)$  per ogni  $p \in M$  e per  $t, t' \in \mathbb{R}$  tali che entrambi i membri siano definiti.*

*In questo caso esiste un unico campo vettoriale  $\mathbf{X}$  su  $M$  tale che, sul dominio di  $\phi$  vale:  $\phi = \phi^{(\mathbf{X})}$ .  $\mathbf{X}$  è di classe  $C^k$   $\diamond$*

**Dimostrazione.** Si consideri il campo vettoriale  $\mathbf{X}(x) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t(x)$ . Questo è  $C^k$  da (i). Dalle proprietà (ii) e (iii) segue subito che, dove il primo membro è definito,  $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = \mathbf{X}(\phi_t(x))$ , ma allora, dal teorema di unicità globale 4.9,  $t \mapsto \phi_t(x)$  è una restrizione della soluzione massimale dell'equazione differenziale  $\frac{d}{dt}\gamma(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$  con condizione iniziale  $\gamma(0) = x$ . Pertanto  $\phi_t(x) = \phi_t^{(\mathbf{X})}(x)$  ogni qual volta il primo membro è definito. Il fatto che  $\mathbf{X}$  sia unico segue immediatamente dal fatto che se  $\phi_t(p) = \phi_t^{(\mathbf{X})}(p)$  per  $t$  definito in un intorno di 0, allora



$$\mathbf{X}(x) := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi_t(x). \quad \square$$

**Definizione 4.8.** Una classe di trasformazioni  $\phi_t$  sulla varietà differenziabile  $M$ , che soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) del teorema 4.12 è detta **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali** (di classe  $k$ ) su  $M$ . L'unico campo vettoriale  $\mathbf{X}$  su  $M$  tale che, sul dominio di  $\phi$  vale  $\phi = \phi^{(\mathbf{X})}$ , è detto **generatore** del gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali.

Un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali è detto **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi** se la variabile  $t$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  indipendentemente dall'argomento  $p$  di  $\phi_t(p)$ .  $\diamond$

**Osservazioni 4.8.**

(1) Ogni applicazione  $\phi_t : M \rightarrow M$  di un *gruppo ad un parametro di diffeomorfismi* definisce un diffeomorfismo (globale!) di  $M$  in  $M$ , inoltre l'insieme delle funzioni  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  costituisce effettivamente un gruppo commutativo (ossia abeliano), usando come legge di composizione l'ordinaria composizione di funzioni.

(2) Evidentemente un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi *locali* sulla varietà differenziabile  $M$  si può estendere in un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi (globali!) se e solo se il generatore  $\mathbf{X}$  è completo. E ciò accade in particolare se il supporto di  $\mathbf{X}$  è compatto, oppure più fortemente, se  $M$  è compatta.

#### 4.5.4 Campi vettoriali commutanti e commutazione dei corrispondenti gruppi locali

Consideriamo una varietà differenziabile  $M$  e due campi vettoriali,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  su  $M$ , di classe  $C^k$ , con  $k \geq 2$ . Supponiamo che per un certo  $p \in M$  e per due intervalli aperti contenenti l'origine  $I, I'$  valga:

$$(\phi_t^{(\mathbf{X})} \circ \phi_u^{(\mathbf{Y})})(p) = (\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p) \quad \text{se } (t, u) \in I \times I'.$$

Se, in coordinate locali attorno a  $p$ , calcoliamo sui due membri di seguito la derivata parziale rispetto a  $t$ , per  $t = 0$ , e la derivata parziale rispetto a  $t$ , per  $t = 0$  otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 (\phi_u^{(\mathbf{Y})})^i}{\partial u \partial x^k} \bigg|_{u=0} X^k(p).$$

Il teorema di Schwarz (tenendo conto che, nelle ipotesi fatte,  $\phi_u^{(\mathbf{Y})}$  è di classe  $C^2$ ), assicura che possiamo scambiare l'ordine delle derivate a secondo membro, ottenendo:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k(p).$$

Possiamo concludere che, nelle ipotesi fatte:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_p = 0.$$

Abbiamo provato che se due gruppi ad un parametro di dieffeomorfismi locali commutano su un fissato punto, allora la parentesi di Lie dei generatori (assunti di classe  $C^2$ ) è nulla su quel punto. In realtà dalla dimostrazione si evince che è sufficiente che un solo campo sia di classe  $C^2$ , l'altro può essere di classe  $C^1$ .

Vogliamo ora studiare il viceversa: supponendo che due campi vettoriali di classe  $C^2$  abbiano parentesi di Lie nulla, possiamo concludere che i gruppi locali ad un parametro commutino? Vale a tal fine il seguente teorema.

**Teorema 4.13.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile di classe  $k \geq 2$  e due campi vettoriali,  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  su  $M$ , di classe  $C^k$  tali che, su  $M$ :*

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0 .$$

*Supponiamo che per un certo  $p \in M$  e, per due intervalli aperti contenenti l'origine  $I, I'$ , sia ben definito  $(\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p)$  se  $(t, u) \in I \times I'$ , allora è ben definito  $(\phi_t^{(\mathbf{X})} \circ \phi_u^{(\mathbf{Y})})(p)$  e vale:*

$$(\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p) = (\phi_t^{(\mathbf{X})} \circ \phi_u^{(\mathbf{Y})})(p) .$$

◇

**Dimostrazione.** Consideriamo, per  $t \in I$  fissato, la funzione:

$$I' \ni u \mapsto \psi_{t,p}(u) := \frac{\partial}{\partial t}(\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p) - \mathbf{X}((\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p)) .$$

Vogliamo provare che tale funzione è in realtà costante. Infatti derivando in  $u$  e tenendo conto del teorema di Schwartz, in coordinate locali:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{t,p}}{du} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial u}(\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p) - \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{X}((\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_i Y^i(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,k} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i,k} \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} X^k(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,k} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^k(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0 . \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\psi_{t,p}(u) = \psi_{t,p}(0) = \frac{\partial}{\partial t} \phi_t^{(\mathbf{X})}(p) - \mathbf{X}(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) = \frac{d}{dt} \phi_t^{(\mathbf{X})}(p) - \mathbf{X}(\phi_t^{(\mathbf{X})}(p)) = 0 .$$

Dalla definizione di  $\psi_{t,p}$ , l'identità trovata ci dice che la funzione, a  $u \in I'$  fissato:

$$I \ni t \mapsto \gamma_{u,p}(t) := (\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p)$$

soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}\gamma_{u,p}(t) = \mathbf{X}(\gamma_{u,p}(t))$$

con condizione iniziale:

$$\gamma_{u,p}(0) = \phi_u^{(\mathbf{Y})}(p) .$$

Il teorema di unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali assicura allora che deve essere:

$$\gamma_{u,p}(t) = \phi_t^{(\mathbf{X})}(\phi_u^{(\mathbf{Y})}(p)) .$$

Per confronto con la definizione di  $\gamma_{u,p}$  si ha che:

$$(\phi_u^{(\mathbf{Y})} \circ \phi_t^{(\mathbf{X})})(p) = (\phi_t^{(\mathbf{X})} \circ \phi_u^{(\mathbf{Y})})(p)$$

che è quanto volevamo provare.  $\square$

#### 4.5.5 Esistenza di integrali primi funzionalmente indipendenti.

La nozione di *integrale primo*  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto ad un campo vettoriale differenziabile  $\mathbf{X}$  sulla varietà differenziabile  $M$  è la banale generalizzazione della definizione data su  $\mathbb{K}^n$ :

**Definizione 4.9.** (**Integrale primo su  $M$ .**) Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  sulla varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ . Una funzione  $F \in C^1(M)$  è detta integrale primo di  $\mathbf{X}$  quando  $F$  è costante se ristretta alle curve integrali del campo  $\mathbf{X}$  (il valore della costante dipende in generale dalla curva integrale).  $\diamond$

Si ha immediatamente il seguente risultato.

**Proposizione 4.11.** *Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  sulla varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ . Una funzione  $F \in C^1(M)$  è un integrale primo di  $\mathbf{X}$  se e solo se*

$$\mathbf{X}(F) = 0 , \quad \text{ovunque su } M .$$

Se  $F \in C^1(M)$  è integrale primo per  $\mathbf{X}$ , allora ogni insieme

$$E_{\alpha,\beta} := \{x \in M \mid \alpha \leq F \leq \beta\}$$

(ed in particolare ogni insieme di livello di  $F$ ) è **invariante** sotto  $\mathbf{X}$ , cioè:

$$\phi_t^{(\mathbf{X})}(\mathbf{x}) \in E_{\alpha,\beta} \quad \text{se } x \in E_{\alpha,\beta}, \text{ ogni volta che } \phi_t^{(\mathbf{X})}(\mathbf{x}) \text{ è definito.}$$

◇

**Dimostrazione.** La dimostrazione della prima parte, lavorando in coordinate locali, è la stessa data per il teorema 4.4. La seconda parte è ovvia per definizione di integrale primo. □

La seguente proposizione tecnica è di grande utilità in varie costruzioni.

**Proposizione 4.12.** *Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^k$  sulla varietà differenziabile  $M$  di ordine di differenziabilità  $k$ . Sia  $p \in M$  tale che  $\mathbf{X}(p) \neq 0$ , allora esiste una carta locale  $(U, \phi)$  con  $p \in U$  e dove  $\phi : U \ni q \mapsto (y^1(q), \dots, y^n(q))$ , in cui ogni curva integrale di  $\mathbf{X}$  espressa in coordinate è del tipo:  $I \ni t \mapsto (y^1 + t, y^2, \dots, y^n)$  per un corrispondente intervallo aperto  $I \subset \mathbb{R}$  e pertanto:*

$$\mathbf{X}|_U = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

◇

**Dimostrazione.** Consideriamo una carta locale attorno a  $p$  con coordinate  $(x^1, \dots, x^n) \in V \subset \mathbb{R}^n$  in modo tale che  $p$  corrisponda all'origine di  $\mathbb{R}^n$ . Dato che  $\mathbf{X}(p) \neq 0$ , almeno una componente di

$$\mathbf{X}(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

deve essere non nulla. Senza perdere generalità, eventualmente cambiando i nomi delle coordinate, assumiamo che  $X^1(p) \neq 0$ . Consideriamo le curve integrali di  $\mathbf{X}$  espresse da, nelle coordinate dette, in un intorno sufficientemente piccolo di  $p$ :  $x^i = x^i(t, x_0^1, \dots, x_0^n)$  dove  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  sono le coordinate del punto iniziale da cui esce la curva a  $t = 0$  e  $t \in (-\delta, \delta)$  con  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo. Questa funzione è ben definita ed è di classe  $C^1$  per il teorema 4.11. Consideriamo infine la trasformazione definita nell'intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ :

$$(y^1, y^2, \dots, y^n) \mapsto x^i(y^1, 0, y^2, \dots, y^n), \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Tenendo conto del fatto che, per costruzione:

$$x^i(t = 0, x_0^1, \dots, x_0^n) = x_0^i, \quad \text{per } i = 1, \dots, n,$$

mentre

$$\frac{\partial x^i(t, x_0^1, \dots, x_0^n)}{\partial t} \Big|_{t=0} = X^i(p), \quad \text{per } i = 1, \dots, n,$$

concludiamo che la matrice jacobiana di questa trasformazione calcolata in  $(t, y^2, \dots, y^n) = (0, 0, \dots, 0)$  è costituita come segue:

- (i) sulla prima riga appare il vettore riga  $(X^1(p), 0, \dots, 0)$ ,
- (ii) sulla prima colonna appare il vettore colonna  $(X^1(p), X^2(p), \dots, X^n(p))^t$ ,

(iii) nella rimanente matrice quadrata  $(n-1) \times (n-1)$ , ottenuta sopprimendo la prima riga e la prima colonna, appare la matrice identità  $I$ . Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga, concludiamo che esso vale  $X^1(p) \neq 0$ . Ma allora, per il teorema del Dini [GiustiII], la trasformazione

$$(y^1, y^2, \dots, y^n) \mapsto x^i(y^1, 0, y^2, \dots, y^n), \quad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

è un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$  nell'intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ . In definitiva, in un intorno aperto  $U$  di  $p$  sufficientemente piccolo, le funzioni  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$  definiscono un sistema di coordinate locali ammissibili su  $M$  attorno a  $p$ . In questo sistema di coordinate, per costruzione, le curve integrali di  $\mathbf{X}$  hanno la forma  $I \ni t \mapsto (y^1 + t, y^2, \dots, y^n)$ .  $\square$

La proposizione provata ha l'immediata conseguenza concernente l'esistenza locale di  $(\dim M) - 1$  integrali primi funzionalmente indipendenti per ogni campo vettoriale  $C^1(M)$  non nullo.

**Teorema 4.14. (Esistenza locale di  $n - 1$  integrali primi indipendenti.)** *Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  sulla varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e ordine di differenziabilità  $k$ , con  $k \geq 1$ . Sia  $p \in M$  tale che  $\mathbf{X}(p) \neq 0$ , allora esistono una carta locale  $(U, \phi)$  con  $p \in U$  e  $n - 1$  funzioni  $F_k : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1(M)$  che soddisfano:*

(a) *sono integrali primi per  $\mathbf{X}$ ,*

(b) *sono funzionalmente indipendenti, cioè la matrice jacobiana delle  $n - 1$  funzioni  $F_k$  calcolata rispetto alle coordinate locali di  $U$  ha rango massimo possibile:  $n - 1$ .*  $\diamond$

**Dimostrazione.** Usando il sistema di coordinate  $(U, \phi)$  della proposizione 4.12 (eventualmente passando ad un atlante di classe  $C^1$  se  $k > 1$ ), le  $n - 1$  funzioni  $F_k : U \ni q \mapsto y^k(q)$  soddisfano banalmente i due requisiti detti.  $\square$

#### Osservazioni 4.9.

(1) La richiesta di funzionale indipendenza non dipende dalle coordinate usate e può per esempio esprimersi dicendo che, per ogni  $q \in U$ , gli  $n - 1$  vettori  $dF_k(q)$  sono linearmente indipendenti. Lasciamo la prova per esercizio al lettore.

(2) Il risultato sull'esistenza degli  $n - 1$  integrali primi ha validità locale e si basa fortemente sull'ipotesi che  $\mathbf{X}$  non si annulli. L'insieme di tutti i punti  $p \in M$  in cui  $\mathbf{X}(p) = 0$  è invariante sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali associato a  $\mathbf{X}$ . Per alcuni punti isolati  $p$  di tale insieme accade che verso di essi convergono o divergono contemporaneamente più linee integrali di  $\mathbf{X}$  con apparente violazione del teorema di unicità delle soluzioni delle linee integrali di  $\mathbf{X}$ . Per esempio ciò accade per  $p$  dato dall'origine di  $M := \mathbb{R}^2$ , rispetto al campo  $\mathbf{X}(x, y) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$ . Tuttavia nessuna di queste linee raggiunge  $p$  dato che ciò accadrebbe “per valori infiniti del parametro”.

## Capitolo 5

# Leggi di bilancio ed integrali primi in Meccanica.

Il fine di questo capitolo è quello di introdurre alcune quantità fisiche relative a sistemi di punti materiali che entrano in gioco in particolari “leggi di bilancio” e leggi di “conservazione”. Tali leggi sono in realtà teoremi che seguono dai principi della meccanica classica enunciati nel capitolo 3. Essi riguardano in particolare: la quantità di moto, il momento angolare e l’energia meccanica. Daremo una trattazione comune al caso di punto materiale e di sistemi di punti materiali.

Solitamente, ma ci sono alcune eccezioni, la forma generale dell’enunciato di questi teoremi è un’uguaglianza tra la derivata temporale di una certa grandezza  $G$ , funzione delle posizioni e delle velocità dei punti costituenti un sistema fisico ed una seconda grandezza  $X$ , normalmente riguardate l’“esterno” del sistema:

$$\frac{dG(P_1(t), \dots, P_N(t), \mathbf{v}_{P_1}(t), \dots, \mathbf{v}_{P_N}(t))}{dt} = X(t, P_1(t), \dots, P_N(t), \mathbf{v}_{P_1}(t), \dots, \mathbf{v}_{P_N}(t), \text{“var. est.”}).$$

*L’uguaglianza sussiste quando il sistema evolve in conformità delle leggi della dinamica C1-C4 enunciate nel capitolo 3. Quando la grandezza a secondo membro è nulla (almeno sul moto considerato), la legge di bilancio diventa una legge di *conservazione* nel tempo della quantità a primo membro *valutata su un fissato moto del sistema fisico*. Dal punto di vista della teoria dei sistemi di equazioni differenziali, le grandezze conservate nel tempo vengono chiamate *integrali primi* (del moto) come stabilito nella definizione 4.1.*

### 5.1 Equazioni cardinali per i sistemi di punti materiali, conservazione dell’impulso e del momento angolare

Introduciamo ora delle equazioni, valide per tutti i sistemi fisici meccanici soddisfacenti i principi C1-C4 (anche nelle versioni generalizzate valide in presenza di reazioni vincolari e forze inerziali) enunciati al 3, costituiti da punti materiali, dette *Equazioni Cardinali* della dinamica.

### 5.1.1 Massa totale, impulso totale, momento angolare totale, energia cinetica totale

**Definizione 5.1.** Si consideri un sistema  $S$  di  $N$  punti materiali  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  con masse rispettivamente  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Si danno le seguenti definizioni.

(a) La **massa totale del sistema** è:

$$M := \sum_{k=1}^N m_k .$$

(b) Il **centro di massa** del sistema  $S$  al tempo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G(t)$  è il punto (non necessariamente un punto materiale del sistema) individuato su ogni  $\Sigma_t$  dall'equazione:

$$M(G(t) - O) = \sum_{k=1}^N m_k (P_k(t) - O) ,$$

dove  $O \in \Sigma_t$  è un punto qualsiasi.

(c) L'**impulso (totale)** o **quantità di moto (totale)** del sistema  $S$  rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il vettore di  $V_t$ :

$$\mathbf{P}|_{\mathcal{J}}(t) := \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}}(t) .$$

(d) Se  $O = O(t)$  è una qualsiasi linea di universo (non necessariamente quella del punto (b)) e  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento, il **momento angolare (totale)** o **momento della quantità di moto (totale)** del sistema rispetto al polo  $O$  ed ad un riferimento  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il vettore di  $V_t$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}(t) := \sum_{k=1}^N m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}}(t) .$$

◇

L'importanza delle quantità definite sopra è essenzialmente legata al fatto che, sotto determinate ipotesi e per un fissato sistema meccanica, tali quantità si conservano nel tempo o appaiono nelle espressioni definitorie di quantità che si conservano nel tempo. In molti casi, la conoscenza dei valori di grandezze conservate nel tempo fornisce importanti informazioni sul moto del sistema, anche se non si riesce a risolvere esplicitamente l'equazione del moto.

#### Osservazioni 5.1.

(1) *D'ora in poi parlando di un sistema di punti materiali, assumeremo sempre che il loro numero  $N$  sia finito.*

(2) Ovviamente le definizioni date sopra sono valide anche per  $N = 1$ . In tal caso la massa

totale coincide con la massa del punto, il centro di massa coincide con la posizione del punto, l'impulso totale coincide con l'impulso del punto, il momento angolare totale e l'energia cinetica totale coincidono, rispettivamente e per definizione, con il momento angolare e l'energia cinetica del punto materiale.

(3) La definizione di  $G$  è ben posta, nel senso che  $G$  è univocamente determinato, una volta fissato  $O$ , da:

$$G := O + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O) ,$$

inoltre  $G$  non dipende dalla scelta di  $O$ . Infatti, se definiamo  $G_O$  tramite:

$$M(G_O - O) = \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O) ,$$

e  $G_{O'}$  tramite:

$$M(G_{O'} - O') = \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O') ,$$

allora:

$$G_O - G_{O'} = (O - O') + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k (P_k - O') = (O - O') - (O - O') = \mathbf{0} .$$

(4) Se  $\mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}}$  è la velocità del centro di massa nel riferimento  $\mathcal{J}$  per un sistema di punti materiali di massa totale  $M$ , allora vale la relazione

$$\mathbf{P}|_{\mathcal{J}} = M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}} . \quad (5.1)$$

In altre parole: *l'impulso totale del sistema è quello che avrebbe un singolo punto materiale di massa  $M$  concentrata nel centro di massa del sistema.*

La verifica di ciò è immediata, scegliendo una linea di universo  $O = O(t)$ , derivando membro a membro nel tempo l'identità  $M(G(t) - O(t)) = \sum_{k=1}^N m_k (P_k(t) - O(t))$  e tenendo conto di  $M = \sum_k m_k$ .

### Esercizi 5.1.

1. Dimostrare che, passando dal riferimento  $\mathcal{J}$  al riferimento  $\mathcal{J}'$ , vale la legge di trasformazione del momento della quantità di moto (mantenendo lo stesso polo  $O$ ):

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}(t) = \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}'}(t) + \mathbf{I}_{t,O(t)}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}) , \quad (5.2)$$

dove abbiamo introdotto il **tensore d'inerzia** al tempo  $t$  e rispetto al polo  $O$ , dato dalla trasformazione lineare

$$V_t \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{I}_{t,O(t)}(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^N m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge (\mathbf{u} \wedge (P_k(t) - O(t))) . \quad (5.3)$$



2. Dimostrare che, passando dal polo  $O$  al polo  $O'$ , ma rimanendo nello stesso riferimento  $\mathcal{S}$ , vale la legge di trasformazione del momento della quantità di moto (al tempo  $t \in \mathbb{R}$  fissato):

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \mathbf{\Gamma}_{O'}|_{\mathcal{S}} + (O' - O) \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{S}} . \quad (5.4)$$

In particolare, scegliendo  $O' = G$ ,  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$  si può sempre scrivere la somma del momento angolare totale in  $\mathcal{S}$  rispetto a  $G$  e del momento angolare di un unico punto materiale di posizione  $G$  avente massa pari alla massa totale del sistema:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \mathbf{\Gamma}_G|_{\mathcal{S}} + (G - O) \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{S}} . \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Equazioni cardinali.

Possiamo ora enunciare e provare le cosiddette *equazioni cardinali della dinamica* e ne deduciamo le corrispondenti leggi di bilancio/conservazione. Per enunciarli definiamo preventivamente la nozione di *forza interna* e di *forza esterna*. Se abbiamo un sistema  $S$  di punti materiali, una forza  $\mathbf{F}$  agente  $P \in S$  è detta **interna** se la corrispondente reazione agisce su un punto  $P' \in S$ . Una forza che non è interna è detta forza **esterna**. Le forze inerziali sono sempre considerate forze esterne.

**Teorema 5.1.** (Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali.)  
Si consideri un sistema di  $N$  punti materiali che soddisfa i principi C1-C4 (incluso il caso di forze inerziali e reazioni vincolari). Se  $\mathcal{S}$  è un sistema di riferimento, per ogni fissato istante del tempo assoluto  $t$  valgono le seguenti, rispettivamente, **prima e seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali**.

(a) Se all'istante considerato  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  è la somma delle forze esterne agenti sull' $i$ -esimo punto (incluso forze inerziali e reazioni vincolari se necessario):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{S}} \mathbf{P}|_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} . \quad (5.6)$$

(b) Con la stessa notazione di sopra, per qualsiasi scelta del polo  $O$ :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{S}} \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} + \mathbf{v}_O|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} . \quad (5.7)$$

◇

**Dimostrazione.** (a) Il secondo principio della dinamica per il punto  $P_i$  si scrive:

$$\sum_j \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \mathbf{F}_i^{(e)} = m_i \left. \frac{d^2 P_i}{dt^2} \right|_{\mathcal{S}} ,$$

dove  $\mathbf{F}_{ij}$  è la forza agente su  $P_i$  dovuta al punto  $P_j$ , mentre  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  è la somma delle forze esterne agenti su  $P_i$  (inclusendo le forze inerziali se  $\mathcal{S}$  non è inerziale). Da ciò segue che:

$$\sum_i m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Cambiando nome agli indici:

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \sum_{j,i} \mathbf{F}_{ji}^{(i)}.$$

D'altra parte, per il principio di azione e reazione:  $\mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\mathbf{F}_{ji}^{(i)}$ , per cui:

$$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\sum_{j,i} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = -\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^{(i)},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'ordine con cui si esegue la somma (prima per  $i$  e poi per  $j$  oppure viceversa) è irrilevante. Concludiamo che  $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \mathbf{0}$  e pertanto

$$\sum_i m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

cioè :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{S}} \sum_i m_i \mathbf{v}_{P_i} \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Tenendo conto della definizione impulso totale si ha subito la (5.6).

(b) Con la stessa notazione di sopra, dalla definizione di  $\mathbf{\Gamma}_O \Big|_{\mathcal{S}}$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{S}} \mathbf{\Gamma}_O \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i (\mathbf{v}_{P_i} \Big|_{\mathcal{S}} - \mathbf{v}_O \Big|_{\mathcal{S}}) \wedge \mathbf{v}_{P_i} \Big|_{\mathcal{S}} + \sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \sum_i (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)}.$$

Ovvero:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{S}} \mathbf{\Gamma}_O \Big|_{\mathcal{S}} + \sum_i m_i \mathbf{v}_O \Big|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{v}_{P_i} \Big|_{\mathcal{S}} = \sum_i (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)}.$$

Dato che  $\sum_i m_i \mathbf{v}_O \Big|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{v}_{P_i} \Big|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_O \Big|_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{P} \Big|_{\mathcal{S}}$ , per concludere è sufficiente provare che

$$\sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

In effetti, cambiando nomi agli indici, si ha che:

$$\sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + \sum_{j,i} (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{ji}^{(i)} \right).$$

Tenendo ora conto del fatto che l'ordine in cui si somma è irrilevante, si trova che:

$$\sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} + (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{ji}^{(i)} \right) .$$

Usando il principio di azione e reazione:

$$\sum_{i,j} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} - (P_j - O) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (P_i - P_j) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} .$$

Il principio di azione e reazione *in forma forte* (**C3**) assicura che  $\mathbf{F}_{ij}^{(i)}$  è parallela a  $P_i - P_j$ , pertanto  $(P_i - P_j) \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(i)} = \mathbf{0}$  e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### Osservazioni 5.2.

(1) I vettori di  $V_t$ :

$$\mathbf{R}^{(e)} := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)}$$

e

$$\mathbf{M}_O^{(e)} := \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} ,$$

vengono chiamati, rispettivamente, **risultante delle forze esterne** e **risultante dei momenti delle forze esterne** rispetto al polo  $O$ . Più in generale, se  $O$  è un punto arbitrario e  $\mathbf{F}$  è una forza agente sul punto materiale  $P$ ,  $(P - O) \wedge \mathbf{F}$  è detto **momento della forza  $\mathbf{F}$  rispetto al polo  $O$** .

(2) A causa della (5.1) la prima equazione cardinale può essere equivalentemente riformulata come:

$$M\mathbf{a}_G|_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} . \quad (5.8)$$

In questa forma l'equazione afferma che il centro di massa del sistema evolve, in accordo con il secondo principio della dinamica, come se fosse un unico punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema e che è sottoposto alla somma di tutte le forze *esterne* agenti sul sistema.

(3) Si definiscono analogamente la **risultante delle forze interne**,  $\mathbf{R}^{(i)}$ , e la **risultante dei momenti delle forze interne**,  $\mathbf{M}_O^{(i)}$ . Nel corso della dimostrazione delle equazioni cardinali, è stato provato che

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_O^{(i)} = \mathbf{0} ,$$

per ogni sistema di punti materiali che soddisfa i principi della dinamica C1-C4 (anche nella versione estesa) e, per quanto riguarda la risultate dei momenti, indipendentemente dalla scelta del polo  $O$ .

(4) In generale, le due equazioni cardinali non sono in grado di determinare il moto del sistema una volta assegnate condizioni iniziali. Tuttavia nel caso in cui il sistema soddisfi il *vincolo di rigidità* (cioè le distanze tra i punti del sistema sono costanti indipendentemente dalle forze esterne e dalle condizioni iniziali) le due equazioni determinano, se assegnate le condizioni iniziali, il moto del sistema fisico.

### 5.1.3 Leggi di bilancio/conservazione di impulso e momento angolare.

In base alla prima equazione cardinale, se il sistema è isolato oppure, più debolmente, se la somma delle forze esterne è nulla (in un intervallo di tempo), allora l'impulso totale del sistema è un *integrale primo del moto*, cioè si conserva nel tempo (in quell'intervallo di tempo).

In base alla seconda equazione cardinale, se il sistema è isolato oppure, più debolmente, se la somma dei momenti delle forze esterne rispetto a  $O$  è nulla (in un intervallo di tempo), e in entrambi i casi si è scelto  $O \equiv G$  oppure  $O$  con velocità nulla in  $\mathcal{I}$ , allora il momento angolare totale del sistema è un *integrale primo del moto*, cioè si conserva nel tempo (in quell'intervallo di tempo).

I risultati appena citati valgono più debolmente lungo una fissata direzione.

**Proposizione 5.1.** *Nelle ipotesi del teorema 5.1 valgono i seguenti fatti in riferimento ad un arbitrario versore  $\mathbf{n}$  costante nel tempo nel riferimento  $\mathcal{I}$ .*

(a) *Se  $\mathbf{R}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  in un intervallo temporale, allora  $\mathbf{P}|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n}$  è costante in quell'intervallo temporale su ogni moto del sistema (il valore della costante dipende dal particolare moto).*

(b) *Se  $O = G$  oppure  $O$  è in quiete in  $\mathcal{I}$ , e  $\mathbf{M}_O^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  in un intervallo temporale, allora  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n}$  è costante in quell'intervallo temporale su ogni moto del sistema (il valore della costante dipende dal particolare moto).*

(a) e (b) *valgono in particolare in ogni sistema di riferimento inerziale e per ogni direzione  $\mathbf{n}$ , quando il sistema di punti materiali è isolato, cioè non è sottoposto a forze esterne.*

**Dimostrazione.** La prova di (a) è immediata dalla prima equazione cardinale. La prova di (b) è immediata dalla seconda equazione cardinale tenendo conto che, se  $O = G$  oppure  $O$  è in quiete in  $\mathcal{I}$  allora  $\mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}} \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{I}} = \mathbf{0}$  (nel primo caso perché risulta  $\mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}}$  e vale la (5.1)).  $\square$

### Osservazioni 5.3.

(1) Nella storia della fisica, estendendo la classe di sistemi fisici studiati, si è visto che è stato sempre possibile definire un contributo all'impulso totale del sistema (che può non essere totalmente meccanico, per esempio può contenere un contributo dovuto al campo elettromagnetico) in modo tale che l'impulso totale di un sistema isolato venga ancora conservato. Questo principio, cioè che si possa sempre estendere la nozione di impulso in modo tale da avere alla fine una legge di conservazione, prende il nome di **principio di conservazione dell'impulso**. La storia della fisica mostra che tale principio è molto più importante del teorema corrispondente in meccanica, ed ha validità sia nelle teorie relativistiche che in quelle quantistiche ed è legato

alle proprietà di *omogeneità* dello spazio nei riferimenti inerziali.

(2) Nello stesso modo, si è visto che estendendo la classe di sistemi fisici studiati, è stato sempre possibile definire un contributo al momento angolare totale del sistema (che può non essere totalmente meccanico, per esempio può contenere un contributo dovuto al campo elettromagnetico) in modo tale che il momento angolare totale di un sistema isolato venga ancora conservato. Questo principio, cioè che si possa sempre estendere la nozione di momento angolare in modo tale da avere alla fine una legge di conservazione, prende il nome di **principio di conservazione del momento angolare**. La storia della fisica mostra che tale principio è molto più importante del teorema corrispondente in meccanica, ed ha validità sia nelle teorie relativistiche che in quelle quantistiche ed è legato alle proprietà di *isotropia* dello spazio nei riferimenti inerziali.

## 5.2 Energia meccanica

Introduciamo ora le nozioni fondamentali che si riferiscono all'energia meccanica per punti materiali e sistemi di punti materiali.

**Definizione 5.2.** Sia  $P$  un punto materiale di massa  $m$ , soggetto alla forza  $\mathbf{F}$  all'istante  $t$ .

(a) L'**energia cinetica** di  $P$  rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il numero:

$$\tau|_{\mathcal{J}}(t) := \frac{1}{2}m_k \mathbf{v}_P^2|_{\mathcal{J}}(t),$$

dove abbiamo usato la notazione  $\mathbf{u}^2 := \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  per  $\mathbf{u} \in V_t$ .

(b) La **potenza** dissipata dalla forza all'istante  $t$  è

$$\pi|_{\mathcal{J}}(t) := \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}(t) \cdot \mathbf{F}.$$

Se è dato un sistema  $S$  punti materiali  $P_k$  con masse  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

(c) l'**energia cinetica totale** del sistema  $S$  rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il numero:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{J}}(t).$$

◇

### Esempi 5.1.

1. Esistono forze che vengono dette **forze resistenti passive** o **forze dissipative** rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$ . Queste forze hanno la caratteristica di avere potenza dissipata strettamente negativa rispetto a  $\mathcal{J}$  per velocità non nulle:

$$\mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} < 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \in V_{\mathcal{J}}, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \neq \mathbf{0}.$$

L'esempio tipico è quello della *forza viscosa*. Un fluido in quiete in un riferimento  $\mathcal{J}$  esercita su un punto materiale  $P$  una forza che ha la forma funzionale

$$\mathbf{F} = -g(\|\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}\|) \frac{\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}}{\|\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}\|} .$$

La funzione  $g$  è non negativa. Per piccole velocità (es. fino a  $2m/s$  in aria) la funzione  $g$  è costante. Per alte velocità l'andamento è più complicato e segue una legge di potenza come  $k\|\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}\|^n$  con  $k > 0$ .

**2.** Esistono forze che vengono dette **forze girostatiche** rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$ . Esse sono caratterizzate dal fatto che la potenza dissipata rispetto a  $\mathcal{J}$  è sempre nulla:

$$\mathbf{F}(t, P, \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = 0 , \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \in V_{\mathcal{J}} .$$

L'esempio tipico è la *forza di Lorentz* che agisce su un punto materiale di carica  $e$ , quando è immerso nel campo magnetico  $\mathbf{B}(t, P)$  assegnato nel riferimento  $\mathcal{J}$  ( $c$  è la velocità della luce):

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \wedge \mathbf{B}(t, P) .$$

Un'altro esempio, nel qual caso si tratta di una forza inerziale, è dato dalla forza di Coriolis discussa nel capitolo 3:

$$\mathbf{F}^{(Coriolis)} = -2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} .$$

L'energia cinetica di un sistema di punti si può decomporre in modo canonico come energia del centro di massa ed energia “attorno al centro di massa”. Questa decomposizione è utile in vari campi. Essa è introdotta dal seguente elementare ma popolare teorema.

**Teorema 5.2.** (Teorema di König.) *Per un sistema di punti materiali  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , l'energia cinetica rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  è pari all'energia cinetica nel riferimento  $\mathcal{J}_G$ , in cui  $G$  è in quiete e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_G|_{\mathcal{J}}} = \mathbf{0}$ , sommata all'energia cinetica di un punto materiale che occupa la posizione di  $G$  istante per istante ed ha massa pari alla massa totale del sistema  $M$ . In formule, (tralasciando di scrivere la dipendenza temporale per semplicità)*

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2|_{\mathcal{J}} + \mathcal{T}|_{\mathcal{J}_G} . \tag{5.9}$$

◇

**Dimostrazione.** Nelle ipotesi fatte, dalla definizione di energia cinetica ed usando (2.67)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} &= \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k (\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}_G} + \mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}}) \cdot (\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}_G} + \mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}}) \\ &= \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{J}_G} + \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_G^2|_{\mathcal{J}} + \sum_k m_k \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}_G} \cdot \mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}} \end{aligned}$$

$$= \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{S}_G} + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2|_{\mathcal{S}} + \sum_k m_k \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}_G} \cdot \mathbf{v}_G|_{\mathcal{S}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{S}_G} + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2|_{\mathcal{S}} + M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{S}_G} \cdot \mathbf{v}_G|_{\mathcal{S}}.$$

Dove abbiamo usato la definizione di centro di massa. L'ultimo addendo è nullo essendo, nelle nostre ipotesi,  $\mathbf{v}_G|_{\mathcal{S}_G} = \mathbf{0}$  e quindi:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{S}_G} + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2|_{\mathcal{S}}.$$

□

### 5.2.1 Teorema delle forze vive.

Il primo teorema di bilancio che riguarda l'energia cinetica è il cosiddetto *teorema delle forze vive*.

**Teorema 5.3.** (Teorema delle forze vive.) *Si consideri un sistema  $S$  di punti materiali  $P_k$  con masse  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , che soddisfa i principi C1-C4 (incluso il caso di forze inerziali e reazioni vincolari). Nel riferimento  $\mathcal{S}$  e per ogni fissato istante del tempo assoluto  $t$  vale l'equazione delle forze vive:*

$$\Pi^{(e)}|_{\mathcal{S}} + \Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}} = \frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{dt}. \quad (5.10)$$

*Dove, all'istante considerato,  $\Pi^{(e)}|_{\mathcal{S}}$  e  $\Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}}$  sono rispettivamente la **potenza totale delle forze esterne**, cioè la somma delle potenze dissipate dalle forze esterne su ciascun punto del sistema, e la **potenza totale dissipata dalle forze interne**, cioè la somma delle potenze dissipate dalle forze interne su ciascun punto del sistema.*

**Dimostrazione.** Per il punto materiale  $k$ -esimo, se  $\mathbf{F}_k^{(i)}$  e  $\mathbf{F}_k^{(e)}$  sono rispettivamente la somma delle forze interne ed esterne agente su di esso, tenendo conto del secondo principio della dinamica abbiamo:

$$\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} \cdot (\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)}) = m_k \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{d\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{P_k}^2|_{\mathcal{S}} \right).$$

Prendendo la somma su  $k$  si ottiene l'equazione (5.3). □

**Osservazioni 5.4.** Abbiamo precisato il riferimento anche in relazione alla potenza totale dissipata dalle forze interne. In realtà si può provare che tale potenza totale *non dipende dal riferimento*. Questo risultato notevole cade sotto il nome di **principio di indifferenza meccanica** ed ha una notevole importanza nei successivi sviluppi della fisica, passando dalla meccanica alla termodinamica, nella definizione di energia termodinamica interna del sistema come funzione indipendente dal riferimento. Dimostriamo l'indipendenza citata.

Le forze interne sono forze “vere” quindi, per definizione, non dipendono dal sistema di riferimento  $\mathbf{F}_k^{(i)}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{F}_k^{(i)}|_{\mathcal{S}'}$ . La relazione tra le differenti velocità di ciascun punto del sistema al variare del riferimento è data dalle (2.67).

$$\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}'} + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (P_k - O').$$

Da ciò, con ovvie notazioni si ha:

$$\Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}} - \Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} \cdot \sum_k \mathbf{F}_k^{(i)} + \sum_k \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}} \wedge (P_k - O') \cdot \mathbf{F}_k^{(i)}.$$

Per note proprietà del prodotto vettore:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}} \wedge (P_k - O') \cdot \mathbf{F}_k^{(i)} = (P_k - O') \wedge \mathbf{F}_k^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}}$ , per cui:

$$\Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}} - \Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} \cdot \sum_k \mathbf{F}_k^{(i)} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}} \cdot \sum_k (P_k - O') \wedge \mathbf{F}_k^{(i)}$$

Cioé

$$\Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}} - \Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}'} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{R}^{(i)} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{M}_{O'}^{(i)}$$

Da (3) in osservazioni 5.2, concludiamo che  $\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{M}_{O'}^{(i)} = \mathbf{0}$  per cui:

$$\Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}} - \Pi^{(i)}|_{\mathcal{S}'} = 0.$$

### 5.2.2 Forze conservative.

**Definizione 5.3.** Dato un sistema  $S$  di punti materiali  $P_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, N$ , si dice che è stata assegnato un sistema di **forze posizionali** rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ , se per ogni punto  $P_k$  è assegnata una funzione di forza (escludiamo il caso di forze *inerziali*)  $\mathbf{F}_k$ , che nel riferimento  $\mathcal{S}$  assume forma funzionale  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N)$ . Si dice ulteriormente che il sistema di forze posizionali è **conservativo** nel sistema  $\mathcal{S}$  se esiste una funzione  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} \in C^1(E_{\mathcal{S}} \times \dots \times E_{\mathcal{S}})$ , detta **energia potenziale** associata al sistema di forze in  $\mathcal{S}$ , tale che in  $\mathcal{S}$ :

$$\mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N) = -\nabla_{P_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(P_1, \dots, P_N), \quad \text{per ogni } P_k \in E_{\mathcal{S}} \text{ e } k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.11)$$

◇

### Osservazioni 5.5.

(1) La funzione  $-\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  viene chiamata **potenziale** del sistema di forze. Ovviamente sia  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  che il potenziale sono definiti a meno di costanti additive.

(2) Esistono sistemi di forze le cui forze possono essere scritte come in (5.11) dove però,  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  dipende anche dal tempo. In tal caso  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  non prende più il nome di energia potenziale, ma  $-\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  viene ancora chiamato potenziale della forza. La situazione descritta si ha immediatamente quando, data un sistema di forze conservative rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ , si passa ad un nuovo riferimento con una trasformazione di Galileo che coinvolge una velocità di trascinamento.

(3) Particolari casi di forze conservative, per sistemi composti da un'unica particella, sono le cosiddette *forze centrali*: una forza  $\mathbf{F}$  è detta **centrale** nel riferimento  $\mathcal{S}$  con **centro**  $O \in E_{\mathcal{S}}$ , se è posizionale e soddisfa la due condizioni:

- (i)  $\mathbf{F}(P)$  è parallela a  $P - O$ , per ogni  $P \in E_{\mathcal{S}}$ ,
- (ii)  $\mathbf{F}(P)$  è funzione solamente di  $\|P - O\|$ .

La dimostrazione del fatto che una forza centrale è conservativa è lasciata negli esercizi. È invece



facile provare che ogni forza conservativa  $\mathbf{F}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , che soddisfa (i) rispetto a  $O \in E_{\mathcal{J}}$ , è centrale rispetto ad  $O$ . Lavorando in coordinate polari sferiche solidali con  $\mathcal{J}$  e con origine in  $O$ , deve essere

$$\mathbf{F}(P) = -\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Per soddisfare il vincolo (i), le due ultime derivate devono essere nulle e, di conseguenza, l'energia potenziale  $U$  e quindi la forza stessa, non possono dipendere da  $\theta$  e  $\varphi$ , ma solo da  $r = \|P - O\|$ .

Usando teoremi ben noti dai corsi di Analisi [GiustiI] si può provare facilmente il seguente teorema, che caratterizza la forze conservative nel caso di un sistema composto da un unico punto. Il teorema può essere facilmente generalizzato al caso di sistemi di più punti materiali, lasciamo al lettore tale generalizzazione. Ricordiamo, in riferimento al punto (b), che in  $\mathbb{R}^n$  ogni insieme aperto non vuoto e connesso è anche connesso per archi infinitamente differenziabili.

**Teorema 5.4.** *Si consideri la forza posizionale rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ ,  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\Omega \subset E_{\mathcal{J}}$  aperto e connesso si supponga che  $\mathbf{F}$  sia continua.*

(a) *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i)  $\mathbf{F}$  è conservativa;

(ii) *per ogni coppia di punti  $P, Q \in E_{\mathcal{J}}$ , l'integrale  $\int_{P \Gamma}^Q \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ , non dipende dalla curva regolare  $\Gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  di estremi  $P$  e  $Q$  purché sia completamente inclusa in  $\Omega$ ;*

(iii) *per ogni curva chiusa regolare  $\Gamma$  tutta contenuta in  $\Omega$  vale*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

(b) *Se  $\mathbf{F}$  è conservativa l'energia potenziale  $U$  è di classe  $C^1(\Omega)$  e può essere definita come:*

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(P) := - \int_{O \Gamma}^P \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

dove  $O \in \Omega$  è un punto arbitrario fissato una volta per tutte e  $\Gamma$  è una qualsiasi curva regolare da  $O$  a  $P$ , tutta contenuta in  $\Omega$ .

(c) *Se  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$  ed è conservativa allora  $\mathbf{F}$  è irrotazionale, cioè:*

$$\nabla \wedge \mathbf{F}(P) = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } P \in E_{\mathcal{J}}. \quad (5.12)$$

(d) *Se  $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  è semplicemente connesso e  $\mathbf{F}$  è irrotazionale, allora  $\mathbf{F}$  è conservativa.  $\diamond$*

Dal punto di vista puramente matematico, il teorema di sopra funziona rimpiazzando ovunque  $E_{\mathcal{J}}$  e  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R}^n$ , ma il campo vettoriale  $\mathbf{F}$  non ha in tal caso il significato di un campo di forze.

Nel caso generale di un campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n F^i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  definito sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , la condizione di irrotazionalità in  $\mathbf{x}_0$  (che si riduce alla (5.12) per  $n = 3$ ), si scrive:

$$\left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_{\mathbf{x}_0} = \left. \frac{\partial F^j}{\partial x^i} \right|_{\mathbf{x}_0} .$$

Infine precisiamo che il teorema enunciato ha una formulazione alternativa, ma del tutto equivalente, in termini di 1-forme differenziali in cui la condizione di campo vettoriale irrotazionale è rimpiazzata da quella di forma chiusa (vedi il Teorema B.3, ed i commenti successivi in appendice).

### Esercizi 5.2.

1. Dimostrare che se  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow V_{\mathcal{J}}$  è continua e centrale rispetto al punto  $O \in E_{\mathcal{J}}$ , con  $\Omega$  aperto, allora  $\mathbf{F}$  è conservativa.

2. Si consideri un punto materiale  $P$  sottoposto alla sola forza centrale  $\mathbf{F}$  con centro  $O$  nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ . Mostrare che, nel riferimento  $\mathcal{J}$ , il moto del punto avviene in un piano che è perpendicolare al momento angolare del punto  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  che è costante nel tempo.

### Osservazioni 5.6.

(1) Si possono considerare sistemi di forze conservative che sono tali *indipendentemente dal riferimento*. Questa situazione si presenta per sistemi di *due* punti materiali,  $P$  e  $Q$  quando essi interagiscono con una coppia di forze (costituente una *coppia azione-reazione*),  $\mathbf{F}(P, Q)$  e  $-\mathbf{F}(P, Q)$ , rispettivamente agente su  $P$  e su  $Q$  per la quale esista una funzione  $U = U(r)$  di classe  $C^1(\mathbb{R})$  (o su qualche sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}$ ) con, se  $\mathcal{U}(P, Q) := U(\|P - Q\|)$

$$\mathbf{F}(P, Q) = -\nabla_P \mathcal{U}(P, Q) . \quad (5.13)$$

Si osservi che, in tal caso,  $-\nabla_Q U(\|P - Q\|) = -\mathbf{F}(P, Q)$ , per cui il ruolo dei due punti è simmetrico. La richiesta che  $U$  sia funzione di  $\|P - Q\|$  e non di  $P - Q$  implica immediatamente che  $\mathbf{F}$  sia diretta lungo la congiungente  $P$  e  $Q$  come richiesto dal principio di azione e reazione in forma forte. Si osservi infine che, in questo caso, la relazione (5.13) vale in ogni riferimento (le forze considerate sono forze vere e quindi invarianti al variare del riferimento) assumendo, come è tacito dalla notazione, che forma funzionale di  $U$  non dipenda dal riferimento. Ciò è coerente visto che la distanza  $d_t(P, Q) = \|P - Q\|$  è assoluta e non dipende dal riferimento. Anche in questo caso la funzione  $U$  viene detta *energia potenziale* ora associata alla *coppia* di forze  $\mathbf{F}(P, Q)$  e  $-\mathbf{F}(P, Q)$ .

La situazione si estende al caso di più punti materiali quando, per ogni coppia di punti  $P_i, P_j$  con  $i \neq j$ , la corrispondente coppia azione-reazione del sistema di forze ammette un'energia potenziale  $\mathcal{U}_{ij}(P_i, P_j) = U_{ij}(\|P_i - P_j\|)$  del tipo detto sopra. L'energia potenziale totale, per la quale vale (5.13), si ottiene sommando quella di tutte le coppie possibili:

$$\mathcal{U}(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{i < j} \mathcal{U}_{ij}(P_i, P_j) .$$

Si osservi che la coppia  $P_i, P_j$  e la coppia  $P_j, P_i$  contribuiscono con un'unica funzione energia potenziale  $\mathcal{U}_{ij}$ .

(2) Tornando al caso di due punti materiali  $P, Q$  con energia potenziale  $\mathcal{U}(P, Q) = U(\|P - Q\|)$ , se la posizione di  $Q$  è tenuta fissa, in quiete, in un riferimento  $\mathcal{I}$ , mediate l'azione di forze suppletive agenti su  $Q$ , la forza agente su  $P$  è di fatto una forza centrale con centro dato da  $Q$ , quando la si descrive nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

### 5.2.3 Bilancio e conservazione dell'energia meccanica.

Da tutto quanto visto si ha il seguente fondamentale teorema, che enuncia l'equazione di bilancio per l'energia meccanica e la sua proprietà di conservazione nel caso in cui tutte le forze in gioco siano conservative.

**Teorema 5.5.** (Bilancio e conservazione dell'energia meccanica.) *Si consideri un sistema  $S$  di punti materiali  $P_k$ , con  $k = 1, 2, \dots, N$ , di masse  $m_k$  rispettivamente che soddisfi i principi C1-C4 (anche nelle forme generalizzate). Si supponga che  $S$  sia sottoposto, in addizione ad altre eventuali forze non conservative, ad un sistema di forze conservative rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$  con energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(P_1, \dots, P_N)$ .*

*Se si definisce l'energia meccanica totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$ :*

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{I}} := \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}.$$

*Per ogni istante di tempo assoluto  $t$  vale l'equazione di bilancio, su ogni moto del sistema*

$$\Pi|_{\mathcal{I}}^{(noncons.)} = \frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{I}}}{dt},$$

*dove  $\Pi|_{\mathcal{I}}^{(noncons.)}$  è la potenza totale delle forze non conservative nel riferimento  $\mathcal{I}$ .*

*Nel caso in cui tutte le forze agenti sul sistema siano conservative, l'energia meccanica è un integrale primo del moto, cioè è conservata al variare del tempo sui moti del sistema.*

**Dimostrazione.** Dall'equazione (5.10) è sufficiente dimostrare che la potenza delle forze conservative  $\Pi|_{\mathcal{I}}^{(cons)}$  soddisfa

$$\Pi|_{\mathcal{I}}^{(cons)} = -\frac{d\mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(P_1(t), \dots, P_N(t))}{dt},$$

dove  $P_k = P_k(t)$  risolve l'equazione del moto per il sistema di punti. In effetti, dalla (5.11), si ha che:

$$\Pi|_{\mathcal{I}}^{(cons)} = \sum_k \pi^{(cons)}|_{\mathcal{I}k} = -\sum_k \mathbf{v}_{P_k} \cdot \nabla_{P_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(P_1(t), \dots, P_N(t)) = -\frac{d\mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(P_1(t), \dots, P_N(t))}{dt},$$

che è quanto si voleva provare.  $\square$

**Osservazioni 5.7.** Si osservi che in generale l'energia *meccanica* non è conservata per sistemi fisici reali isolati, a causa delle forze non conservative interne al sistema che in natura sono sempre presenti (gli attriti interni). Estendendo la classe di sistemi fisici studiati, si è visto però che è sempre possibile definire un contributo all'energia totale del sistema (che può non essere totalmente meccanica, per esempio può contenere l'energia del campo elettromagnetico oppure energia interna termodinamica) in modo tale che l'energia totale di un sistema *isolato* sia conservata nel tempo quando valutata in un riferimento inerziale. Il principio generale, che afferma che si possa sempre estendere la nozione di energia in modo tale da avere alla fine una legge di conservazione, prende il nome di **principio di conservazione dell'energia**. La storia della fisica mostra che tale principio è molto più importante del teorema dimostrato sopra in meccanica, ed ha validità sia nelle teorie relativistiche che in quelle quantistiche ed è legato alle proprietà di omogeneità del tempo nei riferimenti inerziali.

### Esercizi 5.3.

1. Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato ad un'asta orizzontale  $\ell$  liscia passante per il punto  $O$ . L'asta è in quiete nel riferimento  $\mathcal{S}'$ . Definire un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse solidali con  $\mathcal{S}'$ , centrate in  $O$ , con asse  $x$  diretto lungo  $\ell$ , asse  $y$  orizzontale e perpendicolare a  $\ell$  e asse  $z$  verticale diretto verso un punto  $H$ .  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg\mathbf{e}_z$  ed ad una forza dovuta ad una molla ideale, di lunghezza nulla a riposo e di costante  $\kappa > 0$ , fissata ad un estremo al punto  $P$  ed all'altro estremo al punto fisso  $H$  di altezza  $h$  sulla verticale di  $O$ . Il riferimento  $\mathcal{S}'$  ruota, attorno all'asse  $\mathbf{e}_z$ , con velocità angolare costante  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} = \omega \mathbf{e}_z$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ .

(i) Scrivere le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  e darne la soluzione generale a

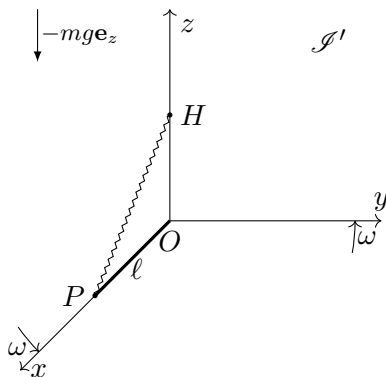


Figura 5.1: Illustrazione dell'esercizio 5.3.1.

seconda del valore del rapporto  $m\omega^2/\kappa$ .

(ii) Nel caso  $m\omega^2/\kappa < 1$ , esprimere la reazione vincolare  $\phi$  in funzione del tempo, per il moto con condizioni iniziali  $P(0) - O = x_0 \mathbf{e}_x$ , con  $x_0 > 0$ , e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}(0) = \mathbf{0}$ .

(iii) Dimostrare che la componente parallela all'asse  $z$  del momento angolare di  $P$  con polo  $O$  non è in generale conservata nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

(iv) Individuare tutte le condizioni iniziali (a  $t = 0$ ) che producono moti in cui la componente parallela all'asse  $z$  del momento angolare di  $P$  con polo  $O$  rispetto a  $\mathcal{I}$  è conservata nel tempo.

**2.** Si consideri il sistema fisico dell'esercizio precedente.

(i) Dimostrare che nel riferimento  $\mathcal{I}'$  ha senso, dal punto di vista matematico, definire un'energia potenziale di parte delle forze inerziali, in aggiunta a quella della molla, in modo tale che l'energia meccanica totale sia conservata nel riferimento  $\mathcal{I}'$ .

(ii) Individuare tutte le condizioni iniziali (a  $t = 0$ ) che producono moti in cui l'energia meccanica è conservata nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

**3.** Si considerino due punti materiali  $P$  e  $Q$  di masse  $M$  ed  $m$  rispettivamente. Tali punti siano vincolati alla superficie cilindrica  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$ , dove  $x, y, z$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con un il riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . I due punti sono sottoposti alla forza gravitazionale individuata dall'accelerazione  $\mathbf{g} := -g\mathbf{e}_z$ , sono connessi l'un l'altro da una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e lunghezza nulla a riposo e ciascuno di essi è connesso all'origine  $O$  delle coordinate con una molla di costante elastica  $\gamma > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

(i) Si scrivano le equazioni pure di movimento in coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  adattate a  $C$  con

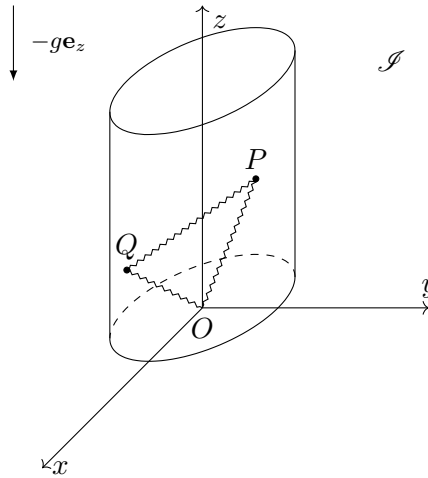


Figura 5.2: Illustrazione dell'esercizio 5.3.3.

$\varphi = 0$  sull'asse  $x$ .

(ii) Si calcolino le reazioni vincolari sui punti all'istante iniziale per le condizioni iniziali  $P(0) - O = R\mathbf{e}_x$ ,  $Q(0) - O = \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{v}_P(0) = \mathbf{v}_Q(0) = \mathbf{0}$ .

(iii) Si dimostri che la quantità  $M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q$  (dove il punto indica, al solito, la derivata temporale) è conservata nel tempo su ogni moto del sistema.

### 5.3 \*La necessità della descrizione in termini di continui e di campi in meccanica classica.

La descrizione data dei fondamenti della meccanica classica non è sufficiente ad includere tutti i fenomeni noti nella fisica classica, infatti, vi sono almeno due situazioni molto importanti in cui lo schema dato in termini di punti materiali non è sufficiente a descrivere la realtà fisica.

Il primo caso si ha quando ci si trova a lavorare con corpi fisici che cadono sotto la denominazione di corpi *continui*, in particolare i cosiddetti *fluidi*. Si tratta di sistemi fisici che all'apparenza macroscopica sono *estesi* (usualmente omogenei ed isotropi) e *continui*: nel senso che le configurazioni spaziali di tali corpi, nello spazio assoluto ad ogni istante, sono descritti geometricamente da insiemi omeomorfi ad aperti e connessi di  $\mathbb{R}^3$ . In tal caso la descrizione data precedentemente deve essere modificata al fine di introdurre opportune *funzioni densità* che generalizzano le varie grandezze introdotte prima. Per esempio si hanno funzioni densità di massa e funzioni (a valori vettoriali) densità di forze che integrate su porzioni di corpo (o superfici di tali porzioni) forniscono rispettivamente la massa e forza totale su tale porzione. È fondamentale in questa ottica (per esempio per poter introdurre la forza totale agente su una porzione finita di continuo) che lo spazio assoluto ad ogni tempo abbia una struttura affine che permetta di parlare di vettori che non appartengono allo spazio tangente della varietà e di poter sommare vettori che appartengono a spazi tangenti in punti diversi. La generalizzazione della meccanica dei punti materiali al caso dei continui cade sotto il nome di **meccanica dei continui**. Un punto importante che ha avuto influenza fondamentale nello sviluppo della fisica, è che la meccanica dei continui ammette anche una formulazione *locale* delle leggi della dinamica che invece di riferirsi a porzioni finite di continuo si riferisce a punti di continuo. In tale comoda formulazione, le equazioni integrodifferenziali relative a porzioni finite di continuo vengono tradotte in equazioni puramente differenziali valide punto per punto nel continuo. Tale formulazione è basata sull'esistenza (provata da Cauchy) di un particolare campo tensoriale detto  *tensore degli sforzi di Cauchy*. Il punto rilevante è che, una volta enunciata la formulazione locale, la struttura affine non è più necessaria ed il formalismo si presta naturalmente ad essere esteso a situazioni più generali. In particolare la Teoria della Relatività Generale di Einstein sfrutta appieno tale possibilità essendo formulata su uno spaziotempo che non può ammettere struttura affine per motivi profondamente fisici (presenza del campo gravitazionale).

Il secondo caso in cui la formulazione data in termini di punti materiali non è più adeguata a descrivere la realtà fisica è quando si trattano le *forze elettromagnetiche*. In questa situazione le forze agenti sui punti materiali sono *mediate* da *campi di forza*. L'idea base è che ogni punto carico elettricamente (*sorgente*) generi un *campo di forze*, cioè una coppia di campi vettoriali  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, P)$  (**campo elettrico**) e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, P)$  (**campo magnetico**) definiti in ogni punto dello spazio  $P$  e ad ogni istante  $t$ , di forma opportuna a seconda delle caratteristiche e dello stato di moto della sorgente. Gli altri punti carichi elettricamente che si trovano nello spazio, risentono di forze esclusivamente attraverso il vettore campo nel punto ove essi si trovano. Più precisamente, per un punto materiale nel vuoto di massa  $m$  e carica elettrica  $q$  che si trova nel

punto  $P(t)$  al tempo  $t$  nello spazio di quiete del riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  vale ancora

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}}(t) = \mathbf{F}_L(t, P(t), \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t))$$

dove la funzione forza a secondo membro è data dalla **Forza di Lorentz**

$$\mathbf{F}_L(t, P(t), \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)) := q\mathbf{E}(t, P(t)) + \frac{q\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)}{c} \wedge \mathbf{B}(t, P(t)) \quad (5.14)$$

$c$  è una costante pari alla velocità della luce nel vuoto. Si noti la presenza esplicita di  $t$  in  $\mathbf{F}_L(t, P(t), \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t))$  che denota la dipendenza dal moto della sorgente dei campi. Il fatto *sperimentale* che rende centrale invece che inutile l'idea di campo, è che se la sorgente modifica il suo stato di moto, il campo nei suoi dintorni si deforma conseguentemente con un certo ritardo: le perturbazioni del campo si muovono ad una velocità finita e le forze agenti sugli altri punti carichi risentono di tale ritardo. È chiaro che in questa situazione, in presenza di cariche in moto, il principio di azione e reazione cessa di valere e con esso *cessa di valere il principio di conservazione dell'impulso, se per impulso si intende la somma degli impulsi dei singoli punti materiali carichi*. Tuttavia si può dimostrare che: il principio di conservazione dell'impulso continua ad essere valido per il sistema complessivo *cariche più campo elettromagnetico*, purché si definisca un contributo all'impulso totale dovuto al campo stesso. Tale contributo si ottiene integrando nello spazio una densità di impulso associata al campo elettromagnetico. *In maniera simile si estendono le leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare*. Infine si può mostrare che la dinamica del sistema complessivo è formulabile con equazioni locali (nel senso detto sopra) equivalenti alle equazioni integro-differenziali di partenza. Il campo elettromagnetico, in definitiva, viene ad essere trattato, pur con importanti differenze, in maniera simile a quanto appena detto per i continui. (In particolare, viene anche definito un tensore degli sforzi del campo elettromagnetico detto tensore di Maxwell).

### Osservazioni 5.8.

- (1) È chiaro che nella realtà i continui non esistono perchè i corpi fisici, ad una analisi microscopica, rivelano una natura molecolare e quindi discreta. A tale livello avvengono importantissimi nuovi fenomeni e l'unica descrizione nota è quella basata sulla Meccanica Quantistica.
- (2) Anche il campo elettromagnetico ha una natura discreta/quantistica basata sul concetto di *fotone*, che condivide anche una natura relativistica.
- (3) Le cariche elettriche elementari, gli elettroni, sembrerebbero essere a tutti gli effetti punti materiali, cioè essere privi di dimensioni (l'unica struttura è quella dovuta al cosiddetto *spin*). In realtà, a livello classico (inclusa la trattazione relativistica non quantistica delle cariche e del campo elettromagnetico) lo schema di carica elettrica puntiforme e campo elettromagnetico non quantistico produce gravi inconsistenze matematiche segnate dall'apparire di quantità infinite (autoforza, autoenergia...)[Jackson]. Tali inconsistenze sono legate al fatto che le cariche elettriche non puntiformi, in base alle stesse equazioni dell'elettromagnetismo risultano auto-interagire con il campo elettromagnetico da esse stesse prodotto, tale fenomeno è fisicamente evidente nella *radiazione di frenamento* che si ha quando si cerca di accelerare una carica<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Per questo motivo anche la stessa *definizione* di massa di una particella carica è problematica, e si è pensato più

---

volte in passato e in ambito classico o relativistico, di definire la massa di un elettrone attraverso l'autointerazione di frenamento con il campo da essa emesso [Jackson]. Tali teorie, malgrado fossero molto interessanti, non hanno mai avuto successo.



## Capitolo 6

# Introduzione alla meccanica dei Corpi Rigidi.

Il fine di questo capitolo è quello di introdurre lo studente ai primi rudimenti di teoria dei *corpi rigidi*. I corpi rigidi, talvolta detti corpi solidi sono quei sistemi fisici che, a causa della loro struttura interna, cioè delle reazioni vincolari interne, non alterano la propria forma (dal punto di vista metrico e non solo topologico) quando sono sottoposti a qualunque tipo di forze esterne. Tali corpi sono ovviamente una idealizzazione, molto utile in pratica, di molti dei corpi fisici che ci circondano. Nella realtà i corpi rigidi non esistono, dato che ogni sistema fisico noto subisce deformazioni quando è sottoposto a forze esterne. La teoria che descrive il legame tra sforzi e deformazioni è trattata dalla *Meccanica dei continui* che non ricade nella trattazione elementare della meccanica e pertanto non sarà trattata in queste note. È infine importante ricordare che, dal punto di vista fisico, i corpi strettamente rigidi non possono comunque esistere per ragioni di principio, a causa della velocità finita di ogni tipo di interazione.

### 6.1 Il vincolo di rigidità per sistemi discreti e continui.

Esistono due classi di corpi rigidi: i corpi rigidi descritti da sistemi di un numero finito di punti materiali ed i sistemi o corpi rigidi continui, che necessitano un'estensione delle definizioni fino ad ora date. Nel seguito esamineremo entrambi i casi.

#### 6.1.1 Corpi rigidi nel caso generale e per sistemi di punti finiti.

**Definizione 6.1.** Un sistema  $S$  di un numero finito (almeno 2) di punti materiali è detto, equivalentemente, **sistema rigido**, **sistema solido**, **corpo rigido** o **corpo solido** se, a causa delle reazioni vincolari interne, le distanze (valutate in ogni spazio assoluto al tempo  $t$ ) tra i punti del sistema sono costanti nel tempo, su ogni possibile moto del sistema, indipendentemente dalle forze esterne agenti su  $S$ . In altre parole, un corpo rigido è un sistema di punti materiali

soddisfacenti il **vincolo di rigidità**.  $\diamond$

Dal punto di vista pratico, il seguente teorema è di enorme importanza in quanto consente di impostare in modo semplice il problema della dinamica per un corpo rigido.

**Proposizione 6.1.** *Un sistema di punti materiali  $S$  è un corpo rigido se e solo se esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{I}_S$  in cui i punti di  $S$  risultano sempre in quiete. Il riferimento  $\mathcal{I}_S$  è detto essere **solidale** con  $S$  ed il vettore  $\omega_{\mathcal{I}_S|_{\mathcal{I}}}$ , dove  $\mathcal{I}$  è un arbitrario sistema di riferimento, è detto **vettore  $\omega$  di  $S$  rispetto a  $\mathcal{I}$** .*

**Dimostrazione.** Se esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{I}_S$  in cui tutti i punti di  $S$  appaiono in quiete, le distanze tra i punti costituenti  $S$  saranno indipendenti dal tempo e pertanto costanti nel tempo. Dato che le distanze sono assolute cioè accadrà in ogni altro riferimento (e rispetto alla distanza assoluta su ogni spazio assoluto al tempo  $t$ ), pertanto  $S$  sarà un corpo rigido. Supponiamo viceversa che  $S$  sia un corpo rigido. Se  $S$  contenga almeno tre punti distinti non allineati  $P_1, P_2, P_3$  ad un certo istante, ortonormalizzando la base di vettori  $P_1 - P_2, P_3 - P_2, (P_1 - P_2) \wedge (P_3 - P_2)$  (eventualmente cambiandone l'orientamento) e scegliendo uno dei tre punti come origine  $O$ , si individua un sistema di riferimento  $\mathcal{I}_S$  in cui i tre vettori detti risulteranno sempre essere in quiete. La base vettoriale suddetta e l'origine  $O$  definiscono un sistema di coordinate cartesiane ortonormali in quiete con  $\mathcal{I}_S$ . In virtù del vincolo di rigidità si ricava che ogni altro punto materiale di  $S$  deve essere in quiete con  $\mathcal{I}_S$ , avendo coordinate costanti nel tempo rispetto al sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}_S$  individuato come detto sopra.  $\mathcal{I}_S$  è dunque un sistema di riferimento solidale con  $S$ . Nel caso in cui tutti i punti materiali di  $S$  siano allineati, al tempo  $t$ , lungo l'asse  $\mathbf{u}$ , essi dovranno rimanere allineati per sempre e con distanze reciproche costanti, in virtù del vincolo di rigidità. Un sistema di riferimento individuato da  $\mathbf{u}$ , uno dei punti di  $S$  preso come origine e due vettori arbitrari formanti con  $\mathbf{u}$  una base ortonormale destrorsa, individua un sistema di riferimento  $\mathcal{I}_S$  solidale con  $S$ .  $\square$

**Definizione 6.2.** Un punto  $O$ , che evolve con una certa linea di universo, è **in quiete con il corpo rigido  $S$** , se è in quiete in un sistema di riferimento solidale con  $S$ .  $\diamond$

**Osservazioni 6.1.**

(1) È chiaro che se  $S$  è costituito da almeno 3 punti non allineati esiste un unico sistema di riferimento solidale con  $S$ . Infatti, dato che la terna di assi costruita come nella dimostrazione deve risultare in quiete in ogni riferimento solidale con  $S$ , sono ammissibili solo trasformazioni di coordinate cartesiane indipendenti dal tempo quando si cambia sistema di riferimento solidale con  $S$ . In altre parole i due riferimenti coincidono. Viceversa, se  $S$  contiene punti allineati lungo  $\mathbf{u}$ , ci sono infiniti sistemi di riferimento solidali con  $S$ , dato che, una volta fissato  $\mathcal{I}_S$  come nella dimostrazione, ogni altro sistema di riferimento che ruota arbitrariamente, rispetto al precedente, attorno all'asse  $\mathbf{u}$  è ancora solidale con  $S$ .

(2) Solo nel caso in cui  $S$  sia costituito di punti allineati, il vettore omega di  $S$  rispetto ad un

riferimento  $\mathcal{S}$  dipende in realtà dalla scelta del riferimento solidale  $\mathcal{S}_S$ .

La seguente proposizione illustra l'utilità dell'esistenza di un riferimento solidale con un corpo rigido.

**Proposizione 6.2.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $S$  sottoposto ad un insieme di forze (eventualmente anche reattive e/o inerziali) con risultante delle forze  $\mathbf{R}$  e risultante dei momenti  $\mathbf{M}_O$  rispetto ad un punto  $O$  in quiete con  $S$ . La potenza totale del sistema di forze considerato, rispetto ad un arbitrario sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  soddisfa:*

$$\Pi|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_S}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{M}_O + \mathbf{v}_0|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{R}. \quad (6.1)$$

*In particolare, la potenza complessiva delle forze interne agenti su  $S$  è sempre nulla indipendentemente dal riferimento  $\mathcal{S}$ .*

**Dimostrazione.** Se  $\mathbf{f}_i$ , per  $i = 1, \dots, N$  è il sistema di forze considerato, dove  $\mathbf{f}_i$  agisce sull' $i$ -esimo punto,  $P_i$ , di  $S$  che possiede velocità  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}}$  rispetto a  $\mathcal{S}$ , vale in virtù delle note relazioni cinematiche ottenute nella sezione 2.4.2:

$$\Pi|_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{v}_0|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_S}|_{\mathcal{S}} \wedge (P_i - O)),$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}_S} = \mathbf{0}$  per definizione di sistema di riferimento solidale con  $S$ . La formula ottenuta porta immediatamente alla (6.1). Nel caso in cui il sistema di forze è costituito dalle forze interne agenti su  $S$ , come sappiamo dalla sezione 5.1.2. la risultante di tali forze e la risultante dei momenti è nulla e pertanto vale anche l'ultima affermazione della proposizione.  $\square$

**Osservazioni 6.2.** *Le configurazioni possibili di un corpo rigido che contiene almeno 3 punti non allineati sono descritte dai punti della varietà  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , dove  $SO(3)$  indica il gruppo delle matrici ortogonali reali  $3 \times 3$ . Infatti, determinare completamente la posizione di un corpo rigido  $S$  che contiene almeno tre punti non allineati, nello spazio di quiete di un fissato riferimento ad un istante fissato, è equivalente a determinare la posizione di una terna ortonormale destrorsa di assi solidale con  $S$ . Fissato un sistema di coordinate ortonormali destrorse in  $\mathcal{S}$ , l'origine della terna solidale con  $S$  è biunivocamente individuata da un vettore posizione, cioè da un vettore colonna in  $\mathbb{R}^3$ , mentre la posizione degli assi della terna solidale con  $S$  è individuata biunivocamente rispetto agli assi del sistema di coordinate nel riferimento  $\mathcal{S}$  dall'assegnazione di una matrice ortogonale con determinante 1, dato che le due terne sono entrambe destrorse. In questo modo abbiamo provato che le configurazioni di  $S$  sono in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .*

Per determinare la matrice di rotazione suddetta possiamo usare i 3 angoli di Eulero tra le due terne (vedi esercizi 2.4). Possiamo allora concludere che i “gradi di libertà” di un corpo rigido con almeno tre punti non allineati sono 6.

### 6.1.2 Corpi rigidi continui.

Su ogni spazio al tempo assoluto  $\Sigma_t$  c'è una misura naturale di volume  $dv$  associata alla struttura di spazio affine euclideo. Il modo più semplice di definire tale misura è quello di pensarla come indotta da un qualunque sistema di coordinate cartesiane ortonormali su  $\Sigma_t$ , semplicemente definendo  $dv := dx^1 dx^2 dx^3$ , dove  $dx^1 dx^2 dx^3$  è l'ordinaria misura di lebesgue su  $\mathbb{R}^3$ . Dato che cambiando sistema di coordinate cartesiane ortonormali, la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate coincide con una matrice di rotazione  $R \in O(3)$  e che  $\det R = 1$ , la misura  $dv$  risulta effettivamente invariante sotto cambio di coordinate cartesiane ortonormali ed è pertanto ben definita. Tale misura, ovviamente, induce una misura in ogni spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}}$  di ogni sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  nello spaziotempo, in virtù dell'identificazione di  $E_{\mathcal{J}}$  con  $\Sigma_t$ .

In modo del tutto analogo, possiamo definire una misura naturale di superfici immerse in ogni  $\Sigma_t$  e di lunghezza di curve (rettificabili) immerse in ogni  $\Sigma_t$ . Tali misure coincidono con le analoghe definite negli spazi di quiete dei sistemi di riferimento dello spaziotempo. Con le misure definite risulta facilmente che gli insiemi compatti (segmenti, porzioni di piano e porzioni di spazio) hanno misura finita nelle corrispondenti misure.

Nel seguito considereremo una generalizzazione elementare della nozione di corpo rigido, data dalla nozione di **sistema** o **corpo rigido continuo**. Intenderemo con ciò un sistema fisico  $S$  descritto nello spazio di quiete  $E_{\mathcal{J}_S}$ , di un sistema di riferimento  $\mathcal{J}_S$  da un insieme connesso, chiuso e limitato  $C \subset E_{\mathcal{J}_S}$ .  $C$  potrà essere costituito dall'unione finita di segmenti, dall'unione finita di porzioni di piano, dall'unione finita di porzioni di spazio, oppure dall'unione di un numero finito di insiemi dei tre tipi detti. Le uniche porzioni di piano o spazio che considereremo saranno date dalla chiusura di insiemi aperti limitati, la cui frontiera è una curva o una superficie continua e  $C^\infty$  a tratti rispettivamente. Ciascuno dei segmenti  $I$  sarà dotato di una massa,  $m_I \in [0, +\infty)$ , ottenuta integrando una **densità di massa lineare**, data da una funzione continua  $\lambda_I$  strettamente positiva, definita sul segmento. Ciascuno delle porzioni di piano  $\Sigma$  sarà dotata di una massa,  $m_\Sigma \in [0, +\infty)$ , ottenuta integrando una **densità di massa superficiale**, data da una funzione continua  $\sigma_\Sigma$  strettamente positiva, definita sulla porzione di superficie. Ciascuno delle porzioni di spazio  $V$  sarà dotata di una massa,  $m_V \in [0, +\infty)$ , ottenuta integrando una **densità di massa lineare**, data da una funzione continua  $\rho_V$  strettamente positiva, definita sulla porzione di spazio. Gli integrali sono ovviamente da riferirsi alle nozioni di misura descritte inizialmente. Nel caso in cui il corpo rigido continuo sia costituito da un solo segmento, una sola porzione di superficie, oppure una sola porzione di spazio e la corrispondente densità di massa sia una funzione costante, il corpo rigido continuo è detto **omogeneo**.

Supporremo inoltre che le forze esterne agenti sul corpo rigido continuo siano in numero finito e agiscano su punti assegnati del corpo. Non considereremo pertanto *densità di forze*.

La trattazione delle forze interne sarebbe ben più complessa e non è possibile fare a meno delle densità di forze, volendole trattare. Noi non avremo bisogno di fare ciò perché sarà sufficiente, generalizzando il risultato dimostrato per i sistemi di punti discreti e la proposizione 6.2, assumere che la risultante delle forze interne, la risultante dei momenti rispetto ad un qualsiasi punto  $O$  e riferimento  $\mathcal{J}$ , la potenza totale delle forze interne rispetto ad un qualsiasi riferimento siano

tutte nulle.

**Osservazioni 6.3.** Quanto affermato in Osservazioni 6.2 si applica immediatamente anche ai corpi rigidi continui: *le configurazioni possibili di un corpo rigido continuo che contiene almeno 3 punti non allineati sono descritte dai punti della varietà  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$* . Si noti  $S$  non ammette tre punti non allineati solo se è un corpo rigido continuo lineare, cioè costituito da un segmento materiale.

**Definizione 6.3.** Si consideri corpo rigido continuo  $S$  individuato dalla regione di spazio  $V$  (la chiusura di un aperto non vuoto) nello spazio di quiete di un riferimento solidale con  $S$ . Sia  $\mathcal{J}$  un secondo sistema di riferimento in modo tale che, al variare del tempo il sistema  $S$  sia descritto dalla classe di regioni  $\{V(t) \subset E_{\mathcal{J}} \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Sia infine  $\rho$  la densità di massa di  $S$  e  $M := \int_V \rho(P) dv(P) = \int_{V(t)} \rho(Q) dv(Q)$  la massa totale del sistema  $S$  dove  $dv$  indica la misura standard di Lebesgue su  $\Sigma_t$  indotta da quella di  $\mathbb{R}^3$ .

Si danno le seguenti definizioni.

(a) Il **centro di massa** del sistema  $S$  al tempo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G(t)$  è il punto (non necessariamente un punto materiale del sistema) individuato su ogni  $\Sigma_t$  dall'equazione:

$$M(G(t) - O) = \int_{V(t)} (P - O) \rho(P) dv(P) ,$$

dove  $O \in \Sigma_t$  è un punto qualsiasi.

(b) L'**impulso (totale)** o **quantità di moto (totale)** del sistema  $S$  rispetto ad  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il vettore di  $V_t$ :

$$\mathbf{P}|_{\mathcal{J}}(t) := \int_{V(t)} \rho(P) \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}(t) dv(P) .$$

(c) Se  $O = O(t)$  è una qualsiasi linea di universo (non necessariamente quella del punto (b)) e  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento, il **momento angolare (totale)** o **momento della quantità di moto (totale)** del sistema rispetto al polo  $O$  ed ad  $\mathcal{J}$  al tempo  $t$  è il vettore di  $V_t$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}(t) := \int_{V(t)} \rho(P) (P - O(t)) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}(t) dv(P) .$$

◇

Nel seguito ometteremo, al solito, di scrivere la dipendenza temporale se non sarà necessario esplicitarla.

L'importanza delle quantità definite sopra è essenzialmente legata al fatto che, sotto determinate ipotesi e per un fissato sistema meccanica, tali quantità si conservano nel tempo o appaiono nelle espressioni definitorie di quantità che si conservano nel tempo. In molti casi, la conoscenza dei valori di grandezze conservate nel tempo fornisce importanti informazioni sul moto del sistema,

anche se non si riesce a risolvere esplicitamente l'equazione del moto.

Le definizioni date si possono facilmente estendere al caso di sistemi rigidi continui definiti da segmenti, da porzioni di superfici o costituiti da unioni di porzioni di volumi, di porzioni di superfici e segmenti.

**Osservazioni 6.4.**

(1) La definizione di  $G$  è ben posta, nel senso che  $G$  è univocamente determinato, una volta fissato  $O$ , da:

$$G := O + \frac{1}{M} \int_V \rho(P)(P - O) dv(P),$$

inoltre  $G$  non dipende dalla scelta di  $O$ . Infatti, se definiamo  $G_O$  tramite:

$$M(G_O - O) = \int_V \rho(P)(P - O) dv(P),$$

e  $G_{O'}$  tramite:

$$M(G_{O'} - O') = \int_V \rho(P)(P - O') dv(P),$$

allora:

$$\begin{aligned} G_O - G_{O'} &= (O - O') + \frac{1}{M} \int_V \rho(P)(P - O) dv(P) - \frac{1}{M} \int_V \rho(P)(P - O') dv(P) \\ &= (O - O') - (O - O') = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(2) Se  $\mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}}$  è la velocità del centro di massa nel riferimento  $\mathcal{J}$  per un sistema di punti materiali di massa totale  $M$ , allora vale la relazione

$$\mathbf{P}|_{\mathcal{J}} = M\mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}}. \quad (6.2)$$

In altre parole: *l'impulso totale del sistema è quello che avrebbe un singolo punto materiale di massa  $M$  concentrata nel centro di massa del sistema.*

La verifica di ciò è immediata, scegliendo una linea di universo  $O = O(t)$ , derivando membro a membro nel tempo l'identità  $M(G(t) - O(t)) = \int_V \rho(P)(P - O(t)) dv(P)$  e tenendo conto di  $M = \int_V \rho(P) dv(P)$ .

(3) Dalla definizione di centro di massa segue che, se dividiamo un sistema in un numero finito di sottosistemi, il centro di massa del sistema complessivo risulta essere il centro di massa di un sistema di punti materiali costituito dai centri di massa dei singoli sottosistemi dotati, rispettivamente, delle masse totali dei sottosistemi come masse dei punti materiali.

(4) Dalla definizione di centro di massa si evince che il centro di massa di un sistema rigido continuo appartiene sempre ad ogni piano di simmetria del sistema.

(5) Esattamente come nel caso di sistemi costituiti da un numero finito di punti materiali, anche per i corpi rigidi continui si dimostrano facilmente le seguenti relazioni sostituendo le sommatorie con appropriati integrali (vedi gli esercizi 5.1 e le corrispondenti soluzioni). Passando dal polo  $O$

al polo  $O'$ , ma rimanendo nello stesso riferimento  $\mathcal{J}$ , vale la legge di trasformazione del momento della quantità di moto (al tempo  $t \in \mathbb{R}$  fissato):

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = \mathbf{\Gamma}_{O'}|_{\mathcal{J}} + (O' - O) \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{J}}. \quad (6.3)$$

In particolare, scegliendo  $O' = G$ ,  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  si può sempre scrivere la somma del momento angolare totale in  $\mathcal{J}$  rispetto a  $G$  e del momento angolare di un unico punto materiale di posizione  $G$  avente massa pari alla massa totale del sistema:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = \mathbf{\Gamma}_G|_{\mathcal{J}} + (G - O) \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{J}}. \quad (6.4)$$

## 6.2 Il tensore d'inerzia e le sue proprietà.

Introduciamo ora un utilissimo strumento matematico che ci permetterà di formulare in modo particolarmente chiaro tutte le grandezze che appaiono nelle leggi meccaniche riguardanti un corpo rigido  $S$  (continuo o no), in particolare le equazioni cardinali della dinamica. Si tratta di un operatore lineare  $\mathbf{I}_O$  dallo spazio dei vettori liberi del riferimento solidale con  $S$ ,  $V_{\mathcal{J}_S}$ , a valori in  $V_{\mathcal{J}_S}$  stesso, detto **tensore d'inerzia**, dipendente dalla scelta di un punto  $O \in E_{\mathcal{J}_S}$ .

### 6.2.1 Il tensore d'inerzia

Per introdurre il tensore d'inerzia, cominciamo la discussione ricavando l'espressione del momento angolare  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  di un corpo rigido rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  ed al polo  $O$ , esaminando due casi. Nel seguito  $\mathcal{J}_S$  indicherà un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido  $S$  che per comodità supporremo di tipo discreto e costituito da  $N$  punti materiali  $P_i$  di masse  $m_i$ , ma le relazioni trovate sono valide anche nel caso di corpi rigidi continui sostituendo, nelle dimostrazioni, un'integrazione al posto della sommatoria.

**Caso 1.** *Il polo  $O$  è in quiete con il corpo rigido.* In questo caso abbiamo che

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i [\mathbf{v}_O|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}} \wedge (P_i - O)].$$

Pertanto, se  $M = \sum_i m_i$  è la massa totale del corpo rigido, vale

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = M(G - O) \wedge \mathbf{v}_O|_{\mathcal{J}} + \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}) \quad (6.5)$$

dove abbiamo introdotto il **tensore d'inerzia** del corpo rigido  $S$  rispetto al punto  $O$ ,  $\mathbf{I}_O : V_{\mathcal{J}_S} \rightarrow V_{\mathcal{J}_S}$  con

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\mathbf{a} \wedge (P_i - O)], \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in V_{\mathcal{J}_S}. \quad (6.6)$$

Nel caso continuo, per esempio volumetrico, avremmo invece

$$\mathbf{I}_O(\mathbf{a}) = \int_{V_S} \rho_V(P)(P - O) \wedge [\mathbf{a} \wedge (P - O)] dv(P), \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in V_{\mathcal{I}_S}. \quad (6.7)$$

**Caso 2.** *Il polo  $O$  è in moto arbitrario.* In questo caso abbiamo che

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} + \sum_{i=1}^N (G - O) \wedge m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}}.$$

Ora possiamo ridurci al caso precedente per quanto riguarda il termine  $\sum_i (P_i - G) \wedge m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}}$  a secondo membro, notando che, a causa della rigidità di  $S$ , il centro di massa  $G$  di  $S$  sarà sempre solidale con  $S$ . Pertanto si ricava:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} = M(G - O) \wedge \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}} + I_G(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}}) + M(G - O) \wedge \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}}.$$

In definitiva:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} = M(G - O) \wedge \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}} + I_G(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}). \quad (6.8)$$

Mostriamo ora che anche l'energia cinetica di  $S$  si può esprimere tramite un'espressione che contiene ancora il tensore d'inerzia. Anche in questo caso esaminiamo due casi supponendo il corpo rigido come discreto. Le formule finali valgono anche per il caso continuo, come si prova facilmente.

**Caso 1.** *A causa dei vincoli, nel riferimento solidale  $\mathcal{I}_S$  c'è un punto  $O$  che rimane in quiete con  $\mathcal{I}$ .* In questo caso, tenendo conto dell'identità  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \wedge (P_i - O)]^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \wedge (P_i - O)] \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \wedge (P_i - O)] = \sum_i m_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \wedge (P_i - O) \wedge [\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \wedge (P_i - O)]. \end{aligned}$$

In definitiva, usando la definizione (6.6), abbiamo trovato che

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}}). \quad (6.9)$$

**Caso 2.** *Il sistema rigido  $S$  è animato da moto arbitrario.* In questa situazione possiamo usare il teorema di König (teorema 5.2), ottenendo che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}}^2 + \mathcal{T}|_{\mathcal{I}_G}.$$

Sopra, il riferimento  $\mathcal{I}_G$  è tale che in esso  $G$  sia in quiete, ed ulteriormente  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_G}|_{\mathcal{I}} = \mathbf{0}$  per definizione. Per calcolare  $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}_G}$  possiamo allora usare il risultato precedente (visto che  $G$  è solidale con  $S$  ma anche in quiete con  $\mathcal{I}_G$ ) trovando

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}_G} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}_G} \cdot I_G(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}_G}).$$



Dalla legge di composizione dei vettori  $\boldsymbol{\omega}$  abbiamo immediatamente (vedi proposizione 2.3) che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}_G} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}$ . La formula finale è pertanto:

$$\mathcal{I}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}} \cdot I_G(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}) . \quad (6.10)$$

Abbiamo visto come il tensore d'inerzia permetta di scrivere in termini compatti l'espressione per il momento angolare e per l'energia cinetica di un sistema rigido. Nella prossima sezione studieremo le proprietà del tensore d'inerzia in modo da renderne più facile il calcolo nei casi concreti. Concludiamo con la definizione formale di tensore d'inerzia e di *momento d'inerzia*.

**Definizione 6.4.** Si consideri un corpo rigido  $S$  e sia  $O$  un punto nello spazio di un riferimento  $\mathcal{J}_S$  solidale con  $S$ . Il **tensore d'inerzia di  $S$  rispetto al punto  $O$**  è l'operatore lineare  $\mathbf{I}_O : V_{\mathcal{J}_S} \rightarrow V_{\mathcal{J}_S}$  definito dalla (6.6), se  $S$  è un sistema rigido discreto costituito da  $N$  punti materiali  $P_i$  con rispettive masse  $m_i$ , oppure dalla (6.7) nel caso in cui  $S$  sia un sistema rigido continuo definito nella porzione di spazio  $V_S$  con densità di massa  $\rho_S$ , oppure con le analoghe formule per situazioni più complesse che includono porzioni di superfici e segmenti.

Se  $\mathbf{n} \in V_{\mathcal{J}_S}$  è un versore,

$$I_{O,\mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{n}) , \quad (6.11)$$

è detto **momento d'inerzia di  $S$  rispetto all'asse per  $O$  parallelo a  $\mathbf{n}$** .  $\diamond$

### 6.2.2 Terne principali d'inerzia.

Il tensore d'inerzia possiede un certo numero di proprietà che ne semplificano decisamente il calcolo. Vedremo infatti tra poco che, per ogni fissato punto  $O$  solidale con un sistema rigido  $S$ , esiste sempre una terna di assi spiccata da  $O$  rispetto alla quale la matrice che rappresenta l'operatore  $\mathbf{I}_O$  assume forma diagonale ed è pertanto determinata da 3 coefficienti unicamente. Tra le altre cose vedremo anche come determinare, con considerazioni di simmetria, queste terne di assi.

La seguente proposizione illustra le principali proprietà del tensore d'inerzia.

**Proposizione 6.3.** *Il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O : V_{\mathcal{J}_S} \rightarrow V_{\mathcal{J}_S}$  di un corpo rigido  $S$  (discreto, continuo, o costituito da parti miste) soddisfa le seguenti proprietà.*

(a) *Si supponga che  $S$  sia l'unione di due sistemi rigidi  $S_1$  e  $S_2$ , assunti disgiunti se entrambi discreti, oppure con  $S_1 \cap S_2$  di misura nulla, nel caso di  $S_1, S_2$  siano entrambi continui e della stessa dimensione. In tal caso il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$  è la somma dei due tensori d'inerzia di  $S_1$  e  $S_2$  rispetto allo stesso punto  $O$ .*

(b)  *$\mathbf{I}_O$  è un operatore simmetrico, in altre parole, la matrice che lo rappresenta rispetto ad una qualsiasi base ortonormale in  $V_{\mathcal{J}_S}$  è simmetrica. I coefficienti  $I_{Oij}$  di tale matrice, riferita alla base ortonormale destrorsa  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , per comodità pensata come spiccata da  $O$ , hanno la forma*

$$I_{Oij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^N m_k \left( \mathbf{x}_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j} \right) , \quad (6.12)$$

se  $\mathbf{x}_K := P_k - O$  per  $k = 1, \dots, N$  dove gli  $N$  punti  $P_k$  con rispettive masse  $m_K$  costituiscono  $S$ , oppure

$$I_{Oij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{e}_j) = \int_{V_S} \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dv(\mathbf{x}), \quad (6.13)$$

per un corpo rigido continuo dato da una porzione di spazio  $V$  con densità di massa  $\rho$ , e valgono analoghe espressioni per corpi rigidi continui individuati da porzioni di superficie o segmenti, o di tipo più complesso.

(c) Se  $S$  non è costituito da punti allineati su un unico asse,  $\mathbf{I}_O$  è strettamente definito positivo. In altre parole è definito positivo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{a}) \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in V_{\mathcal{S}_S}$$

e non degenerare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{implica } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

In tal caso ogni momento d'inerzia  $I_{O,\mathbf{n}}$  è strettamente positivo.

(d) Nel caso in cui  $S$  sia costituito da punti allineati su un unico asse di versore  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{I}_O$  è definito positivo, ma  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{a}) = 0$  se e solo se  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{n}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . In particolare tutti i momenti d'inerzia sono strettamente positivi, eccetto  $I_{O,\mathbf{n}} = 0$ .

(e) Per ogni versore  $\mathbf{u} \in E_{\mathcal{S}_S}$  ed ogni punto  $O \in E_{\mathcal{S}_S}$ , vale la formula

$$I_{O,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N m_k d_k^2, \quad (6.14)$$

dove  $d_k$  è la distanza del punto materiale  $P_k$  di  $S$  con massa  $m_k$  dall'asse per  $O$  con vettore tangente dato da  $\mathbf{u}$ . Nel caso continuo vale l'analogia formula

$$I_{O,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \int_{V_S} \rho_V(P) d(P)^2 dv(P), \quad (6.15)$$

e le analoghe nel caso di corpi continui lineari o superficiali.

**Dimostrazione.** L'enunciato (a) è banalmente vero per le proprietà di additività della sommatoria oppure dell'integrale, la dimostrazione è immediata.

Passiamo a dimostrare (b). Direttamente dalla definizione di tensore d'inerzia (6.6) e (6.7) ed usando l'identità vettoriale

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c},$$

si ricavano (6.12) e (6.13). Da tali espressioni è evidente che la matrice che rappresenta  $\mathbf{I}_O$  è simmetrica e pertanto l'operatore  $\mathbf{I}_O$  è simmetrico. Riguardo alle proprietà di positività espresse in (c) e (d), si noti che, preso un qualsiasi versore  $\mathbf{u}$ , in virtù di (6.12) risulta:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_{(k)}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{x}_{(k)} \cdot \mathbf{u})^2) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_{(k)}^2 - (\mathbf{x}_{(k)} \cdot \mathbf{u})^2).$$

In altre parole, se  $d_k \geq 0$  è la distanza del punto  $P_k$  (con massa  $m_k > 0$ ) dall'asse passante per  $O$  e parallelo a  $\mathbf{u}$ , abbiamo che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N m_k d_k^2 \geq 0.$$

Questo, oltre alla (6.14), prova che, in tutti i casi  $I_0$  è definito positivo, ma non ancora che è anche strettamente positivo quando i punti di  $S$  non sono allineati. Dato che ogni massa  $m_k$  è strettamente positiva, affinché il secondo membro si annulli è necessario e sufficiente che tutte i punti  $P_k$  siano allineati lungo l'asse parallelo ad  $\mathbf{u}$  passante per  $O$ , in modo da annullare tutte le distanze  $d_k \geq 0$ . Quando i punti di  $S$  non sono allineati lungo alcun asse ciò è evidentemente impossibile e risulta  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) > 0$  comunque si scelga il versore  $\mathbf{u}$ . In tal caso, dato che per un vettore generico vale  $\mathbf{a} := \alpha \mathbf{u}$  per qualche  $\alpha \in \mathbb{R}$  e qualche versore  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{a}) = 0$  implica  $\alpha^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{u}) = 0$  e quindi  $\alpha = 0$ , cioè  $\mathbf{a} = 0$ . Nel caso in cui  $S$  sia costituito da punti allineati lungo  $\mathbf{u}_0$ , il ragionamento di sopra può comunque essere ripetuto per ogni altro versore  $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}_0$  ed ogni altro vettore  $\mathbf{a}$  non parallelo a  $\mathbf{u}_0$ . La dimostrazione nel caso continuo è del tutto analoga. La prova di (e) nel caso discreto è già stata fornita sopra, il caso continuo è del tutto analogo.  $\square$

Il fatto che l'operatore  $I_0$  sia simmetrico come provato sopra ha un'importantissima conseguenza. È noto dall'algebra lineare elementare che se  $V$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di prodotto scalare (strettamente definito positivo) e  $A : V \rightarrow V$  è un operatore lineare simmetrico, allora esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare detto) costituita da autovettori di  $A$ . Di conseguenza, la matrice simmetrica che rappresenta  $A$  su tale base è in forma diagonale e contiene sulla diagonale principale tutti e soli gli autovalori di  $A$ . Ne segue che, per un corpo rigido  $S$  e fissato un punto  $O \in \mathcal{S}_S$ , esiste sempre una *base ortonormale* di  $V_{\mathcal{S}_S}$  (che può sempre essere presa come destrorsa) *costituita da autovettori di  $\mathbf{I}_O$* . Su tale base  $\mathbf{I}_O$  assume *forma diagonale*. Si osservi che se  $I_k$  è un autovalore di  $\mathbf{I}_O$  associato all'autovettore  $\mathbf{e}_k$  elemento della base ortonormale appena citata, deve essere

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k \cdot I_k \mathbf{e}_k = I_k 1 = I_k.$$

Pertanto, sempre in riferimento alla base ortonormale di autovettori di  $\mathbf{I}_O$ , gli autovalori  $I_k$ , cioè gli elementi della diagonale nella matrice che rappresenta  $\mathbf{I}_O$  su tale base, saranno i *momenti d'inerzia valutati rispetto agli assi paralleli ai versori di base uscenti da  $O$* . Possiamo racchiudere tutte queste osservazioni in una definizione.

**Definizione 6.5.** Sia  $S$  un corpo rigido e  $O$  un punto dello spazio di quiete  $E_{\mathcal{S}}$  di un sistema di riferimento  $\mathcal{S}_S$  solidale con  $S$ . Una base ortonormale destrorsa di autovettori del tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$  di  $S$  valutato rispetto ad  $O$  (che esiste sempre in conseguenza di (b) nella proposizione 6.3) è detta **terna principale d'inerzia** di  $S$  rispetto ad  $O$ . I versori di tale base sono detti **assi principali d'inerzia** di  $S$  rispetto ad  $O$ . Gli autovalori corrispondenti a tale base, cioè gli elementi della diagonale principale della matrice diagonale che rappresenta  $\mathbf{I}_O$

sulla terna principale d'inerzia sono detti **momenti principali d'inerzia** di  $S$  rispetto ad  $O$ .  $\diamond$

L'uso delle terne principali d'inerzia semplifica notevolmente l'espressione del momento angolare e dell'energia cinetica per un corpo rigido. Supponiamo che  $I_{O'k}$  con  $k = 1, 2, 3$  siano i momenti principali d'inerzia del corpo rigido  $S$  rispetto al punto generico  $O' \in \mathcal{S}_S$ , e che  $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=1,2,3}$  sia la relativa terna principale d'inerzia e sia

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_S|\mathcal{S}} = \sum_{k=1}^3 \hat{\omega}_k \hat{\mathbf{e}}_k .$$

Se  $M$  è la massa totale del corpo rigido, abbiamo i seguenti casi per il momento angolare totale  $\boldsymbol{\Gamma}_O|\mathcal{S}$ .

**Caso 1.** *Il polo  $O$  è in quiete con il corpo rigido.* In questo caso, scegliendo  $O' = O$ , abbiamo che la (6.5) si riduce a:

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|\mathcal{S} = M(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v}_O|\mathcal{S} + \sum_{k=1}^3 I_{Ok} \hat{\omega}_k \hat{\mathbf{e}}_k . \quad (6.16)$$

**Caso 2.** *Il polo  $O$  è in moto arbitrario.* In questo caso, se  $O' = G$ , la (6.8) si riduce a:

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|\mathcal{S} = M(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v}_G|\mathcal{S} + \sum_{k=1}^3 I_{Gk} \hat{\omega}_k \hat{\mathbf{e}}_k . \quad (6.17)$$

Per l'energia cinetica totale  $\mathcal{T}|\mathcal{S}$  abbiamo i seguenti due casi.

**Caso 1.** *A causa dei vincoli, nel riferimento solidale  $\mathcal{S}_S$  c'è un punto  $O$  che rimane in quiete con  $\mathcal{S}$ .* In questo caso, per  $O = O'$ , la (6.9) si riduce a:

$$\mathcal{T}|\mathcal{S} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 I_{Ok} \hat{\omega}_k^2 . \quad (6.18)$$

**Caso 2.** *Il sistema rigido  $S$  è animato da moto arbitrario.* In questa situazione, con  $O' = G$ , la (6.10) si riduce a:

$$T|\mathcal{S} = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}_G|^2_{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 I_{Gk} \hat{\omega}_k^2 . \quad (6.19)$$

### Esempi 6.1.

**1.** Un caso particolarmente interessante per l'applicazione di queste formule si ha quando si studia il moto di un corpo rigido  $S$ , nel riferimento  $\mathcal{S}$  che ammette un punto  $O$  con velocità  $\mathbf{v}_O|\mathcal{S}$  nulla all'istante considerato. Quando ciò accade, tutti i punti  $P$  in quiete con  $S$  sull'asse  $r$  parallelo ad  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_S|\mathcal{S}}$  e passante per  $O$ , hanno velocità  $\mathbf{v}_P|\mathcal{S} = \mathbf{0}$  come si prova immediatamente essendo

$$\mathbf{v}_P|\mathcal{S} = \mathbf{v}_O|\mathcal{S} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_S|\mathcal{S}} \wedge (P - O) = \mathbf{0} + \mathbf{0} .$$

Si dice allora che, all'istante considerato  $r$  è un **asse istantaneo di rotazione** di  $S$  per il riferimento  $\mathcal{J}$ . In certe situazioni accade che l'asse istantaneo di rotazione è anche un asse principale d'inerzia. Per esempio si ha questo stato di cose quando  $S$  è un corpo rigido che ammette un piano di simmetria  $\pi$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}$  è perpendicolare al piano  $\pi$ . la prova di ciò segue dall'osservazione (3) sotto. Un disco omogeneo oppure un cilindro omogeneo che rotolano senza strisciare su una guida rettilinea soddisfano tale requisito quando  $\mathcal{J}$  è il sistema di riferimento della guida. In questo caso il punto  $O$  di  $S$  (l'asse di rotazione istantanea pensato come asse di punti materiali di  $S$ ) in contatto con la guida istante per istante è diverso. Nel caso in esame la formula (6.16) per  $\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  si riduce a, *nell'istante considerato*

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = \sum_{k=1}^3 I_{Ok} \hat{\omega}_k \hat{\mathbf{e}}_k .$$

Dato che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}$ , nella terna principale d'inerzia ha solo una componente non nulla, diciamo la prima (quella lungo l'asse istantaneo di rotazione passante per  $O$ ), la formula scritta sopra si semplifica in

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = I_{O1} \hat{\omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 .$$

Nello stesso modo e nelle stesse ipotesi, il caso 1 per il calcolo dell'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$ , produce la formula

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} I_{O1} \hat{\omega}_1^2 .$$

In altre parole, vale la seguente proposizione.

**Proposizione 6.4.** *Se il corpo rigido  $S$  ammette, all'istante considerato un asse istantaneo di rotazione  $r$  per il riferimento  $\mathcal{J}$  e  $O \in r$ , allora si ha*

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = I_r \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}} , \quad (6.20)$$

e

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} I_r (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}})^2 , \quad (6.21)$$

dove  $I_r$  denota il momento d'inerzia valutato rispetto all'asse istantaneo di rotazione.

### Osservazioni 6.5.

Le seguenti osservazioni sono molto importanti nelle applicazioni per individuare rapidamente delle terne principali d'inerzia.

(1) Supponiamo che un corpo rigido  $S$  sia *simmetrico rispetto ad un piano  $\pi$  solidale con  $S$* . In altre parole, per ogni punto materiale  $P_k$  di  $S$  con massa  $m_k$  c'è un altro punto materiale  $P_{k'}$  di  $S$ , *simmetrico di  $P_k$  rispetto a  $\pi$*  ed ha la stessa massa  $m_{k'} = m_k$ , ovvero, nel caso continuo sussiste l'analoga proprietà in termini di funzione densità di massa. In questo caso, se  $O \in \pi$ , esiste sempre una terna principale d'inerzia rispetto a  $O$  che abbia un asse principale d'inerzia normale a  $\pi$ .

La dimostrazione si ottiene osservando che, in virtù della definizione (6.6) o (6.7), il sottospazio di  $V_{\mathcal{S}}$  dei vettori normali a  $\pi$  ed il suo ortogonale (i vettori paralleli a  $\pi$ ) sono sottospazi invarianti per  $\mathbf{I}_O$  (la prova è semplice per verifica diretta). Restringendo tale operatore a ciascuno dei due sottospazi si ottiene ancora un operatore simmetrico che pertanto può essere diagonalizzato separatamente nei due sottospazi. In questo modo, per costruzione, il versore normale a  $\pi$  e i due autovettori (normalizzati all'unità) tangenti a  $\pi$  formano una terna principale d'inerzia rispetto a  $O$ .

(2) Supponiamo che un corpo rigido  $S$  necessariamente continuo sia *simmetrico rispetto ad un asse  $r$  solidale con  $S$  individuato dal versore tangente  $\mathbf{u}$  e passante per  $O$* . In altre parole, la densità di massa (lineare, superficiale o volumetrica) è una funzione simmetrica per rotazioni attorno ad  $r$ . In questo caso, se  $O \in r$ , esiste sempre una terna principale d'inerzia rispetto a  $O$  che abbia un asse principale d'inerzia dato da  $\mathbf{u}$ . Più precisamente, ogni terna ortonormale destrorsa in cui un asse è diretto lungo  $r$  (e quindi i rimanenti due sono ortogonali a  $r$ ) è una terna principale d'inerzia.

La dimostrazione si ottiene osservando che, in virtù della definizione (6.7) (o le analoghe nel caso lineare e superficiale), il sottospazio di  $V_{\mathcal{S}}$  dei vettori normali a  $r$  ed il suo ortogonale (i vettori paralleli a  $\mathbf{u}$ ) sono sottospazi invarianti per  $\mathbf{I}_O$  (la prova è semplice per verifica diretta). Restringendo tale operatore a ciascuno dei due sottospazi si ottiene ancora un operatore simmetrico che pertanto può essere diagonalizzato separatamente nei due sottospazi. In questo modo, per costruzione, il versore  $\mathbf{u}$  e i due autovettori (normalizzati all'unità) normali a  $r$  formano una terna principale d'inerzia rispetto a  $O$ . D'altra parte, data la simmetria assiale, una rotazione della terna trovata attorno all'asse  $r$  non può alterare la forma del tensore d'inerzia e pertanto ogni terna ortonormale destrorsa con un asse parallelo a  $r$  è una terna principale d'inerzia.

(3) Nella situazione discussa nel punto (2), accade che i momenti d'inerzia rispetto ai due assi perpendicolari ad  $r$  sono uguali per simmetria. Un corpo rigido in cui c'è una terna principale d'inerzia riferita ad un punto  $O$  in cui due momenti principali d'inerzia valgono entrambi lo stesso valore  $\lambda$ , è detto **giroscopico**. L'asse perpendicolare al piano  $\pi$  passante per  $O$  e generato dai due assi principali d'inerzia con momenti principali d'inerzia uguali è detto **asse giroscopico**. È fondamentale notare che ogni altra terna che si ottiene da quella iniziale tramite una rotazione arbitraria attorno all'asse giroscopico è ancora principale d'inerzia rispetto allo stesso  $O$  ed ha gli stessi momenti principali d'inerzia della terna iniziale.

Questo accade perché se si restringe  $\mathbf{I}_O$  a lavorare sul sottospazio  $U_{O,\pi}$  dei vettori uscenti da  $O$  e giacenti in  $\pi$ , in virtù del fatto che su una base di tale spazio l'operatore è diagonale con un unico autovalore  $\lambda$ , risulta che  $\mathbf{I}_O|_{U_{O,\pi}} = \lambda I$ . Dove  $I$  è l'operatore identità su  $U_{O,\pi}$ . Di conseguenza, banalmente, ogni base ortonormale di  $U_{O,\pi}$  sarà composta da autovettori con autovalore  $\lambda$ . Completando una tale base con il versore normale a  $\pi$  si ottiene ancora, per definizione una terna principale d'inerzia, con gli stessi momenti principali d'inerzia iniziali.

Nel caso vi siano due assi giroscopici in una terna principale d'inerzia riferita ad un punto  $O$  solidale con  $S$ , allora il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$  risulta essere proporzionale all'operatore identità, dato che i tre momenti principali d'inerzia devono coincidere (e quindi coincidono tutti i momenti d'inerzia riferiti ad assi passanti per  $O$ ). Un corpo di questo tipo si dice **totalmente giroscopico**.

(4) Supponiamo che  $S$  sia un corpo rigido *piano* e che  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1,2,3}$  sia una terna principale d'inerzia di  $S$  rispetto ad  $O$ , punto solidale con  $S$ , in modo tale che  $\mathbf{e}_1$  sia *perpendicolare al piano che contiene  $S$* . In questo caso i momenti principali d'inerzia soddisfano la relazione

$$I_{O1} = I_{O2} + I_{O3} . \quad (6.22)$$

La dimostrazione si ha per via diretta. Assumiamo il sistema discreto, nel caso continuo la dimostrazione è del tutto analoga.  $I_{O1}$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo ad  $\mathbf{e}_1$  uscente da  $O$  e quindi perpendicolare al sistema. Pertanto, per (6.14), se  $d_i$  è la distanza del punto  $P_k$  da tale asse:

$$I_{O1} = \sum_{k=1}^N m_k d_i^2 = \sum_{k=1}^N m_k x_{2i}^2 + \sum_{k=1}^N m_k x_{3i}^2 = I_{O2} + I_{O3} ,$$

dove abbiamo usato il teorema di Pitagora con  $P_k - O = x_{2k}\mathbf{e}_2 + x_{3k}\mathbf{e}_3$ .

### Esempi 6.2.

1. Consideriamo un cubo di lato  $L$ , omogeneo di massa totale  $M$ . Per simmetria il centro di massa  $G$  coincide con l'intersezione dei tre piani che dividono a metà il cubo. Dato che tali piani sono piani di simmetria, una terna principale d'inerzia rispetto al centro di massa  $G$ , è quella riferita ai tre versori perpendicolari ai tre piani detti. Data la simmetria del problema, i momenti d'inerzia rispetto a tali assi saranno uguali. Tuttavia il corpo rigido *non è totalmente giroscopico*. Il calcolo di ciascuno di questi momenti d'inerzia è elementare:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \left( \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{M}{L^3} (x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{ML}{L^3} \left( \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy x^2 + \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy y^2 \right) = \frac{ML}{L^3} 2L \frac{1}{3} 2 \left( \frac{L}{2} \right)^3 = \frac{ML^2}{6} . \end{aligned}$$

In questo caso il tensore d'inerzia nella base considerata è espresso dalla matrice i cui coefficienti sono  $I_{Gij} = \frac{ML^2}{6} \delta_{ij}$ .

Un'altra terna principale d'inerzia in  $G$  è quella formata dai tre versori ortonormali che giacciono sugli assi che da  $G$  raggiungono i 6 vertici del cubo. Questo è dovuto al fatto che i piani perpendicolari a tali assi e passanti per  $G$  sono ancora piani di simmetria per il cubo. In base al commento (3) di sopra, i momenti principali d'inerzia di tale terna sono ancora tutti uguali a  $\frac{ML^2}{6}$ .

In base al commento (3) di sopra risulta anche che una terna ortonormale destrorsa centrata in  $G$  e disposta arbitrariamente rispetto alle facce del cubo è ancora una terna principale d'inerzia per  $S$  rispetto a  $G$  e vale ancora  $I_{Gij} = \frac{ML^2}{6} \delta_{ij}$ .

2. Consideriamo un disco piano omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$ . Il centro del disco coincide con il centro di massa  $G$  del disco. Ogni terna ortonormale destrorsa in  $G$ , con un versore  $\mathbf{e}_z$  normale al disco deve essere una terna principale d'inerzia, dato che il versore normale al disco

individua un asse giroscopico. Il calcolo del momento principale d'inerzia associato a tale asse è immediato in coordinate polari piane:

$$I_{Gz} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \frac{M}{\pi R^2} r^2 = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} .$$

I due momenti principali d'inerzia rispetto agli assi  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  devono coincidere per simmetria. D'altra parte deve anche essere  $I_{Gx} + I_{Gy} = I_{Gz}$  in base all'ultima osservazione nell'elenco di sopra. Pertanto  $I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{MR^2}{4}$ . In definitiva, rispetto alla base detta:  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , la matrice che rappresenta il tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_G$  è

$$\frac{MR^2}{4} \text{diag}(1, 1, 2) .$$

**3.** Consideriamo un quadrato rigido omogeneo di massa  $M$  e lato  $L$  in cui è stato praticato un foro circolare di raggio  $R < L/2$  con centro dato dal centro  $G$  del quadrato. La terna destrorsa ortonormale di assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  centrata in  $G$ , con  $\mathbf{e}_z$  normale al quadrato e con  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  perpendicolari ai lati del quadrato, è sicuramente principale d'inerzia rispetto a  $G$ , esattamente come nell'esempio precedente. La matrice che rappresenta  $\mathbf{I}_G$  su questa base si calcola facilmente, in base ad (a) nella proposizione 6.3, prendendo la differenza tra la matrice del tensore d'inerzia del quadrato completo (senza buco) e quella del cerchio corrispondente al buco. Il risultato finale è dato dalla matrice diagonale che rappresenta  $\mathbf{I}_G$  nella base detta:

$$\frac{M}{12}(L^2 - 3R^2)\text{diag}(1, 1, 2) .$$

**4.** Consideriamo lo stesso corpo rigido dell'esempio precedente. Una terna ortonormale destrorsa centrata in  $G$  ed ottenuta da quella dell'esempio precedente tramite una rotazione di un angolo  $\theta$  arbitrario attorno all'asse  $z$ , è ancora una terna principale d'inerzia ed ha ancora gli stessi momenti principali d'inerzia della terna considerata nell'esempio precedente. Ciò è vero come conseguenza della discussione nel commento (3) di sopra.

### 6.2.3 Formula di Huygens-Steiner.

Per concludere presentiamo la **formula di Huygens-Steiner** che esprime la matrice del tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_O$  in funzione della matrice del tensore d'inerzia  $\mathbf{I}_G$ , quando si usa la stessa base ortonormale di vettori liberi:

$$I_{Oij} = I_{Gij} + M \left( (G - O)^2 \delta_{ij} - (G - O)_i (G - O)_j \right) , \quad (6.23)$$

dove, al solito  $M$ , indica la massa totale del sistema rigido. Il significato intuitivo è abbastanza evidente:  $I_{Oij}$  è pari alla  $I_{Gij}$  con l'aggiunta della matrice del tensore d'inerzia rispetto ad  $O$  di un punto materiale che si trova in  $G$  e che ha  $M$  come massa. La prova segue dalla (6.12):

$$I_{Oij} = \sum_{k=1}^N m_k \left( (P_k - O)^2 \delta_{ij} - (P_k - O)_i (P_k - O)_j \right)$$



$$= \sum_{k=1}^N m_k \left( (P_k - G + G - O)^2 \delta_{ij} - (P_k - G + G - O)_i (P_k - G + G - O)_j \right) .$$

Sviluppando i prodotti e tenendo conto del fatto che  $\sum_k m_k (P_k - G) = M(G - G) = \mathbf{0}$  e  $\sum_k m_k (P_k - G) = M(G - O)$ , si ottiene

$$I_{Oij} = \sum_{k=1}^N m_k \left( (P_k - G)^2 \delta_{ij} - (P_k - G)_i (P_k - G)_j \right) + M \left( (G - O) \delta_{ij} - (G - O)_i (G - O)_j \right) ,$$

che è la (6.23). Nel caso di corpi rigidi continui, la prova è del tutto analoga usando integrali invece di sommatorie.

Applicando ambo membri della (6.23) sulle componenti di uno stesso versore  $\mathbf{n}$  e calcolando il prodotto scalare per  $\mathbf{n}$  del risultato ottenuto in questo modo, si ottiene l'utile relazione che esprime il momento d'inerzia riferito a due assi paralleli, con vettore tangente  $\mathbf{n}$ , ma uno passante per  $O$  e l'altro passante per  $G$ .

$$I_{O,\mathbf{n}} = I_{G,\mathbf{n}} + Md^2 , \quad (6.24)$$

dove  $d$  è la distanza tra i due assi considerati.

### 6.3 Dinamica del corpo rigido: introduzione alla teoria delle equazioni di Eulero.

Come chiarito in Osservazioni 6.2 (e successivamente esteso al caso di corpi rigidi continui), i gradi di libertà di un corpo rigido (con almeno tre punti non allineati) sono 6, dato che le configurazioni sono in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ . Le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi coinvolgono 6 funzioni incognite (e le loro derivate) che portano le stesse informazioni dei 6 gradi di libertà suddetti. Una volta assegnate le forze esterne agenti su un sistema rigido in funzione di tali gradi di libertà (e delle loro derivate prime), in linea di principio le equazioni cardinali della dinamica introdotte nella Sezione 5.1.2 determinano il moto di un corpo rigido. (Nel caso in cui sono anche presenti reazioni vincolari (non interne), sarà anche necessario assegnare qualche relazione costitutiva del vincolo per ottenere equazioni pure di movimento.) La dinamica del corpo rigido è quindi descritta dalla coppia di equazioni cardinali della dinamica dei sistemi. Le riportiamo di seguito riadattandole al caso di corpi rigidi.

Supponiamo di avere un corpo rigido  $S$ , sottoposto a forze esterne (la distinzione tra forze esterne ed interne è la stessa che nel caso paricellare) applicate nei punti  $P_1, \dots, P_N \in S$ . Si osservi che tali punti non esauriscono, nel caso generale, i punti del sistema  $S$  che può essere un corpo rigido *continuo*. Ulteriormente, i punti  $P_i$  sono da intendersi come *punti geometrici* e non particelle materiali del sistema, dato che ammettiamo che possano variare istante per istante, come particelle materiali: si pensi al caso comune di un disco che rotola su una guida, il punto materiale di contatto con la guida varia istante per istante, ma in esso è applicata la

reazione vincolare della guida sul sistema. Nella sua evoluzione, il corpo rigido  $S$  deve soddisfare le seguenti due **equazioni cardinali della dinamica**.

**C5. Principi della dinamica per corpi rigidi continui.** *Si consideri un corpo rigido continuo  $S$ , sottoposto a forze esterne  $\mathbf{F}_i^{(e)}$  (indistintamente forze attive o reazioni vincolari) applicate nei punti  $P_1, \dots, P_N \in S$ . Si assume che il moto del corpo rigido soddisfi le seguenti due equazioni, in in ogni sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e per ogni scelta del polo  $O$  di moto assegnato nel riferimento  $\mathcal{I}$ .*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{I}} \mathbf{P}|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} . \quad (6.25)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{I}} \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} + \mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}} \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i^{(e)} \quad (6.26)$$

(dove il secondo addendo a primo membro è assente, nel caso in cui si scelga  $O = G$  centro di massa di  $S$ ).

#### Osservazioni 6.6.

(1) L'estensione al caso di sistemi di riferimento non inerziali e di forze inerziali è del tutto ovvia.

(2) In C5 si considera solo il caso in cui le forze vengano esercitate in *punti singoli* del corpo rigido. Sono escluse in tal modo situazioni generiche in cui, considerando corpi rigidi *continui*, le forze agenti su di essi siano descritte in termini di *densità di forze* da integrare. Questo genere di sollecitazioni vengono considerate nell'estensione del formalismo che cade sotto il nome di *meccanica dei continui* di cui non ci occuperemo. È importante però rendersi conto che, sempre considerando corpi rigidi continui, la restrizione in C5 sul tipo di forze ammesse può includere comunque le forze gravitazionali, nella situazione in cui l'accelerazione di gravità sia costante  $-g \mathbf{e}_z$ , con  $g$  indipendente dal posto (eventualmente dipendente dal tempo). Infatti calcolando la risultante delle singole forze gravitazionali agenti sulle singole particelle del corpo continuo e la risultante dei corrispondenti momenti delle forze tramite un'ovvia procedura di integrazione, si vede immediatamente che questo tipo di sollecitazione determina: a secondo membro di (6.25) una forza  $-Mg \mathbf{e}_z$  ed a secondo membro di (6.26) un corrispondente momento delle forze pari a quello dovuto all'unica forza  $-Mg \mathbf{e}_z$  pensata come applicata in  $G$ .

In definitiva, *al solo fine dell'uso delle due equazioni cardinali, l'azione complessiva della forza gravitazionale costante corrisponde a quella di un'unica forza applicata nel centro di massa del sistema pari alla risultante  $-Mg \mathbf{e}_z$  di tutte le forze gravitazionali agenti sulle singole particelle del corpo rigido.*

(3) È infine importante osservare che la validità delle due equazioni di sopra *nel caso di sistemi rigidi continui* è qui assunta in modo assiomatico, anche se potrebbe essere dedotta a partire da principi primi, nel contesto generale della meccanica dei continui. Il fatto che tali equazioni determinino una sola soluzione per fissate condizioni iniziali (come proveremo riformulando la teoria in termini lagrangiani nella sezione 8.3) è garanzia della bontà di tale assunzione. Nel

caso di sistemi rigidi particellari costituiti da un numero finito di punti materiali, il postulato C5 è una conseguenza dei postulati C1-C4 della meccanica newtoniana del punto, come abbiamo visto nel Cap.5 con il Teorema 5.1.

In questa sede ci restringeremo a considerare un sottocaso delle equazioni cardinali dato dalle cosiddette *equazioni di Eulero*. Le equazioni di Eulero sono le equazioni differenziali con incognite date dalle componenti del vettore  $\omega$ , che corrispondono la seconda equazione cardinale rispetto ad un polo  $O$  per un corpo rigido, nella situazione più semplice che si possa immaginare dal punto di vista *vincolare*: quando il corpo rigido non è sottoposto a forze vincolari e  $O$  coincide con il centro di massa, oppure quando il sistema è vincolato all'unico punto  $O$ . In entrambi i casi sono ammesse altre forze non vincolari. Se aggiunte alla prima equazione cardinale dei sistemi, le equazioni di Eulero determinano la dinamica del corpo rigido studiato. La particolare situazione considerata è tale che, talvolta, le equazioni di Eulero risultano essere indipendenti dalla prima equazione cardinale e, pertanto, possono essere studiate separatamente. A dispetto dell'apparente semplificazione della situazione fisica riguardante i vincoli, la casistica delle soluzioni che ne conseguono è enormemente varia e costituisce un capitolo molto importante della meccanica classica. Noi daremo qui solo qualche breve cenno introduttivo a tale vastissimo argomento.

### 6.3.1 Equazioni di Eulero.

Consideriamo un corpo rigido  $S$ , di massa totale  $M$ , soggetto a forze tali che sia valida una delle due seguenti situazioni rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  nel quale si descrive il moto di  $S$ .

1. C'è un punto  $O$  solidale con  $S$  (eventualmente il centro di massa di  $S$ ), che verrà usato come polo per enunciare la seconda equazione cardinale della dinamica, che rimane in quiete con  $\mathcal{J}$  a causa di forze vincolari, ma  $S$  è libero di muoversi attorno a  $O$  senza altri vincoli.

2. Il polo  $O$  coincide con il centro di massa  $G$  di  $S$  ed  $S$  non è sottoposto a vincoli.

In entrambi i casi, dal capitolo 5, sappiamo la seconda equazione cardinale della dinamica per  $S$  assume la forma:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \Gamma_O|_{\mathcal{J}} = \mathbf{M}_O \quad (6.27)$$

dove  $\mathbf{M}_O$  è il momento totale delle forze esterne valutato rispetto al polo  $O$ . *L'eventuale forza vincolare che agisce in  $O$  non fornisce comunque contributo al momento totale delle forze dato che il polo coinciderebbe con il punto di applicazione.* Tenendo conto del fatto che il corpo è rigido, l'equazione (6.27) si può trascrivere come

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \mathbf{I}(\omega_{\mathcal{J}_S}|_{\mathcal{J}}) = \mathbf{M}_O, \quad (6.28)$$

dove  $\mathcal{I}_S$  è il solito sistema di riferimento solidale con  $S$ . Consideriamo una terna principale d'inerzia per  $S$   $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$  riferita al punto  $O$ . Nel seguito useremo la decomposizione

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\omega}_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^3 \hat{M}_{Oi} \hat{\mathbf{e}}_i,$$

ed indicheremo con  $I_{O1}, I_{O2}, I_{O3}$  i momenti principali d'inerzia riferiti alla terna detta. Sviluppando (6.28) sulla base  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ , si ottiene il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} I_{O1} \frac{d\hat{\omega}_1}{dt} = (I_{O2} - I_{O3})\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3 = \hat{M}_{O1}, \\ I_{O2} \frac{d\hat{\omega}_2}{dt} = (I_{O3} - I_{O1})\hat{\omega}_3\hat{\omega}_1 = \hat{M}_{O2}, \\ I_{O3} \frac{d\hat{\omega}_3}{dt} = (I_{O1} - I_{O2})\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2 = \hat{M}_{O3}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Queste equazioni sono dette **Equazioni di Eulero**. Insieme alla prima equazione cardinale esse individuano il moto di  $S$  attorno ad  $O$  nei due casi considerati. Perché ciò sia possibile bisogna esprimere le componenti  $\hat{\omega}_k$  in funzione degli angoli di Eulero, e delle loro derivate prime, che individuano la terna principale d'inerzia solidale con  $S$  in funzione di una terna solidale con  $\mathcal{I}$ . La stessa cosa deve essere fatta per le componenti del momento  $\mathbf{M}_O$ , ricordando che, nel caso  $O$  sia vincolato a rimanere fermo in  $\mathcal{I}$ ,  $\mathbf{M}_O$  non può comunque includere termini dovuti alle forze vincolari incognite come osservato sopra. Se gli angoli di Eulero non sono sufficienti ad esprimere funzionalmente  $\mathbf{M}_O$ , ma sono necessari altri parametri come posizioni e velocità di punti di  $S$ , in particolare quelle del centro di massa  $G$ , le equazioni di Eulero devono essere accompagnate con le equazioni derivanti dalla prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi. Nel caso in cui  $\mathbf{M}_O$  si possa scrivere in funzione dei soli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali, le equazioni di Eulero si possono riscrivere come un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (negli angoli di Eulero), in forma normale almeno localmente. Si osservi ancora che, dopo avere determinato il moto di  $S$  attorno ad  $O$ , l'eventuale forza vincolare incognita agente su  $O$  si ricava alla fine usando la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{I}} M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{I}} = \mathbf{R}, \quad (6.30)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la risultante di tutte le forze esterne agenti su  $S$ , includendo le reazioni vincolari se presenti. Nel caso in cui  $O = G$  e  $S$  si può muovere in  $\mathcal{I}$  senza vincoli, il moto di  $G$  viene determinato dalla seconda equazione cardinale, notando che in questo caso non sono presenti forze vincolari.

**Osservazioni 6.7.** Ci sono almeno due casi importanti in cui le equazioni di Eulero risultano essere indipendenti dalla prima equazione cardinale e possono pertanto essere studiate separatamente. Un caso è quello di una trottola in cui  $O$  è il punto di appoggio fermo su un piano  $\pi$  scabro in quiete nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , e la trottola è sottoposta alla forza di gravità

costante normale a  $\pi$  e diretta verso di esso. Il secondo caso è quello in cui  $\mathbf{M}_O$  è identicamente nullo. Questa è, per esempio, la situazione fisica di un corpo rigido vincolato in  $O$  in quiete nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , in assenza di altre forze. Oppure la situazione di un corpo rigido in caduta libera nel campo gravitazionale costante e  $O$  coincide con il centro di massa  $G$  del corpo. Nel riferimento *non inerziale* in caduta libera con  $G$ , la situazione appare esattamente come quella del corpo rigido vincolato in  $O$  in assenza di gravità ed altre forze.

### 6.3.2 Equazione di Poinot.

Quando il secondo membro di (6.29) è identicamente nullo, i moti determinati dalle equazioni di Eulero si dicono **moti alla Poinot**. Le equazioni corrispondenti dunque sono:

$$\begin{cases} I_{O1} \frac{d\hat{\omega}_1}{dt} = (I_{O2} - I_{O3}) \hat{\omega}_2 \hat{\omega}_3 = 0, \\ I_{O2} \frac{d\hat{\omega}_2}{dt} = (I_{O3} - I_{O1}) \hat{\omega}_3 \hat{\omega}_1 = 0, \\ I_{O3} \frac{d\hat{\omega}_3}{dt} = (I_{O1} - I_{O2}) \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Studieremo il caso non degenerare in cui  $S$  non è un insieme di punti allineati. In tal caso il tensore d'inerzia è strettamente positivo. Se  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}}$ , possiamo riscrivere queste equazioni in forma compatta come:

$$\mathbf{I}_O \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0},$$

e ancora, tenendo conto che l'operatore  $\mathbf{I}_O$  è invertibile essendo l'operatore d'inerzia strettamente positivo, possiamo infine scrivere le equazioni di POinsot come:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\mathbf{I}_O^{-1} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})) , \quad (6.32)$$

dove la derivata temporale si può indifferentemente pensare come rispetto a  $\mathcal{I}$  oppure  $\mathcal{I}_S$  come ben noto dal capitolo 2. Possiamo interpretare questa equazione differenziale come un'equazione del prim'ordine (non lineare) nella funzione a valori vettoriali  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ . È chiaro che si tratta di un'equazione scritta in forma normale e con secondo membro di classe  $C^\infty$  e pertanto possiamo applicare i teoremi di esistenza ed unicità delle soluzioni.

### 6.3.3 Rotazioni permanenti.

Come vedremo più generalmente nel capitolo 7, i *punti singolari* del sistema del prim'ordine (6.32), cioè le configurazioni  $\boldsymbol{\omega}_0$  che annullano il secondo memebro, corrispondono alle soluzioni con  $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$  costantemente, sia in  $\mathcal{I}$  che  $\mathcal{I}_S$ , in modulo, direzione e verso. Questo genere di soluzioni sono dette **rotazioni permanenti**. Dato che  $\mathbf{I}_O^{-1}$  è una funzione iniettiva, il secondo membro di (6.32) si può annullare per  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$  se e solo se:

$$\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}_0) = \mathbf{0}.$$

Questo significa che  $\boldsymbol{\omega}_0$  e  $\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}_0)$  sono vettori paralleli. Abbiamo provato che  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$  costante per  $t \in \mathbb{R}$  è una rotazione permanente se e solo se, per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}_0) = \lambda \boldsymbol{\omega}_0 .$$

In altre parole le rotazioni permanenti individuano autovettori di  $\mathbf{I}_O$  se non corrispondono a  $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ , oppure la rotazione banale  $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ . Ogni autovettore di un operatore simmetrico definito su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita appartiene ad una base di tale spazio fatta di autovettori dello stesso operatore<sup>1</sup>. Pertanto il versore di  $\boldsymbol{\omega}_0 \neq \mathbf{0}$  è sempre un elemento di una terna principale d'inerzia per  $S$  rispetto ad  $O$ . Concludiamo che vale la seguente proposizione.

**Proposizione 6.5.** *Per un corpo rigido  $S$  non costituito da punti allineati lungo un unico asse, e le cui equazioni del moto sono quelle di Poinsot (6.32), le soluzioni di tipo **rotazione permanente**:*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

*si hanno se e solo se il vettore costante  $\boldsymbol{\omega}_0$  è diretto lungo un asse principali d'inerzia, oppure per  $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ .*

**Osservazioni 6.8.**

(1) Si noti che la proposizione di sopra si riferisce ad ogni asse principale d'inerzia uscente da  $O$  e non solo a quelli della terna principale d'inerzia scelta per scrivere le equazioni di Eulero. Infatti, in presenza di qualche simmetria attorno ad  $O$ , potrebbero esserci più terne principali d'inerzia rispetto allo stesso  $O$ . Per esempio, in un cubo omogeneo ogni asse che esce dal suo centro (che coincide con il centro di massa) è un asse principale d'inerzia.

(2) Applicando la teoria della stabilità che svilupperemo nel capitolo 7, si può provare che nel caso i tre momenti principali d'inerzia di una terna principale d'inerzia per  $S$  rispetto ad  $O$  soddisfino  $I_{O1} < I_{O2} < I_{O3}$ , solo le rotazioni permanenti attorno al primo ed al terzo asse sono stabili, insieme alla rotazione permanente banale con  $\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ . Le rotazioni permanenti attorno all'asse con momento d'inerzia di valore intermedio sono invece instabili.

Per sviluppare queste considerazioni è importante notare che, riferendosi al caso in cui  $S$  è vincolato a  $\mathcal{S}$  per il solo punto  $O$  e non agiscono altre forze se non la reazione vincolare in  $O$ , si hanno contemporaneamente due leggi di conservazione:  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = \text{costante}$ , da cui  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}^2 = \text{costante}$  e  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \text{costante}$ . La prima deriva dalla seconda equazione cardinale e la seconda dal fatto che l'unica forza che agisce non compie lavoro. Il vettore  $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}(t)$  che risolve le equazioni di Poinsot deve, di conseguenza, giacere sull'intersezione di due superfici individuate dalle condizioni iniziali:  $(\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}(t)))^2 = (\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}(t_0)))^2$  e  $\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}(t)) = \boldsymbol{\omega}(t_0) \cdot \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega}(t_0))$ . Riferendosi ad una terna principale d'inerzia rispetto ad  $O$  e definendo, nelle coordinate cartesiane ortonormali associate a tale terna,  $\hat{x}_i := \frac{I_{O^i}}{\Gamma} \hat{\omega}_i$  dove,  $\Gamma := \|\Gamma_O|_{\mathcal{S}}(t_0)\|$  e le  $\hat{\omega}_i$  sono le componenti

<sup>1</sup>La prova di ciò si ha proprio dalla procedura ricorsiva con la quale si può dimostrare il teorema citato di diagonalizzazione per operatori simmetrici.

di  $\boldsymbol{\omega}$ , le due superfici dette sopra hanno equazione, rispettivamente:

$$\sum_{i=1}^3 \hat{x}_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma^2}{2I_{0i}\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t_0)} \hat{x}_i^2 = 1.$$

Si tratta dunque dell'intersezione di una sfera e di un ellissoide. L'evoluzione di  $\boldsymbol{\omega}(t)$  (riscalato con fattori costanti come indicato prima) deve avvenire su tale intersezione di superfici.

#### 6.3.4 Moti alla Poinot per corpi giroscopici.

Studiamo ora soluzioni delle equazioni di Poinot meno banali delle rotazioni permanenti. Considereremo solo sistemi in cui i momenti principali d'inerzia sono tutti non nulli (quindi sistemi rigidi non allineati lungo un unico asse). Consideriamo la situazione in cui, nelle equazioni (6.32) valga  $I_{O1} = I_{O2} =: I$ . Lavoriamo dunque con un corpo giroscopico con asse giroscopico individuato da  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . In questo caso le equazioni di Poinot per  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}}$  risultano essere:

$$\begin{cases} I \frac{d\hat{\omega}_1}{dt} = (I - I_{O3})\hat{\omega}_2\hat{\omega}_3 = 0, \\ I \frac{d\hat{\omega}_2}{dt} = -(I_{O3} - I)\hat{\omega}_3\hat{\omega}_1 = 0, \\ I_{O3} \frac{d\hat{\omega}_3}{dt} = 0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Assumeremo per il momento che  $I \neq I_{O3}$ , alla fine diremo cosa accade in questo caso limite. La prima equazione ha l'unica soluzione banale  $\omega_3$  costante nel tempo. Se definiamo  $z := \hat{\omega}_1 + i\hat{\omega}_2$ , moltiplichiamo per  $i$  ambo i membri della seconda equazione, e sommiamo il risultato membro a membro con la prima equazione, le prime due equazioni si possono scrivere nell'unica equazione

$$I \frac{dz}{dt} = -i(I - I_{O3})\hat{\omega}_3 z. \quad (6.34)$$

La soluzione (massimale e completa) sarà quindi della forma:

$$z(t) = z(0)e^{-i\frac{I-I_{O3}}{I}\hat{\omega}_3 t}.$$

Tornando alle variabili reali, la soluzione generale di (6.33) si può scrivere come:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \Omega \cos\left(\frac{I - I_{O3}}{I}\hat{\omega}_3 t\right) \hat{\mathbf{e}}_1 - \Omega \sin\left(\frac{I - I_{O3}}{I}\hat{\omega}_3 t\right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}, \quad (6.35)$$

dove  $\hat{\omega}_1, \Omega \in \mathbb{R}$  sono costanti fissate arbitrariamente.

La soluzione (6.35) non è ancora espressa in modo fisicamente interessante, dato che è spressa rispetto alla terna *solidale* con  $S$ , invece che rispetto alla terna  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  solidale con  $\mathcal{S}$ , nel quale si descrive il moto di  $S$ . Vogliamo esprimere la soluzione (6.35) in modo che sia più chiaro il moto di rotazione di  $S$  in  $\mathcal{S}$ . Dato che siamo liberi di fissare a piacimento tale Studiamo ora soluzioni delle equazioni di Poinot meno banali delle rotazioni permanenti. Considereremo

solo sistemi in cui i momenti principali d'inerzia sono tutti non nulli (quindi sistemi rigidi non allineati lungo un unico asse). Consideriamo la situazione in cui, nelle equazioni (6.32) valga  $I_{O1} = I_{O2} =: I$ , e dato che il momento angolare  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$  è costante nel tempo per  $\mathcal{S}$  (è proprio questo fatto che esprimono le equazioni di Poinsot!), scegliamo  $\mathbf{e}_3$  in modo che  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \Gamma \mathbf{e}_3$  con  $\Gamma > 0$  (tralasciamo di studiare il caso limite in cui  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \mathbf{0}$ ). Mostriamo ora che l'angolo  $\theta$  che  $\hat{\mathbf{e}}_3$  individua rispetto a  $\mathbf{e}_3$  è costante nel tempo. Dato che vale la decomposizione di  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})$  sulla terna principale d'inerzia di  $S$  rispetto a  $O$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = I\hat{\omega}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I\hat{\omega}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_{O3}\hat{\omega}_3\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (6.36)$$

abbiamo anche che

$$I_3\hat{\omega}_3 = \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \Gamma \cos \theta .$$

D'altra parte, essendo  $I_3, \hat{\omega}_3, \Gamma$  delle costanti, deve essere costante  $\theta$ . Abbiamo anche trovato che

$$\hat{\omega}_3 = \frac{\Gamma \cos \theta}{I_{O3}} . \quad (6.37)$$

Usando (6.37) possiamo eliminare  $\hat{\omega}_3$  nella (6.35), che si riduce a

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \Omega \cos \left( \frac{I - I_{O3}}{I} \hat{\omega}_3 t \right) \hat{\mathbf{e}}_1 - \Omega \sin \left( \frac{I - I_{O3}}{I} \hat{\omega}_3 t \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\Gamma \cos \theta}{I_{O3}} \hat{\mathbf{e}}_3 , \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}, \quad (6.38)$$

Sostituendo (6.37) anche in (6.36) troviamo:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = I\hat{\omega}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I\hat{\omega}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \Gamma \cos \theta \mathbf{e}_3 . \quad (6.39)$$

Confrontando questa identità con (6.38) si arriva alla formula:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\Gamma}{I} \mathbf{e}_3 + \frac{I - I_{O3}}{I} \frac{\Gamma}{I_{O3}} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3(t) . \quad (6.40)$$

Si osservi che, nel secondo membro di (6.40), solo il versore  $\hat{\mathbf{e}}_3$  evolve nel tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$ . In definitiva, la soluzione (6.40) delle equazioni di Poinsot nel caso considerato è costituita da due termini sommati. Un termine è costante (nel riferimento  $\mathcal{S}$ ), ed è diretto lungo  $\mathbf{e}_3$ . Tale termine è detto **termine di precessione**

$$\boldsymbol{\omega}_{pre} := \frac{\Gamma}{I} \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}}{I} . \quad (6.41)$$

Il termine rimanente

$$\boldsymbol{\omega}_{rot} := \frac{I - I_{O3}}{I} \frac{\Gamma}{I_{O3}} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3(t) \quad (6.42)$$

è detto **termine di rotazione**. Si osservi che  $\boldsymbol{\omega}_{rot}$  ha modulo costante ed è diretto lungo l'asse giroscopico  $\hat{\mathbf{e}}_3$  di  $S$ . L'asse  $\hat{\mathbf{e}}_3$  ruota, ovvero in gergo *precede*, attorno ad  $\mathbf{e}_3$  (cioè  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ ) con un vettore  $\boldsymbol{\omega}$  dato proprio da  $\boldsymbol{\omega}_{pre}$ , essendo banalmente:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{S}} \hat{\mathbf{e}}_3(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega}_{pre} \wedge \hat{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{0} .$$



Dato che  $\boldsymbol{\omega}_{pre}$  è costante nel tempo, la punta di  $\hat{\mathbf{e}}_3(t)$  ruota attorno a  $\mathbf{e}_3$  a velocità angolare costante.

Dalla (6.40) si evince anche che  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3$  sono sempre *vettori complanari*.

Nel caso in cui  $I = I_{O3}$  (in particolare, dunque, per corpi totalmente giroscopici), accade che  $\boldsymbol{\omega}_{rot} = \mathbf{0}$ . Questo significa che il moto avviene senza precessione di  $\boldsymbol{\omega}$  attorno a  $\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ , ma i due vettori sono sempre paralleli.

**Osservazioni 6.9.** Il moto di un corpo rigido  $S$  in un riferimento  $\mathcal{S}$ , che avvenga in modo tale che un punto  $O$  solidale con  $S$  sia sempre fermo in  $\mathcal{S}$ , è detto **moto di precessione** quando  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}_{pre} + \boldsymbol{\omega}_{rot}$ , dove il termine di precessione  $\boldsymbol{\omega}_{pre}$  ha versore costante nel tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$ , mentre il termine di rotazione  $\boldsymbol{\omega}_{rot}$  ha versore costante nel riferimento  $\mathcal{S}_S$  solidale con  $S$ . Il moto di precessione è quindi detto **regolare** quando i due termini di precessione e rotazione hanno anche modulo costante nel tempo. I moti alla Poinot studiati sopra erano quindi precessioni regolari.

### 6.3.5 Moti alla Poinot per corpi non giroscopici.

Considereremo nuovamente solo sistemi rigidi in cui i momenti principali d'inerzia sono tutti non nulli (quindi sistemi rigidi non allineati lungo un unico asse), ed esaminiamo la situazione più generica in cui, nelle equazioni (6.32),  $I_{O1}, I_{O2}, I_{O3}$  siano tutti, in generale, differenti.

Per prima cosa introduciamo il cosiddetto *ellissoide d'inerzia*. Dato un corpo rigido  $S$ , sia  $O$  solidale con  $S$  e  $\mathbf{I}_O$  il tensore d'inerzia riferito ad  $O$ . La superficie  $\mathcal{E}_O$  dei punti  $P \in E_{\mathcal{S}}$  per i quali vale l'equazione:

$$(P - O) \cdot \mathbf{I}_O(P - O) = 1 \quad (6.43)$$

è detta **ellissoide d'inerzia** di  $S$  rispetto ad  $O$ . Si noti che  $\mathcal{E}_O$  è davvero un ellissoide: scegliendo una terna principale d'inerzia centrata in  $O$  con assi  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ , se  $P - O = \mathbf{x} = \hat{x}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{x}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{x}_3\hat{\mathbf{e}}_3$  e i momenti principali d'inerzia sono  $I_{O1}, I_{O2}, I_{O3}$ , l'equazione di  $\mathcal{E}_O$  è data da

$$\frac{\hat{x}_1^2}{I_{O1}^{-1}} + \frac{\hat{x}_2^2}{I_{O2}^{-1}} + \frac{\hat{x}_3^2}{I_{O3}^{-1}} = 1.$$

$\mathcal{E}_O$  è dunque un ellissoide di centro  $O$  e semiassi  $I_{O1}^{-1/2}, I_{O2}^{-1/2}, I_{O3}^{-1/2}$ . Tra poco sarà anche comodo ricordare che il vettore normale all'ellissoide d'inerzia, nelle coordinate considerate si esprime come:

$$N(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = 2I_{O1}\hat{x}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + 2I_{O2}\hat{x}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + 2I_{O3}\hat{x}_3\hat{\mathbf{e}}_3,$$

e cioè, se  $\mathbf{x} = P - O$  individua un punto su  $\mathcal{E}_O$ ,

$$N(\mathbf{x}) = 2\mathbf{I}_O(\mathbf{x}). \quad (6.44)$$

Nel seguito assumeremo di lavorare nella situazione in cui  $S$  è vincolato a mantenere  $O$  in quiete con il riferimento non solidale  $\mathcal{S}$  e non ci sono forze esterne su  $S$  eccettuata la reazione vincolare in  $O$ , in modo tale che valgano le equazioni di Poinot (6.31).

Sappiamo che tali equazioni corrispondono alla seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi e, nel caso in esame, stabiliscono che  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$  è costante nel tempo in  $\mathcal{S}$ . Pertanto è conveniente scegliere un sistema di coordinate cartesiane ortonormali per  $\mathcal{S}$  centrato in  $O$  e con asse  $\mathbf{e}_3$  parallelo a  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$ . Per futura convenienza scegliamo  $\mathbf{e}_z$  in modo che  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = \Gamma \mathbf{e}_z$  dove  $\Gamma > 0$  è una costante (il caso banale  $\Gamma = 0$  corrisponde alla quiete di  $S$  in  $\mathcal{S}$ ).

Al solito  $\boldsymbol{\omega}(t) := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|_{\mathcal{S}}}(t)$  e le componenti di tale vettore sulla terna principale d'inerzia di  $S$  rispetto ad  $O$  menzionata sopra sono le funzioni  $\hat{\omega}_i$  che compaiono nell'equazione di Poinsot (6.31). Vogliamo ora studiare qualitativamente l'evoluzione del vettore  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$  che risolve le equazioni di Poinsot. A tal fine introduciamo il nuovo vettore normalizzato

$$\mathbf{x}(t) := \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}}.$$

Si noti che l'energia cinetica di  $S$  rispetto a  $\mathcal{S}$ :  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\boldsymbol{\omega})$  è una costante del del quadrato e sia sottoposto alla forza di gravità individuata dal vettore di accelerazione costante verticale  $\mathbf{g}$  diretto verso il basso. moto, dato che l'unica forza esterna che agisce su  $S$  è la reazione vincolare che agisce in  $O$  che è in quiete nel riferimento  $\mathcal{S}$  e pertanto non compie lavoro. Studieremo l'evoluzione qualitativa, nel tempo, del vettore normalizzato  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  invece che del vettore  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Dato che  $2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = I_{O1}\hat{\omega}_1^2 + I_{O2}\hat{\omega}_2^2 + I_{O3}\hat{\omega}_3^2$ , deve anche essere

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{I}_O(\mathbf{x}) = 1 \quad (6.45)$$

e pertanto, il vettore  $\mathbf{x}(t)$  giace, istante per istante, sull'ellissoide d'inerzia. Si osservi che tuttavia non rimane fermo su tale ellissoide, ma in generale la sua posizione su  $\mathcal{E}_O$  varierà nel tempo. Dato che  $\mathcal{E}_O$  è solidale con  $S$  e con  $\mathcal{S}_S$ , questo significa che  $\mathbf{x}(t)$  si muoverà sia rispetto a  $\mathcal{S}$  che rispetto a  $\mathcal{S}_S$ .

Un ulteriore informazione sul comportamento di  $\mathbf{x}$  si ricava notando che

$$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{e}_3 = \Gamma^{-1}\mathbf{x}(t) \cdot \Gamma_O|_{\mathcal{S}} = \Gamma^{-1}\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{I}_O \left( \Gamma \sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}} \mathbf{x}(t) \right) = \frac{\sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}}{\Gamma} \quad (6.46)$$

Questo significa che il punto  $\mathbf{x}(t)$ , oltre a giacere sull'ellissoide d'inerzia, giace anche sul piano  $\pi$ , in quiete in  $\mathcal{S}$  di equazione

$$(P - O) \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\Gamma \sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}}.$$

Questo piano è detto **piano assoluto**. Si osservi che ha vettore normale dato da  $\mathbf{e}_3$  e passa per il punto sull'asse  $x_3$  con coordinata  $\frac{1}{\Gamma \sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}}$ .

Un ulteriore informazione si ha ancora facendo uso della (6.44). Da questa si ricava che, nel punto di contatto  $\mathbf{x}(t)$ , tra il piano assoluto  $\pi$  solidale con  $\mathcal{S}$  e l'ellissoide d'inerzia  $\mathcal{E}_O$  solidale con  $\mathcal{S}_S$ , il vettore normale a quest'ultimo è sempre parallelo ad  $\mathbf{e}_3$  (cioè a  $\Gamma_O|_{\mathcal{S}}$ ). Infatti vale

$$N(\mathbf{x}) = 2\mathbf{I}_O(\mathbf{x}) = 2\mathbf{I}_O \left( \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}} \right) = 2 \frac{\Gamma \mathbf{e}_3}{\sqrt{2\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}}.$$

Infine possiamo calcolare la velocità in  $\mathcal{I}$  del punto  $Q(t)$ , istante per istante, individuato da  $\mathbf{x}(t)$  e pensato come punto solidale con  $S$ .

$$\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{I}_S} + \boldsymbol{\omega} \wedge (Q(t) - O) = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Abbiamo trovato che il punto di contatto di  $\mathcal{E}_O$  e  $\pi$ , individuato da  $\mathbf{x}(t)$  istante per istante, ha sempre velocità nulla.

Concludiamo che: *il moto di  $S$  in  $\mathcal{I}$  è tale che l'ellissoide d'inerzia solidale con  $S$  rotola senza strisciare sul piano assoluto  $\pi$ , solidale con  $\mathcal{I}$ , ed il punto di contatto è individuato istante per istante, a meno di un riscaldamento costante dal vettore  $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}_S}|_{\mathcal{I}}(t)$  che risolve le equazioni di Poincot (6.31).*

Il vettore  $\mathbf{x}(t)$  nella sua evoluzione temporale, descrive un cono attorno a  $\mathbf{e}_3$  (cioè  $\Gamma_O|_{\mathcal{I}}$ ). La punta di  $\mathbf{x}(t)$  traccia una curva, sul piano  $\pi$  che si chiama **erpoloide**. La corrispondente curva tracciata dallo stesso vettore su  $\mathcal{E}_O$  si dice **poloide**.

### Esercizi 6.1.

1. Si consideri un quadrato  $ABCD$  omogeneo di massa  $M$  e lato  $L$ . Si supponga che tale quadrato sia appeso al soffitto (solidale in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ ) tramite un'asta rigida di massa  $m$  e lunghezza  $L$  saldata al quadrato, che prolunga la diagonale del quadrato  $AC$  ed unisce il vertice  $A$  al punto  $O$  del soffitto. Tale asta si identifica quindi con il segmento  $AO$ .

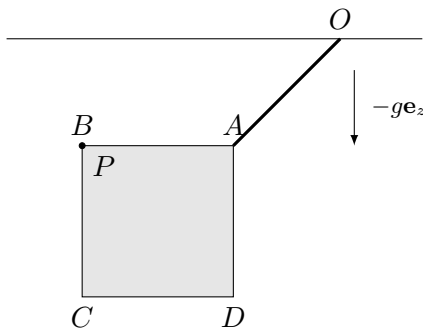


Figura 6.1: Illustrazione dell'esercizio 6.1.1.

L'asta è libera di ruotare attorno ad  $O$  rimanendo nel piano verticale. Nel vertice  $B$  del quadrato è attaccato un punto materiale  $P$  di massa  $m$ . Il sistema rigido complessivo  $S$  dato dal quadrato, l'asta ed il punto  $P$ , è sottoposto alla forza di gravità individuata dal vettore di accelerazione costante verticale  $\mathbf{g}$  diretto verso il basso. Si risolvano ai seguenti quesiti.

- (i) Si scrivano le equazioni che determinano il moto del sistema e le reazioni vincolari.
- (ii) Si determini un integrale primo e se ne discuta il significato fisico.

Si consiglia di individuare il sistema tramite l'angolo  $\theta$  che l'asse  $AO$  individua rispetto alla verticale.

**2.** Un disco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  si trova su una guida scabra (piano inclinato), inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Supposti assegnati i coefficienti di attrito statico

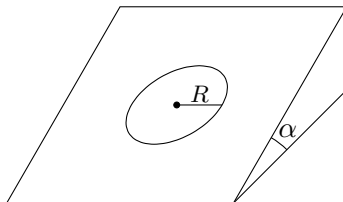


Figura 6.2: Illustrazione dell'esercizio 6.1.2.

$\mu$  e dinamico  $f$  e supposto il disco fermo all'istante iniziale, se ne studi il moto assumendo che la guida sia ferma in un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ .

## Capitolo 7

# Introduzione alla teoria della stabilità.

In questo capitolo introduciamo i primi rudimenti della teoria della stabilità nell'approccio di Liapunov. Lavoreremo con sistemi di equazioni differenziali autonomi su  $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$  indifferentemente, anche se con banali adattamenti, le definizioni ed i risultati che presenteremo si estendono alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali su varietà differenziabili.

### 7.1 Punti singolari e configurazioni di equilibrio

La nozione fondamentale della quale ci occuperemo è quella di *punto singolare* detto anche *punto critico*.

**Definizione 7.1.** (**Punto singolare.**) Si consideri un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine su  $I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ ,  $D \subset \mathbb{K}^n$  insieme aperto non vuoto,  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto non vuoto,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) , \quad (7.1)$$

con  $\mathbf{f} : I \times D \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Il punto  $\mathbf{x}_0 \in D$  è detto **punto singolare** (o, equivalentemente, **punto critico**) per  $\mathbf{f}$  se e solo se, per ogni  $t_0 \in I$ , ogni soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione (7.1) con condizione iniziale

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 , \quad (7.2)$$

è una restrizione della funzione costante  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  per ogni  $t \in I$ .  $\diamond$

#### Osservazioni 7.1.

(1) Si osservi che se  $\mathbf{x}_0$  è punto singolare, segue immediatamente dalla definizione che la funzione costante  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  per ogni  $t \in I$  è l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy dato dall'equazione (7.1) con condizione iniziale (7.2), comunque si scelga  $t_0 \in I$ .

(2) Dato che la definizione data sopra è completamente *locale* per quanto riguarda le variabili  $\mathbf{x}$ , può essere riformulata immediatamente in riferimento ad un sistema di equazioni differenziali assegnato su una varietà differenziabile tramite un campo vettoriale nell'ottica della sezione 4.5. Lasciamo al lettore questa riformulazione.

(3) La stessa definizione può essere enunciata, con una terminologia leggermente differente considerando un problema del *secondo* ordine, con evidente riferimento al problema fondamentale della dinamica quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $n = 3$  (ma anche in casi più complicati studiando *sistemi* di punti materiali).

Ecco la definizione a cui si riferisce l'osservazione (2) di sopra:

**Definizione 7.2.** (**Punto di equilibrio.**) Si consideri un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine su  $I \times D \times D'$ , con  $D, D' \subset \mathbb{K}^n$  insiemi aperti non vuoti e  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto non vuoto,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \left( t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right), \quad (7.3)$$

con  $\mathbf{F} : I \times D \times D' \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Il punto  $\mathbf{x}_0 \in D$  è detto **punto di equilibrio** (o equivalentemente **configurazione di equilibrio**) per  $\mathbf{F}$ , se e solo se, per ogni  $t_0 \in I$ , ogni soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione (7.3) con condizione iniziale

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt}|_{t_0} &= \mathbf{0}, \end{cases} \quad (7.4)$$

è una restrizione della funzione costante  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  per ogni  $t \in I$ .  $\diamond$

#### Osservazioni 7.2.

(1) La definizione data si applica, per esempio, al caso di un punto materiale  $P$  descritto dal vettore  $\mathbf{x} = P - O$ ,  $O$  in quiete in un riferimento  $\mathcal{I}$  e quando  $\mathbf{F}$  denota la forza totale agente sul punto, supposta indipendente dal tempo in  $\mathcal{I}$ . *Si deve quindi tenere conto che la definizione di punto di equilibrio dipende dal riferimento scelto.*

(2) La definizione si può applicare anche al caso di un sistema di  $N$  punti, quando

$$D = D' = \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3N}.$$

In questo caso le  $3N$  componenti di  $\mathbf{x}$  descrivono, a tre a tre, le tre componenti di ciascuno degli  $N$  punti, in riferimento ad un fissato sistema di coordinate cartesiane ortonormali, solidali con un riferimento in cui tutte le forze sono indipendenti dal tempo. Le  $3N$  componenti della funzione  $\mathbf{F}$ , descrivono a tre a tre le componenti delle forze totali agenti su ciascuno degli  $N$  punti materiali, *ciascuna divisa per la massa del punto corrispondente.*

Abbiamo l'ovvia proposizione seguente, che fornisce condizioni necessarie e sufficienti affinché un punto sia singolare ovvero di equilibrio, nel caso in cui sono soddisfatte le ipotesi per il teorema

di esistenza ed unicità globale 4.5.

**Proposizione 7.1.** *In riferimento alla definizione 7.1, se la funzione  $\mathbf{f} : I \times D \rightarrow \mathbb{K}^n$  è continua e localmente lipschitziana nella variabile  $\mathbf{x}$ , il punto  $\mathbf{x}_0 \in D$  è singolare se e solo se*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (7.5)$$

◇

**Dimostrazione.** Che la condizione (7.5) sia necessaria è ovvio dalla definizione di punto singolare: per  $t_0 \in I$  fissato, la funzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  con  $t \in I$  risolve il problema di Cauchy con condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . In particolare  $0 = \frac{d\mathbf{x}}{dt}|_{t=t_0} = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$  per ogni  $t_0 \in I$ . La sufficienza segue immediatamente dal teorema 4.5, tenendo conto che, se  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  allora una soluzione massimale del problema di Cauchy con condizione iniziale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , con  $t_0 \in I$  fissato, è sicuramente  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  costantemente per ogni  $t \in I$ . Questa deve essere l'unica soluzione massimale per il teorema citato ed ogni altra soluzione è una restrizione di essa. □

Segue l'analoga proposizione per la nozione di configurazione di equilibrio.

**Proposizione 7.2.** *In riferimento alla definizione 7.2, se la funzione  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n$  con  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in I \times D \times D'$  è continua e localmente lipschitziana nella variabile  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  (o più fortemente è di classe  $C^1(I \times D \times D'; \mathbb{K}^n)$ ),  $\mathbf{x}_0 \in D$  è configurazione di equilibrio se e solo se*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (7.6)$$

◇

### 7.1.1 Equilibrio stabile ed instabile.

Dal punto di vista fisico, la nozione di configurazione di equilibrio data sopra non caratterizza in modo appropriato le configurazioni di equilibrio reali dei sistemi fisici (e degli altri sistemi della realtà descrivibili con equazioni differenziali). Una ragione, forse la più importante, è dovuta al fatto che le configurazioni dei sistemi fisici non corrispondono a configurazioni geometriche *ideali*, perché lo stato di ogni sistema fisico (la posizione e la forma stessa degli oggetti) è sottoposto a continue interazioni con l'ambiente circostante (per lo più interazioni di carattere termodinamico), che rendono lo stato fluttuante, sia pur con fluttuazioni molto piccole. Per questo motivo le configurazioni fisiche di equilibrio *osservabili nella realtà fisica* hanno anche una proprietà di *stabilità* sotto piccole perturbazioni dello stato iniziale. Queste proprietà di stabilità vengono definite a seconda del modello matematico adottato. Nel seguito ci riferiremo alle nozioni più elementari possibili, che possono essere formulate all'interno della teoria elementare dei sistemi di equazioni differenziali. Al solito daremo inizialmente le definizioni nel caso di sistemi del prim'ordine anche se poi ci interesserà l'applicazione al caso del secondo ordine.

L'idea centrale della definizione di punto singolare stabile è quella che l'orbita rimanga confinata *vicino* al punto singolare anche partendo da condizioni iniziali, che non coincidono con il punto singolare, ma se ne discostano un poco. Nel seguito ci restringeremo a studiare il caso di un sistema di equazioni *autonomo*, nel quale cioè è assente la dipendenza dalla variabile  $t$  nel secondo membro di (7.1). In tal caso possiamo sempre ridurci a scegliere la condizione iniziale per  $t_0 = 0$  ridefinendo l'origine di  $t$  se necessario.

**Definizione 7.3. (Punto singolare stabile)** Si consideri la definizione 7.1 specializzata al caso di *sistema autonomo*, cioè  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  senza dipendenza dalla variabile  $t$  nella funzione che appare a secondo membro in (7.1).

Un punto singolare  $\mathbf{y}_0 \in D$  è detto:

(a) **stabile nel futuro** se, per ogni intorno aperto  $U \ni \mathbf{y}_0$ , esiste un intorno aperto  $V \ni \mathbf{y}_0$  tale che ogni soluzione di (7.1),  $\mathbf{x} : J \rightarrow D$  (dove  $J \subset I$  è un intervallo aperto che contiene  $t = 0$ ) con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in V$ , soddisfa  $\mathbf{x}(t) \in U$  se  $J \ni t \geq 0$ ;

(b) **stabile nel passato** se, per ogni intorno aperto  $U \ni \mathbf{y}_0$ , esiste un intorno aperto  $V \ni \mathbf{y}_0$  tale che ogni soluzione massimale di (7.1),  $\mathbf{x} : J \rightarrow D$  (dove  $J \subset I$  è un intervallo aperto che contiene  $t = 0$ ) con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in V$ , soddisfa  $\mathbf{x}(t) \in U$  se  $J \ni t \leq 0$ ;

(c) **stabile** se è stabile nel futuro e stabile nel passato;

(d) **instabile** (rispettivamente **nel futuro** o **nel passato**) se non è stabile (rispettivamente nel futuro o nel passato);

(e) **asintoticamente stabile nel futuro** se è stabile nel futuro ed esiste un intorno aperto  $A \ni \mathbf{y}_0$  tale che ogni soluzione massimale di (7.1)  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in A$ , è completa nel futuro e soddisfa  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ;

(f) **asintoticamente stabile nel passato**, se è stabile nel passato ed esiste un intorno aperto  $A \ni \mathbf{y}_0$  tale che ogni soluzione massimale di (7.1)  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in A$ , è completa nel passato e soddisfa  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ ;

Nei casi (e) e (f), l'insieme  $A$  è detto essere un **bacino di attrazione** di  $\mathbf{x}_0$ .  $\diamond$ .

### Osservazioni 7.3.

(1) Nel caso in cui  $\mathbf{f}$  sia localmente lipschitziana, se  $\mathbf{y}_0$  è stabile nel futuro, in virtù della proposizione 4.8, le soluzioni massimali con condizione iniziale nell'intorno  $V$  sono sicuramente complete nel futuro (possiamo prendere  $U$  in modo che abbia chiusura compatta). Lo stesso risultato si ottiene per la stabilità nel passato.

(2) Le definizioni date si generalizzano immediatamente al caso di un sistema del secondo ordine (7.3) in cui  $\mathbf{F}$  non dipende dalla variabile  $t$ . In tal caso si parla di **punti di equilibrio stabili (nel passato e nel futuro)** e **punti di equilibrio asintoticamente stabili (nel passato e nel futuro)**.

(3) Bisogna considerare il fatto che, trattando sistemi del secondo ordine, gli intorni  $U$ ,  $V$  e  $A$  devono essere presi nello spazio delle coppie  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  e non solo della variabile  $\mathbf{x}$ . In questo senso, trattando la stabilità di configurazioni di sistemi fisici, *la nozione di stabilità include informazioni e richieste sulle velocità e non solo sulle configurazioni*.



### Esempi 7.1.

1. Si consideri l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}$ , dove  $k \neq 0$  è fissato:

$$\frac{dx}{dt} = -kx .$$

Siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità globale essendo il secondo membro di classe  $C^\infty$ . L'unico punto singolare è  $x = 0$ . Dato che le soluzioni massimali hanno la forma

$$x(t) = x_0 e^{-kt}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Se  $k > 0$ , vale la relazione  $|x(t)| < |x_0|$  per  $t > 0$ . Pertanto il punto stabile nel futuro: per ogni scelta dell'intorno aperto  $U \ni 0$ , l'intorno  $V \ni 0$  può essere preso come un qualsiasi intervallo  $(-\delta, \delta) \subset U$ . Inoltre  $x(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow +\infty$ . Si conclude quindi che, per  $k > 0$ , il punto singolare  $x = 0$  è asintoticamente stabile nel futuro. D'altra parte vale anche, sempre per  $k > 0$ :  $x(t) \rightarrow +\infty$  se  $t \rightarrow -\infty$ . Di conseguenza, se  $k > 0$ , il punto singolare è sicuramente instabile nel passato. La situazione evidentemente si inverte se  $k < 0$ : il punto singolare  $x = 0$  è asintoticamente stabile nel futuro, ma instabile nel passato.

2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali su  $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

dove  $\mathbf{x} = (x, y)$  e  $A$  è la matrice diagonale  $\text{diag}(1, -1)$ . Siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità globale essendo il secondo membro di classe  $C^\infty$ . L'unico punto singolare è l'origine  $\mathbf{0}$  di  $\mathbb{R}^2$ . Si conclude facilmente che tale punto singolare è instabile nel passato e nel futuro. Infatti, il sistema è in realtà costituito da due equazioni disaccoppiate:

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

Dall'esempio precedente sappiamo che ogni condizione iniziale  $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)$  produce una soluzione che diverge (nella sola componente  $x$ ), per  $t \rightarrow -\infty$ . Questo solo fatto è sufficiente a provare che il punto singolare  $\mathbf{0}$  è instabile nel passato. Viceversa, sempre dall'esempio precedente, sappiamo che la condizione iniziale  $\mathbf{x}_0 = (0, y_0)$  produce una soluzione che diverge (nella sola componente  $y$ ), per  $t \rightarrow +\infty$ . Questo solo fatto è sufficiente a provare che il punto singolare  $\mathbf{0}$  è instabile nel futuro.

3. Consideriamo l'oscillatore armonico, costituito da un punto materiale di massa  $m > 0$  attaccato ad una molla di costante  $\kappa > 0$ , per comodità di lunghezza nulla a riposo, il cui secondo estremo è fisso nel punto  $O$  di un riferimento inerziale. L'equazione del sistema è ovviamente

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -k^2\mathbf{x},$$

dove  $k := \sqrt{\kappa/m}$  e  $\mathbf{x} = P - O$ . Siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità globale essendo il secondo membro di classe  $C^\infty$ . Passando al prim'ordine, si ha il sistema equivalente in  $\mathbb{R}^6$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -k\mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}.$$

In coordinate cartesiane ortonormali solidali con il riferimento inerziale il sistema si disaccoppia in 3 sistemi equazioni della forma (ne scriviamo una sola):

$$\frac{dv}{dt} = -kx, \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

Si osservi che l'unica *configurazione di equilibrio* è dunque  $x = 0$ , ovvero  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tenendo conto delle 3 distinte componenti. La soluzione generale del sistema si determina subito con i metodi del capitolo 4. Essa è

$$x(t) = A \sin(kt) + B \cos(kt), \quad v(t) = kA \cos(kt) - kB \sin(kt),$$

dove  $A, B \in \mathbb{R}$  sono costanti arbitrarie. Ricostruendo le 3 componenti e fissando le costanti in funzione delle condizioni iniziali, le soluzioni generali sono scrivibili come

$$\mathbf{x}(t) = k^{-1} \sin(kt) \mathbf{v}_0 + \cos(kt) \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{v}(t) = \cos(kt) \mathbf{v}_0 - k \sin(kt) \mathbf{x}_0. \quad (7.7)$$

Da queste si ricava che, tenendo conto che le funzioni seno e coseno oscillano in  $[-1, 1]$ :

$$k \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| + k \|\mathbf{x}_0\|, \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \|\mathbf{v}_0\| + k \|\mathbf{x}_0\|, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \quad (7.8)$$

Dato che su  $\mathbb{R}^n$  tutte le norme sono equivalenti (producono la stessa topologia), possiamo usare la norma su  $\mathbb{R}^6$ :

$$\|(\mathbf{x}, \mathbf{v})\|' := \max(k\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{v}\|).$$

Le disuguaglianza (7.8) di sopra implica immediatamente che

$$\|(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))\|' \leq 2\|(\mathbf{x}(0), \mathbf{v}(0))\|', \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Questa disuguaglianza, a sua volta, ci assicura che la configurazione  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  sia di equilibrio stabile. Infatti, fissato un intorno aperto  $U$  di  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , se prendiamo una palla metrica  $B_\delta$  (rispetto alla norma  $\|\cdot\|'$ ) aperta centrata in  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  e, con raggio  $\delta > 0$  tale che valga l'inclusione  $B_\delta \subset U$ , scegliendo condizioni iniziali in  $B_{\delta/2}$ , siamo sicuri che l'orbita della soluzione massimale e completa non uscirà mai da  $B_\delta$  e quindi, a maggior ragione, dall'aperto  $U$ . Ovviamente la configurazione  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  non è di equilibrio asintoticamente stabile nel passato e neppure nel futuro, perché non esistono i limiti a  $t \rightarrow \pm\infty$  dei secondi membri di (7.7), se si escludono quelli valutati sulla soluzione banale.

### 7.1.2 Introduzione ai metodi di Liapunov per lo studio della stabilità.

Negli esempi visti nella sezione precedente, lo studio della stabilità dei punti singolari è stato sviluppato avendo preventivamente calcolato la forma generale delle soluzioni delle equazioni differenziali in considerazione. Dal punto di vista pratico questa è una procedura con scarsa validità, in quanto la forma esplicita delle soluzioni è nota in pochissimi casi, rarissime volte di interesse applicativo. Per questo motivo sono stati sviluppati teoremi che forniscono condizioni sufficienti per la stabilità del punto critico considerato, che si possano controllare senza dover

risolvere l'equazione differenziale.

Introduciamo ora due teoremi, in questo contesto e per sistemi di equazioni differenziali autonomi, dovuti a Liapunov che rappresentano solo il caso più elementare della tecnologia matematica sviluppata da Liapunov e altri matematici.

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine autonomo su  $D \subset \mathbb{K}^n$  insieme aperto non vuoto,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) , \quad (7.9)$$

con  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Consideriamo poi una funzione  $W : U \rightarrow \mathbb{K}$  differenziabile con  $U \subset D$  sottoinsieme aperto (eventualmente coincidente con  $D$  stesso). Se conosciamo una soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  di (7.9), la derivata della funzione composta  $t \mapsto W(\mathbf{x}(t))$ , ammesso che abbia senso, si scrive:

$$\frac{dW(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla W(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}(t)} = [\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla W(\mathbf{x})]|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} .$$

Se definiamo la funzione:

$$\dot{W}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nabla W(\mathbf{x}) , \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in U , \quad (7.10)$$

abbiamo allora che, per ogni soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  del sistema (7.9), se il secondo membro dell'equazione che segue è definito, vale:

$$\frac{dW(\mathbf{x}(t))}{dt} = \dot{W}(\mathbf{x}(t)) . \quad (7.11)$$

#### Osservazioni 7.4.

(1) La funzione  $\dot{W}$  è definita senza dover risolvere esplicitamente l'equazione differenziale, tuttavia contiene informazioni sulle soluzioni.

(2) Ricordiamo che, data  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ , se  $W : U \rightarrow \mathbb{K}$  (con  $U \subset D$  aperto) è differenziabile, si dice che  $W$  è un **integrale primo** del sistema (7.9) su  $U$ , se  $I \ni t \mapsto W(\mathbf{x}(t))$  è costante per ogni soluzione  $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \subset U$  di (7.9), al variare di  $t \in I$ .

Vale il seguente risultato:

**Proposizione 7.3.** *Se  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$  ( $D \subset \mathbb{K}^n$  aperto) è localmente lipschitziana, allora  $W : U \rightarrow \mathbb{K}$  (con  $U \subset D$  aperto) soddisfa, rispettivamente:*

$$\dot{W}(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U,$$

$$\dot{W}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U,$$

$$\dot{W}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U,$$

*se e solo se per ogni soluzione  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  del sistema (7.9) vale rispettivamente:*

$$dW(\mathbf{x}(t))/dt < 0, \quad \forall t \in I,$$

$$dW(\mathbf{x}(t))/dt \leq 0, \quad \forall t \in I,$$

$$dW(\mathbf{x}(t))/dt = 0, \quad \forall t \in I.$$

*Vale un analoga proposizione scambiando ovunque  $<$  con  $>$ .*

**Dimostrazione.** Se  $\dot{W}(\mathbf{x}) < 0$  su  $U$  allora, da (7.11), segue che  $dW(\mathbf{x}(t))/dt < 0$  per ogni soluzione  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  del sistema (7.9). Viceversa, se vale  $dW(\mathbf{x}(t))/dt < 0$  per ogni soluzione  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  del sistema (7.9), deve valere, per (7.11),  $\dot{W}(\mathbf{x}_0) < 0$  se  $\mathbf{x}_0 \in U$  è un punto attraversato dall'orbita di una soluzione del sistema (7.9). La locale lipschitzianità di  $\mathbf{f}$  assicura che per ogni punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  c'è una soluzione di (7.9) che ha come condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . L'orbita di tale soluzione attraversa, per definizione,  $\mathbf{x}_0$ . Gli altri casi si provano nello stesso modo.  $\square$

Ora che abbiamo definito la funzione  $\dot{W}$  per ogni assegnata funzione  $W : U \rightarrow \mathbb{K}$ , possiamo enunciare il primo teorema di Liapunov-Barbasin.

D'ora in poi, se  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione con  $A \subset \mathbb{K}^n$  aperto, diremo che essa ha un **minimo (locale) stretto** in  $\mathbf{x}_0 \in A$  se  $F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{x}_0)$  per  $\mathbf{x} \in A_0$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  dove  $A_0 \subset A$  è un intorno aperto di  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema 7.1. (di Liapunov-Barbasin)** *Se  $D \subset \mathbb{K}^n$  è un aperto, sia  $\mathbf{x}_0 \in D$  un punto singolare per la funzione localmente lipschitziana  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ .*

**(a)**  *$\mathbf{x}_0$  è un punto singolare stabile nel futuro se in un intorno aperto di  $\mathbf{x}_0$ ,  $G_0 \subset D$  è definita una funzione differenziabile  $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ <sup>1</sup> che soddisfa:*

- (i)  *$W$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{x}_0$ ,*
- (ii)  *$\dot{W}(\mathbf{x}) \leq 0$  per  $\mathbf{x} \in G_0$ .*

**(b)**  *$\mathbf{x}_0$  è un punto singolare stabile nel passato se in un intorno aperto di  $\mathbf{x}_0$ ,  $G_0 \subset D$  è definita una funzione differenziabile  $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa:*

- (i)  *$W$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{x}_0$ ,*
- (ii)  *$\dot{W}(\mathbf{x}) \geq 0$  per  $\mathbf{x} \in G_0$ .*

**(c)**  *$\mathbf{x}_0$  è un punto singolare stabile se in un intorno aperto di  $\mathbf{x}_0$ ,  $G_0 \subset D$  è definita una funzione differenziabile  $W : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa:*

- (i)  *$W$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{x}_0$ ,*
- (ii)  *$W$  è un integrale primo su  $G_0$  per il sistema associato a  $\mathbf{f}$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** La dimostrazione di (b) è del tutto analoga a quella di (a). (c) segue immediatamente da (a), da (b) e dalla proposizione 7.3.

Dimostriamo (a). Per comodità lavoreremo con un sistema di coordinate cartesiane su  $\mathbb{K}^n$  centrate nel punto  $\mathbf{x}_0$  che di conseguenza diventa il punto  $\mathbf{0}$ . Consideriamo un intorno aperto  $U \ni \mathbf{0}$  e supponiamo  $U \subset G_0$ . Dobbiamo esibire il secondo intorno aperto  $V \ni \mathbf{0}$ , tale che prendendo soluzioni con condizioni iniziali in  $V$ , la loro orbita non esce da  $U$ . Definiamo  $V$  come segue. Sia  $B \subset U$  una palla aperta di raggio finito centrata in  $\mathbf{0}$  con  $\overline{B} \subset U$ . Dato che  $W$  è continua sul compatto dato dalla frontiera di  $B$ ,  $\mathcal{F}(B)$ , poniamo:

$$\ell := \min \{ W(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{F}(B) \} ,$$

che esiste finito ed è raggiunto su qualche punto  $\mathbf{x}_m \in \mathcal{F}(B)$  per il teorema di Weierstrass. Possiamo sempre supporre, prendendo il raggio di  $B$  abbastanza piccolo, che  $\ell > W(\mathbf{0})$  dato che

---

<sup>1</sup>La funzione  $W$  assume valori in  $\mathbb{R}$  anche se lavoriamo su  $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ .

in  $\mathbf{0}$  è un punto di minimo stretto di  $W$  e  $\mathbf{x}_m \neq \mathbf{0}$ . Definiamo  $V$  come una palla aperta centrata in  $\mathbf{0}$  e con  $V \subset B \cap \{\mathbf{x} \in G_0 \mid W(\mathbf{x}) < \ell\}$ . Un tale  $V$  esiste perché l'insieme  $\{\mathbf{x} \in B \mid W(\mathbf{x}) < \ell\}$  è sicuramente aperto (controimmagine di un aperto secondo una funzione continua) e non vuoto, dato che contiene almeno  $\mathbf{0}$ , essendo  $W(\mathbf{0}) < \ell$  come osservato sopra. Mostriamo che  $V$  soddisfa la proprietà che ogni soluzione con condizione iniziale in  $V$  ha orbita che, per  $t > 0$ , non esce da  $B$  e quindi nemmeno da  $U$  come richiesto.

Supponiamo che la soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , con  $t \in I$  intervallo aperto (che include 0) e con  $\mathbf{x}(0) \in V$ , abbia un punto  $\mathbf{x}(t_1) \notin B$  per  $t_1 > 0$ . Se  $R > 0$  è il raggio di  $B$ , la funzione continua  $I \ni t \mapsto R - \|\mathbf{x}(t)\|$  è positiva per  $t = 0$  e non positiva per  $t = t_1$ , di conseguenza si annulla per qualche  $t_2 \in (0, t_1]$ . Quindi  $\|\mathbf{x}(t_2)\| = R$ , cioè  $\mathbf{x}(t_2) \in \mathcal{F}(B)$  e dunque, per definizione di  $\ell$ :

$$W(\mathbf{x}(t_2)) \geq \ell. \quad (7.12)$$

D'altra parte, per ipotesi  $[0, t_2] \ni t \mapsto W(\mathbf{x}(t))$  è non crescente essendo, nelle nostre ipotesi:

$$\frac{dW(\mathbf{x}(t))}{dt} = \dot{W}(\mathbf{x}(t)) \leq 0,$$

di conseguenza deve anche essere  $W(\mathbf{x}(t_2)) \leq W(\mathbf{x}(0)) < \ell$  e quindi

$$W(\mathbf{x}(t_2)) < \ell,$$

che contraddice (7.12). L'assurdo trovato prova che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  rimane confinata in  $B \subset U$  per ogni  $t \in I$  con  $t > 0$ .  $\square$

La funzione  $W$  usata nel teorema viene chiamata **funzione di Liapunov**. Tutta la tecnica di Liapunov per studiare la stabilità è bastata sulla ricerca di simili funzioni adattate al problema concreto in esame. Possiamo completare il teorema precedente con il seguente risultato che si occupa della stabilità asintotica.

**Teorema 7.2. (Liapunov-Barbasin 2)** *Nelle ipotesi del teorema 7.1, se in aggiunta alle ipotesi in (a) oppure (b) vale più fortemente, rispettivamente,  $\dot{W}(\mathbf{x}) < 0$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  oppure  $\dot{W}(\mathbf{x}) > 0$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è asintoticamente stabile rispettivamente nel futuro oppure nel passato.  $\diamond$*

**Dimostrazione.** Dimostriamo la stabilità asintotica nel futuro, quella nel passato si prova in modo del tutto analogo. Ridefinendo  $W$  per una costante additiva, possiamo ridurci sempre ad assumere  $W(\mathbf{x}_0) = 0$ . Sia  $B$  una palla aperta centrata in  $\mathbf{x}_0$  con  $\bar{B} \subset G_0$ . Se  $\epsilon > 0$ , definiamo l'insieme aperto e non vuoto (contiene  $x_0$ ):

$$A_\epsilon := \{\mathbf{x} \in B \mid W(\mathbf{x}) < \epsilon\}.$$

Consideriamo una soluzione massimale  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  con condizione iniziale in  $A_1$ . Prima di tutto notiamo che l'orbita non può raggiungere  $\mathbf{x}_0$  in un tempo finito  $T$ , perché il problema di Cauchy

con condizione iniziale  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  ha come unica soluzione massimale (quindi anche nel passato di  $T$ ), quella costante  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi l'orbita rimarrà in un insieme in cui  $\dot{W} < 0$ . Dato che  $\dot{W} < 0$ , allora  $dW(\mathbf{x}(t))/dt < 0$ , per cui la funzione  $t \mapsto W(\mathbf{x}(t))$  è strettamente decrescente. In particolare deve esistere il suo limite  $\ell$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Se fosse  $\ell > 0$ , fissato  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo, a partire da un certo  $T > 0$ , l'orbita sarebbe sempre confinata nel compatto dato da  $\overline{B} \setminus A_\epsilon$  per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo. Ma allora, se  $-M = \max\{\dot{W}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \overline{B} \setminus A_\epsilon\} < 0$ , avremmo che  $dW(\mathbf{x}(t))/dt < -M$  per ogni  $t > T$  e quindi applicando il teorema di Lagrange (dove  $\xi \in (T, t)$ ):

$$W(\mathbf{x}(t)) - W(\mathbf{x}(T)) = (t - T) \frac{dW(\mathbf{x}(t))}{dt} \Big|_\xi \leq -M(t - T) \rightarrow -\infty, \quad \text{se } t \rightarrow +\infty.$$

Questo è impossibile dato che  $W$  è continua sul compatto  $\overline{B} \setminus A_n$  e quindi limitata. Di conseguenza deve essere  $W(\mathbf{x}(t)) \rightarrow \ell = 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . In altre parole:

$$\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } T_\epsilon > 0 \text{ tale che, se } t > T_\epsilon, \text{ vale } \mathbf{x}(t) \in A_\epsilon. \quad (7.13)$$

Se  $B_r$  denota la palla aperta di raggio  $r$  e centrata in  $x_0$ , per ogni  $n = 1, 2, \dots$ , deve esistere  $\epsilon > 0$  sufficientemente piccolo, per cui  $A_\epsilon \subset B_{1/n}^2$ . Di conseguenza e tenendo conto della proposizione (7.13) concludiamo che: per ogni  $n > 0$  esiste  $T_n$  per cui  $\mathbf{x}(t) \in B_{1/n}$  se  $t > T_n$ . Questo significa che:  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_0$  se  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## Esempi 7.2.

1. Consideriamo ancora il punto singolare  $x = 0$  dell'equazione differenziale in  $\mathbb{R}$ , dove  $k \neq 0$  è fissato:

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

La funzione  $W(x) := x^2$ , definita su  $\mathbb{R}$ , soddisfa:  $W(x) > 0$  se  $x \neq 0$ , per cui ha un minimo stretto in  $x = 0$ , inoltre  $\dot{W} = -2kx^2 < 0$  se  $x \neq 0$ . Possiamo applicare il primo teorema di Liapunov concludendo che  $x = 0$  è punto singolare stabile nel futuro. Dal secondo teorema di Liapunov concludiamo che il punto singolare è anche asintoticamente stabile nel futuro.

2. Consideriamo l'equazione differenziale in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\sin(\|\mathbf{x}\|^2)A\mathbf{x}.$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det A = 3 > 0$  e  $\text{tr} A = 4 > 0$ , gli autovalori della matrice simmetrica  $A$  sono strettamente positivi e pertanto  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{0}$  è un punto singolare del sistema. Possiamo

---

<sup>2</sup>Se ciò non fosse, significherebbe che fuori da una certa palla  $B_{1/n^*}$  esisterebbe una successione di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$  con  $W(\mathbf{x}_k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Dato che gli  $\mathbf{x}_k$  appartenerebbero al compatto  $K := \overline{B} \setminus B_{1/n^*}$ , esisterebbe una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}_{k_m}\}_m$  con  $\mathbf{x}_{k_m} \rightarrow \mathbf{x}^* \in K$  per  $m \rightarrow +\infty$ . Per continuità sarebbe anche  $W(\mathbf{x}^*) = 0$ . Dato che  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}_0$ ,  $W$  non potrebbe quindi avere il minimo stretto in  $x_0$ .

studiarne la stabilità tenendo conto che ora le soluzioni esplicite non si riescono a scrivere. La funzione  $W(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$  definita su  $\mathbb{R}^2$  ha un minimo stretto nell'origine, inoltre

$$\dot{W}(\mathbf{x}) = -2 \sin(\|\mathbf{x}\|^2) \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$$

è strettamente negativa in un intorno dell'origine escludendo l'origine stessa. Infatti  $\sin(\|\mathbf{x}\|^2) > 0$  in un intorno di  $\mathbf{0}$  se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , inoltre la forma quadratica  $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}$  è strettamente positiva avendo, la matrice simmetrica  $A$ , autovalori positivi.

Concludiamo che l'origine è un punto singolare stabile nel futuro ed asintoticamente stabile nel futuro.

**3.** Consideriamo ancora l'equazione differenziale, questa volta in  $\mathbb{C}^2$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\sin(\|\mathbf{x}\|^2) A\mathbf{x}.$$

dove ora:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}.$$

Vale ancora  $\det A = 2 > 0$  e  $\operatorname{tr} A = 4 > 0$ , gli autovalori della matrice hermitiana  $A$  sono pertanto strettamente positivi e  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è ancora un punto singolare. Se  $\mathbf{x}^*$  indica il vettore le cui componenti sono le complesse coniugate delle componenti del vettore  $\mathbf{x}$  e il puntino  $\cdot$  indica l'ordinario prodotto “righe per colonne”, la funzione a valori reali  $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ , definita su  $\mathbb{C}^2$ , ha un minimo stretto nell'origine. Inoltre

$$\dot{W}(\mathbf{x}) = \sin(\|\mathbf{x}\|^2) (\mathbf{x}^* \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}^*),$$

è strettamente negativa in un intorno dell'origine escludendo l'origine stessa. Infatti vale, in un intorno di  $\mathbf{0}$ ,  $\sin(\|\mathbf{x}\|^2) > 0$  se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , inoltre la forma quadratiche hermitiana  $\mathbf{x}^* \cdot A\mathbf{x}$  è strettamente positiva avendo, la matrice hermitiana  $A$ , autovalori positivi, infine, se  $\operatorname{Re} z$  denota la parte reale del numero complesso  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(\mathbf{x}^* \cdot A\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}^*) = 2\operatorname{Re}(\mathbf{x}^* \cdot A\mathbf{x}).$$

Concludiamo che l'origine è un punto singolare stabile nel futuro ed asintoticamente stabile nel futuro.

### 7.1.3 \*Ancora sulla stabilità asintotica.

Dimostriamo un secondo teorema che generalizza l'enunciato del precedente teorema dando una condizione sufficiente più debole per la stabilità asintotica. Introduciamo alcune nozioni tecniche di grande utilità.

**Definizione 7.4.** (**Insiemi**  $\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}_0)$ ) Si consideri un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine autonomo su  $D \subset \mathbb{K}^n$  insieme aperto non vuoto,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (7.14)$$

con  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$  localmente lipschitziana. Indichiamo con  $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{x}_0)$ , la soluzione massimale di (7.14) con condizione iniziale  $\mathbf{x}_0 \in D$ .

(a) Se  $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{x}_0)$  è completa nel futuro, si definisce

$$\Lambda_+(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{y} \in D \mid \mathbf{x}(t_k|\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{y}, \text{ se } k \rightarrow +\infty \text{ per qualche } \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I \text{ con } t_k \rightarrow +\infty \text{ se } k \rightarrow +\infty\}.$$

(b) Se  $I \ni t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{x}_0)$  è completa nel passato, si definisce

$$\Lambda_-(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{y} \in D \mid \mathbf{x}(t_k|\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{y}, \text{ se } k \rightarrow +\infty \text{ per qualche } \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I \text{ con } t_k \rightarrow -\infty \text{ se } k \rightarrow +\infty\}.$$

◇

Si osservi che  $\Lambda_{\pm}(\mathbf{x}_0)$  può essere l'insieme vuoto.

**Proposizione 7.4.** *In riferimento alla definizione 7.4, se  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$  ( $\Lambda_-(\mathbf{x}_0)$ ) è non vuoto allora valgono i seguenti fatti.*

(a) *Ogni soluzione massimale con condizione iniziale in  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$  (risp.  $\Lambda_-(\mathbf{x}_0)$ ) è completa.*

(b) *L'orbita di ogni soluzione massimale con condizione iniziale in  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$  (risp.  $\Lambda_-(\mathbf{x}_0)$ ) è un sottoinsieme di  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$  (risp.  $\Lambda_-(\mathbf{x}_0)$ ).* ◇

**Dimostrazione.** Facciamo la dimostrazione per  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$ , l'altro caso è analogo. Consideriamo  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset I$  con  $\mathbf{x}(t_k|\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{y}_0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Fissato  $t \in \mathbb{R}$ , esisterà  $k \in \mathbb{N}$  sufficientemente grande tale che  $t + t_k > 0$ . In tal caso ha senso scrivere (si noti che vale il teorema di unicità):  $\mathbf{x}(t + t_k|\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t|\mathbf{x}(t_k|\mathbf{x}_0))$ . Prendendo il limite per  $k \rightarrow +\infty$ , abbiamo che il secondo membro tende a  $\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)$  per (b) in teorema 4.8. Questo prova che esiste il limite per  $k \rightarrow +\infty$  di  $\mathbf{x}(t + t_k|\mathbf{x}_0)$  ed è:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t + t_k|\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0).$$

In particolare, dato che  $t$  è arbitrario in  $\mathbb{R}$ , la soluzione  $t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)$  è completa ed (a) è in tal modo dimostrato. Per provare (b) si osservi che, definiti i numeri  $t'_k := t + t_k$ , vale:

$$\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t'_k|\mathbf{x}_0),$$

ma allora, per definizione di  $\Lambda_+(\mathbf{x}_0)$ , si ha che  $\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0) \in \Lambda_+(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . □

Possiamo allora provare un terzo teorema di Liapunov.



**Teorema 7.3.** (Liapunov-Barbasin 3) *Nelle ipotesi del teorema 7.1, se in aggiunta alle ipotesi in (a) oppure (b) oppure (c), per qualche  $\epsilon > 0$ , l'insieme*

$$A_\epsilon := \{\mathbf{x} \in G_0 \mid 0 \neq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon, \dot{W}(\mathbf{x}) = 0\}$$

*non include completamente soluzioni massimali complete, allora  $\mathbf{x}_0$  è asintoticamente stabile, rispettivamente, nel futuro, nel passato o in entrambi.  $\diamond$*

**\*Dimostrazione.** La proposizione da provare equivale all'affermazione che: se  $\mathbf{x}_0$  è stabile, ma non asintoticamente stabile (nei tre casi considerati), allora ogni insieme  $A_\epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ , contiene almeno un'orbita di una soluzione massimale completa. Dimostriamo questa affermazione. Supporremo, per fissare le idee che  $\mathbf{x}_0$  non sia asintoticamente stabile *nel futuro*, gli altri casi sono analoghi.

Se non c'è stabilità asintotica nel futuro, fissata una palla  $B_{\epsilon_0}$  con centro  $\mathbf{x}_0$  e di raggio  $\epsilon_0 > 0$  piccolo a piacere, esiste una condizione iniziale  $\mathbf{y}_0 \in B_{\epsilon_0}$  per cui la soluzione massimale associata  $t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)$  non tende a  $\mathbf{x}_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Si osservi che  $t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)$  è comunque confinabile in una palla a chiusura compatta  $B_\epsilon$ , con  $\epsilon > \epsilon_0 > 0$ , per la stabilità nel futuro. Questo implica la completezza nel futuro di  $t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)$  per (a) in proposizione 4.8. Il fatto che  $\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0) \not\rightarrow \mathbf{x}_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  implica che, comunque fissiamo  $t_k$  grande a piacere, c'è un tempo successivo,  $t_{k+1}$ , per cui  $\mathbf{x}(t_{k+1}|\mathbf{y}_0) \notin B_{\epsilon_0}$ . In definitiva ci sarà una successione  $t_1 < t_2 < \dots < t_k \rightarrow +\infty$  per cui ogni  $\mathbf{x}(t_k|\mathbf{y}_0)$  è confinato nel compatto  $K := \overline{B_\epsilon} \setminus B_{\epsilon_0}$ . Si potrà allora estrarre una sottosuccessione  $\{\mathbf{x}(t_{k_r}|\mathbf{y}_0)\}_{r \in \mathbb{N}}$  convergente a  $\mathbf{x}' \in K$ . Per definizione  $\mathbf{x}' \in \Lambda_+(\mathbf{y}_0)$ . Dato che  $W(\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0))$  è continua e non decrescente, concludiamo allora che deve essere

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W(\mathbf{x}(t|\mathbf{y}_0)) = \lim_{r \rightarrow +\infty} W(\mathbf{x}(t_{k_r}|\mathbf{y}_0)) = W(\mathbf{x}'),$$

per cui:

$$W(\Lambda_+(\mathbf{y}_0)) = W(\mathbf{x}') \quad \text{costantemente.} \quad (7.15)$$

Quest'ultimo fatto esclude che  $\mathbf{x}_0 \in \Lambda_+(\mathbf{y}_0)$  dato che  $W(\mathbf{x}') > W(\mathbf{x}_0)$ , in quanto  $W$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{x}_0$ .

Consideriamo infine  $\mathbf{z} \in \Lambda_+(\mathbf{y}_0)$ . Sappiamo che la soluzione massimale  $t \mapsto \mathbf{x}(t|\mathbf{z})$  è completa e che  $\mathbf{x}(t|\mathbf{z}) \in \Lambda_+(\mathbf{y}_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , per la proposizione 7.4. D'altra parte, per (7.15),

$$\frac{dW(\mathbf{x}(t|\mathbf{z}))}{dt} = 0,$$

ossia:

$$\dot{W}(\mathbf{x}(t|\mathbf{z})) = \mathbf{0}, \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

In definitiva, in

$$A_\epsilon := \{\mathbf{x} \in G_0 \mid 0 \neq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \epsilon, \dot{W}(\mathbf{x}) = 0\}$$

è contenuta completamente l'orbita di una soluzione massimale completa:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t|\mathbf{z})$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

□

**Osservazioni 7.5.** Se la funzione di Liapunov del teorema 7.1 soddisfa più fortemente  $\dot{W}(\mathbf{x}) < 0$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  oppure  $\dot{W}(\mathbf{x}) > 0$  per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  tutti gli insiemi  $A_\epsilon$  sono vuoti, per cui ricadiamo banalmente nelle ipotesi del teorema 7.3. Questo prova che il teorema 7.2 è in realtà un corollario del teorema 7.3.

#### 7.1.4 Un criterio per l'instabilità basato sulla procedura di linearizzazione.

Per concludere diamo un semplice criterio di sufficienza, non basato sulle funzioni di Liapunov, per stabilire se un punto singolare è instabile. L'idea è quella di "linearizzare" il sistema intorno al punto singolare, studiare il sistema linearizzato ed infine estendere il risultato trovato al sistema completo.

Consideriamo il solito sistema del prim'ordine autonomo, definito su  $D$  sottoinsieme aperto non vuoto di  $\mathbb{K}^n$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \quad (7.16)$$

Supponiamo che  $\mathbf{f}$  sia di classe  $C^1(D)$  e che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto singolare. Usando lo sviluppo di Taylor centrato in  $\mathbf{x}_0$  possiamo scrivere che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} + \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \mathbf{O}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) ,$$

dove la funzione  $\mathbf{O}$  soddisfa  $\mathbf{O}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$  se  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ . Senza perdere generalità, possiamo sempre supporre di cambiare variabili passando a  $\mathbf{y} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , in modo che lo sviluppo di sopra si scriva:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\| \mathbf{O}(\mathbf{y}) , \quad (7.17)$$

dove trasformazione lineare  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  è definita da  $A\mathbf{y} := \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{y}$ . Il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} , \quad (7.18)$$

dove  $A\mathbf{y} := \mathbf{y} \cdot \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$  è detto **sistema linearizzato attorno al punto singolare  $\mathbf{x}_0$**  associato al sistema (7.16).

Abbiamo ora un risultato semplice ma importante.

**Proposizione 7.5.** *Si consideri il sistema di equazioni differenziali su  $\mathbb{K}^n$ :*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} ,$$

dove  $A$  è una qualsiasi matrice  $n \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ .

(a) *Se  $A$  ha un autovalore con parte reale positiva, il punto singolare  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  è instabile nel futuro.*

(b) *Se  $A$  ha un autovalore con parte reale negativa, il punto singolare  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  è instabile nel passato.  $\diamond$*

**Dimostrazione.** Proviamo (a), dato che la prova di (b) è del tutto analoga. Esisterà  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  tale che  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  e  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ .

Supponiamo dapprima che  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Si consideri, per  $\delta > 0$  piccolo a piacere, la funzione:

$$\mathbf{x}(t) = \delta e^{\lambda t} \mathbf{u}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \quad (7.19)$$

Essa soddisfa  $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$ , con condizione iniziale  $\mathbf{y}(0) = \delta\mathbf{u}$  come è immediato verificare (ed è anche l'unica soluzione massimale con queste condizioni iniziali, dato che la funzione  $\mathbf{y} \mapsto A\mathbf{y}$  è  $C^\infty$ ). D'altra parte, essendo  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ , vale anche:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 = \delta^2 (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) e^{2(\operatorname{Re}\lambda)t} \rightarrow +\infty \quad \text{se } t \rightarrow +\infty.$$

Fissato un intorno aperto  $U \ni \mathbf{0}$ , comunque scegliamo piccolo un secondo intorno aperto  $V \ni \mathbf{0}$ , esso conterrà sempre un punto  $\delta\mathbf{u}$ , per cui la condizione iniziale  $\mathbf{y}(0) = \delta\mathbf{u}$  produce una soluzione che diverge per  $t \rightarrow +\infty$  e quindi, a maggior ragione, la cui orbita esce da  $U$ , per  $t$  sufficientemente grande. Quindi il punto singolare  $\mathbf{0}$  non può essere stabile nel futuro.

Consideriamo ora il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . La soluzione (7.19) non si può più considerare in quanto assume valori in  $\mathbb{C}^n$  mentre noi ora vogliamo lavorare in  $\mathbb{R}^n$ . Dato che  $A$  è reale, valendo  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  (con  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ) varrà anche  $A\mathbf{u}^* = \lambda^* \mathbf{u}^*$ . Moltiplichiamo  $\mathbf{u}$  per un numero complesso, se necessario, in modo che  $\mathbf{u} + \mathbf{u}^* \neq \mathbf{0}$  e consideriamo infine la funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathbf{x}(t) = \delta e^{\lambda t} \mathbf{u} + \delta e^{\lambda^* t} \mathbf{u}^*, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Si verifica immediatamente che è una soluzione della nostra equazione differenziale con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \delta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*)$ . D'altra parte

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|^2 &= \delta^2 (e^{\lambda t} \mathbf{u} + e^{\lambda^* t} \mathbf{u}^*) \cdot (e^{\lambda t} \mathbf{u} + e^{\lambda^* t} \mathbf{u}^*) = \delta^2 [2e^{2(\operatorname{Re}\lambda)t} \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} e^{2\lambda t})] \\ &= \delta^2 e^{2(\operatorname{Re}\lambda)t} [2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} e^{2i\operatorname{Im}(\lambda)t})] \\ &= \delta^2 e^{2(\operatorname{Re}\lambda)t} [2\|\mathbf{u}\|^2 + 2(\operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \cos(2\operatorname{Im}(\lambda)t) - \operatorname{Im}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \sin(2\operatorname{Im}(\lambda)t))] . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 = 2\delta^2 e^{2(\operatorname{Re}\lambda)t} [\|\mathbf{u}\|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}| \cos(2\operatorname{Im}(\lambda)t + \phi)],$$

dove l'angolo  $\phi$  è definito da:  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}| \cos \phi = \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$  e  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}| \sin \phi = \operatorname{Im}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})$ .

Nel caso in cui  $\operatorname{Im}\lambda = 0$ , le formule trovate<sup>3</sup> implicano che  $\|\mathbf{x}(t)\|^2 \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Se viceversa  $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ , vale che  $\|\mathbf{x}(t_k)\|^2 \rightarrow +\infty$  per  $k \rightarrow +\infty$ , se abbiamo definito  $t_k := \frac{2\pi k - \phi}{2\operatorname{Im}\lambda}$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

In entrambi i casi, fissato un intorno aperto  $U \ni \mathbf{0}$ , comunque scegliamo piccolo un secondo intorno aperto  $V \ni \mathbf{0}$ , esso conterrà sempre un punto  $\delta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*)$ , per cui la condizione iniziale  $\mathbf{y}(0) = \delta(\mathbf{u} + \mathbf{u}^*)$  produce una soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  con  $\mathbf{x}(t_k) \notin U$  per una serie infinita di valori

---

<sup>3</sup>Non può essere  $\|\mathbf{u}\|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}| \cos \phi = 0$  cioè  $\|\mathbf{u}\|^2 + \operatorname{Re}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$  perché il calcolo diretto prova che in tal caso sarebbe  $\mathbf{u}^* = -\mathbf{u}$  cosa che abbiamo escluso a priori.

$t_k \rightarrow +\infty$ . Quindi  $\mathbf{0}$  non può essere stabile nel futuro.  $\square$

La proposizione si può estendere, in un teorema, valido per i sistemi non lineari. Di fatto l'instabilità di un punto singolare per un sistema linearizzato implica l'instabilità dello stesso punto per il sistema completo a cui è associato il sistema linearizzato. Vale infatti il seguente teorema [Malkin]:

**Teorema 7.4.** *Si consideri il sistema di equazioni differenziali del prim'ordine, autonomo, con  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{K}^n$  localmente lipschitziana, per  $D \subset \mathbb{K}$  aperto non vuoto:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) .$$

*Se  $\mathbf{x}_0 \in D$  è un punto singolare e valgono le seguenti condizioni:*

*(i)  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x})$  con  $\|\mathbf{R}(\mathbf{x})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{1+\alpha}$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  per qualche  $K \geq 0$  e  $\alpha > 0$ ,*

*(ii) La matrice  $A = \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  ha almeno un autovalore con parte reale positiva o, rispettivamente, negativa;*

*allora  $\mathbf{x}_0$  è instabile, rispettivamente, nel futuro o nel passato.  $\diamond$*

#### Osservazioni 7.6.

(1) La condizione (i) è automaticamente soddisfatta se  $\mathbf{f} \in C^2(D; \mathbb{K}^n)$ . Ciò segue banalmente dallo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine. In tal caso, il teorema di Taylor mostra che, per ogni componente  $f^i$  di  $\mathbf{f}$ :

$$f^i(\mathbf{x}) = f^i(\mathbf{x}_0) + \nabla f^i|_{\mathbf{x}_0} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^i \mathbf{n} ,$$

dove  $\mathbf{n}$  denota il versore di  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  e la matrice  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^i$  definisce una funzione limitata al variare di  $\mathbf{x}$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ . Si noti che la sola differenziabilità di  $\mathbf{f}$  in  $D$  non è sufficiente ad assicurare la validità di (i).

(2) Esiste un analogo criterio per studiare la stabilità piuttosto che l'instabilità: si dimostra abbastanza facilmente, per il sistema lineare (7.18), che se la matrice  $A$  ha *tutti* gli autovalori con parte reale negativa, allora il punto critico  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  è asintoticamente stabile nel futuro. Tale risultato si estende ad un sistema non linearizzato esattamente come nel caso del teorema 7.4. Si ha stabilità nel futuro per il punto critico  $\mathbf{x}_0$  se vale la condizione (i) e del teorema 7.4, e vale anche che, (ii), tutti gli autovalori di  $A = \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  hanno parte reale negativa [Malkin]. Un analogo teorema vale per la stabilità nel passato richiedendo che tutti gli autovalori di  $A = \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0}$  abbiano parte reale negativa.

## 7.2 Applicazioni a sistemi fisici della meccanica classica.

Applichiamo la teoria sviluppata nella sezione precedente a sistemi fisici particolari. Alla fine della sezione ci occuperemo di applicare la teoria della stabilità allo studio delle rotazioni permanenti dei corpi rigidi, mentre di seguito ci occupiamo di sistemi di punti materiali sottoposti

a sistemi di forze conservative, rispetto ad un fissato riferimento  $\mathcal{J}$ , con l'aggiunta eventuale di forze girostatiche/o dissipative. Più precisamente considereremo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_k$  con masse, rispettivamente,  $m_k$  e  $k = 1, \dots, N$ . Il sistema di punti è sottoposto ad un sistema di forze conservativo rispetto al sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  con energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(P_1, \dots, P_N)$ . Ulteriormente, ciascun punto è sottoposto alla forza, che nel riferimento  $\mathcal{J}$  ha forma funzionale indipendente dal tempo  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}})$  in modo tale che le due condizioni seguenti sono verificate:

(i)  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  per ogni  $k = 1, \dots, N$ ;

(ii)  $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} \leq 0$  per ogni scelta dei vettori velocità rispetto

a  $\mathcal{J}$ :  $\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}} \in V_{\mathcal{J}}$ .

### Esempi 7.3.

1. L'esempio più semplice per la situazione in esame, si ha quando le forze  $\mathbf{F}_k$  sono identicamente nulle ed il sistema è sotto sposto a sole forze conservative. Un esempio concreto è un sistema di cariche elettriche, trascurando l'irraggiamento, oppure un sistema di pianeti che interagiscono con la forza di gravità.

2. Un esempio meno drastico in cui le forze  $\mathbf{F}_k$  non sono nulle, ma soddisfano (i) e (ii) è il sistema di cariche suddetto con l'aggiunta di forze magnetiche dovute ad un campo esterno.

Tali forze hanno potenza nulla:  $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} = 0$ , per ogni scelta di  $(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}})$ .

3. Un altro esempio è quello di particelle che interagiscono con forze conservative, per esempio dovute a forze elastiche, ed il sistema di punti è immerso in un liquido in quiete nel riferimento  $\mathcal{J}$  stesso. In tal caso la potenza delle forze conservative è non positiva e soddisfa più fortemente

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} < 0,$$

per  $(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ .

#### 7.2.1 Il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e solidali con  $\mathcal{J}$  con origine  $O$ . In questo modo, ogni punto  $P_k$  è individuato dal vettore di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x}_k$  le cui componenti sono quelle del vettore  $P_k - O$  nelle coordinate dette. Le equazioni che determinano il moto sono allora, in base al secondo principio della dinamica e riportando al prim'ordine il sistema, dove omettiamo

ovunque  $|_{\mathcal{J}}$  per semplicità notazionale:

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = -\frac{1}{m_k} \nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \frac{1}{m_k} \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N), \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.20)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{v}_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.21)$$

Assumeremo che ogni  $\mathbf{F}_k \in C^1(\mathbb{R}^{6N}; \mathbb{R}^{3N})$ , mentre  $\mathcal{U} \in C^2(\mathbb{R}^{3N})$ .

Le configurazioni di equilibrio del sistema sono, come detto nella sezione 7.1, le configurazioni  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) \in \mathbb{R}^{3N}$ , tali che, il secondo membro del sistema di sopra si annulla quando è valutato sul vettore di  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ :  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ , dove gli  $N$  vettori nulli  $\mathbf{0}$  si riferiscono alle velocità  $\mathbf{v}_k$ . A causa dell'assunzione (i) fatta sopra (e ciò vale in particolare quando le forze non conservative  $\mathbf{F}_k$  sono assenti), concludiamo che vale la seguente proposizione.

**Proposizione 7.6.** *Si consideri di  $N$  punti materiali  $P_k$  con masse, rispettivamente,  $m_k > 0$  e  $k = 1, \dots, N$ , le cui equazioni della dinamica nel riferimento  $\mathcal{J}$  hanno forma (se  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  con  $O$  in quiete in  $\mathcal{J}$ ):*

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{x}_k}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \mathbf{F}_k \left( \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}|_{\mathcal{J}}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_N}{dt}|_{\mathcal{J}} \right), \quad (7.22)$$

dove l'energia potenziale energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  corrisponde ad un sistema di forze conservative nel riferimento  $\mathcal{J}$  e le forze non conservative  $\mathbf{F}_k$  in aggiunta alle precedenti (eventualmente assenti), soddisfano:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, N \text{ ed ogni } (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in V_{\mathcal{J}}^N.$$

Le funzioni  $\mathbf{F}_k$  sono assunte di classe  $C^1$  e la funzione  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  di classe  $C^2$  in un sottoinsieme aperto non vuoto rispettivamente di  $V_{\mathcal{J}}^N \times V_{\mathcal{J}}^N$  e  $V_{\mathcal{J}}^N$ .

Condizione necessaria e sufficiente affinché,  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) \in V_{\mathcal{J}}^N$  sia una configurazione di equilibrio è che sia un punto di stazionarietà dell'energia potenziale, cioè valga:

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, N. \quad (7.23)$$

◇

La questione che ci interessa è ora quella di stabilire quando una configurazione di equilibrio sia stabile. Il teorema di Lagrange-Dirichlet che ora, enunceremo e proveremo, costituisce un utilissimo criterio.

**Teorema 7.5. (Lagrange-Dirichlet)** *Si consideri di  $N$  punti materiali  $P_k$  con masse, rispettivamente,  $m_k > 0$  e  $k = 1, \dots, N$ , le cui equazioni della dinamica nel riferimento  $\mathcal{J}$  hanno forma (se  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  con  $O$  in quiete in  $\mathcal{J}$ ):*

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{x}_k}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \mathbf{F}_k \left( \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}|_{\mathcal{J}}, \dots, \frac{d\mathbf{x}_N}{dt}|_{\mathcal{J}} \right), \quad (7.24)$$

dove l'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  corrisponde ad un sistema di forze conservative nel riferimento  $\mathcal{J}$  e le forze non conservative  $\mathbf{F}_k$  in aggiunta alle precedenti (eventualmente assenti), soddisfano:

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, N \text{ ed ogni } (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in V_{\mathcal{J}}^N.$$

Le funzioni  $\mathbf{F}_k$  sono assunte di classe  $C^1$  e la funzione  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  di classe  $C^2$  in un sottoinsieme aperto non vuoto rispettivamente di  $V_{\mathcal{J}}^N \times V_{\mathcal{J}}^N$  e  $V_{\mathcal{J}}^N$ .

Una configurazione di equilibrio  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  è:

(a) stabile nel futuro se la restrizione di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  ad un intorno aperto di  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  ha un minimo stretto in tale punto in aggiunta alla condizione:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} \leq 0 \text{ per ogni scelta dei vettori velocità } \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}};$$

(b) stabile nel passato e nel futuro se la restrizione di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  ad un intorno aperto di  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  ha un minimo stretto in  $((\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  in aggiunta alla condizione:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} = 0 \text{ per ogni scelta dei vettori velocità } \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}.$$

◇

**Dimostrazione.** (a) Fissate coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  e con origine  $O$ , individuiamo i punto  $P_k$  tramite i vettori  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3$  le cui componenti sono quelle dei corrispondenti vettori  $P_k - O$ . Le velocità  $\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}}$  saranno biunivocamente individuate da corrispondenti vettori  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ . Consideriamo la funzione che definisce l'energia meccanica in  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N),$$

dove abbiamo ommesso ogni specificazione  $|_{\mathcal{J}}$  per semplicità notazionale. Sia  $U$  un intorno aperto di  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) \in \mathbb{R}^{3N}$  in cui la restrizione di  $\mathcal{U}$  ha un minimo stretto. Se  $G_0 := U \times \mathbb{R}^{3N}$ , la restrizione di  $\mathcal{E}$ :  $W := \mathcal{E}|_{G_0}: G_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ha evidentemente un minimo stretto nel punto  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ . Inoltre, per il teorema 5.5, su ogni soluzione delle equazioni del moto (7.20)-(7.21), vale:

$$\frac{d}{dt} W(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_N(t)) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_K(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_N(t)) \cdot \mathbf{v}_k \leq 0.$$

In altre parole, per la proposizione 7.3 su  $G_0$  vale:

$$\dot{W}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \leq 0.$$

Siamo allora nelle ipotesi del teorema 7.1 rispetto alla funzione di Liapunov  $W$ , per poter asserire che  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$  è un punto singolare stabile nel futuro e quindi  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$

è una configurazione di equilibrio stabile nel futuro.

(b) Procedendo esattamente come nella dimostrazione del caso (a), troviamo che ora vale più fortemente

$$\mathring{W}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = 0.$$

Allora, per lo stesso teorema 7.1, in questo caso, la stabilità si ha anche nel passato.  $\square$

**Osservazioni 7.7.** Sottolineiamo che la richiesta di avere un punto di minimo stretto dell'energia potenziale in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile *non* è una condizione necessaria, anche in assenza delle forze non conservative. Un esempio elementare è quello del sistema costituito da un unico punto materiale sulla retta reale sottoposto alla forza conservativa con energia potenziale di classe  $C^2(\mathbb{R})$  data da:  $\mathcal{U}(x) := x^4 \sin(1/x)$  se  $x \neq 0$  e  $\mathcal{U}(0) := 0$ . La configurazione  $x = 0$  è di equilibrio stabile, ma non corrisponde ad un minimo stretto.

Il seguente risultato completa l'enunciato del teorema di Lagrange-Dirichlet, dando condizioni sufficienti per la stabilità asintotica.

**Proposizione 7.7.** *Nelle ipotesi del teorema 7.5, allora vale:*

(c) *la configurazione di equilibrio  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  è stabile nel futuro e asintoticamente stabile nel futuro se il punto di minimo stretto  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  è anche un punto stazionario isolato<sup>4</sup> dell'energia potenziale  $\mathcal{U}_{\mathcal{J}}$  e vale la condizione sulle forze non conservative:*

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} < 0, \text{ per } (\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}). \quad \diamond$$

**Dimostrazione.** Useremo le convenzioni e le notazioni usate nella dimostrazione del teorema precedente. Restringiamo l'intorno  $U$  (e quindi  $G_0 = U \times \mathbb{R}^{3N}$ ) del punto di stazionarietà in modo tale che, in  $U$ , non ci siano altri punti stazionari per l'energia potenziale. Vogliamo applicare il teorema 7.3 e pertanto vogliamo inizialmente determinare gli insiemi  $A_\epsilon$  che appaiono nella tesi del teorema 7.3. Nelle ipotesi fatte, procedendo come nella dimostrazione del teorema precedente, si vede subito che l'insieme dei punti per cui:

$$\mathring{W}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = 0$$

coincide con quello per cui vale:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \cdot \mathbf{v}_k = 0.$$

---

<sup>4</sup>Il fatto che  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  individui un minimo stretto dell'energia potenziale non è sufficiente ad assicurare che sia anche un punto di stazionarietà isolato dell'energia potenziale: si consideri, per  $N = 1$ , la funzione  $\mathcal{U}(x) := x^4(2 + \sin(1/x))$  se  $x \neq 0$  e  $\mathcal{U}(0) := 0$ .  $\mathcal{U} \in C^2(\mathbb{R})$  ed ha un minimo stretto per  $x = 0$  che non corrisponde ad un punto di stazionarietà isolato.



Valendo  $\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} < 0$ , per  $(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ ,

questo è possibile solo se le velocità dei punti sono tutte nulle. In definitiva l'insieme  $A_\epsilon$  contiene i punti di  $G_0$  che soddisfano:  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \neq (\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$  e

$$\|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) - (\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})\| \leq \epsilon.$$

Se  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), \mathbf{v}_1(t), \dots, \mathbf{v}_N(t))$  è una soluzione massimale completa che appartiene a qualche  $A_\epsilon$ , deve quindi valere  $\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{0}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e, di conseguenza da (7.20), deve anche essere:

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

In virtù della condizione  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(P_1, \dots, P_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  per ogni  $k = 1, \dots, N$ , sulla soluzione massimale e completa suddetta deve essere soddisfatta l'identità:

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \mathbf{0}.$$

Quindi tutte le configurazioni  $(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$  (che appartengono a  $U$  per costruzione) sono punti di stazionarietà dell'energia potenziale. Ma nell'aperto  $U$  questo è possibile solo se

$$(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = (\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}),$$

in quanto  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  è un punto stazionario isolato di  $\mathcal{U}$ . Dato che  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) \notin A_\epsilon$ , concludiamo che  $A_\epsilon$  non contiene orbite di soluzioni massimali complete e quindi vale la stabilità asintotica nel futuro.  $\square$

**Osservazioni 7.8.** La dimostrazione della proposizione 7.6, del teorema di Lagrange-Dirichlet e della proposizione 7.7 si basa unicamente sulla forma delle equazioni (7.22) e sul fatto che le masse  $m_k$  siano positive. Non è importante la dimensione dello spazio vettoriale in cui varia ogni vettore  $\mathbf{x}_i$  che può essere diversa da 3 (ma comunque finita). Tale osservazione è importante perché permette di estendere i teoremi al caso in cui si lavora con sistemi vincolati e la forma (7.22) delle equazioni vale per il sistema di equazioni pure di movimento, ed in cui  $\mathbf{x}_i$  viene sostituita dalla coordinata  $k$ -esima di un sistema di coordinate con il quale si descrive il sistema e la massa  $m_i$  è una costante strettamente positiva che non ha necessariamente il significato di una massa.

### 7.2.2 Un criterio per l'instabilità

Per concludere proviamo un risultato, riguardate sistemi di punti materiali sottoposti a sistemi di forze puramente conservative, che stabilisce una condizione sufficiente per l'instabilità basata sulle proprietà della matrice hessiana dell'energia potenziale.

**Proposizione 7.8.** *Si consideri di  $N$  punti materiali  $P_k$  con masse, rispettivamente,  $m_k > 0$  e  $k = 1, \dots, N$ , le cui equazioni della dinamica nel riferimento  $\mathcal{S}$  hanno forma (se  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  con  $O$  in quiete in  $\mathcal{S}$ ):*

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{x}_k}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (7.25)$$

dove l'energia potenziale energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ , di classe  $C^2$ , corrisponde ad un sistema di forze conservative nel riferimento  $\mathcal{S}$ .

Se in una configurazione di equilibrio  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  la matrice hessiana dell'energia potenziale ha un autovalore negativo, allora  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  è instabile nel passato e nel futuro.  $\diamond$

**Dimostrazione.** Consideriamo coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}$  con origine  $O$  coincidente con il punto stazionario  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}) = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ . In tali coordinate le equazioni del moto del sistema, riportate al prim'ordine sono:

$$\frac{d\mathbf{v}'_k}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}'_k} \mathcal{U}(\mathbf{x}'_1/\sqrt{m_1}, \dots, \mathbf{x}'_n/\sqrt{m_N}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.26)$$

$$\frac{d\mathbf{x}'_k}{dt} = \mathbf{v}'_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.27)$$

dove abbiamo introdotto le nuove variabili  $\mathbf{x}_i := \sqrt{m_i} \mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{v}'_i := \sqrt{m_i} \mathbf{v}_i$ . La richiesta di  $\mathcal{U}$  di classe  $C^3$  è sufficiente ad assicurare la validità delle ipotesi del teorema 7.4 tenendo conto di (1) in osservazioni 7.6. Se linearizziamo tali equazioni in corrispondenza del punto singolare  $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ , otteniamo il sistema del primo ordine lineare:

$$\frac{du'_j}{dt} = -\sum_{i=1}^N H'_{ji} y'_i, \quad j = 1, \dots, 3N, \quad (7.28)$$

$$\frac{dy'_j}{dt} = u'_j, \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (7.29)$$

dove  $y'_1, y'_2, y'_3$  sono le componenti di  $\mathbf{x}'_1$ . Nello stesso modo,  $y'_4, y'_5, y'_6$  sono le componenti di  $\mathbf{x}'_2$ , e via di seguito.

$$H'_{ji} := M_j^{-1/2} H_{ji} M_i^{-1/2},$$

inoltre  $M_1 = M_2 = M_3 = m_1$  e  $M_4 = M_5 = M_6 = m_2$  e via di seguito, ed infine la matrice simmetrica  $H$  di coefficienti  $H_{ij}$  è la matrice hessiana di  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  valutata nella configurazione di stazionarietà  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$ . Nelle nostre ipotesi, la matrice reale simmetrica  $H$  ha un autovettore:

$$\mathbf{y}_\lambda = (y_{\lambda 1}, \dots, y_{\lambda 3N})^t,$$

con autovalore  $\lambda < 0$ : vale cioè  $H\mathbf{y}_\lambda = \lambda\mathbf{y}_\lambda$ . Ma allora la matrice  $H'$ , i cui coefficienti sono i numeri  $H'_{ji}$ , ha anch'essa un autovalore, dato dal vettore non nullo:

$$\mathbf{y}'_\lambda := (\sqrt{M_1} y_{\lambda 1}, \dots, \sqrt{M_{3N}} y_{\lambda 3N})^t,$$

con autovalore  $\lambda < 0$ :

$$H' \mathbf{y}'_\lambda = \lambda \mathbf{y}'_\lambda . \quad (7.30)$$

Se introduciamo il vettore colonna su  $\mathbb{R}^{6N}$ ,  $\mathbf{Y} = (u'_1, \dots, u'_{3N}, y'_1, \dots, y'_{3N})^t$ , il sistema lineare (7.28)-(7.29) si può scrivere:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = A\mathbf{Y} , \quad (7.31)$$

dove la matrice  $A$  è definita da:

$$A := \left[ \begin{array}{c|c} 0 & -H' \\ \hline I & 0 \end{array} \right] . \quad (7.32)$$

Consideriamo infine il vettore non nullo (notare che  $-\lambda > 0$  per ipotesi!):

$$\mathbf{U} := (y'_{\lambda,1}, \dots, y'_{\lambda,3N}, (-\lambda)^{-1/2} y'_{\lambda,1}, \dots, (-\lambda)^{-1/2} y'_{\lambda,3N})^t .$$

Da (7.32) e (7.30), segue subito che:

$$A\mathbf{U} = \sqrt{-\lambda} \mathbf{U} .$$

Abbiamo provato che il sistema lineare (7.31), cioè il sistema (7.28)-(7.29), ha matrice a secondo membro con un autovalore reale positivo ( $\sqrt{-\lambda}$ ). In base alla proposizione 7.5, il punto singolare di questo sistema dato dall'origine di  $\mathbb{R}^{6N}$  è instabile nel futuro. Applicando il teorema 7.4, concludiamo che il punto singolare  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$  del sistema (7.26)-(7.27) è instabile nel futuro. Questo risultato implica immediatamente che la configurazione di equilibrio  $(\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,N})$  per il sistema di punti materiali sia instabile nel futuro. Nello stesso modo si vede che

$$\mathbf{U}' := (y'_{\lambda,1}, \dots, y'_{\lambda,3N}, -(-\lambda)^{-1/2} y'_{\lambda,1}, \dots, -(-\lambda)^{-1/2} y'_{\lambda,3N})^t ,$$

soddisfa

$$A\mathbf{U}' = -\sqrt{-\lambda} \mathbf{U}' ,$$

e quindi si ha instabilità anche nel passato.  $\square$

**Osservazioni 7.9.** La dimostrazione della proposizione 7.8 si basa unicamente sulla forma delle equazioni (7.25) e sul fatto che le masse  $m_k$  siano positive. Non è importante la dimensione dello spazio vettoriale in cui varia ogni vettore  $\mathbf{x}_i$  che può essere diversa da 3 (ma comunque finita). Tale osservazione è importante perché permette di estendere i teoremi al caso in cui si lavora con sistemi vincolati e la forma (7.22) delle equazioni vale per il sistema di equazioni pure di movimento, ed in cui  $\mathbf{x}_i$  viene sostituita dalla coordinata  $k$ -esima di un sistema di coordinate con il quale si descrive il sistema e la massa  $m_i$  è una costante strettamente positiva che non ha necessariamente il significato di una massa.

#### Esempi 7.4.

1. L'esempio più elementare possibile è quello di un punto materiale  $P$  sottoposto ad una forza,

conservativa rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , con energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(P)$  (di classe  $C^2$ ). Se  $P_0 \in E_{\mathcal{J}}$  è un punto di minimo stretto in un intorno di  $P_0$  stesso, questa è una configurazione di equilibrio stabile, nel passato e nel futuro per il teorema di Lagrange-Dirichlet. L'introduzione di una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  rende tale punto di equilibrio asintoticamente stabile nel futuro a causa della proposizione 7.7.

**2.** Consideriamo un punto materiale sottoposto ad una forza conservativa conservativa rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , con energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(P)$  (di classe  $C^2$ ). (Quanto stiamo per dire si estende banalmente al caso di un sistema di punti materiali sottoposti unicamente ad un sistema di forze conservative.) Se non sono presenti altre forze, lo studio della stabilità di un punto di stazionarietà,  $P_0$ , di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  può essere fatto analizzando la matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  nel punto  $P_0$ . Più precisamente:

(a) se la matrice hessiana nel punto  $P_0$  ha solo autovalori strettamente positivi, allora si ha un minimo stretto nell'intorno di  $P_0$  e, di conseguenza, il punto di stazionarietà è una configurazione di equilibrio stabile (nel passato e nel futuro).

(b) se la matrice hessiana nel punto  $P_0$  ha almeno un autovalore strettamente negativo, allora il punto di stazionarietà è una configurazione di equilibrio instabile (nel futuro).

Si osservi che la presenza di un minimo stretto non richiede necessariamente autovalori strettamente positivi: qualcuno potrebbe essere nullo. Si consideri ad esempio la funzione

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^4.$$

Essa ha un minimo stretto nell'origine ma l'autovalore della matrice hessiana corrispondente al versore  $\mathbf{e}_z$  è nullo (i rimanenti sono positivi). Viceversa l'instabilità non è sempre evidenziata da un autovalore negativo della matrice hessiana. Per esempio un punto materiale sottoposto alla sola forza conservativa (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ ) data da:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^4,$$

ha una configurazione di equilibrio instabile nel futuro nell'origine. D'altra parte gli autovalori della matrice hessiana nell'origine sono non negativi. L'instabilità è dovuta alla direzione  $z$  corrispondente ad un autovalore nullo.

### 7.2.3 Stabilità delle rotazioni permanenti per corpi rigidi non giroscopici.

Consideriamo un corpo rigido non giroscopico  $S$  con momenti d'inerzia  $I_{O1} < I_{O2} < I_{O3}$  riferiti ad una terna principale d'inerzia  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , solidale con il corpo e centrata con il punto  $O$  del corpo, fisso nel sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{J}$  e non sottoposto ad alcuna forza se non la reazione vincolare in  $O$ . Quanto diremo vale, con qualche modifica anche per un corpo rigido non giroscopico in caduta libera nel campo gravitazionale  $-g \mathbf{e}_z$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , ambientando lo studio in un secondo riferimento, non inerziale, che trasla rispetto ad  $\mathcal{J}$ , rimanendo in quiete con il centro di massa  $O = G$  del corpo rigido.

Vogliamo ora applicare la teoria elementare della stabilità alle soluzioni delle equazioni di Eulero (6.31) date dalle *rotazioni permanenti* attorno agli assi principali d'inerzia discusse nella

sezione 6.3.3. Mostriamo che le rotazioni permanenti attorno agli assi  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$  sono stabili, mentre sono instabile le rotazioni permanente attorno all'asse di momento d'inerzia intermedio  $\mathbf{e}_2$ . Notiamo che il sistema delle equazioni differenziali di Eulero (6.31) è del primo ordine e le rotazioni permanenti attorno agli assi sono punti singolari del sistema autonomo (6.31), pertanto possiamo applicare direttamente la teoria sviluppata per i sistemi di equazioni differenziali del primo ordine.

Per quanto riguarda la stabilità delle rotazioni permanenti attorno agli assi  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$ , l'idea è quella di costruire delle funzioni di Liapunov sfruttando due integrali primi. Si tratta, rispettivamente, dell'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}$ , che si conserva in quanto la reazione vincolare non può compiere lavoro (la sua potenza è nulla essendo  $\mathbf{v}_O|_{\mathcal{J}} = \mathbf{0}$ ):

$$A(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} (I_{O1}\omega_1^2 + I_{O2}\omega_2^2 + I_{O3}\omega_3^2) \quad (7.33)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'energia meccanica, nel caso considerato, si riduce all'energia cinetica, che vale (6.18) e che la terna di assi considerati è principale d'inerzia per cui diagonalizza il tensore d'inerzia relativo ad  $O$ . Ovviamente le  $\omega_i$  sono sopra le componenti del vettore  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo rigido  $S$  al riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ .

Il secondo integrale primo è invece dato dal quadrato del momento angolare di  $S$ , nel riferimento  $\mathcal{J}$ , calcolato rispetto al polo  $O$ . Tenendo conto di (6.17):

$$B(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}^2 = I_{O1}^2\omega_1^2 + I_{O2}^2\omega_2^2 + I_{O3}^2\omega_3^2. \quad (7.34)$$

Questa quantità è conservata nel tempo, sui moti del sistema, in virtù della seconda equazione cardinale (6.26), dato che la reazione vincolare, unica forza agente sul sistema, ha momento nullo rispetto al polo  $O$  in cui è applicata.

Osserviamo preventivamente che  $A(\boldsymbol{\omega}) > 0$  se  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$  e  $A(\mathbf{0}) = 0$ . Dato che  $A(\boldsymbol{\omega})$  è un integrale primo e quindi  $\dot{A} = 0$ , possiamo applicare il teorema di Liapunov 7.1 alla rotazione permanente banale  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  che quindi risulta essere stabile nel passato e nel futuro.

Consideriamo ora una rotazione permanente attorno all'asse  $\mathbf{e}_1$ , data da  $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_1$  con  $\Omega \neq 0$ . Per provare che è stabile cominciamo a consideriamo una potenziale funzione di Liapunov, cioè la funzione:

$$W_1'(\boldsymbol{\omega}) := I_{O1}^{-1}B(\boldsymbol{\omega}) - 2A(\boldsymbol{\omega}) = \frac{I_{O2}}{I_{O1}}(I_{O2} - I_{O1})\omega_2^2 + \frac{I_{O3}}{I_{O1}}(I_{O3} - I_{O1})\omega_3^2.$$

Questa funzione è un integrale primo ed è non negativa (ricordare che  $I_{O1} < I_{O2}, I_{O3}$ ) valendo zero per  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Dunque essa ha un minimo anche sulla rotazione permanente considerata. Tuttavia non è un minimo stretto su  $(\Omega, 0, 0)$  e pertanto  $W_1'$  non è ancora la funzione di Liapunov che ci interessa. Consideriamo un secondo integrale primo della forma:

$$W_1''(\boldsymbol{\omega}) := (2A(\boldsymbol{\omega}) - I_{O1}\Omega^2)^2 = [I_{O3}\omega_3^2 + I_{O2}\omega_2^2 + I_{O1}(\omega_1^2 - \Omega^2)]^2.$$

Questa nuova funzione è ancora un integrale primo e soddisfa  $W_1''(\boldsymbol{\omega}) \geq 0$ . Se sommiamo le due funzioni in:

$$W_1(\boldsymbol{\omega}) := W_1'(\boldsymbol{\omega}) + W_1''(\boldsymbol{\omega}) = \left( \sqrt{\frac{I_{O2}}{I_{O1}}(I_{O2} - I_{O1})\omega_2} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{I_{O3}}{I_{O1}}(I_{O3} - I_{O1})\omega_3} \right)^2 + [I_{O3}\omega_3^2 + I_{O2}\omega_2^2 I_{O1}(\omega_1^2 - \Omega^2)]^2 ,$$

concludiamo che questa è ancora un integrale primo, non negativo e si annulla solo se tutti gli addendi quadratici si annullano separatamente, essendo una somma di addendi quadratici. Questo accade solo se:  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  e  $\omega_1 = \pm\Omega$ . In particolare, questo integrale primo, ha un minimo stretto esattamente per  $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_1$  (con  $\Omega \neq 0$ ). Possiamo quindi usare  $W_1$  come funzione di Liapunov e concludere che ogni rotazione permanente attorno all'asse  $\mathbf{e}_1$  (quello con momento d'inerzia più piccolo) è stabile nel passato e nel futuro (dato che  $\dot{W}_1 = 0$ ).

Si può ragionare nello stesso modo per provare la stabilità delle rotazioni permanenti  $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}_3$ , con  $\Omega \neq 0$ , attorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ , quello di momento d'inerzia massimo. In questo caso la funzione di Liapunov è:

$$W_3(\boldsymbol{\omega}) := 2A(\boldsymbol{\omega}) - I_{O3}^{-1}B(\boldsymbol{\omega}) + (2A(\boldsymbol{\omega}) - I_{O3}\Omega^2)^2 .$$

Per concludere mostriamo che le rotazioni permanenti attorno all'asse  $\mathbf{e}_2$ , quello con momento d'inerzia con valore intermedio, sono instabili nel passato e nel futuro. Questo segue facilmente dal Teorema 7.4 andando a linearizzare il secondo membro del sistema di equazioni (6.31) scritto in forma normale, sul punto singolare  $\Omega \mathbf{e}_2$  con  $\Omega \neq 0$ . Il calcolo diretto elementare mostra che la matrice che si ottiene a secondo membro con la procedura di linearizzazione ha equazione agli autovalori:

$$\lambda \left( \lambda^2 - \Omega^2 \frac{(I_{O2} - I_{O3})(I_{O1} - I_{O2})}{I_{O1}I_{O3}} \right) = 0 ,$$

le cui soluzioni sono, a parte  $\lambda = 0$ :

$$\lambda_{\pm} = \pm |\Omega| \sqrt{\frac{(I_{O2} - I_{O3})(I_{O1} - I_{O2})}{I_{O1}I_{O3}}} .$$

Si osservi che il radicando è sicuramente positivo essendo  $I_{O1} < I_{O2} < I_{O3}$ . Essendoci un autovalore strettamente positivo ed uno strettamente negativo ( $\Omega \neq 0$  per ipotesi), il Teorema 7.4 ci porta a concludere che il punto singolare considerato, cioè la rotazione permanente  $\Omega \mathbf{e}_2$  attorno all'asse  $\mathbf{e}_2$ , è instabile nel futuro e nel passato.

### Esercizi 7.1.

1. Considerare un punto materiale di massa  $m$  sottoposto alla forza conservativa

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(x, y, z) := \kappa(x^2 + y^2 - z^4) ,$$

rispetto a coordinate cartesiane ortonormali  $x, y, z$  solidali con il riferimento  $\mathcal{S}$  e dove  $\kappa > 0$  è una costante. Dimostrare che l'origine delle coordinate determina una configurazione di equilibrio instabile.

2. Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  sottoposto alla forza di gravità  $-mg\mathbf{e}_z$  e connesso al punto  $O$  tramite una molla, di lunghezza a riposo nulla, di costante elastica  $\kappa > 0$  e immerso in un liquido. Il punto  $O$  ed il liquido sono in quiete nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$  che

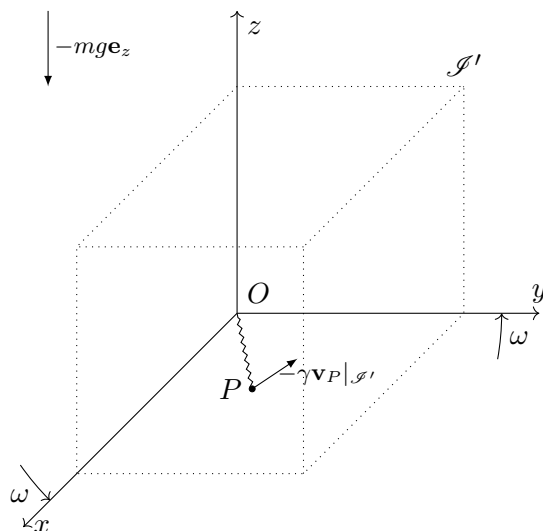


Figura 7.1: Illustrazione dell'esercizio 7.1.2.

ruota, attorno all'asse  $z$  uscente da  $O$ , rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{J}$  con velocità angolare  $\omega_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}} = \omega \mathbf{e}_z$  dove  $\omega > 0$  è costante. A causa della presenza del liquido,  $P$  è sottoposto alla forza viscosa  $\mathbf{F}(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}) = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}$  con  $\gamma \geq 0$  costante.

- (i) Si scrivano le equazioni del moto del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}'$ .
- (ii) Si dimostri che, nel riferimento  $\mathcal{J}'$ , se non sono presenti le forze viscosi ( $\gamma = 0$ ), allora il punto è sottoposto ad una forza girostatica ed a una rimanente forza conservativa. Si scriva l'energia potenziale di quest'ultima.
- (iii) Si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}'$  e se ne discuta la stabilità, per  $k > m\omega^2$ .

## Capitolo 8

# Fondamenti di Meccanica Lagrangiana

In questo capitolo ci occuperemo di introdurre la formulazione lagrangiana della meccanica classica. Ricordiamo che la presenza di reazioni vincolari di cui non è nota la forma funzionale rende, in generale, *non deterministiche* le equazioni di Newton, proprio perché le reazioni vincolari appaiono come incognite aggiuntive. Per rendere il sistema di equazioni deterministico è necessario aggiungere informazioni di vario genere: geometrico/cinematico (“forma dei vincoli”) e fisico (caratterizzazione costitutiva delle reazioni vincolari). La *meccanica lagrangiana* o *formulazione lagrangiana della meccanica classica* nasce come una procedura universale per estrarre cosiddette *equazioni pure di movimento*, cioè equazioni differenziali deterministiche che non contengono le reazioni vincolari, che sono incognite del problema, ma permettono di determinare il moto del sistema. Tutto ciò per sistemi di punti materiali vincolati, quando i vincoli soddisfano il requisito di essere *vincoli ideali*. Tale requisito generalizza, come vedremo, la caratterizzazione di vincolo liscio includendo situazioni molto generali.

Le equazioni pure di movimento si dicono, in questo contesto, *equazioni di Eulero-Lagrange*. La meccanica lagrangiana è applicabile, con piccole modificazioni, anche a sistemi materiali rigidi continui. La formulazione lagrangiana si applica anche, ovviamente, al caso di sistemi di punti materiali non sottoposti a vincoli. In questo caso le equazioni sono completamente equivalenti a quelle deterministiche di Newton, ma hanno la particolarità di essere scrivibili, nella stessa forma, in un qualsiasi sistema di coordinate. Infine, in tutti i casi, nella formulazione di Lagrange della meccanica risulta molto chiaro il legame, strettissimo, tra simmetria di un sistema fisico sotto un gruppo di trasformazioni ed esistenza di particolari quantità fisiche conservate nel tempo sul moto del sistema.

La meccanica lagrangiana è un approccio potentissimo la cui applicazione è andata ben oltre la meccanica newtoniana classica ed al problema delle reazioni vincolari incognite, sopravvivendo alla rivoluzione relativistica ed applicandosi a sistemi continui ed alla teoria dei campi, con un successo strepitoso. La formulazione Lagrangiana ha avuto un'enorme influenza, sicuramente decisiva, nello sviluppo di tutta la fisica moderna.



**N.B.** In tutto questo capitolo *differenziabile* significa di classe  $C^\infty$  se non è specificato altrimenti. Inoltre *sottovarietà* significherà *sottovarietà embedded* (vedi appendice A).

## 8.1 Un esempio introduttivo

A titolo introduttivo, otterremo le equazioni di Eulero-Lagrange per un sistema fisico particolare. Il resto del capitolo sarà dedicato alla generalizzazione di questo esempio elementare.

Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di 3 punti materiali  $P_1, P_2, P_3$  con masse  $m_1, m_2, m_3$  rispettivamente, sottoposti rispettivamente a *forze attive* (cioè forze di cui si conosce la forma funzionale come funzioni del tempo delle posizioni e delle velocità delle particelle)  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  non di tipo inerziale (successivamente lasceremo cadere quest'ipotesi, ma per il momento lavoriamo in una situazione relativamente semplice). Supponiamo di lavorare in un fissato riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e che i punti materiali siano vincolati a muoversi su curve e superfici *in quiete o in moto* nel riferimento considerato. Indicheremo con  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , rispettivamente, le *reazioni vincolari* dette anche *forze reattive* (forze di cui non si conosce la forma funzionale ma che devono esistere in virtù della seconda legge della dinamica) su ciascun punto dovute ai vincoli detti. Per fissare le idee, supponiamo che  $P_1, P_2$  siano vincolati a muoversi sulla superficie  $\Sigma$ , mentre  $P_3$  sia vincolato alla curva  $\Gamma$ . Supporremo anche che  $\Sigma$  sia in quiete nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Come sappiamo dal capitolo 3, ai fini dello studio della dinamica del sistema, è conveniente descrivere la posizione dei punti in termini di coordinate (in generale locali) adattate ai vincoli. A tal fine, per esempio  $q^1, q^2$

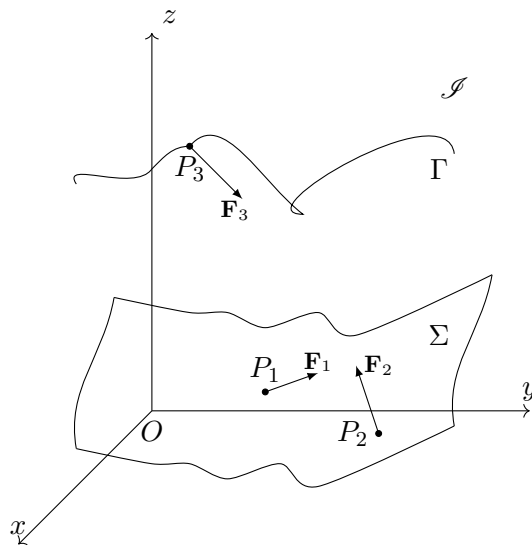


Figura 8.1: Illustrazione dell'esempio discusso in sezione 8.1.

indicheranno coordinate locali del punto  $P_1$  sulla superficie  $\Sigma$ , una volta definito un sistema di coordinate appropriato su tale superficie. Ad esempio, se  $\Sigma$  è una superficie sferica,  $q^1$  e  $q^2$  potrebbero essere le coordinate angolari sferiche,  $\theta$  e  $\varphi$ , di  $P_1$  su  $\Sigma$ . Similmente  $q^3, q^4$  indicheranno le coordinate del punto  $P_2$  sulla superficie  $\Sigma$ . Infine  $q^5$  indicherà la coordinata di  $P_3$  sulla curva  $\Gamma$  in quiete in  $\mathcal{S}'$  in moto (assegnato) rispetto a  $\mathcal{S}$ . Per esempio  $q^5$  potrebbe essere l'ascissa curvilinea di  $P_3$  su  $\Gamma$ .

Se  $O$  è un'origine nello spazio di quiete  $E_{\mathcal{S}}$ , e se  $\mathbf{x}_i := P_i - O$ , nel riferimento  $\mathcal{S}$  avremo dunque delle relazioni note:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^5), \quad i = 1, 2, 3,$$

che permettono di determinare le posizioni dei punti  $P_i$  in  $E_{\mathcal{S}}$ , una volta conosciute le coordinate  $q^1, \dots, q^5$  che individuano i punti su  $\Sigma$  e  $\Gamma$ . In realtà, nel caso in esame,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  dipenderanno solamente, rispettivamente, da  $q^1, q^2$  e  $q^3, q^4$ , *ma non dal tempo  $t$* . Viceversa,  $\mathbf{x}_3$  sarà funzione solo di  $q^5$  e del tempo  $t$ , dato che  $\Gamma$  non è in quiete in  $\mathcal{S}$  ma il suo moto è assegnato. Tuttavia, noi scriveremo  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^5)$  per generalità.

Si osservi che  $\mathfrak{S}$  contiene 3 punti materiali e sono quindi necessarie a priori  $3 \times 3 = 9$  coordinate cartesiane per individuare la posizione di tali punti rispetto a  $\mathcal{S}$ . Tuttavia le equazioni che descrivono i vincoli a cui sono assoggettati tali punti, riducono a 5 i gradi di libertà del sistema. Tali 5 *gradi di libertà* sono descritti dalle 5 coordinate  $q^1, \dots, q^5$  adattate ai vincoli. Il moto del sistema sarà pertanto descritto da 5 funzioni incognite del tempo  $q^i = q^i(t)$ , per  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Il moto del sistema dovrebbe essere individuato dalla soluzione di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine una volta assegnate le condizioni iniziali  $q^1(t_0), \dots, q^5(t_0)$  e  $dq^1/dt(t_0), \dots, dq^5/dt(t_0)$  e trascritte le funzioni di forza  $\mathbf{F}_i := \mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}, \frac{d\mathbf{x}_2}{dt}, \frac{d\mathbf{x}_3}{dt})$  in funzione delle coordinate  $q^1, \dots, q^5$  e delle loro derivate prime nel tempo. Tuttavia il problema è che non è nota l'espressione esplicita delle forze reattive  $\phi_i$  e pertanto le 3 equazioni di Newton:

$$m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{F}_i + \phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.1)$$

non producono automaticamente un sistema di equazioni differenziali in forma normale, anche se trascritte nei 5 effettivi gradi di libertà del problema  $q^1, \dots, q^5$ .

Il problema diventa deterministico se accanto alle equazioni sopra scritte aggiungiamo delle *caratterizzazioni costitutive dei vincoli*<sup>1</sup>. Nel caso in esame, supporremo che i vincoli siano tutti lisci. In altre parole  $\phi_1, \phi_2$  saranno sempre dirette normalmente a  $\Sigma$ , mentre  $\phi_3$  sarà diretta normalmente a  $\Gamma$ . Come abbiamo già visto nel capitolo 3 e come vedremo in questo caso più generale senza fare riferimento ai risultati del capitolo 3, con l'aggiunta di equazioni costitutive, è possibile estrarre dal sistema delle equazioni di Newton, un sottosistema di *equazioni pure di movimento*. Cioè equazioni differenziali che, grazie alla validità del teorema di esistenza ed unicità, individuano univocamente il moto del sistema quando sono assegnate condizioni iniziali. In particolare tali equazioni *non* contengono le reazioni vincolari, incognite, agenti sui punti del sistema. Le reazioni vincolari si determinano successivamente, usando le stesse equazioni di Newton, una volta noto il moto del sistema.

<sup>1</sup>Le equazioni che individuano i vincoli  $\Sigma$  e  $\Gamma$  sono già usate nel momento in cui si passa, nelle equazioni di Newton, dalle 9 coordinate cartesiane ai 5 effettivi gradi di libertà  $q^1, \dots, q^5$ .

Quello che ci interessa introdurre in questa sezione è una procedura che porta direttamente a tali equazioni pure di movimento, ma che è generalizzabile al caso generico di  $N$  punti vincolati in modo molto più generale del caso esaminato ora, quando i vincoli soddisfano una caratterizzazione costitutiva più generale di quella di vincolo liscio assunta ora. La procedura nella sua forma completamente generale sarà oggetto della prossima sezione.

La condizione di vincolo liscio è *equivalente* a dire che, se  $\delta \mathbf{x}_i$  indica un generico vettore *tangente* alla superficie o curva su cui giace il punto  $P_i$  *al tempo  $t$  fissato*, valgano la relazioni:  $\phi_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$  per  $i = 1, 2, 3$  e per *ogni* scelta dei vettori  $\delta \mathbf{x}_i$  del tipo detto. A maggior ragione dovrà valere anche:

$$\sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \text{ per ogni scelta dei vettori } \delta \mathbf{x}_i \text{ del tipo detto.} \quad (8.2)$$

Si osservi che questa seconda richiesta è conseguenza delle prime richieste  $\phi_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$  per  $i = 1, 2, 3$ , ma non implica le prime, ed è pertanto è meno restrittiva.

Vogliamo ora scrivere la richiesta (8.2) in un modo del tutto equivalente, ma più utile nella pratica. Consideriamo il punto  $P_1 = P_1(q^1, q^2)$ . Data la natura delle prime due coordinate  $q^k$  di essere coordinate su  $\Sigma$ , all'istante  $t$ , i vettori tangenti a  $\Sigma$  nel punto  $P_1$  hanno la forma:

$$\delta \mathbf{x}_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} \delta q^k = \sum_{k=1}^5 \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} \delta q^k,$$

dove i  $\delta q^k$  sono numeri reali arbitrari. La seconda identità deriva dal fatto che  $\mathbf{x}_1$  non dipende da  $q^3, q^4, q^5$  e pertanto gli addendi per  $i = 3, 4, 5$ , aggiunti alla prima somma (quella con  $i = 1, 2$ ) sono nulli. Ad ogni fissato tempo  $t$ , la stessa espressione in realtà vale anche per i vettori tangenti ai corrispondenti vincoli (superfici o curve) su cui giacciono gli altri due punti:

$$\delta \mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^5 \left. \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \right|_{(t, q^1, \dots, q^5)} \delta q^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.3)$$

dove i  $\delta q^k$  sono numeri reali arbitrari.

L'equazione (8.2) può allora essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^5 \sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \delta q^k = \mathbf{0}.$$

Se ora teniamo conto che i numeri  $\delta q^k$  sono del tutto arbitrari, e quindi possiamo scegliere  $\delta q^1 = 1$  e tutti gli altri nulli, poi  $\delta q^2 = 1$  e tutti gli altri nulli, e via di seguito, giungiamo alla conclusione che (8.2) equivale alle 5 equazioni:

$$\sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, 5, \quad (8.4)$$

Questa è la caratterizzazione dei cosiddetti *vincoli ideali* che generalizzeremo nel seguito.

**Osservazioni 8.1.** Intuitivamente parlando, i vettori  $\delta \mathbf{x}_i$ , nel caso in cui i  $\delta q^k$  siano piccolissimi, possono essere pensati come vettori che congiungono due configurazioni infinitamente vicine – quella individuata da  $(t, q^1, \dots, q^5)$  e quella individuata da  $(t, q^1 + \delta q^1, \dots, q^5 + \delta q^5)$  – e compatibili con i vincoli del sistema *allo stesso istante*  $t$ . Bisogna sottolineare che i  $\delta \mathbf{x}_i$  non sono necessariamente interpretabili come spostamenti reali (infinitesimi) che il sistema può compiere in un suo moto soluzione delle equazioni di Newton, perché gli spostamenti reali avvengono in un intervallo di tempo ed i vincoli possono cambiare forma funzionale in tale intervallo (ciò accade per il vincolo a cui è sottoposto  $P_3$  nel caso in esame), mentre noi stiamo lavorando a  $t$  fissato nel definire i vettori  $\delta \mathbf{x}_i$ . Per questo motivo i vettori  $\delta \mathbf{x}_i$  definiti in (8.3), nel linguaggio ottocentesco della formulazione “classica” della meccanica lagrangiana, si chiamavano *spostamenti virtuali del sistema* all’istante  $t$  rispetto alla configurazione  $(t, q^1, \dots, q^5)$  e  $\sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot \delta \mathbf{x}_i$  viene detto *lavoro virtuale* (delle reazioni vincolari) all’istante  $t$  rispetto alla configurazione  $(t, q^1, \dots, q^5)$ .

Mostriamo infine come la caratterizzazione dei vincoli ideali trovata permetta di scrivere le equazioni pure di movimento.

Ricordando che

$$m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} - \mathbf{F}_i = \phi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

Il set di 5 equazioni (8.4) può infine essere riscritto come:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i(t, q^1, \dots, q^5, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^5) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \quad \text{per } k = 1, \dots, 5. \quad (8.5)$$

Vogliamo esprimere queste equazioni in un modo più comodo da maneggiare. Per prima cosa notiamo che, nelle nostre ipotesi e per  $i = 1, 2, 3$ , la velocità  $\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}(t)$  di  $P_i$  rispetto a  $\mathcal{J}$  in funzione dei gradi di libertà  $q^1, \dots, q^5$  e delle loro derivate nel tempo, si esprime come:

$$\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^5 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k, \quad (8.6)$$

dove  $\dot{q}^k := \frac{dq^k}{dt}$ . Tenendo conto di (8.6) abbiamo l’espressione dell’energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^5, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^5)$  di  $\mathfrak{S}$  nel riferimento  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}(t)^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^5 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^5 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k \right).$$

Usando questa espressione, con qualche calcolo che svolgeremo esplicitamente nella prossima sezione, si ricava che:

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k},$$

dove le  $\dot{q}^k$  devono essere pensate come variabili indipendenti dalle  $q^k$  nel momento in cui si calcola la derivata  $\frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k}$ . In base a questa identità, possiamo concludere che le equazioni (8.5) si possono equivalentemente riscrivere nei soli gradi di libertà  $q^1, \dots, q^5$  come:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, 5, \quad (8.7)$$

essendo:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^5, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^5) := \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i(t, q^1, \dots, q^5, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^5) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k}. \quad (8.8)$$

Le  $\dot{q}^k$  devono essere pensate come variabili indipendenti dalle  $q^k$  nella prima equazione delle (8.7) (altrimenti ci sarebbero difficoltà interpretative per quanto riguarda la prima derivata) e la seconda equazione ci ricorda che, alla fine le coordinate puntate si devono pensare come le derivate temporali delle coordinate non puntate. Le equazioni (8.7) si dicono *equazioni di Eulero-Lagrange* e sono un sistema di 10 equazioni differenziali del *primo ordine*, che proveremo essere in forma normale, in un aperto di  $\mathbb{R}^{10}$ . Oppure equivalentemente descrivono un sistema di 5 equazioni differenziali del *secondo ordine* in forma normale in un aperto di  $\mathbb{R}^5$ . Tali equazioni determinano una curva parametrizzata nel tempo descritta in termini dei gradi di libertà  $q^1 = q^1(t), \dots, q^5 = q^5(t)$ . Pertanto, sotto ipotesi di regolarità delle funzioni  $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k(t, q^1, \dots, q^5, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^5)$ , le equazioni di Eulero-Lagrange ammettono una ed una sola soluzione  $q^k = q^k(t)$ , per  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , quando sono assegnate le condizioni iniziali ed individuano il moto del sistema associato a tali condizioni iniziali nelle coordinate scelte a descrivere il sistema.

Infine consideriamo il caso in cui, nel riferimento  $\mathcal{J}$ , le forze  $\mathbf{F}_i$ , differenti dalle reazioni vincolari, che agiscono sui punti  $P_1, P_2, P_3$  sono ottenibili da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ :

$$\mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

In questo caso, le equazioni  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  assumono un'espressione più semplice:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^5) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^3 (\nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k},$$

dove  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  nell'ultima derivata indica, un po' impropriamente, la funzione composta

$$\mathcal{V}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}_1(q^1, \dots, q^5), \mathbf{x}_2(q^1, \dots, q^5), \mathbf{x}_3(q^1, \dots, q^5))$$

In questo caso le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, 5,$$

dato che  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  non dipende dalle variabili  $\dot{q}^k$ , se introduciamo la funzione *Lagrangiana* di  $\mathfrak{S}$  rispetto a  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n),$$

le stesse equazioni si possono riscrivere

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}}{\partial q^k} = 0, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, 5. \quad (8.9)$$

### Osservazioni 8.2.

(1) Le equazioni di Eulero-Lagrange (8.7) o (8.9) sono dunque le *equazioni pure di movimento per il sistema*  $\mathfrak{S}$ , le stesse che si ottengono proiettando le equazioni di Newton sulle basi di vettori adattate alle superfici e curve considerate, come discusso nel capitolo 3. La procedura esposta, a parte il caso elementare considerato in questa introduzione, si dimostra essere una tecnica del tutto generale di proiezione delle equazioni di Newton lungo le direzioni che non contengono le reazioni vincolari, indipendentemente dell'espressione particolare delle superfici e delle curve di vincolo.

(2) Vogliamo sottolineare che gli ingredienti che portano alle equazioni deterministiche (8.7) o (8.9) sono stati due: le equazioni di Newton (8.1) e la richiesta di validità delle identità (8.2) che valgono, in particolare, quando tutti i vincoli sono lisci, ma anche in casi più generali, come vedremo tra poco.

## 8.2 Il caso generale: sistemi olonomi ed equazioni di Eulero-Lagrange

In questa sezione, introducendo una nuova terminologia, generalizzeremo e completeremo la discussione svolta nella precedente sezione introduttiva ed arriveremo alle equazioni di Eulero-Lagrange per i sistemi fisici vincolati che soddisfano una caratterizzazione costitutiva che generalizza quella di vincolo liscio detta, come già preannunciato caratterizzazione del *vincolo ideale*. Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  con masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente. Per varie ragioni e in vari rami della fisica classica (in particolare in *Meccanica Statistica*) è spesso comodo studiare la cinematica e la dinamica di tale sistema non nello spaziotempo  $\mathbb{V}^4$ , ma in una varietà  $\mathbb{V}^{3N+1}$  di dimensione  $3N + 1$  detto **spaziotempo delle configurazioni (in assenza di vincoli)**<sup>2</sup>. La sua struttura è identica a quella di  $\mathbb{V}^4$  con la differenza che le foglie a tempo assoluto costante,  $T : \mathbb{V}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  pensato come una funzione suriettiva e regolare,  $\Sigma_t$  sono ora sostituite dalle sottovarietà di dimensione  $3N$ , date prodotto cartesiano di  $N$  copie

<sup>2</sup>In meccanica statistica si studiano sistemi fisici il cui numero di elementi  $N$ , dati da atomi o molecole, è estremamente grande, dell'ordine del *numero di Avogadro*:  $6.02 \times 10^{23}$ .

dello spazio euclideo  $\Sigma_t$ , cioè  $\Sigma_t^N = \Sigma_t \times \cdots \times \Sigma_t$ . La  $k$ -esima copia di  $\Sigma_t$  si deve pensare come lo spazio assoluto di  $P_k$ , e questo per ogni  $k = 1, \dots, N$  e si dice **spazio delle configurazioni (in assenza dei vincoli)**.

Si osservi che  $\Sigma_t^N$  è uno spazio euclideo a sua volta, il cui spazio delle traslazioni è dato dal prodotto cartesiano di spazi delle traslazioni  $V_t^N = V_t \times \cdots \times V_t$  (Questo spazio ha la struttura naturale di spazio vettoriale dato dalla somma diretta degli spazi  $V_t$  interpretati come sottospazi.) Il prodotto scalare su  $V_t^N$  è infine definito come:

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \cdot (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) := \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_k .$$

Un punto  $p \in \mathbb{V}^{3N+1}$  è quindi individuato da un numero  $t := T(p)$  e da una  $N$ -pla di punti  $\mathcal{C}_t := (Q_1, \dots, Q_N) \in \Sigma_t^N$  detta **configurazione (in assenza di vincoli) al tempo  $t$** . Ovviamente assegnare la configurazione  $\mathcal{C}_t$  al tempo  $t$  equivale ad assegnare il valore di  $3N$  coordinate: una terna di numeri per ogni punto  $P_k$ . Tenuto conto del valore  $t$  assunto dal tempo assoluto nel momento in cui si assegna  $\mathcal{C}_t$ , per determinare un punto in  $\mathbb{V}^{3N+1}$  bisogna fissare  $3N + 1$  coordinate. Di conseguenza lo spaziotempo delle configurazioni è una varietà di dimensione  $3N + 1$  e questo spiega la notazione  $\mathbb{V}^{3N+1}$ .

L'evoluzione del sistema  $\mathfrak{S}$  è assegnata da una **linea di universo (in assenza di vincoli)**, cioè una curva differenziabile  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  con  $t \in I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  che non possa intersecare più di una volta ogni  $\Sigma_t^N$  per evitare i soliti paradossi temporali. Dal punto di vista matematico questa restrizione viene imposta richiedendo, come nel caso di una sola particella, che  $T(\Gamma(t)) = t$  (per una scelta opportuna della costante arbitraria nella definizione del tempo assoluto) per ogni valore di  $t \in I$ .

Identificando il tempo assoluto di  $\mathbb{V}^{3N+1}$  con il tempo assoluto dello spaziotempo  $\mathbb{V}^4$ , per ogni  $k = 1, \dots, N$ , l'applicazione differenziabile suriettiva:

$$\Pi_k : \mathbb{V}^{3N+1} \ni (t, (Q_1, \dots, Q_N)) \mapsto (t, Q_k) \in \mathbb{V}^4$$

estrae la configurazione del singolo punto  $P_k$  dalla configurazione totale del sistema, ad ogni istante  $t$  del tempo assoluto.  $\gamma_k(t) := \Pi_k(\Gamma(t))$ , al variare di  $t \in I$ , definisce la linea di universo del  $k$ -esimo punto, quando è data la linea di universo  $\Gamma$  del sistema  $\mathfrak{S}$ . Tramite le funzioni  $\Pi_k$  ha senso, per esempio, definire la distanza tra due punti  $P_k(t)$  e  $P_h(t)$  della configurazione  $\mathcal{C}_t = \Gamma(t)$  ad un fissato tempo  $t$  tramite la distanza  $d_t$  di cui è dotato ogni spazio assoluto  $\Sigma_t \subset \mathbb{V}^4$ . A tal fine è sufficiente pensare i punti  $P_k(t)$  e  $P_h(t)$  come in  $\mathbb{V}^4$  tramite l'azione delle due funzioni  $\Pi_k$  e  $\Pi_h$ .

### 8.2.1 Spaziotempo delle configurazioni in presenza di vincoli olonomi

Supponiamo ora che gli  $N$  punti del sistema  $\mathfrak{S}$  siano sottoposti a vincoli posizionali espressi da  $C < 3N$  ( $C \geq 0$ ) funzioni differenziabili  $f_j : \mathbb{V}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , tramite le  $C$  richieste

$$f_j(t, P_1(t), \dots, P_N(t)) = 0, \quad j = 1, \dots, C \quad (8.10)$$

che devono essere soddisfatte su ogni moto del sistema  $\Gamma = \Gamma(t)$ ,  $t \in I$ . In questa situazione, molto frequente nella pratica, le configurazioni del sistema fisico ad un tempo  $t$  non sono tutte quelle rappresentate dai punti di  $\Sigma_t^N$ . I vincoli, ad ogni istante  $t$ , determineranno un sottoinsieme  $\mathbb{Q}_t \subset \Sigma_t^N$  delle configurazioni realmente accessibili al sistema fisico in quell'istante. Vogliamo, per esigenze di semplicità fisico-matematica, che questi sottoinsiemi  $\mathbb{Q}_t$  abbiano una struttura matematica che permettano l'uso delle solite tecniche analitiche basate sulle equazioni differenziali descriventi le leggi di evoluzione del sistema. La situazione ottimale (ma non l'unica possibile) è quella in cui i sottoinsiemi  $\mathbb{Q}_t$  abbiano a loro volta una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n \leq 3N$ . È naturale assumere che questa struttura sia quella ereditata dalla struttura di ogni  $\Sigma_t^N$ . In altre parole assumeremo che i sottoinsiemi  $\mathbb{Q}_t$  abbiano la struttura di *sottovarietà differenziabile* (vedi Appendice A) delle varietà  $\Sigma_t^N$ .

La dimensione  $n$  sarà fissata dal numero delle funzioni di vincolo  $f_j$ : ci si aspetta che se imponiamo  $C$  equazioni di vincolo *indipendenti* ad ogni tempo  $t$ , queste siano in grado di lasciare libera la scelta di  $n := 3N - C$  coordinate degli  $N$  punti materiali che costituiscono il sistema fisico.

Dal punto di vista matematico questa situazione si ottiene sempre quando le equazioni di vincolo (8.10) soddisfano le seguenti ipotesi tecniche.

**(H1)** Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  le condizioni

$$f_j(t, P_1, \dots, P_N) = 0, \quad j = 1, \dots, C \quad (8.11)$$

siano soddisfatte su un insieme non vuoto.

**(H2)** Ad ogni istante  $t \in \mathbb{R}$ , le funzioni  $f_j$  risultino essere **funzionalmente indipendenti**.

**N.B.** *Funzionalmente indipendenti* significa che, nell'intorno di ogni punto  $p \in \mathbb{V}^{3N+1}$ , esprimendo le funzioni  $f_j$  in termini di coordinate locali  $t, x^1, \dots, x^{3N}$  su  $\mathbb{V}^{3N+1}$ , con  $t$  tempo assoluto e  $x^1, \dots, x^{3N}$  coordinate locali su  $\Sigma_t^N$ <sup>3</sup>, la matrice jacobiana di elementi

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, 3N, j = 1, \dots, C,$$

ha rango  $C$ , per ogni fissato istante  $t$ , sull'insieme dei punti di  $\mathbb{V}^{3N+1}$  per i quali valgono

$$f_j(t, x^1, \dots, x^{3N}) = 0.$$

Come chiarito in appendice A, tale caratterizzazione è indipendente dalla scelta delle coordinate locali.

Diremo **sistema di vincoli olonomi** un sistema di vincoli, imposti su un sistema di  $N$  punti materiali, che rispetta i requisiti (H1) e (H2) sopra imposti.

---

<sup>3</sup>Tali coordinate esistono sempre (essendo le superfici a  $T = t$  costante delle sottovarietà) e si possono costruire nello stesso modo in cui abbiamo definito, per  $N = 1$ , le coordinate cartesiane ortonormali solidali con un riferimento.



Vale la seguente proposizione.

**Proposizione 8.1.** *Per un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali descritti in  $\mathbb{V}^{3N+1}$  e sottoposto ai vincoli (8.11) descritti da  $C \leq 3N$  funzioni differenziabili  $f_j$ , si consideri l'insieme  $\mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{V}^{3N+1}$  individuato dalle condizioni (8.11) con  $n := 3N - C$ .*

*Nell'ipotesi che i vincoli siano olonomi valgono i fatti seguenti.*

(1)  $\mathbb{V}^{n+1}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{V}^{3N+1}$  di dimensione  $n + 1$ .

(2) Per ogni fissato tempo  $t$ , l'insieme  $\mathbb{Q}_t := \mathbb{V}^{n+1} \cap \Sigma_t^N$  è una sottovarietà di  $\Sigma_t^N$  di dimensione  $n$ .

(3) Nell'intorno di ogni punto  $p \in \mathbb{V}^{n+1}$  possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  in cui:  $t$  misura il tempo assoluto e, per ogni fissato valore  $t$  del tempo assoluto,  $q^1, \dots, q^n$  siano coordinate locali ammissibili su  $\mathbb{Q}_t$ . In particolare  $q^1, \dots, q^n$  possono essere scelte come  $n$  tra le coordinate cartesiane degli  $N$  punti rispetto ad un sistema di riferimento arbitrariamente fissato.

**Dimostrazione.** Mettiamo su  $\mathbb{V}^{3N+1}$  un sistema di coordinate cartesiane  $t, x^1, \dots, x^{3N}$  solidali con un fissato riferimento  $\mathcal{J}$ . Quindi, per esempio, le coordinate  $x^4, x^5, x^6$  sono le coordinate cartesiane in  $\mathcal{J}$  del punto  $P_2 \in \mathfrak{S}$ . Si consideri ora l'insieme  $\mathbb{V}^{n+1} \subset \mathbb{V}^{3N+1}$  individuato dalle condizioni (8.11), nell'ipotesi che i vincoli siano olonomi. Per il teorema (dei valori regolari) A.4,  $\mathbb{V}^{n+1}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{V}^{3N+1}$  di dimensione  $n + 1$ . Questo segue immediatamente dal fatto che, su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , la matrice jacobiana di elementi – dove le coordinate locali sono definite da:  $y^0 := t$  e  $x^i := y^i$  per  $i = 1, \dots, 3N -$

$$\frac{\partial f_j}{\partial y^i}, \quad i = 0, \dots, 3N, j = 1, \dots, C,$$

ha rango  $C$ , avendo  $C$  colonne linearmente indipendenti per il requisito (H2). (Infatti, sopprimendo la colonna relativa alla coordinata  $y^0$ , la matrice Jacobiana che si ottiene ha rango massimo per (H2) e pertanto le  $C$  righe presenti in essa sono linearmente indipendenti. Questo equivale a dire che esistono  $C$  colonne linearmente indipendenti. Nel momento in cui si aggiunge la colonna relativa alla coordinata  $y^0$ , le suddette  $C$  colonne continuano ad essere linearmente indipendenti per cui la matrice jacobiana estesa ha ancora almeno rango  $C$ , cioè rango massimo pari a  $C$ , visto che il numero di righe  $C$  rimane immutato.) Il requisito (H2) implica per la stessa ragione che, per ogni fissato tempo  $t$ ,  $\mathbb{Q}_t := \mathbb{V}^{n+1} \cap \Sigma_t^N$  sia una sottovarietà di  $\Sigma_t^N$  di dimensione  $n$ . Si osservi che  $\mathbb{Q}_t \neq \emptyset$  per il requisito (H1).

La seconda parte del teorema A.4 ha un'altra conseguenza. Dato che la matrice jacobiana

$$\frac{\partial f_j}{\partial y^i}, \quad i = 0, \dots, 3N, j = 1, \dots, C,$$

ha rango  $C$ , e che questo fatto è dovuto alla sottomatrice

$$\frac{\partial f_j}{\partial y^i}, \quad i = 1, \dots, 3N, j = 1, \dots, C,$$

nell'intorno di ogni punto  $p \in \mathbb{V}^{n+1}$ , possiamo usare  $n + 1$  coordinate per descrivere  $\mathbb{V}^{n+1}$  scegliendo le coordinate tra le  $y^0, \dots, y^{3N}$  come segue. La prima coordinata è sempre  $y^0$  (il tempo assoluto) e le rimanenti  $n = 3N - C$  sono scelte tra le  $y^1, \dots, y^{3N}$ , in modo tale che la sotto matrice jacobiana  $C \times C$ , corrispondente alle coordinate  $y^k$  non scelte, sia non singolare in  $p$ .  $\square$

Ricordiamo che, al solito, nel seguito la parola *differenziabile* senza ulteriori precisazioni significa  $C^\infty$ .

**Definizione 8.1.** (**Spaziotempo delle configurazioni con vincoli olonomi**) Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali sottoposto ad un sistema di  $C < 3N$  vincoli olonomi  $f_j(t, P_1, \dots, P_N) = 0$  in con  $j = 1, \dots, C$ , dove le funzioni  $f_j : \mathbb{V}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili. Nel seguito  $T : \mathbb{V}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  indica al solito la funzione tempo assoluto supposta differenziabile. Si danno le definizioni seguenti.

(a) La sottovarietà  $\mathbb{V}^{n+1}$  di dimensione  $n := 3N - C$ , individuata da (8.11), è detta **spazio-tempo delle configurazioni** per il sistema vincolato  $\mathfrak{S}$ .

Il numero  $n := 3N - C$  è detto numero dei **gradi di libertà** del sistema  $\mathfrak{S}$ .

(b) Per ogni istante del tempo assoluto  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}_t := \mathbb{V}^{n+1} \cap \Sigma_t^N$  è detto **spazio delle configurazioni** al tempo  $t$ , per il sistema vincolato  $\mathfrak{S}$ . Una **configurazione** del sistema vincolato  $\mathfrak{S}$  al tempo  $t$  è dunque un punto in  $\mathbb{Q}_t$ .

(c) Ogni sistema di coordinate locali  $\phi : U \ni p \mapsto (t(p), q^1(p), \dots, q^n(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , dove  $U \subset \mathbb{V}^{n+1}$  è aperto e  $t = T(p)$  – e quindi le coordinate  $(q^1, \dots, q^n)$  individuano una carta locale su  $\mathbb{Q}_t$  per ogni  $t$  – è detto **sistema di coordinate locali naturali** su  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

Le coordinate locali  $q^1, \dots, q^n$  su ogni  $\mathbb{Q}_t$  sono dette **coordinate libere** o anche **coordinate lagrangiane**.

(d) Un sistema di coordinate locali naturali  $\phi : U \ni p \mapsto (t(p), q^1(p), \dots, q^n(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$  come in (c) si dice **solidale con il riferimento**  $\mathcal{J}$  se, detto  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  il vettore posizione del punto  $P$  rispetto all'origine  $O$  di  $\mathcal{J}$  (le componenti di  $\mathbf{x}_i$  sono dunque le coordinate di  $P$  in un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$ ), la relazione parametrica tra  $\mathbf{x}_i$  e le coordinate dette non contiene esplicitamente il tempo:  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1, \dots, q^n)$ , per ogni  $i = 1, \dots, N$ .  $\diamond$

### Osservazioni 8.3.

(1) Chiaramente i sistemi di coordinate locali naturali formano un atlante di  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

Se  $t, q^1, \dots, q^n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n$  sono due distinti sistemi di coordinate locali naturali definite su due domini  $U, U' \subset \mathbb{V}^{n+1}$  con  $U \cap U' \neq \emptyset$ , nell'intersezione dei due domini, la relazione tra i due sistemi di coordinate è del tipo:

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (8.12)$$

$$t' = t + c, \quad (8.13)$$

dove  $c$  è una costante relativa alla nota ambiguità nella definizione del tempo assoluto. Un'osservazione che giocherà un ruolo fondamentale in tutto il seguito è la seguente:

*in riferimento a due sistemi di coordinate naturali, il determinante della matrice jacobiana di*

coefficienti  $\frac{\partial q'^k}{\partial q^r}$  è non nullo in ogni punto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

La dimostrazione di tale fatto si ottiene dalle (8.12)- (8.13) e dalle corrispondenti equazioni che si hanno scambiando il ruolo delle coordinate primate con quelle non primate. Componendo tali trasformazioni, possiamo scrivere

$$q'^k = q'^k(t' - c, q^1(t', q'^1, \dots, q'^n), \dots, q^n(t', q'^1, \dots, q'^n)) .$$

Possiamo ora derivare il primo membro rispetto alla coordinata  $q'^l$  e, usando la legge di derivazione di funzioni composte abbiamo:

$$\delta_l^k = \frac{\partial q'^k}{\partial q'^l} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^l} + \frac{\partial q'^k}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q'^l} .$$

L'ultimo addendo è ovviamente nullo essendo  $\frac{\partial t}{\partial q'^l} = 0$ , come si desume dall'analogia della (8.13) scambiando il ruolo dei due sistemi di coordinate. In definitiva:

$$\delta_l^k = \sum_{r=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} \frac{\partial q^r}{\partial q'^l} ,$$

che si può leggere come il fatto che il prodotto righe per colonne delle due matrici jacobiane a secondo membro dia luogo alla matrice identità a primo membro. Di conseguenza le due matrici jacobiane di coefficienti  $\frac{\partial q'^k}{\partial q^r}$  e  $\frac{\partial q^r}{\partial q'^l}$  rispettivamente, devono essere invertibili e dunque con determinante non nullo.

(2) Uno spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  al tempo  $t$  si dice anche **fibra** di  $\mathbb{V}^{n+1}$  al tempo  $t$ . I sistemi di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  si chiamano anche equivalentemente, sistemi di coordinate locali naturali **adattate alle fibre** di  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

(3) Le configurazioni si possono pensare contemporaneamente come punti di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , ma anche di  $\mathbb{V}^{3N+1}$ , dato che ogni  $\mathbb{Q}_t$  è sottovarietà di  $\Sigma_t^N$ .

(4) Se i punti  $P_i \in \mathbb{V}^4$  del sistema vincolato sono individuati da vettori posizione  $P_i - O = \mathbf{x}_i$  rispetto ad un'origine  $O$  di evoluzione assegnata, e se  $t, q^1, \dots, q^n$  sono coordinate naturali definite nell'intorno di una configurazione, si dovrà poter scrivere come già utilizzato nella definizione 8.1:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) ,$$

dove, in generale il tempo  $t$  appare esplicitamente. Il moto del sistema sarà dunque individuato, almeno localmente, da funzioni differenziabili  $q^k = q^k(t)$  attraverso le quali si descrivono, in funzione del tempo, i vettori posizione dei punti del sistema fisico e quindi la loro evoluzione:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1(t), \dots, q^n(t)) .$$

### Esempi 8.1.

1. Consideriamo il caso elementare di  $N = 1$ , quindi un punto materiale  $P$  unicamente, sottoposto alla coppia di vincoli:

$$x^2 + y^2 = 1 + ct^2 \quad \text{insieme a} \quad z = x , \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} .$$

Le coordinate  $x, y, z$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con un riferimento  $\mathcal{S}$  e  $t$  è il solito tempo assoluto e  $c > 0$ . Abbiamo allora due funzioni di vincolo che si annullano insieme su un insieme non vuoto ad ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Le due funzioni sono:  $f_1(t, x, y, z) = x^2 + y^2 - (1 + ct^2)$  e  $f_2(t, x, y, z) = z - x$ . La matrice jacobiana dei vincoli, che indicheremo con  $J$ , è rettangolare

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che quando  $x^2 + y^2 = 1 + ct^2$  la prima riga non può mai annullarsi. Inoltre essa non può mai essere linearmente dipendente dalla seconda (cioè proporzionale ad essa). Concludiamo che le ipotesi (H1) e (H2) sono soddisfatte. Per ogni tempo  $t$  i due vincoli individuano una curva  $\mathbb{Q}_t = \Gamma_t$  data dall'intersezione del cilindro di raggio  $\sqrt{1 + ct^2}$  ed asse dato dall'asse  $z$ , e dal piano  $z = x$ . Tale curva è un'ellisse di dimensioni variabili nel tempo. Il punto materiale ha dunque un solo grado di libertà:  $1 = 3 - 2$ .

Vediamo di determinare delle coordinate libere. La matrice jacobiana dei vincoli è costituita dai due vettori riga scritti sopra. Osservando la matrice rettangolare  $J$ , si può notare che, per esempio, la sottomatrice quadrata ottenuta sopprimendo l'ultima colonna,

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

è sempre non singolare se  $y \neq 0$ . In base al teorema dei valori regolari A.4, concludiamo che la coordinata  $q^1 := z$  (quella relativa alla colonna soppressa dalla matrice iniziale) è una coordinata libera per il punto  $P$  su  $\mathbb{Q}_t$  nell'intorno di ogni configurazione su  $\mathbb{Q}_t$  in cui  $y \neq 0$ . È chiaro che tale coordinata è solo locale in quanto, descrivendo la proiezione dei  $\Gamma_t$  sul piano  $x, y$  in termini dell'angolo polare  $\varphi \in (-\pi, +\pi)$  (riferito a coordinate polari piane nel piano  $x, y$ ), i punti su  $\Gamma_t$  con angolo polare  $\pm\varphi$  hanno la stessa  $z$ . Tuttavia, in ciascuno dei rami  $(-\pi, 0)$  e  $(0, \pi)$ , la coordinata  $z$  può essere presa come coordinata libera. I punti di frontiera di tali rami sono proprio quelli con  $y = 0$ . Nell'intorno di essi possiamo usare la coordinata  $q'^1 := x$  come nuova coordinata libera (dato che  $x$  e  $y$  non possono mai annullarsi insieme, la matrice ottenuta da  $J$  sopprimendo la prima colonna non è singolare). Le due carte locali associate a  $q^1$  e  $q'^1$  rispettivamente, insieme, ricoprono  $\mathbb{Q}_t$  e pertanto costituiscono un atlante su tale varietà. Una scelta di coordinata libera su  $\mathbb{Q}_t$ , per molti versi più utile, è data da  $q^1 := \varphi$ , dove  $\varphi$  è la coordinata polare descritta sopra. In questo caso risulta esclusa la configurazione corrispondente al punto  $\varphi \pm \pi$ . Le coordinate cartesiane di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  sono allora date, in funzione di  $q^1$  e per ogni istante di tempo  $t$ , come:

$$x(t, q^1) = \sqrt{1 + ct^2} \cos q^1, \quad (8.14)$$

$$y(t, q^1) = \sqrt{1 + ct^2} \sin q^1, \quad (8.15)$$

$$z(t, q^1) = \sqrt{1 + ct^2} \cos q^1. \quad (8.16)$$

Il lettore può facilmente dimostrare che questa nuova coordinata su  $\mathbb{Q}_t$  definisce un sistema di coordinate ammissibile, provando che la relazione tra  $\varphi$  e le coordinate  $q^1$  e  $q'^1$  delle due carte

definite sopra, è differenziabile con inversa differenziabile nei corrispondenti domini.

**2.** Consideriamo il caso meno elementare di  $N = 2$  punti materiali  $P, Q$  sottoposti al vincolo di rimanere a distanza  $d > 0$  fissata. Lo spaziotempo delle configurazioni ha inizialmente  $6 + 1 = 7$  dimensioni. Usando un riferimento  $\mathcal{S}$ , possiamo riferirci a coordinate globali su  $\mathbb{V}^{6+1}$ ,  $t, x, y, z, X, Y, Z$ , dove  $t$  è il solito tempo assoluto e  $(x, y, z)$  e  $(X, Y, Z)$  sono le coordinate cartesiane di  $P$  e  $Q$  rispettivamente in un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$  di origine  $O$ . Il vincolo detto, se definiamo:

$$f(t, x, y, z, X, Y, Z) := (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - d^2,$$

si esprime come:

$$f(x, y, z, X, Y, Z) = 0.$$

Per verificare l'indipendenza funzionale, dobbiamo calcolare il gradiente di  $f$  e controllare che non si annulli mai sui punti in cui l'equazione del vincolo è soddisfatta. Tale gradiente è il vettore riga:

$$(2(x - X), 2(y - Y), 2(z - Z), 2(X - x), 2(Y - y), 2(Z - z)).$$

È evidentemente impossibile che tale vettore sia nullo se  $(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = d^2$  con  $d > 0$ . Per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$  possiamo risolvere l'equazione di vincolo esprimendo per esempio  $X$  in funzione delle rimanenti 5 variabili:

$$X = x \pm \sqrt{d^2 - (y - Y)^2 - (z - Z)^2}$$

La presenza di  $\pm$  denota il fatto che le coordinate  $(t, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5) := (t, x, y, z, Y, Z)$  sono coordinate locali e sono necessari più sistemi di coordinate locali per ricoprire, ad ogni istante, lo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{5+1}$ . Un sistema di coordinate locali più utile nelle applicazioni e sicuramente più visualizzabile è dato come segue.  $q^1, q^2, q^3$  sono le tre coordinate cartesiane, rispetto a  $\mathcal{S}$ , del punto medio  $M$  tra  $P$  e  $Q$ ,  $q^3, q^4$  sono gli angoli polari di  $P - M$  rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortonormali di origine  $M$  che si muove restando parallelo al sistema di assi cartesiani ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$  in  $O$ . Si può provare per esercizio che questo sistema di coordinate è ammissibile su  $\mathbb{Q}_t$  e che  $(t, q^1, \dots, q^5)$  individuate come detto definiscano un sistema di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{5+1}$ .

Malgrado non sia strettamente necessario, faremo un'ulteriore ipotesi tecnica su  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

**(H3)** Per ogni fissato  $t \in \mathbb{R}$  asse del tempo assoluto esista un intervallo aperto non vuoto  $J \subset \mathbb{R}$ , con  $J \ni t$ , ed una corrispondente classe di sistemi di coordinate naturali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  con  $\phi_i : U_i \ni p \mapsto (t_i(p), q_i^1(p), \dots, q_i^n(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , che soddisfino i tre seguenti requisiti:

- (i)  $\cup_{i \in I} U_i \supset \mathbb{Q}_\tau$  per ogni  $\tau \in J$ ;
- (ii)  $\phi_i(U_i) \supset J \times U'_i$ , con  $U'_i \subset \mathbb{R}^n$  aperto, per ogni  $i \in I$ ;
- (iii) per ogni scelta di  $i, j \in I$  le funzioni  $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  siano della forma:

$$t_i = t_j, \quad q_i^k = q_j^k(q_j^1, \dots, q_j^n)$$

in cui, cioè, la legge di trasformazione tra le coordinate lagrangiane non dipenda esplicitamente dal tempo.

Dovrebbe essere abbastanza chiaro che la condizione (H3) è verificata quando esiste un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  tale che, indicando con  $\mathbf{x}_i$  il vettore posizione del punto materiale  $i$ -esimo del sistema valutato nello spazio di quiete di  $\mathcal{S}$ , le equazioni che descrivono i vincoli siano indipendenti dal tempo, cioè abbiano la forma  $f_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = 0$ ,  $j = 1, \dots, c$ . Tuttavia può accadere che non esista alcun riferimento in cui i vincoli non dipendano dal tempo nel senso appena visto: basti pensare ad un punto vincolato a giacere su una superficie che si deforma nel tempo in modo tale che le deformazioni non siano descrivibili da isometrie. In tal caso l'ipotesi (H3) deve essere considerata un'ipotesi aggiuntiva.

Come preciseremo nella Sezione 8.5.1, tenuto conto della Definizione 8.1 di  $\mathbb{V}^{n+1}$  che abbiamo dato, l'ipotesi (H3) è equivalente alla richiesta che  $\mathbb{V}^{n+1}$  possieda una struttura di *fibrato* o *varietà fibrata* con *base*  $\mathbb{R}$  (asse del tempo assoluto), *fibra standard*  $\mathbb{Q}$  e *proiezione canonica* data ancora dalla funzione tempo assoluto  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fibra standard  $\mathbb{Q}$  è diffeomorfa a ciascuna degli spazi delle configurazioni al tempo  $t$ ,  $\mathbb{Q}_t$ , che in tal modo risultano tutti diffeomorfi tra di essi. Quest'ipotesi è una vera restrizione sui vincoli possibili su sistemi fisici, perché, per esempio, richiede che la topologia dello spazio delle configurazioni non possa variare nel tempo e questo, in generale può essere falso.

Esattamente come lo spaziotempo,  $\mathbb{V}^{n+1}$  risulta essere un fibrato trivializzabile, ma non in modo canonico.

### 8.2.2 Vettori tangenti allo spazio delle configurazione $\mathbb{Q}_t$

Consideriamo il solito sistema di  $N$  punti materiali  $\mathfrak{S}$  sottoposto a  $C$  vincoli olonomi e descritto sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$  visto come sottovarietà di  $\mathbb{V}^{3N+1}$ . Vogliamo dare, nel caso generale, la caratterizzazione di *vincolo ideale*. Per fare questo abbiamo preventivamente bisogno di introdurre qualche nozione e notazione geometrica cosa che faremo in questa sezione. Prendiamo ora due configurazioni *entrambe allo stesso tempo*  $t$ :  $\mathcal{C}_t = (P_1, \dots, P_N) \subset \Sigma_t \times \dots \times \Sigma_t$  e  $\mathcal{C}'_t = (P'_1, \dots, P'_N) \subset \Sigma_t \times \dots \times \Sigma_t$ . Possiamo definire, nello spazio  $\mathbb{V}^{3N+1}$  il vettore riga di vettori  $\Delta P = (\Delta P_1, \dots, \Delta P_N)$  con

$$\Delta P = (\Delta P_1, \dots, \Delta P_N) \quad \text{dove } \Delta P_i = P'_i - P_i \text{ per } i = 1, \dots, N.$$

Teniamo ora conto che  $\mathbb{Q}_t \subset \Sigma_t^N$ . Se i punti  $P_i$  e  $P'_i$  sono individuati da vettori posizione  $P_i - O = \mathbf{x}_i$  e, rispettivamente  $P'_i - O = \mathbf{x}'_i$ , in riferimento ad un'origine  $O$  di evoluzione assegnata, e se  $t, q^1, \dots, q^n$  sono coordinate naturali definite nell'intorno di  $\mathcal{C}_t$ , avremo che

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n).$$

Di conseguenza, il punto  $i$ -esimo avrà uno spostamento, dato da:

$$\Delta P_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) - \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \big|_{\mathcal{C}_t} \delta q^k + O_i((\delta q)^2).$$

Dove  $\delta q^k := q'^k - q^k$  e  $O_i$  è una funzione infinitesima del secondo ordine per  $\sqrt{\sum_{k=1}^n |\delta q^k|^2} \rightarrow 0$ . In prima approssimazione possiamo trascurare i termini infinitesimi di ordine superiore, se le configurazioni  $\mathcal{C}_t$  e  $\mathcal{C}'_t$  sono abbastanza vicine. Indipendentemente da tale approssimazione il vettore di  $V_t^N$ :

$$\delta P = \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \delta q^k, \dots, \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \delta q^k \right), \quad (8.17)$$

dove i  $\delta q^k \in \mathbb{R}$  sono numeri arbitrari (anche grandi!) rappresenta un generico vettore di  $V_t^N$  tangente a  $\mathbb{Q}_t$  nel punto  $\mathcal{C}_t$ . Al variare dei coefficienti  $\delta q^k \in \mathbb{R}$  per  $k = 1, \dots, n$ , il primo membro di (8.17) individua tutti i possibili vettori tangenti a  $\mathbb{Q}_t$  in  $\mathcal{C}_t$ .

#### Osservazioni 8.4.

(1) Ogni singolo vettore tangente  $\delta P_i$ , non dipende dalla scelta del punto  $O$  di riferimento. Pertanto, in particolare non dipende da alcuna scelta del sistema di riferimento nello spaziotempo  $\mathbb{V}^4$  e da coordinate cartesiane solidali con un riferimento. Nello stesso modo l'espressione di un vettore tangente a  $\mathbb{Q}_t$  in  $\mathcal{C}_t$  data in (8.17) non dipende nemmeno dalla scelta delle coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  (e dalla scelta dell'origine della coordinata tempo assoluto) malgrado i coefficienti  $\delta q^k$  possano dipendere dalle coordinate scelte. Infatti, cambiando coordinate libere nell'intorno della configurazione  $\mathcal{C}_t$  come in (8.12) e (8.13), si ricava che

$$\frac{\partial}{\partial q^k} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^h}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q'^h}$$

in cui la matrice jacobiana  $\frac{\partial q'^h}{\partial q^k}$  è non singolare. Di conseguenza:

$$\delta P = \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \delta q^k, \dots, \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \delta q^k \right) = \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q'^h} |_{\mathcal{C}_t} \delta q'^h, \dots, \sum_{h=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q'^h} |_{\mathcal{C}_t} \delta q'^h \right),$$

dove

$$\delta q'^h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^h}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \delta q^k. \quad (8.18)$$

Se ne conclude che ogni vettorte tangente a  $\mathbb{Q}_t$ ,  $\delta P$  può essere indifferentemente espresso nelle coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  oppure  $t', q'^1, \dots, q'^n$  usando la (8.17) ed eventualmente cambiando le componenti  $\delta q^k$ .

(2) Possiamo riscrivere la (8.17) come:

$$\delta P = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \right) \delta q^k, \quad (8.19)$$

La richiesta che i vincoli siano funzionalmente indipendenti implica che gli  $n$  vettori

$$\mathbf{b}_k := \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^k} |_{\mathcal{C}_t} \right), \quad k = 1, \dots, n$$

siano linearmente indipendenti. *Pertanto tali vettori formano una base del sottospazio vettoriale in  $V_t^N$  dei vettori tangenti a  $\mathbb{Q}_t$  in  $\mathcal{C}_t$ .* Per dimostrare la lineare indipendenza dei vettori  $\mathbf{b}_k$  osserviamo che, cambiando coordinate naturali attorno a  $\mathcal{C}_t$

$$\mathbf{b}'_k = \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q'^k} |_{\mathcal{C}_t}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q'^k} |_{\mathcal{C}_t} \right) = \sum_h \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^h} |_{\mathcal{C}_t}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^h} |_{\mathcal{C}_t} \right) \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} = \sum_h \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \mathbf{b}_h.$$

Dato che la matrice di coefficienti  $\frac{\partial q^h}{\partial q'^k}$  è invertibile, gli  $n$  vettori  $\mathbf{b}_h$  sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono gli  $n$  vettori  $\mathbf{b}'_k$ . Possiamo allora provare la lineare indipendenza dei vettori  $\mathbf{b}_k$  riferendoci ad una particolare scelta delle coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n$ . Possiamo in particolare scegliere le coordinate  $q^1, \dots, q^n$  in modo tale che siano  $n$  tra le componenti degli  $N$  vettori  $\mathbf{x}_i$ . Come già osservato questa possibilità segue proprio dall'indipendenza funzionale dei vincoli. Con questa scelta delle coordinate  $q^k$ , supponiamo dunque che  $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{b}_k = 0$ . Vogliamo allora provare, come detto, che  $c_k = 0$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$ . La richiesta  $\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{b}_k = 0$  si può equivalentemente scrivere, esplicitando la forma dei vettori  $\mathbf{b}_k$ :

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = 0, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.20)$$

Se ora  $q^1$  corrisponde alla coordinata  $x_{ab}$ , cioè la componente  $b$ -esima del vettore  $\mathbf{x}_a$ , scegliendo  $i = a$  in (8.20) e quindi riferendosi alla sola componente  $b$ -esima dell'identità ottenuta, si ha

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial x_{ab}}{\partial q^k} = 0 \quad \text{cioè} \quad \sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial q^1}{\partial q^k} = 0$$

che si riduce a

$$\sum_{k=1}^n c_k \delta_k^1 = 0 \quad \text{cioè} \quad c_1 = 0.$$

Possiamo procedere nello stesso modo con le rimanenti  $n - 1$  coordinate  $q^2, q^3, \dots, q^n$  ed avere alla fine  $c_k = 0$  per  $k = 1, \dots, n$  come voluto. In questo modo abbiamo provato che gli  $n$  vettori  $\mathbf{b}_k$  sono linearmente indipendenti.

Vale la seguente, elementare ma fondamentale, proposizione tecnica che riguarda i vettori *normali* allo spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$ .

**Proposizione 8.2.** *Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali sottoposto ad un sistema di  $C < 3N$  vincoli olonomi. I seguenti fatti sono equivalenti per un vettore  $n = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_N) \in V_t^N$  e un sistema di coordinate libere  $(U, \psi)$  con  $U \ni p \mapsto (t(p), q^1(p), \dots, q^n(p))$  definito nell'intorno di una configurazione  $\mathcal{C}_t \in \mathbb{Q}_t$  con  $t \in \mathbb{R}$  un tempo fissato.*

(a)  $n$  è **normale** a  $\mathbb{Q}_t$  nella configurazione  $\mathcal{C}_t$ , cioè:

$$n \cdot \delta P = 0 \quad \text{per ogni } \delta P \in V_t^N \text{ tangente a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \mathcal{C}_t; \quad (8.21)$$



(b) in riferimento alla carta locale  $(U, \psi)$ :

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \Big|_{\mathcal{C}_t} = 0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (8.22)$$

**Dimostrazione.** Tenendo conto che un generico vettore tangente a  $\mathbb{Q}_t$  si scrive come in (8.17), abbiamo immediatamente che:

$$\delta P = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q^k} \Big|_{\mathcal{C}_t}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q^k} \Big|_{\mathcal{C}_t} \right) \delta q^k.$$

Tenendo conto di questa identità, è chiaro che (b) implichi (a). Per dimostrare che (a) implica (b), osserviamo che, tenendo ancora conto dell'identità di sopra, (a) può essere riscritta come:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \Big|_{\mathcal{C}_t} \delta q^k = 0 \quad \text{per ogni } \delta q^k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n.$$

Per l'arbitrarietà dei numeri  $\delta q^k$ , possiamo sceglierli tutti nulli eccetto  $\delta q^{k_0} = 1$  ottenendo che deve valere in particolare:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^{k_0}} \Big|_{\mathcal{C}_t} = 0.$$

L'arbitrarietà di  $k_0$  implica che valga (b). □

**Osservazioni 8.5.** \* Possiamo equivalentemente pensare il vettore tangente a  $\mathbb{Q}_t$ ,  $\delta P$ , come un vettore dello *spazio tangente*  $T_{\mathcal{C}_t} \mathbb{Q}_t$  applicato a  $\mathcal{C}_t \in \mathbb{Q}_t$  definito da:

$$\delta P = \sum_{k=1}^n \delta q^k \frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{\mathcal{C}_t}. \quad (8.23)$$

Al cambiare della carta locale di coordinate naturali, dalla teoria generale abbiamo che le componenti dello stesso vettore  $\delta P$  sono legate a quelle riferite alle coordinate iniziali dalle note relazioni:

$$\delta q'^h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^h}{\partial q^k} \delta q^k$$

che sono proprio le leggi di trasformazione (8.18) già viste precedentemente.

### 8.2.3 Vincoli ideali

Sempre in riferimento al sistema di  $N$  punti materiali  $\mathfrak{S}$ , sottoposto a  $C < 3N$  vincoli olonomi, supponiamo che, fissato un riferimento  $\mathcal{I}$ , sul generico  $i$ -esimo punto agisca la forza:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{I}i}(t, P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{I}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{I}})$$

che, per distinguerla dalla forza reattiva dovuta ai vincoli, sarà denominata **forza attiva**. Abbiamo scritto esplicitamente l'indice  $\mathcal{J}$  in quanto assumeremo che  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}}$  possa includere forze inerziali quando  $\mathcal{J}$  è non inerziale. Le equazioni di Newton si scrivono allora:

$$m_{P_i} \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{F}_{\mathcal{J}i} + \boldsymbol{\phi}_i, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \quad (8.24)$$

Come già detto i vincoli, dal punto di vista fisico, sono imposti tramite forze, più precisamente **reazioni vincolari** o **forze reattive** o **forze passive** agenti su ciascun punto  $P_i$ . Indicheremo con  $\boldsymbol{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  la reazione vincolare agente sull' $i$ -esimo punto materiale. Possiamo ora dare la nozione di *vincolo ideale* che generalizza la nozione di vincolo liscio vista precedentemente.

**Definizione 8.2.** (**Vincoli ideali**) Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali sottoposto ad un sistema di  $C < 3N$  vincoli olonomi. Le reazioni vincolari che si esercitano su una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t)$  del sistema sono dette **ideali** se per ogni tempo  $t$ , per ogni configurazione  $\Gamma(t)$  del sistema attraversata dalla linea di universo al tempo  $t$  il vettore delle reazioni vincolari:

$$\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N) \in V_t^N \quad \text{risulta sempre essere normale a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \Gamma(t).$$

I vincoli sono detti **ideali** se le reazioni vincolari sono ideali su ogni linea di universo che soddisfa le equazioni del moto newtoniane del sistema (8.24).  $\diamond$

#### Osservazioni 8.6.

(1) Nella terminologia storica ottocentesca, ogni vettore tangente  $\delta P$  allo spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  al tempo  $t$  veniva detto *spostamento virtuale del sistema fisico*. Il termine “virtuale” si riferisce al fatto che tale spostamento è valutato a tempo fissato mentre, al variare del tempo, i vincoli possono cambiare. Di conseguenza uno spostamento virtuale non corrisponde, in generale, ad alcuno spostamento reale che il sistema può compiere.

(2) I *vincoli ideali* nella tradizione ottocentesca sono anche detti “vincoli che soddisfano il principio di D'Alembert” oppure anche “vincoli che soddisfano il principio dei lavori virtuali”. In effetti, nella tradizione ottocentesca, si definiva il *lavoro virtuale* delle reazioni vincolari  $(\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_N)$  rispetto allo spostamento virtuale  $\delta P = (\delta P_1, \dots, \delta P_N)$  riferito alla configurazione  $\mathbb{C}_t$  come:

$$\delta L := \boldsymbol{\phi} \cdot \delta P = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\phi}_i \cdot \delta P_i. \quad (8.25)$$

Dato che gli spostamenti virtuali non sono altro che i vettori tangenti a  $\mathbb{Q}_t$ , è allora chiaro che l'idealità delle reazioni vincolari è equivalente alla richiesta:

$$\boldsymbol{\phi} \cdot \delta P = 0, \quad \text{per ogni spostamento virtuale } \delta P. \quad (8.26)$$

che appunto esprime l'annullarsi del lavoro virtuale delle reazioni vincolari per ogni scelta dello spostamento virtuale del sistema.

## Esempi 8.2.

1. L'esempio più semplice di sistema di punti materiali soggetto a vincoli olonomi ideali è quello trattato nell'introduzione di questo capitolo: un sistema di punti materiali in interazione tra di essi e soggetti a forze esterne, ciascuno dei quali è vincolato a muoversi su una superficie o su una curva liscia in quiete in qualche riferimento. Non è richiesto che il riferimento sia lo stesso per tutti i punti materiali. In questo caso, i vettori componenti  $\delta P_i$  del generico vettore  $\delta P = (\delta P_1, \dots, \delta P_N) \in V_t^N$  tangente allo spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$ , sono separatamente tangenti alla superficie o alla curva alla quale è vincolato il punto  $i$ -esimo. Ad ogni istante, quindi, ciascuno dei termini  $\phi_i \cdot \delta P_i$  la cui somma è il prodotto scalare  $\phi \cdot \delta P$  è nullo separatamente perché le curve e superfici considerate sono prive di attrito. Pertanto  $\phi$  è sempre normale a  $\mathbb{Q}_t$ .

2. Un altro esempio molto importante è quello del *vincolo di rigidità* (assumendo anche che il principio di azione e reazione valga in forma forte): un sistema di  $N$  punti materiali collegati tra di essi con supporti ideali, in modo tale da rimanere a distanze reciproche costanti per ogni moto del sistema. Le diverse configurazioni ammissibili al sistema (che soddisfano cioè il vincolo di rigidità) ad un tempo fissato  $t$ , saranno connesse le une alle altre attraverso un'isometria generale di  $\Sigma_t \equiv \mathbb{E}^3$ :

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{t} + R\mathbf{x}_i, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N,$$

dove  $\mathbf{t}$  e  $R$  sono una generica traslazione (vettore dello spazio delle traslazioni di  $\Sigma_t$ ) ed una rotazione di  $O(3)$ , entrambe le trasformazioni agiscono attivamente.  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}'_i$  sono i vettori posizione del punto  $i$ -esimo, in due configurazioni compatibili con il vincolo di rigidità, rispetto ad un'origine  $O \in \Sigma_t$  fissata una volta per tutte. Fissiamo più in generale un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  ed un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali centrate in  $O$  con assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Per descrivere la classe delle trasformazioni rigide suddette sono necessari e sufficienti 6 parametri reali  $q^1, \dots, q^6$ . Le coordinate  $q^1, q^2, q^3$  individuano le componenti sulla terna  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  della traslazione  $\mathbf{t}(q^1, q^2, q^3)$  mentre i tre angoli  $q^4, q^5, q^6$  individuano la rotazione  $R(q^4, q^5, q^6)$ . In questo modo:

$$\mathbf{x}'_i(q^1, \dots, q^6) = \mathbf{t}(q^1, q^2, q^3) + R(q^4, q^5, q^6)\mathbf{x}_i, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Sviluppando al prim'ordine il secondo membro attorno alla configurazione  $q^1, \dots, q^6$ , abbiamo che, dove  $R$  e le sue derivate sono calcolate nella configurazione,  $q^1, \dots, q^6$ ,

$$\delta P_i := \delta \mathbf{x}'_i = \sum_{k=1}^3 \delta q^k \mathbf{e}_k + \sum_{k=4}^6 \delta q^k \frac{\partial R}{\partial q^k} R^t R \mathbf{x}_i, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Ognuna delle 3 matrici  $A_k := \frac{\partial R}{\partial q^k} R^t$  è antisimmetrica. Infatti, dall'identità  $I = RR^t$  si trova

$$0 = \frac{\partial RR^t}{\partial q^k} = \frac{\partial R}{\partial q^k} R^t + R \frac{\partial R^t}{\partial q^k} = \frac{\partial R}{\partial q^k} R^t + \left( \frac{\partial R}{\partial q^k} R^t \right)^t = A_k + A_k^t.$$

Tenendo conto del solo fatto che  $A_k$  è antisimmetrica, si verifica che l'azione di  $A_k$  sui vettori può sempre essere scritta come  $A_k \cdot = \boldsymbol{\omega}_k \wedge \cdot$ , dove le componenti di  $\boldsymbol{\omega}_k$  non sono altro che, a

parte i segni, i 3 elementi indipendenti della matrice  $A_k$ . Pertanto, esistono tre vettori  $\boldsymbol{\omega}_4, \boldsymbol{\omega}_5, \boldsymbol{\omega}_6$  (dipendenti dalla configurazione  $q^1, \dots, q^6$ ) per cui  $A_k \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_k \wedge \mathbf{x}$ . Concludiamo che i vettori  $\delta P_i$  componenti del generico vettore  $\delta P$  tangente a  $\mathbb{Q}_t$  nella configurazione individuata da  $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n$  hanno allora la struttura:

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^3 \delta q^k \mathbf{e}_k + \sum_{k=4}^6 \delta q^k \boldsymbol{\omega}_k \wedge (\mathbf{x}'_i - \mathbf{t}), \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N.$$

Se  $\phi_{ij}$  è la reazione vincolare sul punto  $i$ -esimo individuato da  $\mathbf{x}'_i$  dovuta al punto  $j$ -esimo ( $j \neq i$ ) individuato da  $\mathbf{x}'_j$ , il prodotto scalare tra il vettore delle reazioni vincolari ed un generico vettore  $\delta P$  tangente allo spazio delle configurazioni si scrive

$$\phi \cdot \delta P = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^3 \delta q^k \mathbf{e}_k \cdot \phi_{ij} + \sum_{i,j} \sum_{k=4}^6 \delta q^k \boldsymbol{\omega}_k \wedge (\mathbf{x}'_i - \mathbf{t}) \cdot \phi_{ij}.$$

Ossia, con banali passaggi (ricordando che  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ):

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{k=1}^3 \delta q^k \mathbf{e}_k \cdot \sum_{i,j} \phi_{ij} + \sum_{k=4}^6 \delta q^k \boldsymbol{\omega}_k \cdot \sum_{i,j} (\mathbf{x}'_i - \mathbf{t}) \wedge \phi_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^3 \delta q^k \mathbf{e}_k \cdot \sum_{i,j} \phi_{ij} + \sum_{k=4}^6 \delta q^k \boldsymbol{\omega}_k \cdot \sum_{i,j} \mathbf{x}'_i \wedge \phi_{ij} - \sum_{k=4}^6 \delta q^k \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{t} \wedge \sum_{i,j} \phi_{ij}. \end{aligned}$$

Ma si prova facilmente che

$$\sum_{i,j} \phi_{ij} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \sum_{i,j} \mathbf{x}'_i \wedge \phi_{ij} = \mathbf{0},$$

essendo  $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$  ed essendo  $\phi_{ij}$  diretta lungo  $\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j$  (la prova procede come nella dimostrazione del teorema 5.1 in riferimento alle forze interne). Quindi il vincolo di rigidità soddisfa il requisito di vincolo ideale.

Intuitivamente il risultato si generalizza, passando al caso continuo, alla situazione in cui il sistema fisico sia costituito da un corpo rigido esteso. Tuttavia tale estensione non è ovvia come potrebbe sembrare a prima vista, dato che le interazioni interne ad un corpo continuo sono descritte da *densità di forze* piuttosto che da forze finite applicate in punti discreti.

**3.** Sono ideali vincoli su un sistema di punti materiali costituiti dalla sovrapposizione dei due precedenti casi. Per esempio un sistema di tre punti materiali  $P_1, P_2, P_3$ , con  $P_1, P_2$  connessi al punto  $P_3$  tramite aste rigide prive di massa, assumendo che gli angoli tra le aste in  $P_3$  siano variabili a piacimento (si può anche richiedere che le aste stiano in un piano fissato oppure no) a causa di cerniere ideali senza attrito (cioè senza momenti delle forze d'attrito). Infine il punto  $P_3$  è vincolato a scorrere su una curva assegnata, liscia ed in quiete in un riferimento.

Come caso simile si può considerare un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  soggetto al vincolo di

rigidità e connesso, tramite uno dei punti materiali di  $\mathfrak{S}$  e per mezzo di un asta rigida di massa nulla, ad un punto geometrico in quiete con un riferimento. Le connessioni devono avvenire tramite cerniere ideali senza momenti delle forze d'attrito. Questo pendolo soddisfa ancora la richiesta di vincoli ideali. In particolare, la reazione vincolare sul sistema dovuta all'asta rigida fornisce un contributo nullo ad ogni prodotto  $\phi \cdot \delta P$ , dato che ogni vettore  $\delta P$  è normale all'asse detto mentre la reazione vincolare ne è parallela (potrebbe non esserlo se l'asta fosse dotata di massa).

4. Si può anche considerare il caso di punti materiali vincolati a curve o superfici lisce, la cui forma si modifica nel tempo. Il calcolo del prodotto  $\phi \cdot \delta P$ , dato che viene effettuato a tempo fissato, non è soggetto a modifiche rispetto a caso di curve o superfici lisce di forma fissata nel tempo: ogni prodotto  $\phi \cdot \delta P$  risulta sempre essere nullo.

5. Citiamo infine il caso di *vincoli di rotolamento* studiando la meccanica lagrangiana per i corpi rigidi continui che considereremo più avanti. Il vincolo di rotolamento si ha quando si richiede, per un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  costituito da due corpi rigidi  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$ , che sono in contatto nel punto geometrico  $P$  corrispondente ai punti materiali  $Q_1 \in \mathfrak{S}_1$  e  $Q_2 \in \mathfrak{S}_2$ , vale  $\mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}}$  ad ogni istante, per un riferimento  $\mathcal{J}$ . Si osservi che  $Q_1$  e  $Q_2$  variano istante per istante (si pensi a  $\mathfrak{S}_1$  e  $\mathfrak{S}_2$  come a due ruote in un fissato piano che rotolano senza strisciare una sull'altra e  $Q_1, Q_2$  sono i punti di contatto delle due ruote ad ogni istante). Osserviamo che la condizione  $\mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}}$  non dipende in realtà dal riferimento, dato che  $Q_1 - Q_2 = \mathbf{0}$  per ipotesi e quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}} - \mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}} &= (\mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}} \wedge (Q_1 - O')) - (\mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}} \wedge (Q_2 - O')) \\ &= \mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}'} - \mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}} \wedge (Q_1 - Q_2) = \mathbf{v}_{Q_1}|_{\mathcal{J}'} - \mathbf{v}_{Q_2}|_{\mathcal{J}'} . \end{aligned}$$

In secondo luogo, il vincolo di rotolamento *non* è in generale un vincolo olonomo, dato che coinvolge le velocità. Tuttavia, in alcuni casi, esso può essere *integrato* e trasformato in un vincolo olonomo. In questo caso, gli spostamenti virtuali coincidono con spostamento reali del sistema in un intervallo di tempo  $\delta t$ , approssimati al prim'ordine con il solito sviluppo di Taylor. In particolare risulta, per i componenti di un vettore tangente allo spazio delle configurazioni  $\delta P = (\delta P_1, \delta P_2)$   $\delta Q_1 - \delta Q_2 = \mathbf{0}$ . Dato che la reazione vincolare  $\phi_1$  in  $Q_1$ , dovuta a  $\mathfrak{S}_2$ , coincide con  $-\phi_2$ , dove  $\phi_2$  è la reazione vincolare in  $Q_2$  dovuta a  $\mathfrak{S}_1$ , si ha  $\phi \cdot \delta P = \phi_1 \cdot \delta Q_1 + \phi_2 \cdot \delta Q_2 = 0$  e non fornisce contributo al computo complessivo dei lavori virtuali del sistema  $\mathfrak{S}$ .

#### 8.2.4 Grandezze cinematiche ed energia cinetica

Per arrivare a scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, abbiamo ancora bisogno di un ingrediente tecnico che riguarda la cinematica. Consideriamo il solito sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  sottoposto a  $C < 3N$  vincoli olonomi e descritto nello spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Usando coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n$ , possiamo esprimere le posizioni dei punti come  $P_i = P_i(t, q^1, \dots, q^n)$ . Una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  che rispetta i vincoli, può essere descritta localmente in termini delle coordinate naturali tramite una curva differenziabile  $q^k = q^k(t)$ . Fissato un riferimento  $\mathcal{J}$ , se  $P_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + O$  dove  $O$  è in quiete nel

riferimento, possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt}. \quad (8.27)$$

In questo modo, possiamo esprimere l'energia cinetica del sistema rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , usando le coordinate naturali. Tenendo conto che  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \sum_i \frac{1}{2} m_{P_i} |\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}^2$ , si ha immediatamente:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}_2|_{\mathcal{J}} + \mathcal{T}_1|_{\mathcal{J}} + \mathcal{T}_0|_{\mathcal{J}} \quad (8.28)$$

dove:

$$\mathcal{T}_2|_{\mathcal{J}} := \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(t, q^1, \dots, q^n) \frac{dq^h}{dt} \frac{dq^k}{dt}, \quad \mathcal{T}_1|_{\mathcal{J}} := \sum_{k=1}^n b_k(t, q^1, \dots, q^n) \frac{dq^k}{dt}, \quad \mathcal{T}_0|_{\mathcal{J}} := c(t, q^1, \dots, q^n),$$

con le definizioni: ,

$$a_{hk}(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k}, \quad (8.29)$$

$$b_k(t, q^1, \dots, q^n) := \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (8.30)$$

$$c(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}. \quad (8.31)$$

### 8.2.5 Equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi di un numero finito di punti materiali

Consideriamo il solito sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, sottoposto a  $C < 3N$  vincoli olonomi ideali e descritto nello spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Ad ogni linea di universo  $\Gamma = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  che soddisfi i vincoli imposti a  $\mathfrak{S}$  corrisponde biunivocamente una curva  $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  espressa usando, localmente, coordinate libere  $q^k = q^k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Vale cioè  $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_i(q^1(t), \dots, q^n(t))$  per ogni  $i = 1, \dots, N$ . Tenendo conto di ciò, vale il seguente teorema.

**Teorema 8.1.** *Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, sottoposto a  $c < 3N$  vincoli olonomi ideali di classe  $C^2$  almeno, descritto nello spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Supponiamo che, fissato un riferimento  $\mathcal{J}$ , sul generico  $i$ -esimo punto agisca la forza (totale) attiva  $\mathbf{F}_{\mathcal{J}i}(t, P_1, \dots, P_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}})$  e quindi la reazione vincolare (totale)  $\phi_i = m_{P_i} \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} - \mathbf{F}_{\mathcal{J}i}$ .*

*Una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  del sistema  $\mathfrak{S}$  soddisfa le equazioni del moto di Newton*

(8.24) con reazioni vincolari ideali se e solo se, la curva  $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  che corrisponde a  $\Gamma$  ed è descritta in coordinate locali naturali da  $q^k = q^k(t)$ , soddisfa le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}}(t, q(t), \dot{q}(t)), \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (8.32)$$

essendo  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  l'energia cinetica del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$  (8.28) e  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}}$  le **componenti lagrangiane delle forze attive**:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\mathcal{S}i}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \quad (8.33)$$

dove abbiamo usato le relazioni (8.27) per esprimere le velocità dei punti di  $\mathfrak{S}$  in termini delle  $q^k$  e delle loro derivate temporali  $\dot{q}^k$ , pensate come variabili indipendenti dalle  $q^k$  in (8.32).

**Dimostrazione.** La dimostrazione segue la stessa procedura discussa nella sezione introduttiva di questo capitolo. Dalle equazioni di Newton (8.24), la caratterizzazione di vincoli ideali (valide sulla configurazione  $\mathcal{C}_t$  raggiunta dalla linea di universo):

$$(\phi_1, \dots, \phi_N) \quad \text{è normale a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \mathcal{C}_t, \quad (8.34)$$

si può equivalentemente riscrivere nella seguente forma:

$$(m_{P_1} \mathbf{a}_{P_1}|_{\mathcal{S}} - \mathbf{F}_{\mathcal{S}1}, \dots, m_{P_N} \mathbf{a}_{P_N}|_{\mathcal{S}} - \mathbf{F}_{\mathcal{S}N}) \quad \text{è normale a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \mathcal{C}_t.$$

Ponendo  $\mathbf{x}_i := P_i - O$  con  $O$  in quiete nel riferimento  $\mathcal{S}$ , si ha l'ulteriore equazione equivalente alla (8.34) dovuta alla Proposizione 8.2:

$$\sum_{i=1}^N (m_{P_i} \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{S}} - \mathbf{F}_{\mathcal{S}i}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n. \quad (8.35)$$

Le funzioni  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n)$  sono di classe  $C^2$  nell'ipotesi di vincoli di classe  $C^2$ . Per proseguire la dimostrazione mostreremo che, per ogni linea di universo, vale:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k}, \quad (8.36)$$

dove abbiamo imposto il vincolo  $\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt}$  dopo aver calcolato il primo membro. Proviamo la validità di (8.36). Nel seguito scriveremo semplicemente  $\mathbf{v}_i$  al posto di  $\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{S}}$  e  $\mathbf{a}_i$  al posto di  $\mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{S}}$ . Consideriamo il primo membro di (8.36). Esso si esplicita in:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial q^k} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{m_i}{2} 2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} \right) - \sum_i \frac{m_i}{2} 2 \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} &= \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} + \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} - \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} \\
&= \sum_i m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} + \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} \right).
\end{aligned}$$

L'espressione della velocità, tenendo conto del fatto che  $dq^k/dt = \dot{q}^k$ , può essere scritta come:

$$\mathbf{v}_i = \sum_h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}, \quad (8.37)$$

da cui, pensando le  $q^k$  indipendenti dalle  $\dot{q}^k$ , ricaviamo subito che:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k},$$

pertanto, sostituendo nell'espressione trovata sopra per il primo membro di (8.36), arriviamo a concludere che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} + \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} \right).$$

Per completare la dimostrazione di (8.36) è ora sufficiente notare che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} = 0.$$

Questo risultato è immediato dalla (8.37), quando si richiede che  $dq^k/dt = \dot{q}^k$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q^k} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \left( \sum_h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \sum_h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \right) - \left( \sum_h \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^k \partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^k \partial t} \right) \\
&= \left( \sum_h \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^h \partial q^k} \dot{q}^h + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t \partial q^k} \right) - \left( \sum_h \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^k \partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial q^k \partial t} \right) = 0,
\end{aligned}$$

per il teorema di Schwartz. In questo modo (8.36) risulta essere provata.

Quindi le equazioni di Eulero Lagrange si possono riscrivere, tenendo conto della definizione (8.33) delle componenti lagrangiane delle forze attive  $\mathcal{Q}_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\mathcal{J}_i}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$



ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} - \mathbf{F}_{\mathcal{J}_i}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = 0, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (8.38)$$

Il risultato ottenuto conclude la dimostrazione. Infatti, supponiamo che  $q^k = q^k(t)$  definisca una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  per il sistema  $\mathfrak{S}$  che soddisfi le equazioni di Newton (8.24) con vincoli ideali. In tal caso  $m_i \mathbf{a}_{P_i}|_{\mathcal{J}} - \mathbf{F}_{\mathcal{J}_i} = \phi_i$  è la reazione vincolare sull' $i$ -esimo punto ed il sistema (8.38) di sopra è verificato in virtù della caratterizzazione (8.35) della richiesta di vincoli ideali.

Supponiamo viceversa che  $q^k = q^k(t)$  definisca una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{3N+1}$  per il sistema  $\mathfrak{S}$  che soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange (8.38). In tal caso, banalmente, vale la (8.24), dove le  $\phi_i$  soddisfano la (8.35) cioè la caratterizzazione di vincolo ideale (8.34).  $\square$

### Osservazioni 8.7.

(1) Si deve sottolineare che le componenti lagrangiane delle forze attive sono *indipendenti* dal riferimento  $\mathcal{J}$  usato per definire i vettori posizione  $\mathbf{x}_i$  quando le forze attive considerate sono *forze vere*. Cambiando riferimento ed usando vettori posizione  $\mathbf{x}'_i$  riferiti al nuovo riferimento  $\mathcal{J}'$ , si ha infatti  $\mathbf{x}'_i(t, q^1, \dots, q^n) = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) + \mathbf{X}(t)$ , dove  $\mathbf{X}(t) = O'(t) - O(t)$  è la funzione, *assegnata* che descrive il moto relativo delle due origini delle coordinate solidali con  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$ . Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &:= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\mathcal{J}'_i}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial q^k} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{\mathcal{J}_i}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che le forze vere hanno valori che non dipendono dal riferimento. Nel caso si lavori in un riferimento non inerziale, una parte delle forze attive è di natura inerziale e pertanto *dipendente* dal riferimento. Tale dipendenza si ripercuote sulle componenti lagrangiane delle forze attive.

(2) È molto importante sottolineare che le variabili  $\dot{q}^k$  e le variabili  $q^k$  sono pensate come indipendenti e diventano dipendenti solo al momento di imporre il sistema delle equazioni di Eulero-Lagrange, che è di fatto un sistema del primo ordine. Senza assumere l'indipendenza delle  $\dot{q}^k$  dalle  $q^k$  la prima riga in (8.32) sarebbe anche di difficile interpretazione.

(3) La superiorità delle equazioni di Eulero-Lagrange rispetto a quelle di Newton si basa principalmente sul fatto che le prime sono automaticamente *equazioni pure di movimento* non contenendo le reazioni vincolari ed essendo, come vedremo tra poco, riscrivibili in forma normale e quindi soddisfacendo l'ipotesi principale del teorema di esistenza ed unicità. Dal punto di vista

pratico le equazioni di Eulero-Lagrange sono scrivibili in riferimento ad un qualsiasi sistema di coordinate locali  $t, q^1, \dots, q^n$ . Questo solo fatto semplifica enormemente la matematica del problema.

(4) Come provato nella dimostrazione, la condizione di idealità dei vincoli (sulle configurazioni raggiunte dalle una linea di universo del sistema fisico) equivale alla (8.35). Quest'ultima può ancora essere trascritta come:

$$\sum_{i=1}^N \phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} = 0,$$

che a sua volta si può illustrare dicendo che: *le componenti lagrangiane delle reazioni vincolari ideali sono nulle (sulle configurazioni raggiunte dalle una linea di universo del sistema fisico).*

(5) Il Teorema 8.1 continua a valere quando si considerano sistemi fisici più complessi di quelli dati da insiemi di un numero finito di punti materiali. Infatti è possibile estendere il risultato appena provato (cosa che faremo nella prossima sezione), al caso di sistemi fisici costituiti da un numero finito di sottosistemi che possono essere indifferentemente punti materiali e/o corpi rigidi continui, sottoposti a vincoli (rispetto ad un esterno oppure anche interni al sistema stesso, per esempio vincoli dovuti a cerniere che vincolano due corpi rigidi l'uno all'altro) che verificano la condizione di vincolo ideale.

### 8.3 Estensione al caso di sistemi costituiti da corpi rigidi continui e punti materiali

In questa sezione mostreremo come le equazioni di Eulero-Lagrange valgano considerando anche sistemi meccanici più complessi, costituiti da punti materiali e corpi rigidi continui, quando le reazioni vincolari soddisfano il requisito di vincolo ideale.

A questo punto sui manuali viene solitamente invocata qualche, non completamente precisata, procedura di estensione del formalismo al caso di un sistema fisico con un numero infinito di punti materiali e poi ad un sistema fisico continuo, benché rigido. A parere dell'autore una simile procedura potrebbe essere giustificata solamente nell'ambito della meccanica dei continui, dopo avere esteso la formulazione della meccanica di Newton a tale caso, ma è impossibile facendo riferimento alla sola trattazione della dinamica per sistemi discreti data nei capitoli precedenti. Per questo motivo noi seguiremo una via differente e sicuramente più rigorosa che parte dall'assunzione fisica C5, introdotta nella sezione 6.3, che la dinamica dei corpi rigidi continui debba soddisfare le due equazioni cardinali della dinamica (6.25)-(6.26). Di fatto proveremo che la validità di queste due equazioni, unitamente alla richiesta di idealità dei vincoli, è equivalente alla validità delle equazioni di Eulero-Lagrange per un corpo rigido continuo. Addirittura estenderemo tale risultato a sistemi composti di corpi rigidi e punti materiali che cadono sotto il nome di *sistemi articolati*.

### 8.3.1 Sistemi articolati

Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  fisico costituito da  $N$  sottosistemi  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , di rispettive masse  $M_1, \dots, M_N$ . Alcuni (anche tutti) sottosistemi  $S_k$ , diciamo i primi  $N'$  sono assunti essere corpi rigidi continui con centro di massa  $G_k$ , i rimanenti  $N''$  saranno invece assunti essere punti materiali (in tal caso  $G_k$  coincide con il punto stesso).

Lo spaziotempo delle configurazioni di  $\mathfrak{S}$ , in assenza di vincoli, sarà allora una varietà differenziabile  $\mathbb{V}^{6N'+3N''+1}$  analoga a  $\mathbb{V}^{3N+1}$ , in cui le foglie spaziali  $\Sigma_t^N$  (isomorfe a  $\mathbb{R}^{3N}$ ) sono ora sostituite da sottovarietà isomorfe a  $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))^{N'} \times \mathbb{R}^{3N''}$ , dove abbiamo tenuto conto che le configurazioni di un corpo rigido (con almeno tre punti non allineati, e nel seguito considereremo solo questo caso) sono individuate dai punti di una varietà differenziabile isomorfa a  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  (vedi Osservazioni 6.2). L'evoluzione del sistema sarà descritta in questo spazio da una linea di universo (differenziabile)  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{6N'+3N''+1}$ .

Passiamo al caso in cui il sistema sia sottoposto a  $C < 6N' + 3N''$  vincoli olonomi, cioè, come nel caso di sistemi di soli punti materiali, l'evoluzione del sistema deve passare per configurazioni che annullano  $C$  fissate funzioni  $f_j : \mathbb{V}^{6N'+3N''+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e che verificano le solite due condizioni:

(H1) Per ogni  $t \in \mathbb{R}$ :

$$f_j(t, X) = 0, \quad j = 1, \dots, C$$

siano soddisfatte su un insieme non vuoto.

(H2) Ad ogni istante  $t \in \mathbb{R}$ , le funzioni  $f_j$  risultino essere funzionalmente indipendenti.

In questo caso, esattamente come per sistemi vincolati di punti materiali, i gradi di libertà di  $\mathfrak{S}$  si ridurranno a  $n := 6N' + 3N'' - C$ , in altre parole, lo **spaziotempo delle configurazioni (con vincoli)** sarà dato da una varietà  $\mathbb{V}^{n+1}$  di dimensione  $n$ , data dall'unione disgiunta di sottovarietà  $n$ -dimensionali  $\mathbb{Q}_t$  etichettate sul tempo assoluto  $t$  e definenti gli **spazi delle configurazioni del sistema al tempo  $t$** . I punti  $\mathcal{C}_t$  di ogni  $\mathbb{Q}_t$  saranno propriamente detti **configurazioni** del sistema  $\mathfrak{S}$  al tempo  $t$ . Le configurazioni al tempo  $t$  del sistema  $\mathfrak{S}$  saranno localmente individuate tramite  $n$  **coordinate libere** o **lagrangiane**  $q^1, \dots, q^n$ , che definiscono coordinate locali su  $\mathbb{Q}_t$ . Insieme al tempo assoluto  $t$ , tali sistemi di coordinate locali definiscono **sistemi di coordinate locali naturali** su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , esattamente come nel caso di sistemi di punti materiali. Ogni evoluzione  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{6N'+3N''+1}$  sarà equivalente ad una curva (differenziabile)  $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  localmente descritta in coordinate naturali come  $t = t$  e  $q^j = q^j(t)$ .

Per concludere l'aspetto geometrico precisiamo che, anche in questo caso, assumeremo la validità della condizione (H3).

(H3) Per ogni fissato  $t \in \mathbb{R}$  asse del tempo assoluto esista un intervallo aperto non vuoto  $J \subset \mathbb{R}$ , con  $J \ni t$ , ed una corrispondente classe di sistemi di coordinate naturali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  con  $\phi_i : U_i \ni p \mapsto (t_i(p), q_i^1(p), \dots, q_i^n(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , che soddisfino i tre seguenti requisiti:

- (i)  $\cup_{i \in I} U_i \supset \mathbb{Q}_\tau$  per ogni  $\tau \in J$ ;
- (ii)  $\phi_i(U_i) \supset J \times U'_i$ , con  $U'_i \subset \mathbb{R}^n$  aperto, per ogni  $i \in I$ ;

(iii) per ogni scelta di  $i, j \in I$  le funzioni  $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  siano della forma:

$$t_i = t_j, \quad q_i^k = q_i^k(q_j^1, \dots, q_j^n)$$

in cui, cioè, la legge di trasformazione tra le coordinate libere non dipenda esplicitamente dal tempo.

Dal punto di vista dinamico, sul sottosistema  $S_k$  agiranno le forze *esterne* attive<sup>4</sup>  $\mathbf{f}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{f}_{L_k}^{(k)}$  applicate, rispettivamente, ai punti  $Q_1^{(k)}, \dots, Q_{L_k}^{(k)} \in S_k$  e le forze *esterne* reattive  $\phi_1^{(k)}, \dots, \phi_{L_k}^{(k)}$  applicate, rispettivamente, ai punti  $P_1^{(k)}, \dots, P_{L_k}^{(k)} \in S_k$  (ovviamente, nel caso  $S_k$  sia un unico punto, coincidente con  $G_k$ , tutte le forze saranno applicate in  $G_k$ ). Assumeremo ovviamente che tutte le forze esterne in gioco, attive e reattive, soddisfino il principio di azione e reazione, siano cioè assegnate in coppie di vettori tali che, ad ogni fissato istante i due vettori abbiano modulo uguale, direzione opposta e siano diretti lungo la congiungente dei due punti di applicazione. Come già sottolineato discutendo le equazioni di Eulero (vedi la Sezione 6.3), i punti  $P_i^{(k)}$  e  $Q_j^{(k)}$  sono da intendersi come *punti geometrici* e non particelle materiali del sistema  $S_k$  nel caso di un corpo rigido continuo, dato che ammettiamo che possano variare istante per istante, come particelle materiali: si pensi al caso comune di  $S_k$  dato da un disco che rotola su una guida, il punto materiale di contatto con la guida varia istante per istante, ma in esso è applicata la reazione vincolare della guida sul sistema. L'evoluzione di ogni sottosistema  $S_k$  dovrà soddisfare le equazioni cardinali (8.41)-(8.42) (omettendo la seconda nel caso in cui  $S_k$  sia un unico punto materiale), considerando a secondo membro di tali equazioni il contributo totale delle forze esterne attive e reattive agenti su  $S_k$ .

Diremo **sistema articolato** un siffatto sistema complesso di corpi fisici.

**Osservazioni 8.8.** Stiamo assumendo che le forze esterne attive vengano esercitate in punti singoli dei corpi rigidi  $S_k$  costituenti il sistema. Come già osservato nel cap.6 (vedi (2) in Osservazioni 6.6) è importante rendersi conto che questa restrizione può includere comunque le forze gravitazionali, nella situazione in cui l'accelerazione di gravità sia costante  $-g \mathbf{e}_z$ , con  $g$  indipendente dal posto (eventualmente dipendente dal tempo). *Al solo fine dell'uso delle due equazioni cardinali, l'azione complessiva della forza gravitazionale costante su  $S_k$  corrisponde a quella di un'unica forza applicata nel centro di massa  $G_k$  del sistema pari alla risultante  $-M_k g \mathbf{e}_z$  di tutte le forze gravitazionali agenti sulle singole particelle del corpo rigido.*

Come nel caso di sistemi di punti materiali, possiamo dare la seguente definizione. Al solito definiamo:

$$\delta P_i^{(k)} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i^{(k)}}{\partial q^j} \bigg|_{\mathbf{c}_t} \delta q^j \quad \text{per } \delta q^j \in \mathbb{R} \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (8.39)$$

---

<sup>4</sup>Queste forze potrebbero anche essere inerziali e quindi dipendenti dal riferimento, tuttavia omettiamo di scrivere l'indice  $\mathcal{I}$  per non sovraccaricare la notazione.

in modo tale che  $\{\delta P_i^{(k)}\}_{k=1,\dots,N,i=1,\dots,L_k}$  individua un generico  $\delta P$  vettore tangente a  $\mathbb{Q}_t$  in  $\mathcal{C}_t$ .

**Definizione 8.3.** Per un sistema articolato  $\mathfrak{S}$ , le reazioni vincolari che si esercitano su una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t)$  del sistema sono dette **ideali** se per ogni tempo  $t$ , per ogni configurazione  $\mathcal{C}_t \in \mathbb{Q}_t$  del sistema attraversata dalla linea di universo al tempo  $t$  il vettore delle reazioni vincolari è (*esterne* ai vari sottosistemi) è normale a  $\mathbb{Q}_t$  in  $\mathcal{C}_t$ , ovvero equivalentemente:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{L_k} \phi_i^{(k)} \cdot \delta P_i^{(k)} = 0 \quad \text{per ogni vettore tangente a } \mathbb{Q}_t \text{ in } \mathcal{C}_t, \quad (8.40)$$

dove, per ogni  $k$ , abbiamo considerato le sole reazioni vincolari  $\phi_i^{(k)}$  *esterne* al sottosistema  $S_k$ .

I vincoli sono detti **ideali** se le reazioni vincolari sono ideali su ogni linea di universo che soddisfa le equazioni del moto newtoniane del sistema (8.41)-(8.42) (vedi la Sezione 6.3).  $\diamond$

Mostereremo nel seguito che, nelle ipotesi dette, se il moto complessivo del sistema verifica le equazioni newtoniane del moto nel riferimento  $\mathcal{J}$  e cioè:

$$M_k \mathbf{a}_{G_k}|_{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^{N_k} \mathbf{f}_j^{(k)} + \sum_{i=1}^{L_k} \phi_i^{(k)} \quad \text{se } k = 1, \dots, N \quad (8.41)$$

e, nel caso  $S_k$  sia un corpo rigido continuo, anche:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}} \Gamma_{G_k}|_{\mathcal{J}} = \sum_{j=1}^{N_k} (Q_j^{(k)} - G_k) \wedge \mathbf{f}_j^{(k)} + \sum_{i=1}^{L_k} (P_j^{(k)} - G_k) \wedge \phi_i^{(k)} \quad \text{se } k = 1, \dots, N \quad (8.42)$$

allora, la stessa evoluzione descritta in termini delle coordinate lagrangiane  $q^j = q^j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , verifica le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (8.43)$$

essendo  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  l'energia cinetica del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , ottenuta come la somma delle energie cinetiche dei vari sottosistemi:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \sum_{k=1}^N \mathcal{T}_k|_{\mathcal{J}}, \quad (8.44)$$

e  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{f}_i^{(k)}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i^{(k)}}{\partial \dot{q}^k} \quad (8.45)$$

dove  $\mathbf{x}_i^{(k)} := Q_i^{(k)} - O$ , essendo  $O$  un punto fissato in quiete in  $\mathcal{J}$ .

Successivamente proveremo come le equazioni di Eulero-Lagrange (8.43) implicino la validità di (8.41)-(8.42) unitamente alla richiesta di idealità dei vincoli (8.40).

Per procedere con la dimostrazione abbiamo bisogno di un'espressione esplicita per i vettori  $\delta P_i^{(k)}$  e per l'energia cinetica  $\mathcal{T}_k|_{\mathcal{J}}$  nel caso in cui il sottosistema  $S_k$  sia un corpo rigido continuo e di due identità che corrispondono, nel caso dei corpi rigidi continui, alla generalizzazione dell'identità notevole (8.36).

### 8.3.2 Calcolo esplicito dei vettori tangenti $\delta P_i^{(k)}$ e dell'energia cinetica di corpi rigidi continui

Sia  $S_k$  un corpo rigido continuo. Sotto tali ipotesi, consideriamo una terna di assi  $\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \mathbf{e}_3^{(k)}$  solidali con  $S_k$  centrata nel centro di massa  $G_k$ . Se  $\mathbf{x}'_{P^{(k)}} := P^{(k)} - G_k$  indica il vettore posizione di una particella materiale  $P^{(k)} \in S_k$  fissata una volta per tutte, indichiamo con  $\mathbf{x}_{P^{(k)}} := P^{(k)} - O = (P^{(k)} - G_k) + (G_k - O) = \mathbf{x}'_{P^{(k)}} + \mathbf{x}_{G_k}$  il vettore posizione dello stesso punto, riferito all'origine  $O$  nello spazio di quiete del sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ . I valori possibili di  $\mathbf{x}_{P^{(k)}}$  compatibili con i vincoli al tempo  $t$  sono tutti quelli individuabili dai valori delle coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  in termini della funzione (determinata “risolvendo i vincoli”)  $\mathbf{x}_{P^{(k)}} = \mathbf{x}_{P^{(k)}}(t, q^1, \dots, q^n)$  e analogamente  $\mathbf{x}_{G_k} = \mathbf{x}_{G_k}(t, q^1, \dots, q^n)$ . Conseguentemente:

$$\delta P^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_{G_k}}{\partial q^j} \delta q^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}'_{P^{(k)}}}{\partial q^j} \delta q^j.$$

Possiamo calcolare esplicitamente il secondo addendo a secondo membro. A tal fine, fissiamo un sistema di coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{J}$ , esprimiamo i versori  $\mathbf{e}_s^{(k)}$  solidali con  $S_k$  e spiccati da  $G_k$  in termini dei versori “fissi”  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  che escono dall'origine  $O$ , solidali con  $\mathcal{J}$ . Al variare delle coordinate libere e del tempo, i versori  $\mathbf{e}_s^{(k)}$  cambieranno la loro orientazione, rispetto ai versori “fissi”  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  secondo funzioni assegnate  $\mathbf{e}_s^{(k)} = \mathbf{e}_s^{(k)}(t, q^1, \dots, q^n)$ . (Tutte le funzioni considerate delle variabili  $t, q^1, \dots, q^n$  saranno assunte di essere almeno di classe  $C^2$ ). Procedendo come nella dimostrazione delle formule di Poisson (vedi la dimostrazione del Teorema 2.2), sostituendo sistematicamente in tale dimostrazione la derivata  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{J}}$  con  $\frac{\partial}{\partial q^k}$  giungiamo all'identità:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'_{P^{(k)}}}{\partial q^j} = \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} \wedge (P^{(k)} - G_k), \quad (8.46)$$

dove abbiamo definito:

$$\boldsymbol{\Omega}_j^{(k)}(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 \mathbf{e}_s^{(k)} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_s^{(k)}}{\partial q^j}. \quad (8.47)$$

Definendo ancora:

$$\mathbf{T}_j^{(k)}(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{\partial \mathbf{x}_{G_k}}{\partial q^j}, \quad (8.48)$$

possiamo allora concludere che, per i vettori  $\delta P_i^{(k)}$ , vale la formula esplicita:

$$\delta P^{(k)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_j^{(k)} \delta q^j + \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} \wedge (P^{(k)} - G_k) \delta q^j . \quad (8.49)$$

Si noti che, nel caso  $S_k$  sia un punto materiale (coincidendo dunque con  $G_k$ ), il secondo addendo a secondo membro si annulla e si ritrova l'espressione solita del vettore  $\delta P^{(k)}$  del punto materiale  $G_k$ . Dato che sarà utile più avanti, notiamo che lo stesso calcolo che ha portato alla (8.49) prova contemporaneamente che, per ogni particella materiale  $P \in S_k$ , il corrispondente vettore posizione  $\mathbf{x}_{P^{(k)}}$  rispetto all'origine  $O$  di  $\mathcal{S}$  soddisfa:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{P^{(k)}}}{\partial q^j} = \mathbf{T}_j^{(k)} + \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} \wedge (P^{(k)} - G_k) . \quad (8.50)$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica  $\mathcal{T}_k|_{\mathcal{S}}$ , essa sarà data dalla formula (6.10):

$$\mathcal{T}_k|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} M_k \mathbf{v}_{G_k}|_{\mathcal{S}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{S_k}}|_{\mathcal{S}} \cdot I_{G_k}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{S_k}}|_{\mathcal{S}}) \quad (8.51)$$

dove  $I_{G_k}$  è il tensore d'inerzia del corpo rigido  $S_k$  ed il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo rigido  $S_k$  rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$  sarà determinato, (in funzione delle coordinate libere e tendo conto delle scelte degli assi definite sopra) dall'identità:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{S_k}}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i^{(k)} \wedge \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{e}_i^{(k)}}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \mathbf{e}_i^{(k)}}{\partial t} \right) . \quad (8.52)$$

### 8.3.3 Generalizzazione dell'identità (8.36) ai corpi rigidi continui

Consideriamo sempre un corpo rigido continuo  $S_k$  e, in riferimento alla (8.51), definiamo:

$$\mathcal{T}'_k|_{\mathcal{S}} := \frac{1}{2} M_k \mathbf{v}_{G_k}|_{\mathcal{S}}^2, \quad \mathcal{T}''_k|_{\mathcal{S}} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{S_k}}|_{\mathcal{S}} \cdot I_{G_k}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{S_k}}|_{\mathcal{S}}) . \quad (8.53)$$

Vogliamo provare che, con queste definizioni e tenuto conto di (8.47) e (8.48), valgono le identità:

$$M_k \mathbf{a}_{G_k}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}'_k|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}'_k|_{\mathcal{S}}}{\partial q^j} \quad \text{se} \quad \frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.54)$$

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\Gamma}_{G_k}|_{\mathcal{S}}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}''_k|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}''_k|_{\mathcal{S}}}{\partial q^j} \quad \text{se} \quad \frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.55)$$

Si noti che, nel caso  $S_k$  si riduca ad un punto materiale (quindi coincidente con  $G_k$ ), la seconda identità cessa di avere senso, mentre la prima si riduce alla (8.36). La dimostrazione di (8.54) è identica a quella di (8.36) e pertanto la omettiamo, passando alla dimostrazione di (8.55). Prima di tutto scegliamo la base degli  $\mathbf{e}_i^{(k)}$  in modo che sia una terna principale d'inerzia per  $S_k$ , con

momenti d'inerzia  $I_1, I_2, I_3$ . Nel seguito, per semplicità notazionale indicheremo ometteremo gli indici  $^{(k)}$ ,  $G_k$ ,  $\mathcal{J}$ , per cui per esempio, scriveremo  $\mathbf{e}_i$  invece di  $\mathbf{e}_i^{(k)}$ . Per dimostrare la (8.55), osserviamo che, dalla (8.52), vale:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \wedge \frac{d \mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_j . \quad (8.56)$$

In tal caso, in riferimento al secondo membro di (8.55) possiamo scrivere:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j = \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{dI(\boldsymbol{\omega})}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{dt} \left( I(\boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} \right) \cdot I(\boldsymbol{\omega}) .$$

Come si prova immediatamente, in particolare lavorando in componenti con la forma diagonale dell'operatore d'inerzia  $I$ , si ha subito che:

$$I(\boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^3 I_i \omega^i \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega^i I_i \omega^i \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I(\boldsymbol{\omega}) \right) ,$$

per cui:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I(\boldsymbol{\omega}) \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} \right) \cdot I(\boldsymbol{\omega}) .$$

Il secondo membro è proprio quello che appare in (8.55) purché valga:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} \right) \cdot I(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I(\boldsymbol{\omega}) \right) . \quad (8.57)$$

Questa identità segue immediatamente dall'identità notevole:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \omega^k}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{e}_k , \quad (8.58)$$

dato che, usando tale identità a primo mebro di (8.57), essendo la base ortonormale degli  $\mathbf{e}_i$  una terna principale d'inerzia:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} \right) \cdot I(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{e}_i \cdot \sum_{k=1}^3 I_k \omega_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{q}^j} I_i \omega_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \omega_i I_i \omega_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I(\boldsymbol{\omega}) \right) ,$$

che è la (8.57). Per concludere la dimostrazione proviamo la (8.58). Esplicitando il primo membro di tale identità:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \dot{q}^j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{d \mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \wedge \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \frac{d \mathbf{e}_i}{dt}$$



$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} + \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \wedge \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \wedge \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}.$$

Il primo e l'ultimo termine in reltà sono uguali, per cui abbiamo trovato che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^3 \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} + \frac{\partial \omega}{\partial q^j}. \quad (8.59)$$

Osserviamo ancora che:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^3 (\omega \wedge \mathbf{e}_i) \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = - \sum_{i=1}^3 \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \right) \omega + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \cdot \omega \right) \mathbf{e}_i.$$

Dato che  $\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q^j} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 0$ , otteniamo:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \cdot \omega \right) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{e}_i \cdot \omega) \right] \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^3 \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \omega}{\partial q^j} \right) \mathbf{e}_i,$$

cioè

$$\sum_{i=1}^3 \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \wedge \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega^i}{\partial q^j} \mathbf{e}_i - \frac{\partial \omega}{\partial q^j}.$$

Inserendo questo risultato a secondo membro in (8.59) si ha (8.58).  $\square$

### 8.3.4 Equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi articolati

Concludendo la sezione, possiamo finalmente provare il seguente teorema che mostra l'equivalenza tra meccanica Newtoniana ed equazioni di Eulero-Lagrange nel caso si sistemi articolati sottoposti a vincoli ideali.

**Teorema 8.2.** *Sia  $\mathfrak{S}$  un sistema un sistema articolato, definito come nella sezione 8.3.1, sottoposto a  $C < 6N' + 3N''$  vincoli olonomi di classe  $C^2$  almeno, descritto nello spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Una linea di universo  $\Gamma = \Gamma(t) \in \mathbb{V}^{6N'+3N''+1}$  del sistema  $\mathfrak{S}$  soddisfa le equazioni del moto di Newton (8.41)-(8.42) con reazioni vincolari ideali se e solo se, la curva  $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  che corrisponde a  $\Gamma$  ed è descritta in coordinate locali naturali da  $q^k = q^k(t)$ , soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange (8.43).*

**Dimostrazione.** Partiamo osservando che, in virtù della (8.49), la condizione di idealità dei vincoli (8.40) rispetto alle configurazioni raggiunte da  $\Gamma$  può essere riscritta come:

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{L_k} \phi_i^{(k)} \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{L_k} \Omega_j^{(k)} \wedge (P_i^{(k)} - G_k) \cdot \phi_i^{(k)} \right) \delta q^j = 0, \quad \forall \delta q^j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n,$$

valida per ogni configurazione su  $\gamma$ . Al solito, per l'arbitrarietà dei  $\delta q^j$ , queste identità sono equivalenti alle  $n$  richieste, dove abbiamo anche adoperato la relazione elementare  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ :

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{L_k} \phi_i^{(k)} \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{L_k} (P_i^{(k)} - G_k) \wedge \phi_i^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} = 0, j = 1, \dots, n. \quad (8.60)$$

Dal momento che tali identità devono essere soddisfatte su ogni moto del sistema che verifica le equazioni cardinali (8.41)-(8.42), dovrà anche valere, per  $j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{k=1}^N \left( M_k \mathbf{a}_{G_k}|_{\mathcal{J}} - \sum_{r=1}^{N_k} \mathbf{f}_r^{(k)} \right) \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} + \sum_{k=1}^N \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{J}} \Gamma_{G_k}|_{\mathcal{J}} - \sum_{j=1}^{N_k} (Q_j^{(k)} - G_k) \wedge \mathbf{f}_j^{(k)} \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} = 0.$$

Queste identità, tenendo conto delle (8.54)-(8.55) e del fatto che  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \sum_k (\mathcal{T}'_k|_{\mathcal{J}} + \mathcal{T}''_k|_{\mathcal{J}})$ , si possono immediatamente riscrivere:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_k} \mathbf{f}_r^{(k)} \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{N_k} (Q_j^{(k)} - G_k) \wedge \mathbf{f}_r^{(k)} \cdot \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)}$$

dove abbiamo tenuto conto del vincolo, valido sul moto,  $\frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j$ . Usando nuovamente  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ , possiamo risistemare le identità trovate nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_k} \mathbf{f}_r^{(k)} \cdot \mathbf{T}_j^{(k)} + \sum_{r=1}^{N_k} \boldsymbol{\Omega}_j^{(k)} \wedge (Q_r^{(k)} - G_k) \cdot \mathbf{f}_j^{(k)}.$$

Tenendo conto di (8.50), possiamo ancora riscrivere quanto sopra come, per  $j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^{N_k} \mathbf{f}_i^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{Q_i^{(k)}}}{\partial q^j}.$$

Tenendo conto della definizione (8.45), dove  $\mathbf{x}_{Q_i^{(k)}}$  è indicato con  $\mathbf{x}_i^{(k)}$ , possiamo concludere di avere provato che l'evoluzione temporale del sistema articolato  $\mathfrak{S}$ , nelle ipotesi fatte deve soddisfare le equazioni di eulero-Lagrange (8.43):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^j} = \mathcal{Q}_j, \quad \frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j, \quad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Procedendo in senso inverso nelle deduzioni precedenti, si prova immediatamente che, se è dato un sistema articolato  $\mathfrak{S}$ , definito come nella sezione 8.3.1, la cui evoluzione temporale  $\gamma$ , descritta in coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$ , verifica le equazioni di Eulero-Lagrange (8.43), allora la sua evoluzione verifica anche le equazioni (8.41)-(8.42) con reazioni vincolari che soddisfano il

requisito di idealità (8.40) su  $\Gamma$ . □

### Osservazioni 8.9.

(1) Le reazioni vincolari interne ad ogni corpo rigido del sistema  $\mathfrak{S}$  sono difficili da trattare, nel caso di un corpo continuo, dato che dovrebbero essere descritte da densità di forze piuttosto che da vere forze. Nel caso di corpi rigidi costituiti da un numero finito di particelle, l'idealità delle forze vincolari interne è valida separatamente dalle altre reazioni vincolari del sistema complessivo, come chiarito in (3) in Esempi 8.2. Nel caso continuo sarebbe necessaria una trattazione in termini di densità di forze, usando la nozione di *tensore degli sforzi* che non discuteremo in questa sede. Inoltre senza ulteriori precisazioni sulla caratterizzazione costitutiva del corpo rigido, risulta impossibile calcolare esplicitamente le reazioni vincolari su ogni punto interno ad un corpo rigido costituito da un numero sufficientemente elevato di punti, anche conoscendo il moto del sistema. Tuttavia, un punto importante da sottolineare è che nella nostra deduzione, per arrivare alle equazioni di Eulero-Lagrange per i sistemi vincolati, l'idealità dei vincoli (8.40) è stata assunta *solo* per le reazioni vincolari *non* interne ad ogni corpo rigido del sistema, dovute al vincolo di rigidità, ma solo per le reazioni vincolari che si esercitano tra corpi diversi e tra corpi e guide esterne.

(2) Dobbiamo precisare che il modello di corpo articolato è ancora piuttosto “astratto” e non consente di trattare situazioni fisicamente importanti, quali l'urto tra corpi (rigidi) costituenti il sistema, dato che in tale situazioni appaiono forze reattive impulsive (in teoria istantanee) delle quali non abbiamo tenuto conto nel modello di sistema articolato. Ulteriormente, nello stesso modo, i fenomeni d'attrito (le reazioni vincolari dovute all'attrito) sono generalmente impossibili da trattare con questo modello semplificato, eccetto casi particolari come la situazione di rotolamento di un corpo rigido sull'altro (o su una guida esterna), inglobata nella nozione stessa di vincolo olonomo nel caso di vincolo di rotolamento integrabile.

## 8.4 Proprietà elementari delle equazioni di Eulero Lagrange

In questa sezione esamineremo le proprietà elementari più importanti delle equazioni di Eulero-Lagrange. Per semplicità ci riferiremo a sistemi fisici costituiti da un numero finito di punti materiali, ma quasi tutto quanto diremo si estende al caso più generale di sistemi costituiti da sottosistemi dati da punti materiali e/o corpi rigidi estesi con opportuni riadattamenti e precisazioni.

### 8.4.1 Normalità delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Mostriamo ora che le equazioni di Eulero-Lagrange sono sempre scrivibili in forma normale. Dimostreremo quanto detto assumendo di lavorare con sistemi di punti materiali. Questo risultato, come sappiamo, assicura che le equazioni ammettano *una ed una sola soluzione per fissate condizioni iniziali*, sotto debite ipotesi di regolarità delle funzioni note che appaiono nelle equazioni di Eulero-Lagrange stesse.

Tenendo conto della forma (8.28) dell'energia cinetica, le equazioni di Eulero-Lagrange hanno

forma esplicita (notare che  $a_{hk} = a_{kh}$ ):

$$\sum_{h=1}^n 2a_{kh}(t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \frac{d^2 q^h}{dt^2} = G_k \left( t, q^1(t), \dots, q^n(t), \frac{dq^1}{dt}, \dots, \frac{dq^n}{dt} \right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (8.61)$$

dove le funzioni  $G_k$  si ottengono sommando l'espressione esplicita delle  $\mathcal{Q}_k$  a  $-2 \sum_h \frac{da_{kh}}{dt} \frac{dq^h}{dt}$

ed alle derivate dei termini  $\mathcal{T}_1|_{\mathcal{J}}, \mathcal{T}_0|_{\mathcal{J}}$ . Se i vincoli sono funzioni almeno  $C^3$  e le forze attive sono funzioni almeno  $C^1$ , i coefficienti  $a_{kh} = a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n)$  ed il secondo membro di (8.61) sono almeno di classe  $C^1$ . Se proviamo che la matrice quadrata  $a(t, q^1, \dots, q^n)$  dei coefficienti  $a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n)$  è invertibile (cioè  $\det a \neq 0$ ) per ogni scelta di  $(t, q^1, \dots, q^n)$ , abbiamo automaticamente provato che le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere in forma normale con secondo membro di classe  $C^1$  – la funzione  $(a^{-1})_{kh} = (a^{-1})_{kh}(t, q^1, \dots, q^n)$  risulta essere anch'essa di classe  $C^1$  se esiste, come si prova facilmente dall'espressione esplicita della matrice inversa – e questo assicura la validità del teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy connesso. È importante notare che, cambiando coordinate libere  $q'^h = q'^h(t, q^1, \dots, q^n)$  (unitamente a  $t' = t + \text{costante}$ ), per la nuova matrice quadrata  $a'$  di coefficienti  $a'_{ij}$  relativa alle nuove coordinate, risulta:  $a'_{ij} = \sum_{h,k} \frac{\partial q^k}{\partial q'^i} \frac{\partial q^h}{\partial q'^j} a_{kh}$ . Dato che la matrice jacobiana di coefficienti  $\frac{\partial q^r}{\partial q'^s}$  è non singolare,  $a$  è invertibile se e solo se lo è  $a'$ .

Consideriamo dunque il *nucleo* della matrice quadrata  $a$ , per una particolare scelta delle coordinate lagrangiane  $t, q^1, \dots, q^n$  che diremo tra poco. Vogliamo mostrare che tale nucleo contiene solo il vettore nullo e quindi  $a$  è biettiva.  $(c^1, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^m$  è nel nucleo di  $a$  se e solo se  $\sum_{h=1}^n a_{kh} c^h = 0$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ . In tal caso vale anche:  $\sum_{h,k=1}^n c^k c^h a_{kh} = 0$ . Dall'espressione (8.29) per la matrice  $a$ , questo è equivalente a dire che:

$$\sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_h c^h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \right) \cdot \left( \sum_k c^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \right) = 0, \quad \text{cioè} \quad \sum_{i=1}^N m_i \left\| \sum_h c^h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \right\|^2 = 0.$$

Dato che le masse  $m_i$  sono strettamente positive, giungiamo alla conclusione che deve essere

$$\sum_{h=1}^n c^h \frac{\partial x_i^j}{\partial q^h} = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N \text{ e } j = 1, 2, 3. \quad (8.62)$$

Mostriamo che (8.62), applicata alla matrice  $a$  di un preciso sistema di coordinate lagrangiane implica che  $c^1 = c^2 = \dots = c^n = 0$ , cioè il nucleo di  $a$  contiene solo il vettore nullo. Dalla Proposizione 8.1 risulta che le coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  possono sempre scegliersi localmente come: il tempo assoluto  $t$  e  $n$  tra le coordinate  $x_i^j$ . Senza perdere generalità (basta cambiare il nome alle coordinate  $x_i^j$ ) possiamo sempre assumere che le coordinate libere siano  $q^1 := x_1^1, q^2 := x_1^2$  e via di seguito fino a  $q^n$ . Scegliendo  $x_i^j = x_1^j$ , la (8.62) si riduce a  $c^1 = 0$ , scegliendo  $x_i^j = x_1^j$ ,

la (8.62) si riduce a  $c^2 = 0$  e via di seguito fino a  $c^n = 0$ . Quindi la matrice quadrata  $a$  è non singolare. Si osservi che valendo:

$$\sum_{h,k=1}^n c^k c^h a_{kh} = \sum_{i=1}^N m_i \left\| \sum_h c^h \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \right\|^2 \geq 0,$$

abbiamo anche provato che la matrice dei coefficienti  $a_{kh}$  è *strettamente definita positiva*.

**Osservazioni 8.10\*** Un modo più rapido di arrivare a  $c^1 = c^2 = \dots c^n = 0$  è il seguente, che però usa la nozione di vettore tangente ad una varietà. L'indipendenza funzionale dei vincoli assicura che  $q^1, \dots, q^n$  siano coordinate sulla sottovarietà  $\mathbb{Q}_t$ . usando le coordinate cartesiane su  $\Sigma_t^N$ ,  $x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3$ , l'identità (8.62) si riscrive:  $\sum_{h=1}^n c^h \sum_{j,i} \frac{\partial x_i^j}{\partial q^h} \frac{\partial}{\partial x_i^j} = \mathbf{0}$ , che possia-

mo infine riscrivere usando la (B.8):  $\sum_{h=1}^n c^h \frac{\partial}{\partial q^h} = \mathbf{0}$ . Questa identità è possibile solo se tutti i coefficienti  $c^h$  sono nulli, dato che i vettori  $\frac{\partial}{\partial q^h}$  formano una base dello spazio tangente a  $T_{\mathbf{c}_t} \mathbb{Q}_t$  e sono pertanto linearmente indipendenti.

Abbiamo provato la seguente proposizione che tiene conto del teorema 4.3 e della proposizione 4.2.

**Proposizione 8.3.** *Nelle ipotesi del teorema 8.1, in ogni sistema di coordinate locali naturali su  $\mathbb{V}^{n+1}$  adattate alle fibre,  $(t, q^1, \dots, q^n)$ , la matrice quadrata  $n \times n$ , definita in (8.29), dei coefficienti  $a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n)$  è strettamente definita positiva per ogni scelta di  $(t, q^1, \dots, q^n)$ . Di conseguenza le equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) sono sempre scrivibili in forma normale:*

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} = z^k \left( t, q^1(t), \dots, q^n(t), \frac{dq^1}{dt}(t), \dots, \frac{dq^n}{dt}(t) \right) \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n. \quad (8.63)$$

*Il secondo membro dell'identità di sopra è una funzione di classe  $C^1$  congiuntamente in tutte le sue variabili quando i vincoli sono funzioni almeno  $C^3$  su  $\mathbb{V}^{N+1}$  e le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  delle forze attive sono funzioni almeno  $C^1$  delle coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  congiuntamente (oppure, equivalentemente, le forze attive  $\mathbf{F}_{\mathcal{S}_i}$  sono funzioni almeno  $C^1$  del tempo, delle posizioni e delle velocità congiuntamente dei punti del sistema). In tal caso vale il teorema di esistenza ed unicità globale (teorema 4.5) per il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) se sono assegnati dati di Cauchy  $q^k(t_0) = q_0^k$ ,  $\dot{q}^k(t_0) = \dot{q}_0^k$  per  $k = 1, \dots, n$ .*

**Osservazioni 8.11.** Il risultato ottenuto si estende banalmente alla situazione in cui il sistema fisico è costituito, in generale, da punti materiali e/o corpi rigidi continui, nel caso in cui il tensore d'inerzia baricentrale di ogni corpo rigido continuo sia strettamente positivo, in modo da produrre matrici dei coefficienti  $a_{hk}$  strettamente positive e quindi invertibili. Consideriamo

allora il caso in cui il sistema fisico sia dato da un unico corpo rigido continuo *non sottoposto a vincoli* con tensore d'inerzia baricentrale strettamente positivo. Dato che abbiamo precedentemente provato che le equazioni di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni newtoniane del moto – cioè alle due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi (vedi la Sezione 6.3) – il risultato di esistenza ed unicità provato sopra è equivalente, per un corpo rigido continuo, ad un analogo risultato per il sistema di equazioni differenziali costituito dalle due equazioni cardinali della dinamica. Il tutto, ovviamente, se le espressioni funzionali delle forze sono sufficientemente regolari.

#### 8.4.2 Spaziotempo degli stati cinetici ed invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange

La forma delle equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) deve essere la stessa indipendentemente dalle coordinate naturali usate localmente su  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Questo segue dal fatto che noi non abbiamo scelto un particolare sistema, ma siamo rimasti con la scelta generica. Vogliamo esaminare più a fondo la questione. Per procedere consideriamo dunque due insiemi aperti  $U, V \subset \mathbb{V}^{n+1}$ , dotati di coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n$  rispettivamente e con  $U \cap V \neq \emptyset$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange varranno sia su  $U$  che su  $V$  e quindi, in particolare su  $U \cap V$ . In tale insieme, i due membri di (8.32) riferiti a coordinate non primate possono essere confrontati con i corrispondenti riferiti alle coordinate primate. Per eseguire il confronto dobbiamo conoscere la relazione che intercorre tra le coordinate usate. Riguardo alle coordinate non puntate valgono le leggi di trasformazione (8.12)-(8.13). Le coordinate puntate hanno uno status più complesso. Le coordinate puntate sono infatti considerate *indipendenti* da quelle puntate nelle equazioni di Eulero-Lagrange: esse diventano dipendenti solo sulle soluzioni delle equazioni. Se  $q^k = q^k(t)$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange avremo che:

$$\dot{q}'^k(t) = \frac{dq'^k}{dt'} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \frac{dq^h}{dt} + \frac{\partial q'^k}{\partial t} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \dot{q}^h(t) + \frac{\partial q'^k}{\partial t}.$$

Possiamo assumere che queste relazioni valgano *anche se non è stato fissato alcun moto del sistema*, visto che su ogni moto si riducono alle corrette relazioni. Assumeremo quindi che, nella situazione detta:

$$t' = t + c, \quad (8.64)$$

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (8.65)$$

$$\dot{q}'^k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial q'^k}{\partial t}. \quad (8.66)$$

Si osservi che ne segue l'identità utile nella pratica:

$$\frac{\partial \dot{q}'^k}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial q'^k}{\partial q^h}, \quad (8.67)$$

e anche, su ogni curva  $q'^k = q'^k(t)$  ed identificando le variabili puntate con le derivate temporali di quelle non puntate:

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \right) = \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial q'^k} . \quad (8.68)$$

Assumendo valide le trasformazioni (8.64), (8.65) e (8.66) seguono subito le ulteriori utili identità :

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial q^h} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^h} , \quad (8.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}'^k} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^h} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^h} , \quad (8.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial q'^k} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^h} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^h} . \quad (8.71)$$

Diamo la definizione di *spaziotempo degli stati cinetici* detto anche *spaziotempo degli atti di moto*. La costruzione ed il significato rigoroso di tale spazio nell'ambito della teoria dei fibrati sono presentati nella sezione 8.5.

**Definizione 8.4. (Spaziotempo degli stati cinetici o atti di moto)** Lo **spaziotempo degli stati cinetici** o **atti di moto**  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , costruito sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ , è una varietà differenziabile di dimensione  $2n + 1$  che ammette un atlante privilegiato le cui carte locali sono dette **sistemi di coordinate locali naturali di**  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Indicando con  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  le coordinate di una generica carte locale naturale, valgono le seguenti condizioni.

(i) Le coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  si identificano con le coordinate di un sistema di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  – in particolare la coordinata  $t$  si identifica a meno di costanti additive con il tempo assoluto, visto come funzione differenziabile suriettiva (non singolare)  $T : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  – e le rimanenti coordinate  $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ , per ogni scelta di  $t, q^1, \dots, q^n$ , assumono valori su *tutto*  $\mathbb{R}^n$ . Il suddetto sistema di coordinate su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è univocamente fissato da quello su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e ogni sistema di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  può esser completato ad un sistema di coordinate suddette di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .

(ii) I sistemi di coordinate locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  sono connessi da trasformazioni di coordinate differenziabili con inversa differenziabile date in (8.64), (8.65), (8.66).

Lo **spazio degli stati cinetici al tempo**  $t$  anche noto come **spazio degli atti di moto al tempo**  $t$ , è ogni sottovarietà (embedded)  $2n$ -dimensionale  $\mathbb{A}_t := T^{-1}(t)$  di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che si ottiene fissando un valore di tempo assoluto  $t \in \mathbb{R}$ <sup>5</sup>. Uno **stato cinetico al tempo**  $t$ , detto anche **atto di moto al tempo**  $t$ , è ogni punto di  $\mathbb{A}_t$ .  $\diamond$

#### Osservazioni 8.12.

(1) Si osservi che le  $(n + 1)$ -ple  $(t, q^1, \dots, q^n)$  variano in insiemi aperti di  $\mathbb{R}^{n+1}$  la cui forma

<sup>5</sup> $A(\mathbb{V}^{n+1})$  risulta quindi essere l'unione disgiunta di tutti gli spazi  $\mathbb{A}_t$  con  $t \in \mathbb{R}$ .

può essere diversa a seconda del caso, viceversa le  $n$ -ple  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  variano sempre su *tutto*  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Ogni spazio degli stati cinetici al tempo  $t$ ,  $\mathbb{A}_t$ , si dice anche **fibra di**  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  **al tempo**  $t$  pertanto i sistemi di coordinate locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  sono anche detti sistemi di coordinate locali **adattate alle fibre** di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Nelle ipotesi fatte si dimostra facilmente (il lettore lo provi per esercizio!) che, per ogni fissata configurazione  $\mathbb{C}_t$  al tempo  $t$ , considerando due sistemi di coordinate naturali locali definite attorno a tale configurazione, la matrice di coefficienti  $\frac{\partial q'^k}{\partial q^h}|_{\mathbb{C}_t}$  è non singolare (ha determinante non nullo).

(3) Le equazioni di Eulero-Lagrange sono equazioni differenziali, per il momento definite localmente, in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che determinano, localmente, curve di classe  $C^1$ ,  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \subset A(\mathbb{V}^{n+1})$ , parametrizzate nella coordinata privilegiata data dal tempo assoluto  $t$ . In coordinate locali naturali si ha quindi:

$$I \ni t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$$

Questo tipo di curve, tenendo conto della struttura geometrico differenziale di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  si dicono anche **sezioni** (vedi il paragrafo 8.5).

Si ha seguente proposizione sull'invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange.

**Proposizione 8.4.** *Nelle ipotesi del teorema 8.1, siano  $U, V \subset A(\mathbb{V}^{n+1})$  sono insiemi aperti, dotati di coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  rispettivamente e con  $U \cap V \neq \emptyset$ , e pertanto valgano le leggi di trasformazione (8.65), (8.64), (8.66). In tal caso, fissato un riferimento  $\mathcal{I}$ , con ovvie notazioni valgono le relazioni su  $U \cap V$ :*

$$\mathcal{T}'|_{\mathcal{I}}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (8.72)$$

*inoltre:*

$$\mathcal{Q}'_k|_{\mathcal{I}}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \mathcal{Q}_h|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (8.73)$$

*Infine, su ogni curva  $q^k = q^k(t)$  (per  $k = 1, \dots, n$ ) non necessariamente soddisfacente le equazioni di Eulero-Lagrange, vale ad ogni istante:*

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \mathcal{T}'|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{q}'^k} - \frac{\partial \mathcal{T}'|_{\mathcal{I}}}{\partial q'^k} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}}{\partial q^h} \right], \quad (8.74)$$

*quando si assuma che  $\dot{q}'^k = \frac{dq'^k}{dt'}$  e  $\dot{q}^h = \frac{dq^h}{dt}$ .* ◇

**Dimostrazione.** Le prime due identità si dimostrano per computo diretto usando le definizioni delle grandezze coinvolte e la loro verifica non presenta alcuna difficoltà. La terza identità (8.74) presenta calcoli complicati se non eseguiti opportunamente. Dimostriamola. Il secondo membro si decompone in due parti:

$$- \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}}{\partial q^h} \quad (8.75)$$



e

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} = \sum_{h=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} \right) - \sum_{h=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \right) \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h}.$$

Usando (8.67) si ha:

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} = \sum_{h=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} \right) - \sum_{h=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \right) \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h}.$$

Dato che vale (8.70), possiamo ancora scrivere:

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}'^k} - \sum_{h=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \right) \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h}.$$

Sommando il risultato a (8.75), concludiamo che il secondo membro di (8.74) vale:

$$\frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}'^k} - \sum_{h=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \right) \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} + \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^h} \right].$$

Su ogni curva  $q^h = q^h(t)$ , pensando le variabili puntate come le derivate temporali di quelle non puntate si può usare (8.68) ottenendo che il secondo membro di (8.74) risulta essere:

$$\frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}'^k} - \sum_{h=1}^n \left[ \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^h} + \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^h} \right].$$

Dato che, infine, vale (8.71), concludiamo che il secondo membro di (8.74) vale:

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial \mathcal{T}'|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}'^k} - \frac{\partial \mathcal{T}'|_{\mathcal{J}}}{\partial q'^k},$$

dove si è tenuto conto che la derivazione in  $t$  equivale a quella in  $t'$  dato che le due variabili differiscono per una semplice costante additiva, per cui (8.74) è verificata.  $\square$

Abbiamo l'immediato corollario:

**Corollario.** *Nelle ipotesi della proposizione 8.4 si consideri la curva  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \subset A(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^2$  su espressa, in coordinate locali naturali, come:*

$$I \ni t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$$

(dove  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto) che risolve le equazioni di Eulero Lagrange in una carta locale di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  rispetto alle funzioni  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q}|_{\mathcal{J}}$ . La stessa curva espressa in coordinate  $t', q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  di un'altra carta locale naturale che include completamente la curva,

risolverà ancora le equazioni di Eulero-Lagrange rispetto alle funzioni  $\mathcal{T}'|_{\mathcal{J}}, \mathcal{Q}'|_{\mathcal{J}}$  sopra indicate.

**Osservazioni 8.13.** Il risultato ha un'importante conseguenza. Noi abbiamo fino ad ora costruito la teoria delle equazioni di Eulero-Lagrange in un sistema di coordinate locali (naturali), sulla varietà differenziabile  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , scelto arbitrariamente. Tuttavia, in generale  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  non è ricopribile con una sola carta locale e considerando una soluzione delle equazioni di E-L in una carta locale  $(U, \psi)$ , ci aspettiamo che tale soluzione possa arrivare fino alla frontiera  $\mathcal{F}(U)$  di tale carta. Dal punto di vista fisico ci si aspetta che la soluzione sia estendibile fuori da tale carta, dato che la carta scelta non ha in generale alcun significato fisico privilegiato. Possiamo provare ad usare diversi sistemi di coordinate incollando di volta in volta le varie soluzioni, ma a priori non è detto che la teoria complessiva risulti coerente. La proposizione dimostrata ci dice che i vari ingredienti usati nella formulazione delle equazioni di E-L, cambiando coordinate, si comportano in modo coerente. Se infatti  $(V, \phi)$  è un'altra carta locale con  $V \cap U \neq \emptyset$ , la soluzione  $\gamma_U$  suddetta, raggiungerà un punto  $\gamma_U(t_1) \in U \cap V$ . Possiamo allora reimpostare il problema di Cauchy delle equazioni di E-L ora *trascritte nelle coordinate in  $V$* , usando come condizioni iniziali al tempo  $t_1$ ,  $\gamma_U(t_1)$  e  $\dot{\gamma}_U(t_1)$ . L'unica soluzione  $\gamma_V$  che otteniamo si estenderà in generale su  $V$  *anche fuori da  $U$* . Le curve  $\gamma_U$  e  $\gamma_V$ , per costruzione si raccorderanno differenziabilmente in  $U \cap V$ . È chiaro che per questa via si ottiene alla fine una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange definita, potenzialmente, su *tutto*  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .

### 8.4.3 Lagrangiane

Supponiamo che le forze attive agenti sul sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  (vincolato da vincoli olonomi ideali) siano tutte conservative nel riferimento  $\mathcal{J}$ . Esisterà pertanto una funzione energia potenziale:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(P_1, \dots, P_N)$$

e varrà

$$\mathbf{F}_{i\mathcal{J}} = -\nabla_{P_i} \mathcal{U}(P_1, \dots, P_N).$$

Possiamo indebolire la richiesta, supponendo più semplicemente che esista una funzione, detta **potenziale delle forze**,  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, P_1, \dots, P_N)$ , in generale dipendente dal tempo (per cui non vale il teorema di conservazione dell'energia meccanica), per cui valga

$$\mathbf{F}_{i\mathcal{J}} = \nabla_{P_i} \mathcal{V}(t, P_1, \dots, P_N).$$

In riferimento a coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , e fissata un'origine  $O$  solidale con  $\mathcal{J}$  in modo che  $P_i = \mathbf{x}_i + O$ , le componenti lagrangiane delle forze attive avranno forma

$$\mathcal{Q}_k(t, q^1, \dots, q^n) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{V}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{\partial}{\partial q^k} \mathcal{V}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Inserendo questa espressione per le componenti lagrangiane delle forze attive nelle equazioni di Eulero-Lagrange, si ha immediatamente che esse possono essere riscritte come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}})}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial(\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}})}{\partial q^k} = 0, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

dove si è tenuto conto del fatto che  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  non dipende dalle coordinate  $\dot{q}^k$ . Introducendo la **lagrangiana del sistema**:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n), \quad (8.76)$$

le equazioni di Eulero-Lagrange prendono forma classica, per  $\mathcal{L} := \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (8.77)$$

Diremo che un sistema  $\mathfrak{S}$  di punti materiali sottoposto a vincoli ideali olonomi **ammette lagrangiana**, quando le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema si possono scrivere nella forma (8.77) per qualche lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Questo accade in particolare quando, in un riferimento  $\mathcal{J}$ , tutte le forze attive ammettono un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  ed in tal caso  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$ . Nel caso più generale, alcune forze non saranno esprimibili tramite un potenziale, ma ammetteranno comunque componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$ . In questo caso le equazioni di Eulero-Lagrange prendono la forma mista:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = Q_k, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (8.78)$$

dove la lagrangiana tiene conto delle sole forze che ammettono potenziale e nelle  $Q_k$  si tiene conto delle rimanenti forze attive.

Nel caso in cui si lavori con sistemi fisici costituiti da sottosistemi dati da punti materiali e/o sistemi rigidi continui, la definizione di lagrangiana è la stessa data sopra, pensando le forze  $\mathbf{F}_{i,\mathcal{J}}$  come forze applicate a fissati corrispondenti punti  $P_i$  degli eventuali corpi rigidi continui quando necessario.

### Esempi 8.3.

1. Un caso elementare è in seguente. Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali,  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, non sottoposti a vincoli, ma interagenti tramite forze dedotte da un'energia potenziale totale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ .  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento inerziale nel quale i punti sono individuati da vettori posizione  $\mathbf{x}_1 := P_1 - O, \dots, \mathbf{x}_n := P_N - O$ .  $O$  è l'origine di un

sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  e le componenti di ogni  $\mathbf{x}_i$  sono le componenti di  $P - O$  in tale sistema di coordinate. La lagrangiana del sistema sarà allora data da, usando le componenti di tutti i vettori  $\mathbf{x}_i$  come coordinate libere, con ovvie notazioni:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange non sono altro che le equazioni di Newton per il sistema di punti materiali considerati nel sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ . Infatti, se  $\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^3 x_i^k \mathbf{e}_k$ , allora:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^k} - \frac{\partial}{\partial x_i^k} \right) \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \right) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2}{\partial \dot{x}_i^k} + \frac{\partial}{\partial x_i^k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= m_i \frac{d\dot{x}_i^k}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i^k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \end{aligned}$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange, scritte come equazioni del secondo ordine (usando  $\dot{x}_i^k = dx_i^k/dt$ ) diventano quelle di Newton:

$$m_i \frac{d^2 x_i^k}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial x_i^k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad \text{per } i = 1, \dots, N \text{ e } k = 1, 2, 3.$$

**2.** Si consideri un sistema fisico costituito da tre punti materiali  $P, P_1, P_2$  di masse  $m, m_1, m_2$  rispettivamente.  $P_1$  e  $P_2$  sono connessi da un'asta rigida ideale di lunghezza  $d > 0$  e priva di peso. Il punto  $P$  è connesso all'asta tramite una molla di costante elastica  $K > 0$  attaccata al centro di massa  $G$  dell'asta (tenuto conto delle masse dei due punti). Si suppone che la molla abbia lunghezza nulla a riposo. Non sono presenti altre forze sui punti del sistema, escluse ovviamente le reazioni vincolari. Vogliamo scrivere le equazioni del moto (quindi equazioni pure di movimento) del sistema fisico, descrivendolo in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ .

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  con origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Un insieme di coordinate libere possono essere le seguenti 8 coordinate: le tre componenti  $x^1, x^2, x^3$ , rispetto agli assi detti, del vettore posizione  $P - O$ , le tre componenti  $X^1, X^2, X^3$ , rispetto agli assi detti, del vettore posizione  $G - O$ , i due angoli polari  $\theta, \phi$  del vettore posizione  $P_2 - G$  per un sistema di coordinate cartesiane con origine  $G$  ed assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (gli stessi di  $\mathcal{J}$ ) individuanti il sistema di riferimento del centro di massa  $\mathcal{J}_G$ .

Dato che l'unica forza attiva è conservativa, dovuta alla molla, le equazioni di Eulero-Lagrange si potranno riferire alla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ . Usando il teorema di König (teorema 5.2) per valutare l'energia cinetica rispetto ad  $\mathcal{J}$  del sistema dei due punti  $P_1, P_2$  si ha:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 m(\dot{x}^j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 M(\dot{X}^j)^2 + \mathcal{T}|_{\mathcal{J}_G},$$

dove  $M := m_1 + m_2$ . L'energia cinetica riferita al sistema del centro di massa  $\mathcal{J}_G$  dei due punti è semplicemente la somma delle energie cinetiche di ciascun punto valutate in  $\mathcal{J}_G$ . Indichiamo con  $d_1$  e  $d_2$  le distanze di  $P_1$  e  $P_2$  da  $G$ , unicamente determinate dalle relazioni  $m_1 d_1 = m_2 d_2$  e  $d_1 + d_2 = d$ . Consideriamo il punto  $P_2$ . Il suo vettore posizione è  $P - G = d_1 \mathbf{e}_r$  dove  $\mathbf{e}_r$  è il versore radiale delle coordinate polari centrate in  $G$  e riferite agli assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Di conseguenza, usando l'esercizio 2 negli esercizi 2.2:

$$\mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{J}_g} = d_1 \dot{\mathbf{e}}_r = d_1(\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi) .$$

Dato che  $P_1 - G = -\frac{d_1}{d_2}(P_2 - G)$  avremo anche che

$$\mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{J}_g} = -d_2 \dot{\mathbf{e}}_r = -d_2(\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi) .$$

In definitiva, dato che i versori  $\mathbf{e}_\theta$  e  $\mathbf{e}_\phi$  sono ortogonali, quadrando le espressioni di sopra troviamo che

$$(\mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{J}_g})^2 = d_2^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

e

$$(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}_g})^2 = d_1^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) .$$

Pertanto:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 (\dot{x}^j)^2 + \frac{M}{2} \sum_{j=1}^3 (\dot{X}^j)^2 + \frac{1}{2} (m_1^2 d_1^2 + m_2 d_2^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) .$$

L'energia potenziale della molla (che in questo caso non dipende dal riferimento), vale

$$\mathcal{U} = \frac{K}{2} \sum_{j=1}^3 (X^j - x^j)^2 .$$

Concludiamo che la lagrangiana del sistema dei tre punti materiali riferita al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{J}$  è:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 (\dot{x}^j)^2 + \frac{M}{2} \sum_{j=1}^3 (\dot{X}^j)^2 + \frac{1}{2} (m_1^2 d_1^2 + m_2 d_2^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{K}{2} \sum_{j=1}^3 (X^j - x^j)^2 .$$

Abbiamo quindi un sistema di equazioni di Eulero-Lagrange, dato da 8 equazioni che si ottengono da (8.77) per  $q^k$  dati rispettivamente da  $x^k, X^k$  con  $k = 1, 2, 3$  e  $\theta, \phi$ . Le equazioni sono le seguenti.

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -K(x^k - X^k) , \\ M \frac{d^2 X^k}{dt^2} = -K(X^k - x^k) , \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta , \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} \sin^2 \theta \right) = 0 . \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, 2, 3,$$

Il sistema di equazioni è del secondo ordine e scrivibile in forma normale se  $\sin \theta \neq 0$ , quando ciò accade siamo in realtà fuori dal dominio delle coordinate polari. Dato che il secondo membro del sistema che si ottiene passando a forma normale è di classe  $C^\infty$ , il sistema di equazioni ammette una sola soluzione, il moto, una volta fissate condizioni iniziali date  $x^i(t_0)$ ,  $X^i(t_0)$ ,  $\theta(t_0)$  e  $\phi(t_0)$  e le corrispondenti derivate  $(dx^i/dt)(t_0)$ ,  $(dX^i/dt)(t_0)$ ,  $(d\theta/dt)(t_0)$  e  $(d\phi/dt)(t_0)$ .

**3.** Studiando sistemi fisici generali  $\mathfrak{S}$  composti da due (o più) sottosistemi  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ , la lagrangiana del sistema (riferita ad un sistema di riferimento  $\mathcal{I}$  che sottintendiamo) ha spesso una struttura della forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_I,$$

dove  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  sono le lagrangiane dei due sistemi pensati come non interagenti tra di loro: ognuna di tali lagrangiane contiene *solo* coordinate riferite al corrispondente sottosistema, e  $\mathcal{L}_I$  è la *lagrangiana d'interazione* che contiene le coordinate di *entrambi* i sottosistemi. L'esempio più semplice è dato da un sistema composto da due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, con coordinate naturali  $(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$  usando le stesse convenzioni che nell'esempio (1) di sopra (rispetto al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ ). In tal caso le lagrangiane libere sono, per esempio:

$$\mathcal{L}_1 := \frac{m\dot{\mathbf{x}}_1^2}{2}, \quad \mathcal{L}_2 := \frac{m\dot{\mathbf{x}}_2^2}{2},$$

mentre una possibile lagrangiana d'interazione è quella data da una forza conservativa associata ad un'energia potenziale che dipende dalle posizioni dei due punti materiali:

$$\mathcal{L}_I := -\mathcal{U}(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|).$$

Considerando sistemi composti da più sottosistemi la lagrangiana d'interazione può essere spesso decomposta in lagrangiane cosiddette: “a due corpi”, “a tre corpi” e via di seguito. Per esempio con 3 particelle, si può avere:

$$\mathcal{L}_I = -\mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) - \mathcal{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

dove  $\mathcal{U}^{(2)}$  rappresenta l'interazione (conservativa in questo caso) a due corpi e  $\mathcal{U}^{(3)}$  quella a tre corpi. Nelle applicazioni pratiche, per esempio in meccanica statistica, si usano a volte metodi approssimati in cui in prima approssimazione si trascura la lagrangiana d'interazione o solo una sua parte (es. quella a tre corpi) e se ne tiene conto solo nelle approssimazioni successive.

**4.** Consideriamo un sistema meccanico articolato costituito da due dischi omogenei  $S_1$  e  $S_2$ , di raggio  $r$  e della stessa massa  $M$ , e un punto materiale  $P$  di massa  $m$  disposti nel modo seguente.  $S_1$  è fissato nel suo centro  $O$  nel piano verticale nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , mentre  $S_2$  è vincolato a rotolare a contatto con  $S_1$  rimanendo nello stesso piano verticale. Infine  $P$  è saldato sulla frontiera del disco  $S_2$ . Sul sistema articolato, oltre alle reazioni vincolari supposte soddisfare il requisito di idealità dei vincoli, agisce la forza peso con accelerazione gravitazionale  $-g\mathbf{e}_z$  e la forza di una molla ideale di massa nulla, lunghezza a riposo nulla, costante elastica  $k$ , attaccata con un estremo in  $O$  e l'altro in  $P$ . Vogliamo scrivere la lagrangiana di questo sistema. Senza tenere conto del vincolo di rotolamento, il sistema avrebbe 3 gradi di libertà. Il vincolo

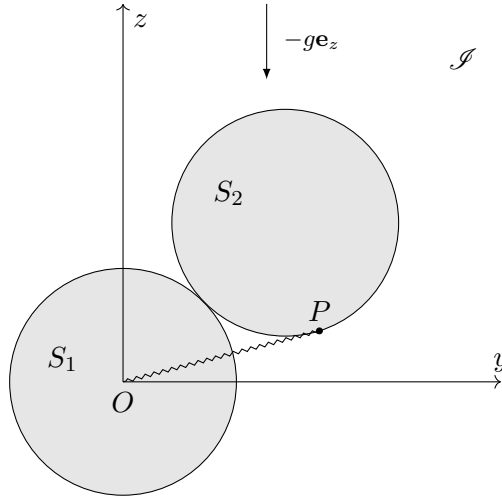


Figura 8.2: Illustrazione dell'esempio 8.3.4.

di rotolamento, come vedremo, riduce i gradi di libertà a 2.

Per prima cosa individuiamo la configurazione di  $S_1$  attraverso l'angolo  $\theta_1$  calcolato tra un fissato raggio di  $S_1$  e la semiretta verticale uscente da  $O$ , in modo tale che  $\theta$  sia crescente per una rotazione antioraria. Indichiamo con  $\theta_2$  l'analogo angolo per  $S_2$  riferito alla semiretta verticale che esce dal centro  $O'$  di  $S_2$  ed al raggio che individua  $P$ . Indichiamo infine con  $\phi$  l'angolo tra la semiretta verticale uscente da  $O$  e il segmento  $O' - O$ . Il vincolo di rotolamento tra i due dischi – cioè la richiesta che i due punti di contatto dei due dischi abbiano velocità relativa nulla – impone la relazione, come si verifica facilmente:  $r\dot{\theta}_1 = 2r\dot{\phi} - r\dot{\theta}_2$ . Di conseguenza possiamo ricavare  $\phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  assumendo che per  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  il punto  $P$  si trovi sulla semiretta verticale uscente da  $O$  che passa per  $O'$  che è la situazione nella quale lavoreremo (il caso generico è del tutto simile). L'energia cinetica del sistema sarà allora data dalla somma delle 3 energie cinetiche dei costituenti il sistema, nell'ordine  $S_1$ ,  $S_2$  e  $P$ :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}_1^2 + \left( \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}M(2r)^2\dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2}mr^2[\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}_2 \cos(\phi - \theta_2)] .$$

Tenendo conto del legame tra gli angoli dovuto al vincolo di rotolamento abbiamo:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}_1^2 + \left( \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}Mr^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right) + \frac{1}{2}mr^2 \left[ \frac{1}{4}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right] .$$

Cioè:

$$\mathcal{T} = Mr^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + \frac{mr^2}{8} \left[ \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \left( 1 + 4 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right) + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \left( 4 + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \right) \right] ,$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{aligned}\mathcal{T} = & \dot{\theta}_1^2 \left( Mr^2 + \frac{mr^2}{8} \right) + \dot{\theta}_2^2 \left[ Mr^2 + \frac{mr^2}{8} \left( 1 + 4 \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \right] \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left[ Mr^2 + \frac{mr^2}{4} \left( 4 + \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \right] .\end{aligned}$$

L'energia potenziale è data dalla somma delle tre energie potenziali gravitazionali (possiamo assumere essere nulla quella di  $S_1$ ) e di quella della molla:

$$\mathcal{U} = Mg \cos \phi + mg(\cos \phi + \cos \theta_2) + kr \cos(\phi - \theta_2) ,$$

dove abbiamo trascurato una costante additiva all'energia potenziale della molla. Tenendo conto della relazione tra gli angoli:

$$\mathcal{U} = Mg \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + mg \left( \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \cos \theta_2 \right) + kr \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) .$$

Raccogliendo:

$$\mathcal{U} = (Mg + mg) \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + mg \cos \theta_2 + kr \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) .$$

Possiamo concludere dicendo che la lagrangiana del sistema considerato è:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = & \dot{\theta}_1^2 \left( Mr^2 + \frac{mr^2}{8} \right) + \dot{\theta}_2^2 \left[ Mr^2 + \frac{mr^2}{8} \left( 1 + 4 \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \right] \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left[ Mr^2 + \frac{mr^2}{4} \left( 4 + \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \right) \right] - (Mg + mg) \cos \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - mg \cos \theta_2 \\ & - kr \cos \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) .\end{aligned}$$

**5.** Si potrebbe pensare che un sistema fisico sottoposto anche a forze d'attrito non ammetta descrizione lagrangiana. Se tali forze sono d'*attrito viscoso*, l'affermazione è falsa: è possibile infatti descrivere la dinamica del sistema tramite una lagrangiana. A titolo d'esempio, consideriamo il caso elementare di un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x} = P - O$  nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , non soggetto a vincoli, ma sottoposto ad una forza conservativa in  $\mathcal{I}$  con energia potenziale  $\mathcal{U}$  ed a una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$ . Le equazioni del moto nel riferimento  $\mathcal{I}$  saranno dunque:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \mathcal{U}(\mathbf{x}) - \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} .$$

Queste stesse equazioni si ottengono immediatamente dalla lagrangiana, lasciamo la verifica (che è immediata) al lettore:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := e^{\frac{\gamma t}{m}} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - \mathcal{U}(\mathbf{x}) \right) . \quad (8.79)$$



#### 8.4.4 Cambiamento di riferimento inerziale e non unicità della lagrangiana

Consideriamo un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali con  $n$  gradi di libertà, descritto dalle componenti lagrangiane delle forze attive  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  riferite ad un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  ed all'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$ . Non facciamo alcuna ipotesi sulla natura delle coordinate  $q^1, \dots, q^n$  che possono non essere solidali con alcuno dei riferimenti considerati. Per costruzione l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , il potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n)$  e la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  devono essere pensati *campi scalari* su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  quando il riferimento  $\mathcal{J}$  è fissato, ma si cambiano le coordinate libere. Tenendo fisso  $\mathcal{J}$ , ma cambiando le coordinate naturali usate all'inizio  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e passando a nuove coordinate naturali (ovviamente locali ed adattate alle fibre), la funzione lagrangiana nelle nuove coordinate locali sarà quindi data semplicemente da, assumendo per semplicità  $n = 1$ , la generalizzazione essendo ovvia):

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(t(t'), q(t', q'), \dot{q}(t', q' \dot{q}')) .$$

Valgono analoghi risultati per gli altri campi scalari menzionati sopra. Vediamo cosa succede tenendo fisse le coordinate libere, ma cambiando il sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  e passando a  $\mathcal{J}'$ , limitandoci per ora al caso in cui  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$  siano inerziali. Ci aspettiamo che le nuove equazioni di Eulero-Lagrange siano le stesse ottenute lavorando rispetto a  $\mathcal{J}$ , dato che non vi è alcun motivo fisico per preferire uno dei due riferimenti e le coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n$  non sono state scelte in relazione particolare con alcuno dei due riferimenti. Le componenti lagrangiane delle forze attive rimarranno le stesse come osservato in (1) di Osservazioni 8.7, ma l'energia cinetica riferita a  $\mathcal{J}'$ ,  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}$ , differirà invece da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$  che è riferita a  $\mathcal{J}$ . Tenendo conto che, per ogni punto  $P_i$  di  $\mathfrak{S}$ :

$$\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} ,$$

dove  $\mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}}$  è costante nel tempo e nello spazio (essendo i due riferimenti in moto relativo rettilineo uniforme) si trova immediatamente che:

$$\Delta \mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'} = \frac{M}{2} (\mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}})^2 + \mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}'} ,$$

dove  $M := \sum_{i=1}^N m_i$ . Se  $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}'_i(t, q^1, \dots, q^n)$  è il vettore posizione del punto  $P_i$  nel riferimento  $\mathcal{J}'$  vale:

$$\mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}'} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial t} ,$$

per cui, *sul moto*:

$$\Delta \mathcal{T} = \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} (\mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}})^2 t + \mathbf{v}_{\mathcal{J}'|_{\mathcal{J}}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i(t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \right) .$$

Lavorando su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , non pensando più le  $\dot{q}^k$  come le derivate delle  $q^k$ , possiamo scrivere che

$$\Delta \mathcal{T} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k + \frac{\partial g}{\partial t} , \quad (8.80)$$

dove  $g = g(t, q^1, \dots, q^n)$  è la funzione su  $\mathbb{V}^{n+1}$  definita all'interno delle parentesi tonde nel secondo membro dell'identità precedente:

$$g(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{M}{2}(\mathbf{v}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}})^2 t + \mathbf{v}_{\mathcal{S}'|\mathcal{S}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i(t, q^1(t), \dots, q^n(t)) .$$

Si verifica immediatamente che, con  $\Delta\mathcal{T}$  della forma (8.80):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta\mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \Delta\mathcal{T}}{\partial q^k} = 0 .$$

La conseguenza immediata di questo risultato è che il termine  $\Delta\mathcal{T}$  non fornisce alcun contributo alle equazioni di Eulero-Lagrange e pertanto, tenuto conto che le componenti lagrangiane delle forze (vere) attive non dipendono dal riferimento, possiamo concludere che: *le equazioni di Eulero-Lagrange associate al riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange associate al riferimento inerziale  $\mathcal{S}'$ .*

Questo risultato ha come implicazione immediata il fatto che, se un sistema fisico ammette lagrangiana, questa non è univocamente determinata. Supponiamo infatti che le componenti lagrangiane delle forze attive siano date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  e pertanto il sistema fisico ammetta lagrangiana, riferita al sistema inerziale  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n) .$$

Se cambiamo riferimento inerziale passando a  $\mathcal{S}'$ , le componenti lagrangiane delle forze attive in  $\mathcal{S}'$  saranno ancora date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}'}(t, q^1, \dots, q^n)$  che coincide con  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n)$  data l'invarianza delle componenti lagrangiane delle forze attive al variare del riferimento inerziale. Lasciamo la semplice prova di ciò al lettore. Le uniche differenze tra le due lagrangiane riguarderanno l'energia cinetica, pertanto:

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{L}|_{\mathcal{S}'} = \Delta\mathcal{T} .$$

Come già osservato sopra, nel caso in esame, il termine  $\Delta\mathcal{T}$  non fornisce contributo alle equazioni di Eulero-Lagrange che risultano pertanto le stesse. Abbiamo ottenuto che, per un sistema fisico fissato, esistono almeno due lagrangiane che forniscono le stesse equazioni di Eulero-Lagrange. In questo caso le due lagrangiane hanno un preciso significato fisico essendo riferite a due distinti riferimenti inerziali. In ogni caso il risultato è del tutto generale: se aggiungiamo ad una lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  una funzione su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che localmente ha, in coordinate locali naturali, una struttura del tipo:

$$\Delta\mathcal{L} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial g}{\partial t} , \quad (8.81)$$

dove  $g = g(t, q^1, \dots, q^n)$  è una funzione arbitraria assegnata su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , allora le equazioni prodotte da  $\mathcal{L}' := \mathcal{L}|_{\mathcal{S}} + \Delta\mathcal{L}$  quando  $\mathcal{L}'$  è inserita nelle (8.77), sono le stesse prodotte da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ . La

dimostrazione è la stessa di prima, basata sul risultato di verifica immediata che, con le definizioni date:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \Delta \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0.$$

**Osservazioni 8.14.**

(1) Se  $g : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è un campo scalare (di classe  $C^1$  almeno) allora esiste un unico campo scalare  $G : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  (di classe  $C^0$  almeno) tale che in ogni sistema di coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  valga

$$G(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k.$$

La prova di ciò è elementare, basta mostrare che cambiando coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e passando a coordinate  $t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  esprimendo il campo scalare  $g$  in tali nuove coordinate, nell'intersezione delle due carte locali valgano ovunque le relazioni

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k = \frac{\partial g}{\partial t'} + \sum_{h=1}^n \frac{\partial g}{\partial q'^h} \dot{q}'^h$$

con notazioni ovvie. Lasciamo la verifica di tale identità al lettore che si basa sulle (8.69)-(8.71). Il nuovo campo scalare  $G : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  costruito a partire dal campo scalare  $g : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **derivata totale formale** di  $g$ .

(2) Si trova scritto molto spesso in letteratura che il secondo membro di (8.81) è una *derivata totale*. In altre parole:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{dt}.$$

Tuttavia questa caratterizzazione, se presa alla lettera, è errata. Infatti *non è vero*, quando si scrive la (8.80), che le  $\dot{q}^k$  siano le derivate delle  $q^k$ , ciò è vero solo quando è assegnata una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Per questo motivo si aggiunge la parola *formale* dopo *derivata totale* come precisato nel commento precedente.

**Esercizi 8.1.**

1. Si considerino due punti materiali  $P$  e  $Q$ , entrambi di massa  $m$ , vincolati sulla curva liscia  $\Gamma$  di equazione  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$ ,  $z = R \phi$  ( $R > 0$  costante) con  $\phi \in \mathbb{R}$ , dove  $x, y, z$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Si supponga che i punti siano sottoposti, oltre alla reazione vincolare dovuta alla curva  $\Gamma$ , alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e che siano legati l'un l'altro attraverso una molla ideale di lunghezza nulla a riposo e costante elastica  $\kappa > 0$ . Infine si supponga che sul punto  $P$  agisca una forza di attrito viscoso  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante. Si risolvano i quesiti seguenti.

(a) Dimostrare che se  $\gamma = 0$  il sistema ammette lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$  di cui si scriva la forma esplicita. Si scriva il sistema delle equazioni pure di movimento dei due punti nel caso  $\gamma = 0$  e

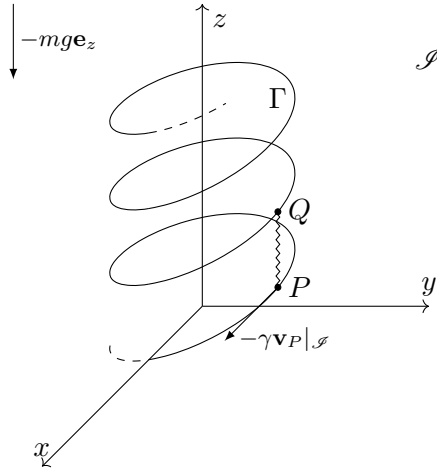


Figura 8.3: Illustrazione dell'esercizio 8.1.1.

nel caso  $\gamma > 0$ . Si usino, come coordinate libere, gli angoli  $\phi_P$  e  $\phi_Q$ .

(b) Scrivendo le equazioni del moto nelle nuove variabili libere  $\theta := \phi_P - \phi_Q$  e  $\tau := \phi_P + \phi_Q$ , dimostrare che, se  $\gamma = 0$  e  $g = 0$ , la grandezza:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{\tau}}$$

si conserva sui moti del sistema e spiegare il significato fisico di tale grandezza.

**2.** Si considerino due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m$  vincolati alla superficie conica liscia  $C$  di equazione  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  in riferimento a coordinate cartesiane ortogonali di origine  $O$  solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ . I due punti sono connessi da una molla ideale di lunghezza nulla a riposo e costante elastica  $\kappa > 0$  e sono sottoposti alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ . Si risolvano i quesiti seguenti.

(a) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema dei due punti. Si descrivano i punti tramite coordinate polari piane  $(r_1, \varphi_1)$  e  $(r_2, \varphi_2)$  delle proiezioni di  $P_1$  e  $P_2$  rispettivamente sul piano  $z = 0$ .

(b) Scrivendo le equazioni del moto nelle nuove variabili libere  $\Phi := \varphi_1 - \varphi_2$  e  $\Theta := \varphi_1 + \varphi_2$ , dimostrare che la grandezza:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{\Theta}}$$

si conserva sui moti del sistema e spiegare il significato fisico di tale grandezza.

**3.** Si consideri un sistema di riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{S}}$  e in esso un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  di origine  $\hat{O}$ . Un secondo sistema di riferimento, non inerziale,

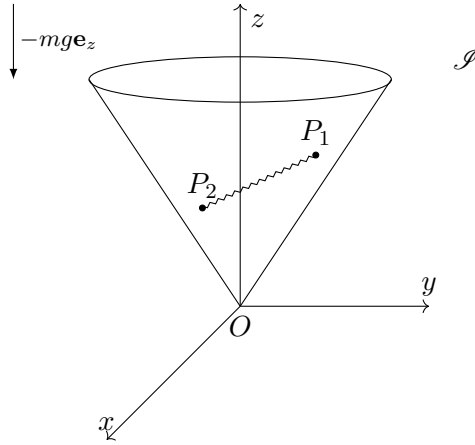


Figura 8.4: Illustrazione dell'esercizio 8.1.2.

$\mathcal{S}$  è individuato da un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$  di origine  $O \equiv \hat{O}$  ed assi  $x, y, z$ . L'asse  $z$  coincide con  $\hat{z}$  istante per istante mentre  $x$  e  $y$  ruotano nel piano  $z = 0$  in modo tale che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} = \Omega \mathbf{e}_z$  con  $\Omega > 0$  costante assegnata.

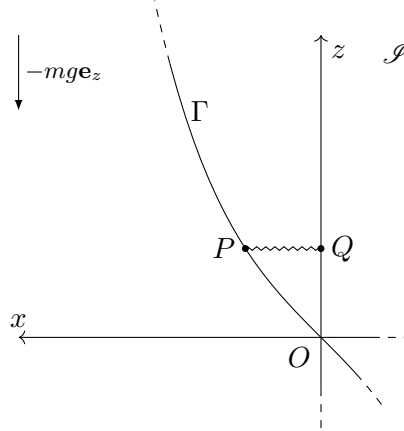


Figura 8.5: Illustrazione della proiezione sul piano  $x, z$  dell'esercizio 8.1.3 nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi sulla curva liscia  $\Gamma$ , ferma in  $\mathcal{S}$ , di equazione  $z = \sinh x$ . Oltre alla reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$ , il punto  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  ed alla forza di una molla ideale (lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $\kappa$

attaccata a  $P$  ed al punto  $Q$  sull'asse  $z$  che si trova sempre alla stessa quota di  $P$ . Si risolvano i seguenti quesiti.

(a) Usando come coordinata libera di  $P$  la coordinata  $x$  del punto  $P$ , si scriva l'equazione differenziale del moto di  $P$ . Si lavori con la lagrangiana del punto  $P$  definita rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ .

(b) Si dimostri che la grandezza:

$$\mathcal{H}(x, \dot{x}) := \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{I}}}$$

è un integrale primo del sistema e se ne spieghi il significato fisico.

(c) Si scriva la componente lungo l'asse  $x$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ .

(d) Considerando il moto con condizioni iniziali  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = v > 0$  assegnata, si esprima, su tale moto, la componente lungo l'asse  $x$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione della sola variabile  $x$ .

4. Nel riferimento  $\mathcal{I}$  si definisca un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali ad  $\mathcal{I}$  con origine  $O$  ed assi  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Si consideri poi il seguente sistema costituito da due punti materiali  $P$  e  $Q$  entrambi di massa  $m > 0$ :  $P$  è connesso ad  $O$  tramite un'asta rigida senza massa di lunghezza  $L > 0$ ,  $Q$  è connesso a  $P$  tramite una seconda asta rigida senza massa e di lunghezza  $L$ . Nei punti di giunzione vi sono vincoli ideali che permettono alle aste di ruotare liberamente attorno ad  $O$  e  $P$  rispettivamente rimanendo nel piano  $y = 0$ . Una molla ideale

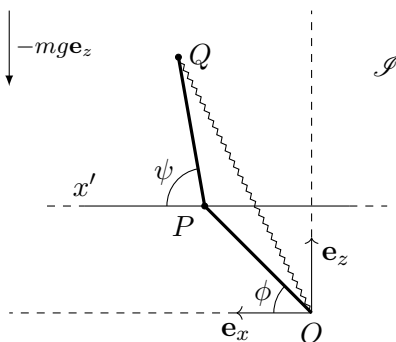


Figura 8.6: Illustrazione dell'esercizio 8.1.4.

(di lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  unisce  $Q$  ad  $O$ . Il riferimento  $\mathcal{I}$  ruota attorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{I}}$  con un vettore  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è una costante.

I due punti materiali sono soggetti, oltre alle reazioni vincolari ed alle forze inerziali, alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$ .

Descrivendo le configurazioni del sistema tramite i due angoli:  $\phi$  che l'asta  $P - O$  forma con

la retta  $x$  e  $\psi$  che l'asta  $Q - P$  forma con la retta  $x'$  parallela ad  $x$  e passante per  $P$  (si fissi l'orientazione positiva di entrambi gli angoli in senso antiorario rispetto a  $-\mathbf{e}_y$ ) si risolvano i seguenti quesiti.

- (a) Usando la Lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  del sistema riferita a  $\mathcal{J}$ , si scrivano le equazioni del moto di Eulero-Lagrange per il sistema dei due punti.
- (b) Si scrivano esplicitamente tali equazioni in forma normale.
- (c) Se  $q^1 = \phi$  e  $q^2 = \psi$ , si dimostri che l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} := \sum_{k=1,2} \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L}$$

associata a  $\mathcal{L}$  ed al sistema di coordinate libere usate è un integrale primo e se ne discuta il significato fisico.

- (d) Dimostrare che le 4 configurazioni  $(\phi_{\pm}, \psi_{\pm}) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2)$  sono *configurazioni di equilibrio* nel riferimento  $\mathcal{J}$ : l'unica soluzione delle equazioni del moto che ammette separatamente ciascuna delle 4 configurazioni dette come condizione iniziale  $(\phi(0), \psi(0))$ , unitamente alle condizioni  $(d\phi/dt(0), d\psi/dt(0)) = (0, 0)$ , è quella di quiete nel riferimento  $\mathcal{J}$ :  $(\phi(t), \psi(t)) = (\phi(0), \psi(0))$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

## 8.5 \*Formulazione geometrico differenziale globale delle equazioni di Eulero-Lagrange

In questa sezione vedremo che si può dare un significato preciso a  $\mathbb{V}^{n+1}$  e  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  nella teoria delle *varietà fibrato* o *fibrati* (vedi sezione B.3) e come le equazioni di Eulero-Lagrange si possano interpretare in tali ambiente.

### 8.5.1 La struttura di varietà fibrata di $\mathbb{V}^{n+1}$ e di $A(\mathbb{V}^{n+1})$

Consideriamo la Definizione 8.1 assumendo che  $\mathbb{V}^{n+1}$  soddisfi anche la richiesta (H3). In questa situazione  $\mathbb{V}^{n+1}$  assume la struttura di un *fibrato* (cfr definizione B.2) in cui la *base* è data dallo spazio euclideo  $\mathbb{E}^1$ , oppure l'asse reale  $\mathbb{R}$ , che definisce l'asse del tempo assoluto. Le fibre nei vari punti di base  $t$  sono gli spazi  $\mathbb{Q}_t$  e la *proiezione canonica* è banalmente data dal tempo assoluto  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposizione 8.5.** *Assumendo che  $\mathbb{V}^{n+1}$  in Definizione 8.1 soddisfi la richiesta (H3), risulta che  $\mathbb{V}^{n+1}$  è un fibrato con base  $\mathbb{R}$ , proiezione canonica data dal tempo assoluto  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e con fibre date dagli spazi  $\mathbb{Q}_t$  delle configurazioni al tempo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*I sistemi di coordinate naturali nel senso della Definizione 8.1 sono i sistemi di coordinate locali adattati alle fibre nel senso della Definizione B.2.*

**Dimostrazione.** Si osservi che l'ultima affermazione è ovvia dalla Definizione 8.1. Per provare la prima parte, l'unica cosa che dobbiamo verificare è che  $\mathbb{V}^{n+1}$  sia localmente, rispetto alla base,

diffeomorfo al prodotto  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  con  $\mathbb{Q}$  una varietà di dimensione  $n$  assegnata, la fibra standard, diffeomorfa ad ogni  $\mathbb{Q}_t$ . Più precisamente, bisogna provare che, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , deve esistere un intervallo aperto  $J \ni t$  e un diffeomorfismo  $f : J \times \mathbb{Q} \rightarrow T^{-1}(J)$  tale che  $T(f(\tau, p)) = \tau$  per ogni  $(\tau, p) \in J \times \mathbb{Q}$ .

La condizione (H3) permette di costruire  $f$  scegliendo  $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_t$ . Se  $(U_i, \phi_i)$  con  $\phi_i : U_i \ni p \mapsto (t(p), q^1(p), \dots, q^n(p))$ , è una carta locale come prescritto nella condizione (H3), possiamo associare ad essa una corrispondente carta locale  $(V_i, \psi_i)$  su  $\mathbb{Q}_t$  in cui  $V_i := U_i \cap \mathbb{Q}_t$  e  $\psi_i(p) := (q^1(p), \dots, q^n(p))$ . È allora facile verificare che esiste un'unica funzione  $h : T^{-1}(J) \rightarrow J \times \mathbb{Q}_t$  che soddisfa  $h|_{U_i} : U_i \ni p \mapsto (t, \psi_i^{-1}(q_i^1(p), \dots, q_i^n(p))) \in J \times \mathbb{Q}_t$  e tale funzione è un diffeomorfismo. Definendo  $f := h^{-1}$  si vede subito che  $T(f(\tau, p)) = \tau$  per ogni  $(\tau, p) \in J \times \mathbb{Q}_t$ . Si osservi che in tal modo ogni fibra  $\mathbb{Q}_{t'}$  con  $t' \in I$  risulta essere diffeomorfa a  $\mathbb{Q}_t$ , dove il diffeomorfismo è  $g : \mathbb{Q}_t \ni p \mapsto f(t', p) \in \mathbb{Q}_{t'}$ . Per concludere è sufficiente verificare che tutte le fibre  $\mathbb{Q}_t$ , per  $t \in \mathbb{R}$ , sono tra loro diffeomorfe (e in tal caso una qualsiasi di esse può essere definita come  $\mathbb{Q}$ ). Questo segue immediatamente dal seguente ragionamento. Presi due istanti  $t_2 > t_1$ , nell'intorno  $J$  di ogni punto  $t \in [t_1, t_2]$  possiamo definire il corrispondente diffeomorfismo  $f$  che, in particolare mostra che  $\mathbb{Q}_t$  è diffeomorfa ad ogni altra  $\mathbb{Q}_\tau$  con  $\tau \in J$ . Dato che  $[t_1, t_2]$  è compatto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di esso fatto da intervalli  $J$ . A questo punto, con un numero finito di passaggi, componendo i vari diffeomorfismi  $g$  tra le fibre in gioco, risulta subito che  $\mathbb{Q}_{t_1}$  è diffeomorfa a  $\mathbb{Q}_{t_2}$ .  $\square$

### Osservazioni 8.15.

(1) Prescindendo da tutta la costruzione che ci ha portato a formulare la Definizione 8.1 partendo dalla nozione di vincolo e poi assumendo la richiesta (H3), potremmo definire fin da subito uno spaziotempo delle configurazioni come un fibrato  $\mathbb{V}^{n+1}$ , con base  $\mathbb{R}$ , proiezione canonica  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  che in questo momento pensiamo come il tempo assoluto dal punto di vista fisico, e fibra standard  $\mathbb{Q}$  di dimensione  $n$ . Si osservi che il requisito (H3) sarebbe automaticamente soddisfatto. Se  $t \in \mathbb{R}$ , la classe di sistemi di coordinate locali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  definiti intorno a  $\mathbb{Q}_t := T^{-1}(t)$  che soddisfano (H3) non sono altro che alcuni sistemi di coordinate locali sul prodotto  $J \times \mathbb{Q}$  diffeomorfo secondo un diffeomorfismo  $f$  a  $T^{-1}(J)$  dove  $t \in J$  e  $T(f(t, p)) = t$ . Tali sistemi di coordinate sono quelli costruiti in modo ovvio, partendo da coordinate locali su  $\mathbb{Q}$  ed aggiungendo  $T$  come prima coordinata. L'esistenza dell'intervallo aperto  $J$  e del diffeomorfismo  $f$  è garantita dal fatto che  $\mathbb{V}^{n+1}$  sia un fibrato su  $\mathbb{R}$ .

(2) Quando si pensa  $\mathbb{V}^{n+1}$  come immerso nello spaziotempo  $\mathbb{V}^{3N+1}$ , anch'esso fibrato su  $\mathbb{R}$  tramite il tempo assoluto, da cui si pensa ereditare la struttura di fibrato, ci si rende conto che  $\mathbb{V}^{n+1}$  è un fibrato trivializzabile, come lo è  $\mathbb{V}^{3N+1}$  se esiste un sistema di riferimento in cui i vincoli usati per costruire  $\mathbb{V}^{n+1}$  non dipendono dal tempo. In realtà, dato che la base  $\mathbb{R}$  è contraibile, il fibrato  $\mathbb{V}^{n+1}$  è trivializzabile per teoremi generali di geometria differenziale, indipendentemente dalla sua natura fisica e dall'esistenza di sistemi di riferimento privilegiati. Tuttavia tale trivializzazione può essere costruita in vari modi ed è quindi non canonica.

(3) Una **sezione** del fibrato  $\mathbb{V}^{n+1}$  è per definizione una funzione differenziabile  $\mathbb{R} \ni u \mapsto \gamma(u) \in \mathbb{V}^{n+1}$  tale che  $T(\gamma(u)) = u$ . In altre parole una sezione è una curva differenziabile in  $\mathbb{V}^{n+1}$  che può essere parametrizzata usando il tempo assoluto  $t$  e pertanto con il possibile significato di



moto del sistema.

Lo spaziotempo degli stati cinetici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  si costruisce ora come segue tenendo conto del fatto che  $\mathbb{V}^{n+1}$  ammette la funzione privilegiata  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  data dal tempo assoluto, che coincide con la proiezione canonica del fibrato. Per prima cosa si considera la varietà *fibrato tangente* (vedi la sezione B.3):  $T\mathbb{V}^{n+1}$ . La funzione differenziabile tempo assoluto  $T : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  si estende naturalmente a  $T\mathbb{V}^{n+1}$  in una funzione  $\tilde{T}$  tale che

$$\tilde{T} : T\mathbb{V}^{n+1} \ni (p, v_p) \mapsto T(p) .$$

Indicheremo d'ora in poi  $\tilde{T}$  con la stessa lettera  $T$ . Un sistema di coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n)$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$  individua in modo canonico un sistema locale di coordinate naturali su  $T\mathbb{V}^{n+1}$ :  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{t}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  dove  $\dot{t}, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  sono le componenti sulla base naturale (associata alle coordinate su  $T\mathbb{V}^{n+1}$ )  $\partial/\partial t, \partial/\partial q^1, \dots, \partial/\partial q^n$  di un vettore di  $T_{(t, q^1, \dots, q^n)}\mathbb{V}^{n+1}$ . Un possibile moto del sistema, cioè una sezione  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  di classe  $C^2$ , parametrizzata nel tempo assoluto, individua a sua volta un'analoga curva su  $T\mathbb{V}^{n+1}$  di classe  $C^1$ , detta **rialzamento** della precedente, data da:  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ . In coordinate naturali locali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  e  $T\mathbb{V}^{n+1}$  abbiamo allora l'espressione esplicita per le due curve:

$$t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t)) , \quad \text{e} \quad t \mapsto \left( t, q^1(t), \dots, q^n(t), 1, \frac{dq^1}{dt}, \dots, \frac{dq^n}{dt} \right) .$$

Si osservi che la componente del vettore tangente  $\dot{\gamma}$  relativa alla coordinata  $t$  vale sempre 1 per costruzione (anche se alteriamo la costante additiva insita nella definizione di tempo assoluto). Ciò deve accadere per ogni moto del sistema. Questa condizione può essere scritta in modo intrinseco usando le notazioni introdotte in appendice, richiedendo che:

$$\langle \dot{\gamma}(t), dT_{\gamma(t)} \rangle = 1 .$$

Se nella varietà  $T\mathbb{V}^{n+1}$  ci restringiamo a considerare solo i punti  $(p, v_p)$  che soddisfino la richiesta  $\langle v_p, dT_p \rangle - 1 = 0$ , per il teorema dei valori regolari, otteniamo una sottovarietà embedded di dimensione  $2n + 2 - 1 = 2n + 1$  indicata con  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si osservi che in tale varietà sono contenuti tutte le coppie  $(p, v_p)$  in cui  $p$  è attraversato da un possibile moto del sistema con vettore tangente  $v_p$ .  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  può essere visto come una varietà fibrata rispetto a due fibrazioni distinte:

(a) base data da  $\mathbb{V}^{n+1}$  e fibre date dai sottoinsiemi di ogni spazio tangente  $T_p\mathbb{V}^{n+1}$ :

$$\{ (p, v_p) \in T_p\mathbb{V}^{n+1} \mid \langle v_p, dT_p \rangle = 1 \} .$$

(b) base data dall'asse dei tempi  $\mathbb{R}$  e fibre date dagli *spazi degli stati cinetici*  $\mathbb{A}_t$ , per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{A}_t = \{ (c, v_{(t,c)}) \in T_{(t,c)}\mathbb{V}^{n+1} \mid c \in \mathbb{Q}_t, \quad \langle v_{(t,c)}, dT_{v_{(t,c)}} \rangle = 1 \} .$$

Per ogni sistema di coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ , le coordinate locali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  sono allora coordinate locali sullo spaziotempo degli stati cintici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  adattate alle fibre di entrambe le fibrazioni in senso ovvio:  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sono coordinate sulla base della prima fibrazione e le rimanenti  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  sono coordinate su ciascuna fibra rispetto alla prima fibrazione. Inoltre  $t$  è una coordinata sulla base della seconda fibrazione mentre le rimanenti  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  sono coordinate su ciascuna fibra rispetto alla seconda fibrazione. Tali sistemi di coordinate locali adattati alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  formano un atlante per costruzione. La legge di trasformazione tra coordinate di questo genere è proprio espressa dalle (8.64), (8.65), (8.66).

$A(\mathbb{V}^{n+1})$  è un oggetto canonico della teoria dei *jet bundles* della quale non ci occuperemo se non per il poco che diciamo ora.  $A(\mathbb{V}^{n+1}) = j^1(\mathbb{V}^{n+1})$  è il primo (questo spiega l'indice <sup>1</sup>) jet bundle del fibrato  $\mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

In quest'ottica però la definizione che si usa è un'altra ma del tutto equivalente a quella che abbiamo dato sopra. Si parte dal fibrato  $\mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e, se  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto che include  $t_0$ , si considerano le *sezioni locali*  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{V}^{n+1}$  passanti per, in coordinate naturali,  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n)$ . Due di tali sezioni  $\gamma, \gamma'$  sono equivalenti se i loro vettori tangenti in  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n)$  sono uguali. È chiaro che fissato il sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n)$ , lo spazio delle classi di equivalenza in  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n)$  è parametrizzato da coordinate  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  che individuano tutti i possibili vettori tangenti delle sezioni della classe di equivalenza in  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n)$ . Se variamo anche la configurazione detta, otteniamo una parametrizzazione locale dipendente da coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Per costruzione, la legge di trasformazione tra coordinate di questo genere è ancora espressa dalle (8.64), (8.65), (8.66). Si ottiene in tal modo la stessa struttura locale di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  già descritta sopra.

### Osservazioni 8.16.

(1) Anche  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  risulta essere trivializzabile dato che è un fibrato su  $\mathbb{R}$ . Alcune trivializzazioni sono quelle ereditate da  $\mathbb{V}^{n+1}$ , per esempio, in conseguenza alla scelta di un sistema di riferimento in  $\mathbb{V}^4$ . Tuttavia ci sono ulteriori trivializzazioni che non possono essere viste come conseguenti alla scelta di un riferimento.

(2) Il fatto che  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  sia, localmente rispetto alla base, diffeomorfo al prodotto  $\mathbb{R} \times \mathbb{A}$ , con  $\mathbb{A}$  diffeomorfo ad ogni  $\mathbb{A}_t$ , si prova esattamente con la stessa procedura del caso di  $\mathbb{V}^{n+1}$  spiegata nella dimostrazione della Proposizione 8.5. Nel caso di  $\mathbb{V}^{n+1}$  la dimostrazione si basava sull'esistenza di carte locali naturali verificanti la condizione (H3). Con la costruzione di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  data sopra, le stesse carte danno luogo a coordinate naturali su tale spazio che soddisfano analoghe condizioni: per ogni fissato  $t \in \mathbb{R}$  asse del tempo assoluto esista un intervallo aperto non vuoto  $J \subset \mathbb{R}$  che lo contenga ed una corrispondente classe di sistemi di coordinate naturali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  con  $\phi_i : U_i \ni a \mapsto (t_i(a), q_i^1(a), \dots, q_i^n(a), \dot{q}^1(a), \dots, \dot{q}^n(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , che soddisfino i tre seguenti requisiti:

- (i)  $\cup_{i \in I} U_i \supset \mathbb{A}_\tau$  per ogni  $\tau \in J$ ;
- (ii)  $\phi_i(U_i) \supset J \times U'_i$ , con  $U'_i \subset \mathbb{R}^{2n}$  aperto, per ogni  $i \in I$ ;
- (iii) per ogni scelta di  $i, j \in I$  le funzioni  $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  siano della

forma:

$$t_i = t_j, \quad q_i^k = q_i^k(q_A, \dots, q_j^n), \quad \dot{q}_i^k = \sum_h \frac{\partial q_i^k}{\partial q_j^h} \dot{q}_j^h$$

in cui, cioè, la legge di trasformazione tra le coordinate lagrangiane non dipenda esplicitamente dal tempo.

A questo punto, la stessa procedura di incollamento usata nella prova della Proposizione 8.5 mostra che per il suddetto  $J$  attorno al fissato punto  $t \in \mathbb{R}$ , esiste un diffeomorfismo  $f : J \times \mathbb{A}_t \rightarrow T^{-1}(A(\mathbb{V}^{n+1}))$  tale che  $T(f(\tau, a)) = \tau$  se  $\tau \in J$  e  $a \in \mathbb{A}_t$ .

### 8.5.2 Il campo vettoriale dinamico associato alle equazioni di Eulero-Lagrange

Il corollario alla proposizione 8.4 prova che le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  sono ben definite su tale varietà anche se le equazioni (8.32) sono scritte in forma locale su ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre. Dato che le equazioni di Eulero-Lagrange sono equazioni differenziale del prim'ordine su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  le soluzioni saranno date dalle curve integrali di un particolare campo vettoriale  $Z$  definito sulla varietà  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  come discusso nella sezione 4.5. Tale campo per definizione è esteso a tutto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Vogliamo vedere come esso è scritto in coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Se  $t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange, direttamente dalle (8.32) abbiamo che il suo vettore tangente ha la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k(t) \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}.$$

L'espressione esplicita delle  $n$  funzioni  $z^k(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  si trova scrivendo in forma normale le equazioni di Eulero-Lagrange, come provato nella proposizione 8.3. In definitiva, il vettore tangente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange ha struttura, in ogni sistema di coordinate locali naturali,

$$Z(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (8.82)$$

dove le funzioni  $z^k$  definite localmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  si ottengono scrivendo in forma normale le equazioni di Eulero-Lagrange. Indipendentemente dal fatto che abbiamo dato sopra l'espressione di  $Z$  in coordinate locali, si deve tener presente che il campo vettoriale  $Z$  è ben definito su tutto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . In quest'ottica le equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) devono essere viste come equazioni che determinano il campo vettoriale  $Z$  detto **campo vettoriale dinamico** le cui curve integrali sono le soluzioni del moto del sistema. Le equazioni di Eulero-Lagrange, in questo contesto si riscrivono in coordinate locali:

$$Z \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n. \quad (8.83)$$

Queste equazioni sono in realtà equazioni *algebriche*, che servono a determinare le componenti  $z^k$  (funzioni degli stati cintici su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ) del vettore  $Z$  in funzione dei termini noti. Le curve integrali delle equazioni di Eulero-Lagrange, cioè i moti del sistema, sono tutte e sole le soluzioni (massimali)  $\gamma : I \rightarrow A(\mathbb{V}^{n+1})$  del sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\gamma}{dt} = Z(\gamma(t)) , \quad (8.84)$$

assumendo, ovviamente il campo  $Z$  sufficientemente regolare ( $C^1$  è largamente sufficiente). Anche le (8.84) possono pensarsi come equazioni di Eulero-Lagrange in senso *differenziale*. Se l'energia cinetica ha la solita forma in cui la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  (8.29) è strettamente definita positiva allora, esattamente come abbiamo provato che le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono in forma normale, si prova che le richieste (8.83) determinano le componenti  $z^k$  (8.82) in ogni sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .

**Osservazioni 8.17.** Bisogna sottolineare che il campo vettoriale dinamico, al contrario della lagrangiana (che oltre a non essere unica può anche non esistere se le componenti lagrangiane delle forze attive non hanno forma opportuna) è univocamente determinato in quanto è associato direttamente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

### 8.5.3 Forme di contatto, forma di Poincaré-Cartan e formulazione intrinseca delle equazioni di E.L. indotte da una lagrangiana

Introducendo qualche ulteriore nozione teorica e facendo uso della *derivata di Lie* (vedi le sezioni B.1.2 e B.4.2) è infine possibile dare una versione ancora più intrinseca dell'equazione (8.83) per determinare il campo dinamico  $Z$  individuato da una lagrangiana  $\mathcal{L}$  che descrive completamente il sistema. Consideriamo l'atlante delle carte locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e fissiamo una carta locale generica  $(U, \psi)$  dell'atlante le cui coordinate saranno indicate con  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ . In tale carta possiamo definire  $n$  **1-forme di contatto**:

$$\omega^k := dq^k - \dot{q}^k dt . \quad (8.85)$$

Si deve prestare attenzione al fatto che  $k$  in  $\omega^k$  *non* è un indice di componente ma individua una delle  $n$  forme di contatto definite in  $U$  rispetto al sistema di coordinate naturali dette. Si osservi che abbiamo una forma di contatto per ogni coordinata  $q^k$  e che ciascuna delle forme suddette è pensata su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  (si potrebbe aggiungere un termine banale  $0 d\dot{q}^k$ ) ed individua quindi, per ogni atto di moto  $a \in U$  un vettore cotangente ad  $a$  rispetto alla base di  $T_a^*A(\mathbb{V}^{n+1})$  formata dalle 1-forme  $dt|_a, dq^1|_a, \dots, dq^n|_a, d\dot{q}^1|_a, \dots, d\dot{q}^n|_a$ . Le forme di contatto godono della seguente notevole proprietà. Se  $(U', \psi')$  è un'altra carta naturale con coordinate  $t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  e tale che  $U \cap U' \neq \emptyset$ , per  $a \in U \cap U'$

$$\omega'^k|_a = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h}|_a \omega^{(h)}|_a . \quad (8.86)$$

La dimostrazione è banale, basta decomporre la base di  $T_a^*A(\mathbb{V}^{n+1})$  associata al secondo sistema di coordinate rispetto alla base naturale del primo.

Se  $T : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione *tempo assoluto* sullo spaziotempo degli stati cinetici estesa in modo ovvio da  $\mathbb{V}^{n+1}$ , la struttura (8.82) di un generico campo vettoriale  $Z$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  è evidentemente equivalente alla coppia di richieste, che giustificano l'introduzione della nozione di forma di contatto,

$$\langle Z, dT \rangle = 1, \quad (8.87)$$

$$\langle Z, \omega^k \rangle = 0 \quad \text{per ogni forma di contatto } \omega^k \text{ di ogni sistema di coordinate naturali.} \quad (8.88)$$

La prima condizione equivale a richiedere che, in ogni sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , la componente di  $Z$  rispetto a  $\frac{\partial}{\partial t}$  valga costantemente 1, mentre la seconda equivale a richiedere che le componenti rispetto ai vettori  $\frac{\partial}{\partial q^k}$  valfano  $\dot{q}^k$ . Possiamo ora dare la seguente definizione astratta che prescinde dall'avere assegnato una lagrangiana o un set di equazioni di Eulero-Lagrange.

**Definizione 8.5.** Un campo vettoriale  $Z$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  è detto **campo vettoriale dinamico**, o più semplicemente **vettore dinamico**, se soddisfa le condizioni (8.87) e (8.88).  $\diamond$

Per un campo vettoriale dinamico  $Z$  ed usando (B.26) si verifica immediatamente la validità delle relazioni,

$$\mathcal{L}_Z(dt) = \mathcal{L}_Z(dT) = d\langle Z, dT \rangle = 0, \quad (8.89)$$

$$\mathcal{L}_Z(dq^k) = d\dot{q}^k, \quad (8.90)$$

$$\mathcal{L}_Z(\omega^k) = d\dot{q}^k - z^k dt. \quad (8.91)$$

Come ultimo ingradiente definiamo la **1-forma di Poincaré-Cartan**  $\Omega_{\mathcal{L}}$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  associata ad una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tale 1-forma è completamente definita dal fatto che in ogni sistema di coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  assume l'espressione

$$\Omega_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \omega^k + \mathcal{L} dT. \quad (8.92)$$

Tenendo conto di (8.86) e di (8.70) si verifica facilmente che nelle intersezioni di due carte naturali i secondi membri di (8.92) coincidono.

Se calcoliamo la derivata di Lie di  $\Omega_{\mathcal{L}}$  rispetto a  $Z$  della forma (8.82) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) &= \sum_k Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \omega^k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \mathcal{L}_Z(\omega^k) + Z(\mathcal{L}) dT + \mathcal{L} \mathcal{L}_Z(dT) \\ &= \sum_k Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) (dq^k - \dot{q}^k dt) + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} z^k dt + Z(\mathcal{L}) dt \end{aligned}$$

$$= \sum_k Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) dq^k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \left( Z(\mathcal{L}) - Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \dot{q}^k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} z^k \right) dt$$

Se  $Z$  è ottenuto da  $\mathcal{L}$  in accordo con la prescrizione (8.83) (nel caso in cui le componenti lagrangiane siano completamente inglobate in  $\mathcal{L}$ ), cioè se vale

$$Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n. \quad (8.93)$$

l'espressione trovata sopra per  $\mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}})$  si semplifica in

$$\mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} dq^k + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \left( Z(\mathcal{L}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \dot{q}^k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} z^k \right) dt$$

che, tenendo conto di (8.82), produce

$$\mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) = d\mathcal{L}. \quad (8.94)$$

Concludiamo che se il sistema fisico è completamente descritto da una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Z$  è il campo vettoriale tangente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, allora vale l'identità (8.94). Possiamo invertire il ragionamento osservando che, se  $Z$  è un vettore dinamico e soddisfa l'identità (8.94) rispetto alla lagrangiana  $\mathcal{L}$ , allora deve anche soddisfare (8.93) in ogni sistema di coordinate naturali. Possiamo riassumere la discussione con il seguente teorema.

**Teorema 8.3.** *Si consideri una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  (di classe  $C^3$  almeno) e un campo vettoriale dinamico  $Z$  (di classe  $C^1$  almeno). Allora  $Z$  soddisfa l'identità (8.94)*

$$\mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) = d\mathcal{L}$$

*se e solo se valgono le condizioni (8.93)*

$$Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0, \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, n$$

*in ogni sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .*

**Dimostrazione.** Se  $Z$  è della forma (8.82) con gli stessi passaggi di prima si arriva subito all'identità, valida in ogni carta naturale di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$\mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) - d\mathcal{L} = \sum_k \left( Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) dq^k - \sum_k \left( Z \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k dt.$$

Dato che le  $n+1$  forme  $dq^k$  e  $dt$  sono linearmente indipendenti segue che  $Z$  deve soddisfare (8.93). L'implicazione inversa è già stata provata.  $\square$

**Osservazioni 8.18.** Come già osservato, se la matrice Hessiana di  $\mathcal{L}$  come funzione quadratica delle  $\dot{q}^k$  è invertibile, e ciò accade sempre se la lagrangiana ha la forma solita  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  in cui  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  è al più lineare nelle  $\dot{q}^k$ , allora le identità (8.93) determinano completamente il campo vettoriale  $Z$  che descrive la dinamica della lagrangiana  $\mathcal{L}$ . In questo senso (8.94) rappresenta la *versione più intrinseca delle equazioni di Eulero-Lagrange*.

**Definizione 8.6.** Un campo vettoriale dinamico  $Z$  è detto **associato** alla lagrangiana  $\mathcal{L}$  se soddisfa la condizione (8.94).  $\diamond$

#### 8.5.4 Sistemi lagrangiani senza lagrangiana globale

L'introduzione del campo vettoriale dinamico  $Z$  definito globalmente permette anche di gestire una situazione di un certo interesse teorico. Fino ad ora abbiamo lavorato con sistemi fisici che ammettono o non ammettono lagrangiana, in entrambi i casi il vettore  $Z$  si può comunque definire. Esiste tuttavia una terza possibilità. Lavorando con sistemi fisici che ammettono lagrangiana, abbiamo sempre supposto che essa sia definita su tutto lo spaziotempo degli stati cintici:  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ . La dinamica è quindi individuata dal campo  $Z$  costruito da  $\mathcal{L}$ . Vi sono però sistemi fisici che ammettono campo  $Z$ , ma ammettono una lagrangiana solo localmente e non globalmente. Consideriamo uno dei casi più semplici.

Supponiamo che  $\mathbb{V}^{2+1} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ . Al solito  $\mathbb{R}$  è l'asse del tempo assoluto e  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  si identifica con ogni spazio delle configurazioni al tempo  $t$ . Supponiamo quindi che le equazioni del moto siano le seguenti, in coordinate canoniche di  $\mathbb{R}^2$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{kx}{x^2 + y^2}.$$

Se consideriamo il campo globalmente definito su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{k}{m} \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{k}{m} \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \dot{y}},$$

si vede subito che le linee integrali di questo campo corrispondono alle equazioni del moto scritte sopra. In effetti le equazioni di Eulero-Lagrange di questo sistema si possono sempre scrivere come in (8.83) con:

$$\mathcal{Q}_x = -ky(x^2 + y^2)^{-1}, \quad \mathcal{Q}_y = kx(x^2 + y^2)^{-1}.$$

Dato che queste funzioni sono di classe  $C^1$  (in realtà  $C^\infty$ ) e sono soddisfatte le condizioni di irrotazionalità (come si verifica per calcolo diretto):

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{Q}_y}{\partial x},$$

almeno in sottoinsiemi aperti e semplicemente connessi in  $\mathbb{R}^2$  esisterà una funzione  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y)$  di classe  $C^2$  (in realtà  $C^\infty$ ) per la quale

$$\mathcal{Q}_x = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \quad \mathcal{Q}_y = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}.$$

Se  $\mathcal{U}$  fosse definita su tutto  $\mathbb{R}^2$  tal caso il sistema sarebbe descritto da una lagrangiana della forma standard  $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \mathcal{U}(x, y)$ . Tuttavia non esiste alcuna funzione  $\mathcal{U}$  definita globalmente su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  il cui gradiente produca  $\mathcal{Q}_x$  e  $\mathcal{Q}_y$ . Se esistesse, l'integrale curvilineo del campo vettoriale individuato da tali componenti su un qualsiasi percorso chiuso nel dominio considerato dovrebbe sempre essere nullo, mentre non lo è. Si può per esempio considerare l'integrale su una circonferenza di raggio  $R$  concentrica all'origine ed orientata positivamente. In questo caso l'integrale suddetto vale  $2\pi k$ . Pertanto la lagrangiana globale, almeno nella forma  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  non esiste, ma il sistema è comunque descritto, globalmente, dal campo  $Z$  suddetto.

**Esercizi 8.2.** Passando in coordinate polari piane, provare che se si taglia  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  con una semiretta  $s$  uscente dall'origine, nel dominio semplicemente connesso che si ottiene eliminando dal piano tale semiretta, una funzione  $\mathcal{U}$  che produce le componenti lagrangiane suddette è sempre la funzione  $\mathcal{U}(r, \theta) = -k\theta$ , dove  $\theta$  è misurato a partire dalla semiretta  $s$  orientato positivamente.



## Capitolo 9

# Argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana

In questo capitolo e nel prossimo consideriamo argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana che hanno avuto delle fondamentali conseguenze nei successivi sviluppi della fisica matematica e teorica, anche in ambiti molto lontani dalla meccanica classica.

In questo capitolo introdurremo in particolare la formulazione variazionale delle equazioni di Eulero-Lagrange, la nozione di potenziale generalizzato e alcune definizioni e risultati di teoria della stabilità.

### 9.1 Il cosiddetto “Principio di Minima Azione” per sistemi che ammettono lagrangiana

Vogliamo mostrare come le equazioni di Eulero-Lagrange si possano ottenere da un principio variazionale. In altre parole le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, per sistemi che ammettono lagrangiana, risultano essere *punti di stazionarietà* di un certo funzionale detto *azione*. Questo risultato ha avuto un notevole sviluppo in fisica teorica, quando si passa dalla meccanica classica a quella quantistica, avendo portando alla formulazione della meccanica quantistica (e della teoria dei campi quantistica) basata sul cosiddetto *integrale di Feynman* ed a conseguenti metodi di approssimazione semiclassici.

#### 9.1.1 Primi rudimenti di calcolo delle variazioni

Partiamo da qualche nozione generale. Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione definita sull'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , un punto  $p \in \Omega$  è detto *punto di stazionarietà* se la funzione  $f$  è differenziabile in  $p$  ed il gradiente di  $f$  in  $p$  è nullo. Ogni punto di minimo, di massimo o di sella di  $f$  è un punto di stazionarietà, per cui la condizione di stazionarietà è una condizione necessaria per i punti di estremo.

Vogliamo generalizzare questa nozione al caso di *funzionali*, cioè funzioni che hanno come do-

minio un insieme di funzioni e prendono valori reali. Vediamo qualche esempio di funzionale. Consideriamo un'applicazione  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dove  $D$  è un insieme di funzioni definite su un intervallo  $I = [a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Diremo tale applicazione **funzionale su  $D$** .

**Esempi 9.1.** Ecco un esempio abbastanza ovvio di funzionale:

$$F[\gamma] := \gamma(a), \quad \text{per ogni } \gamma \in D.$$

Assumendo che le curve in  $D$  siano differenziabili, se  $c \in (a, b)$  è un punto fissato, un altro semplice esempio è:

$$F[\gamma] := \frac{d\gamma}{dt}\bigg|_c, \quad \text{per ogni } \gamma \in D.$$

Un esempio meno banale, se  $n = 1$  e le curve di  $D$  sono continue con derivata continua è:

$$F[\gamma] := \int_a^b \left( \gamma(u) + \frac{d\gamma}{du} \right) du, \quad \text{per ogni } \gamma \in D.$$

Torniamo alla nozione di punto di stazionarietà per funzionali. La definizione basata sull'annullarsi del gradiente è fin troppo complessa in quanto necessita di una nozione di gradiente in uno spazio *infinito dimensionale*. Tale definizione può essere, di fatto, data e si chiama *derivata di Fréchet*. Tuttavia sarebbe necessario introdurre nuove nozioni topologiche che non sono rilevanti nel nostro contesto elementare. Esiste una via più semplice basata sulla nozione di derivata direzionale, e quindi derivata in una sola variabile (tecnicamente, con le debite precisazioni corrisponde alla cosiddetta *derivata debole di Gateaux*). Per arrivare a tale definizione notiamo che un modo equivalente di dire che  $p$  è un punto di stazionarietà per  $f$  è affermare che tutte le derivate direzionali si annullano:

$$\nabla f|_p \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{per ogni vettore } \mathbf{u}.$$

Quest'ultima richiesta può infine essere trascritta, in termini di derivate di funzioni di una variabile, piuttosto che di gradiente di una funzione di più variabile, come:

$$\frac{d}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} f(p + \alpha \mathbf{u}) = 0, \quad \text{per ogni vettore } \mathbf{u}.$$

Tornando al funzionale  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dove  $D$  è un insieme di funzioni definite su un intervallo  $I = [a, b]$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , diremo che  $\gamma_0 \in D$  è un punto di stazionarietà per  $F$  se:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} F[\gamma_0 + \alpha \eta] = 0, \\ \text{per ogni } \eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tale che } \gamma_0 + \alpha \eta \in D \text{ per } \alpha \in (-\delta_\eta, \delta_\eta). \end{cases} \quad (9.1)$$

Sopra  $\delta_\eta > 0$  in generale dipende da  $\eta$ . Chiaramente se  $F$  assume massimo o minimo in  $\gamma_0$ , allora la condizione (9.1) è vera per ogni  $\eta$ , ogni volta che la funzione  $\alpha \mapsto F[\gamma_0 + \alpha \eta]$  sia ben

definita in un intorno di  $\alpha = 0$  e differenziabile in tale punto. Se per esempio  $\gamma_0$  fosse un minimo avremmo  $\alpha^{-1}(F[\gamma_0 + \alpha\eta] - F[\gamma_0]) \geq 0$  per  $\alpha > 0$  e  $\alpha^{-1}(F[\gamma_0 + \alpha\eta] - F[\gamma_0]) \leq 0$  per  $\alpha < 0$ , per cui il limite per  $\alpha \rightarrow 0$  deve essere nullo. Un ragionamento analogo vale nel caso di un massimo. Quello che ora vogliamo mostrare è che *le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange sono punti di stazionarietà di un certo funzionale definito su un opportuno spazio di curve.*

### 9.1.2 Il Principio di Minima Azione

Consideriamo un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  di punti materiali descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , fissiamo un sistema di coordinate naturali in  $\mathbb{V}^{n+1}$ :  $t, q^1, \dots, q^n$  che assumeremo, senza perdere generalità, essere variabili in  $I \times \Omega$  dove  $I = [a, b]$  con  $a < b$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è aperto (non vuoto). Supponiamo che il sistema fisico  $\mathfrak{S}$  sia descritto da una lagrangiana, rappresentata, nelle coordinate dette dalla funzione  $\mathcal{L} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  congiuntamente in tutte le sue variabili e definita rispetto ad un riferimento  $\mathcal{J}$  che sottointenderemo d'ora in poi. Fissiamo quindi due punti  $Q_a, Q_b \in \Omega$  e consideriamo infine il funzionale, detto **azione**:

$$I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma] := \int_a^b \mathcal{L} \left( t, q^1(t), \dots, q^n(t), \frac{dq^1}{dt}, \dots, \frac{dq^n}{dt} \right) dt, \quad (9.2)$$

dove le curve  $\gamma : I \ni t \mapsto (q^1(t), \dots, q^n(t))$  appartengono al dominio:

$$D_{Q_a, Q_b} := \{ \gamma \in C^2(I) \mid \gamma(t) \in \Omega \text{ per ogni } t \in I \text{ con } \gamma(a) = Q_a \text{ e } \gamma(b) = Q_b \}.$$

Fissiamo  $\gamma \in D_{Q_a, Q_b}$ . Tenendo conto che  $\gamma$  è continua e quindi  $\gamma([a, b])$  è compatto (immagine di un compatto secondo una funzione continua), otteniamo che  $\gamma$  è contenuta nell'unione di un numero finito di palle aperte centrate su punti della curva e tutti contenuti in  $\Omega$ . Usando tale intorno aperto di  $\gamma$  è facile vedere che ogni curva  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^2$  con  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  soddisfa  $\gamma + \alpha\eta \in D_{Q_a, Q_b}$  per  $\alpha \in (-\delta_\eta, \delta_\eta)$  se  $\delta_\eta > 0$  è sufficientemente piccolo (ciò è conseguenza della proposizione A.1 che vale con ipotesi ancora più deboli). Pertanto ha senso applicare la definizione di punto di stazionarietà per il funzionale azione producendo il seguente notevole teorema che cade sotto il nome, tecnicamente erraneo, di *principio di minima azione*.

**Teorema 9.1. (Principio di minima azione)** *Con le definizioni date sopra, una curva  $\gamma : I \rightarrow (q^1(t), \dots, q^n(t))$  che appartiene a  $D_{Q_a, Q_b}$  (e quindi vale  $\gamma(a) = Q_a$ ,  $\gamma(b) = Q_b$ ) soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange (8.77) rispetto a  $\mathcal{L} : I \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  congiuntamente in tutte le sue variabili, se e solo se  $\gamma$  è un punto di stazionarietà del funzionale azione  $I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}$  (9.2).  $\diamond$*

**Dimostrazione.** Per costruzione e con ovvie notazioni:

$$I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] := \int_a^b \mathcal{L} \left( t, \gamma(t) + \alpha\eta(t), \frac{d\gamma}{dt} + \alpha \frac{d\eta}{dt} \right) dt.$$

Otteniamo allora, con ovvie notazioni, e passando la derivata in  $\alpha$  sotto il segno di integrale per il Teorema A.2, che:

$$\frac{d}{d\alpha} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] = \int_a^b \{ \eta \cdot \nabla_\gamma \mathcal{L}(t, \gamma + \alpha\eta, \dot{\gamma} + \alpha\dot{\eta}) + \dot{\eta} \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}(t, \gamma + \alpha\eta, \dot{\gamma} + \alpha\dot{\eta}) \} dt ,$$

dove abbiamo *definito*  $\dot{\eta} := d\eta/dt$ . Per  $\alpha = 0$  troviamo:

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] = \int_a^b \{ \eta \cdot \nabla_\gamma \mathcal{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) + \dot{\eta} \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \} \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt .$$

Integrando per parti, abbiamo ancora che:

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] = \int_a^b \eta \cdot \left\{ \nabla_\gamma \mathcal{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}(t, \gamma, \dot{\gamma}) \right\} \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt .$$

Abbiamo ommesso un termine che deriva dall'integrazione per parti ma non fornisce contributo. Infatti tale termine sarebbe:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (\eta \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}) \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt = \eta(b) \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}|_{(b, \gamma, \dot{\gamma})} - \eta(a) \cdot \nabla_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}|_{(a, \gamma, \dot{\gamma})} . \quad (9.3)$$

Dato che stiamo considerando variazioni  $\gamma + \alpha\eta$  della curva  $\gamma$  tenendone fissi gli estremi, dovrà valere  $\gamma(a) + \alpha\eta(a) = Q_a$  e  $\gamma(b) + \alpha\eta(b) = Q_b$  per ogni  $\alpha$  intorno a 0. Concludiamo che deve essere  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  da cui l'annullarsi del primo membro di (9.3).

Abbiamo ottenuto che, tornando il componenti

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] = \int_a^b \sum_{k=1}^n \eta^k \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt , \quad (9.4)$$

dove è sottointeso che  $\dot{q}^k = dq^k/dt$ . L'identità ottenuta mostra immediatamente che se  $\gamma : t \mapsto (q^1(t), \dots, q^n(t))$  risolve le equazioni di Eulero-Lagrange allora  $\gamma$  stesso è un punto di stazionarietà di  $I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}$  dato che soddisfa, per (9.4):

$$\frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{L})}[\gamma + \alpha\eta] = 0 , \quad (9.5)$$

per ogni  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma + \alpha\eta \in D_{Q_a, Q_b}$  per  $\alpha$  variabile in qualche intervallo  $(-\delta_\eta, \delta_\eta)$ . Supponiamo viceversa che valga la (9.5) per ogni  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  suddetto. In virtù di (9.4) deve essere:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \eta^k \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt = 0 , \quad (9.6)$$

per ogni  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma + \alpha\eta \in D_{Q_a, Q_b}$  per  $\alpha$  variabile in qualche intervallo  $(-\delta_\eta, \delta_\eta)$ . Mostriamo che tale risultato implica in realtà, data l'arbitrarietà delle funzioni  $\eta^k$ , che  $\gamma$  soddisfi

le equazioni di Eulero-Lagrange. Supponiamo, per assurdo, che esista un punto  $t_0 \in I$  per cui, per un fissato  $k$ , *non siano valide le equazioni di Eulero-Lagrange*. In altre parole:

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t_0, \gamma, \dot{\gamma})} \neq 0$$

Senza perdere generalità possiamo assumere  $k = 1$  e  $t_0 \in (a, b)$  (per continuità si ottengono, dal ragionamento che segue, i casi  $t_0 = a$  e  $t_0 = b$ ). Dato che la funzione

$$I \ni t \mapsto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})}$$

è sicuramente continua in  $t_0$ , assumerà un segno fissato in un intorno aperto  $I' = (c, d)$  di  $t_0$ . Supponiamo tale segno positivo (se fosse negativo, il ragionamento sarebbe analogo). Stringendo un poco  $I'$ , possiamo fare in modo che tale funzione sia positiva in  $[c, d]$ . Quindi abbiamo che

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} \geq C > 0$$

per ogni  $t \in [c, d]$  e per qualche costante  $C$ . Per concludere possiamo scegliere un elemento dell'insieme di funzioni  $\eta$  che stiamo considerando in modo tale che tutte le componenti  $\eta^k$  siano ovunque nulle tranne  $\eta^1$  che sia nulla in  $I$  eccetto che in  $[c, d]$ , in cui è non negativa con integrale pari a qualche  $L > 0$  (è sufficiente “smussare” fino a renderla  $C^2$  una funzione il cui grafico è una colonna di altezza  $L/(d - c)$  e base  $[c, d]$ ). Per questa scelta abbiamo che

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \eta^k \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt = \int_c^d \eta^1 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} dt \geq C \int_c^d \eta^1 dt \geq LC > 0,$$

che contraddice (9.6). Concludiamo che se  $\gamma$  è un punto di stazionarietà di  $I_{Q_a, Q_b}$  allora deve essere vero che, per ogni  $t \in I$ :

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \Big|_{(t, \gamma, \dot{\gamma})} = 0$$

e pertanto  $\gamma$  è anche soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. □

### Osservazioni 9.1.

(1) Bisogna sottolineare che *non è detto che esista una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange*  $\gamma : I \rightarrow q^1(t), \dots, q^n(t)$  *quando sono assegnati i punti estremi*  $\gamma(a) = Q_a$ ,  $\gamma(b) = Q_b$ . E, se esiste, *non è detto che sia unica*. Il teorema di esistenza garantisce infatti l'esistenza di una soluzione *quando sono assegnate condizioni iniziali (di Cauchy) e non condizioni al contorno*, cioè i punti estremi per i quali passa la curva cercata.

In questo senso il principio variazionale per le equazioni di Eulero-Lagrange dovrebbe essere visto come una procedura per determinare le equazioni del moto più che le soluzioni di esse.

Si può in realtà provare [Arnold92] che il problema con condizioni al contorno assegnate ammette sempre soluzione quando i punti estremi sono sufficientemente vicini.

(2) Ci si può chiedere se le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange siano in realtà massimi, minimi o punti di sella del funzionale azione. Si riesce a dimostrare [Arnold92] che per punti estremi sufficientemente vicini, tali soluzioni individuino minimi dell'azione, ma nel caso generale questo risultato non è valido.

(3) Se consideriamo due sistemi di riferimento inerziali  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ , le lagrangiane associate ad uno stesso sistema fisico differiscono per un termine di derivata totale formale (vedi la Sezione 8.4.4)

$$\Delta\mathcal{L} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (9.7)$$

Passando all'approccio variazionale nel quale si considerano curve nelle variabili  $q^k$  e le  $\dot{q}^k$  sono interpretate come le derivate delle  $q^k$ , il termine detto è realmente una derivata totale nel tempo. Ogni termine di questo tipo fornisce un contributo *costante* al funzionale azione (9.2), dato che:

$$\int_a^b \Delta\mathcal{L} dt = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) dt = g(b, q^1(b), \dots, q^n(b)) - g(a, q^1(a), \dots, q^n(a)).$$

Al variare della curva  $\gamma : [a, b] \ni t \mapsto (q^1(t), \dots, q^n(t))$  nel dominio  $D_{Q_a, Q_b}$ , il termine

$$g(b, q^1(b), \dots, q^n(b)) - g(a, q^1(a), \dots, q^n(a))$$

è costante per costruzione, dato che tutte le curve del dominio detto hanno gli stessi estremi:  $(q^1(a), \dots, q^n(a))$  e  $(q^1(b), \dots, q^n(b))$  per definizione. Risulta allora evidente che i due funzionali azione, quello associato al riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  e quello associato al riferimento  $\mathcal{S}'$ , differendo per una costante, hanno gli stessi punti di stazionarietà. In altre parole determinano le stesse equazioni di Eulero-Lagrange, come abbiamo già osservato nella Sezione 8.4.4 indipendentemente dall'approccio variazionale.

## 9.2 I potenziali generalizzati

In meccanica analitica nasce naturalmente un'estensione del concetto di potenziale che include potenziali che dipendono dalle "coordinate puntate" usati per calcolare le componenti lagrangiane di una forza.

### 9.2.1 Il caso della forza di Lorentz

Prima di dare le debite definizioni consideriamo un caso di grande rilevanza fisica. Consideriamo una particella  $P$  di massa  $m$ , non sottoposta a vincoli, dotata di carica elettrica  $e$  e sottoposta, nel riferimento inerziale  $\mathcal{S}$ , ai campi elettrico  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  e magnetico  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  assegnati. Nel seguito  $\mathbf{x} := P - O$  denota il vettore posizione della particella nel riferimento  $\mathcal{S}$  rispetto all'origine

$O$  e le componenti cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$  di  $\mathbf{x}$  saranno usate come coordinate libere della particella.  $\mathbf{v}$  denoterà la velocità della particella rispetto a  $\mathcal{S}$ . Sulla particella agisce la forza di Lorentz

$$\mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) := e\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{x}). \quad (9.8)$$

$c$  è la velocità della luce. Per descrivere i campi elettrico e magnetico introduciamo il *potenziale scalare*  $\varphi(t, \mathbf{x})$  ed il *potenziale vettore*  $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$  in modo tale che, se  $\nabla_{\mathbf{x}}$  indica il gradiente valutato in  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}), \quad (9.9)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{A}(t, \mathbf{x}). \quad (9.10)$$

In termini dei due potenziali, l'espressione (9.8) per la forza di Lorentz si trascrive immediatamente:

$$\mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - e\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\mathbf{v} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{A}(t, \mathbf{x})). \quad (9.11)$$

Eseguendo l'ultimo prodotto vettoriale possiamo infine scrivere<sup>1</sup>:

$$\mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - e\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x})). \quad (9.12)$$

Vogliamo ora provare che l'espressione ottenuta (9.12) per la forza di Lorentz si può scrivere come, indicando  $\mathbf{v}$  con la terna di coordinate puntate  $\dot{\mathbf{x}}$ ,

$$\mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left( \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \right) \mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (9.13)$$

dove abbiamo introdotto il potenziale elettromagnetico generalizzato:

$$\mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := -e\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (9.14)$$

In effetti il calcolo diretto mostra che:

$$\begin{aligned} \left( \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \right) \mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= -e\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\nabla_{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) - \frac{d}{dt}\left( \frac{e}{c}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \right) \\ &= -e\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\nabla_{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) - \frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \\ &= -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - e\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{e}{c}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c}\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Questo risultato implica immediatamente che le equazioni del moto della carica si possono scrivere come equazioni di Eulero-Lagrange purché si usi la lagrangiana

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (9.15)$$

---

<sup>1</sup>Se  $\mathbf{e}$  è un vettore costante e  $\mathbf{B}$  un campo vettoriale  $C^1$  su  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{e} \wedge (\nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{B}$ .

dove la funzione  $\mathcal{V} : A(\mathbb{V}^{3+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è stata definita in (9.14). Infatti, le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono in questo caso:

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} - \nabla_{\mathbf{x}} \right) \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

che possiamo riscrivere come:

$$\left( \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} - \nabla_{\mathbf{x}} \right) \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \left( \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{x}}} \right) \mathcal{V}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

e quindi, tenendo conto della (9.13) ed eseguendo esplicitamente il calcolo a primo membro della prima uguaglianza:

$$m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

da cui finalmente:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}_L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Concludiamo che la lagrangiana per una particella con carica  $e$  sottoposta ad un campo elettromagnetico assegnato nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , in termini del potenziale elettrico  $\varphi$  e di quello magnetico vettore  $\mathbf{A}$ , è data da:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (9.16)$$

**Osservazioni 9.2.** I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dati in (9.9) e (9.10) non sono alterati se cambiamo i potenziali attraverso una *trasformazione di gauge*:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi'(t, \mathbf{x}) := \varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}'(t, \mathbf{x}) := \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \chi(t, \mathbf{x}), \quad (9.17)$$

dove  $\chi$  è una qualsiasi funzione di classe  $C^2$ . Sotto trasformazioni di gauge la lagrangiana (9.16) *non* è invariante. Tuttavia, il calcolo esplicito mostra immediatamente che sotto una trasformazione di gauge risulta:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \rightarrow \mathcal{L}'(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \frac{d}{dt} \frac{e}{c} \chi(t, \mathbf{x}),$$

pertanto le equazioni del moto risultano essere inalterate dato che la nuova lagrangiana differisce dalla vecchia per mezzo di una sola “derivata totale”.

### 9.2.2 Generalizzazione della nozione di potenziale

L'esempio precedente mostra che in alcuni casi le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  di una forza si possono ottenere applicando l'operatore di Eulero-Lagrange  $\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$  su una funzione  $\mathcal{V} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che dipende sia dalle coordinate  $q^k$  (e dal tempo) e anche dalle coordinate



$\dot{q}^k$ . Il caso di componenti lagrangiane che si ottengono da un potenziale (funzione di  $t$  e delle  $q^k$  solamente) è un semplice sottocaso. Osserviamo che, nel caso della forza di Lorentz studiato sopra, la funzione  $\mathcal{V}$  dipendeva *linearmente* dalle coordinate puntate. In questo modo le componenti lagrangiane delle forze associate a  $\mathcal{V}$  risultavano dipendere dalle *derivate prime nel tempo* delle coordinate  $q^k$  (cioè dalle coordinate  $\dot{q}^k$ ) e non dalle *derivate seconde nel tempo* delle  $q^k$  (cioè dalle derivate prime delle coordinate  $\dot{q}^k$ ). La dipendenza dalle derivate seconde nel tempo delle coordinate  $q^k$  è interamente dovuta, nelle equazioni di Eulero-Lagrange, al termine associato all'energia cinetica del sistema. Sappiamo che in virtù di questa dipendenza le equazioni di Eulero-Lagrange possono scriversi in forma normale come dimostrato nella proposizione 8.3. Questo è un punto molto importante, sia dal punto di vista fisico che matematico, sul quale ci si deve soffermare. Assumendo di avere componenti lagrangiane delle forze  $\mathcal{Q}_k$  che si ottengono applicando l'operatore di Eulero-Lagrange  $\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$  su una funzione  $\mathcal{V} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che dipende sia dalle coordinate  $q^k$  (e dal tempo) e anche dalle coordinate  $\dot{q}^k$ , è ragionevole limitare la possibile dipendenza di  $\mathcal{V}$  dalle  $\dot{q}^k$  al caso *lineare*. Se la dipendenza di  $\mathcal{V}$  dalle  $\dot{q}^k$  fosse di tipo arbitrario, potremmo avere componenti lagrangiane delle forze, tenendo conto della richiesta  $dq^k = dq^k/dt$ , che contengono le *derivate temporali seconde* delle coordinate  $q^k$ . In questo caso saremmo fuori dalle ipotesi della proposizione 8.3 e non sarebbe più assicurata la possibilità di trascrivere in forma normale le equazioni di Eulero-Lagrange perdendo, in generale, l'esistenza e l'unicità della soluzione, cioè il *determinismo* dal punto di vista fisico. Tenuto conto di ciò diamo la seguente definizione.

**Definizione 9.1. (Potenziale generalizzato)** Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  sottoposto a vincoli olonomi ideali e descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si consideri quindi una distribuzione di forze  $\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , con  $\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}}$  agente su  $P_i$  (la dipendenza dal riferimento  $\mathcal{J}$  sussiste solamente nel caso in cui le forze siano inerziali). Tale distribuzione di forze ammette un campo scalare  $\mathcal{V} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  come **potenziale generalizzato**, se, in ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  sono ottenibili come:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k}, \quad (9.18)$$

dove la funzione  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  (più precisamente  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}} \circ \psi^{-1}$  riferita ad ogni carta di coordinate locali naturali  $(U, \psi)$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ), dipende al più linearmente dalle coordinate  $\dot{q}^k$ , e il simbolo  $d/dt$ , con un uso improprio ma coerente del formalismo, si deve intendere come

$$\frac{d}{dt} f(t, q^1, \dots, q^n) := \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial f}{\partial q^k} \quad (9.19)$$

per ogni funzione  $f$  delle coordinate locali  $(t, q^1, \dots, q^n)$ . ◇

### Osservazioni 9.3.

(1) Dato che nella (9.18) non è supposto alcun legame tra le coordinate  $q^k$  e le coordinate

$\dot{q}^k$ , in particolare non è fissata alcuna curva parametrizzata in  $t$ , una definizione del simbolo  $d/dt$  è necessaria nella formula (9.18). Tale definizione risulta essere quella standard quando l'espressione (9.18) è usata sulle curve soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange lungo le quali si assume esplicitamente  $\dot{q}^k = dq^k/dt$ .

(2) Se si assume che  $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}}$  sia un campo scalare su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , con la stessa procedura usata per provare la proposizione 8.4 si dimostra che, cambiando coordinate naturali, valgono le relazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}^k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \left( \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}}{\partial q'^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{q}'^j} \right).$$

Queste relazioni sono compatibili con le relazioni valide per le componenti lagrangiane sotto cambiamento di coordinate locali naturali adattate alle fibre:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \mathcal{Q}'_j|_{\mathcal{S}}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n).$$

(3) Tenuto conto della linearità rispetto alle coordinate puntate, in un sistema di coordinate naturali fissate, l'espressione esplicita di  $\mathcal{V}$  può solo essere della forma

$$\mathcal{V}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{k=1}^n A_k(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k + B(t, q^1, \dots, q^n). \quad (9.20)$$

Si verifica subito che cambiando coordinate naturali la struttura di sopra è effettivamente preservata e rimane lineare nelle coordinate puntate. Cambiando sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  le funzioni  $A$  e  $B$  si trasformano come segue, con ovvie notazioni:

$$A'_k(t', q') = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} A_h(t, q), \quad B'(t', q') = B(t, q) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial t'} A_h(t, q).$$

In ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  il calcolo esplicito di  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}}$  tenendo conto di (9.20) e (9.18) fornisce immediatamente:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial A_h}{\partial q^k} - \frac{\partial A_k}{\partial q^h} \right) \dot{q}^h - \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial q^k}. \quad (9.21)$$

Risulta allora evidente che anche le componenti lagrangiane delle forze, e non solo il potenziale generalizzato che le genera, devono essere funzioni *lineari* delle coordinate puntate  $\dot{q}^k$ .

### 9.2.3 Condizioni per l'esistenza del potenziale generalizzato

Se è assegnata la forma funzionale di componenti lagrangiane di sistemi di forze:  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{S}} = \mathcal{V}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  non è un compito banale stabilire se esse possono essere generate da un potenziale generalizzato. Esistono però delle condizioni necessarie e localmente sufficienti

che ora studieremo. La situazione è simile a quella in cui ci si chiede se una determinata forza sia ottenibile come il gradiente di un campo scalare. (In quel caso condizioni necessarie e localmente sufficienti, se il campo di forze è posizionale e di classe  $C^2$ , sono quelle di irrotazionalità (5.12) come sancito nel teorema 5.4). Nel seguito ometteremo la specificazione  $|\mathcal{J}$  per semplicità notazionale.

Cerchiamo dunque delle identità che coinvolgano solo le  $\mathcal{Q}_k$ , ma non  $\mathcal{V}$  e nemmeno le funzioni  $A_k$  e  $B$ , e che valgano ogni qual volta le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  ammettono potenziale generalizzato per cui è verificata la (9.20).

Da (9.21) abbiamo immediatamente che:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial \dot{q}^h} = \frac{\partial A_h}{\partial q^k} - \frac{\partial A_k}{\partial q^h}$$

e di conseguenza deve valere l'identità :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial \dot{q}^h} + \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial \dot{q}^k} = 0, \quad \text{ovunque e per ogni } k, h = 1, \dots, n.$$

Nello stesso modo, partendo da (9.21) si verifica facilmente, confrontando i due membri, che:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial q^k} - \frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial q^h} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial \dot{q}^k} \right), \quad \text{ovunque e per ogni } k, h = 1, \dots, n.$$

Vale il seguente notevole risultato.

**Teorema 9.2.** *In riferimento alla definizione 9.1 valgono i seguenti fatti.*

(a) *Se un sistema di forze ammette potenziale generalizzato allora componenti lagrangiane associate  $\mathcal{Q}_k$ , pensate come funzioni di classe  $C^2$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  soddisfano in ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , le identità :*

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial \dot{q}^h} + \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial \dot{q}^k} = 0, \quad \text{ovunque e per ogni } k, h = 1, \dots, n. \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial q^h} - \frac{\partial \mathcal{Q}_h}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{Q}_k}{\partial \dot{q}^h} \right), \quad \text{ovunque e per ogni } k, h = 1, \dots, n. \quad (9.23)$$

(b) *Viceversa le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$ , pensate come funzioni di classe  $C^2$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e lineari nelle coordinate  $\dot{q}^k$ , ammettono potenziale generalizzato in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto dato in coordinate da  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n, \dot{q}_0^1, \dots, \dot{q}_0^n)$  di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  se soddisfano le condizioni (9.22) e (9.23). L'espressione esplicita del potenziale generalizzato è in tal caso:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^n (q^k - q_0^k) \mathcal{Q}_k(t, q_0^1 + s(q^1 - q_0^1), \dots, q_0^n + s(q^n - q_0^n), \dot{q}_0^1 + s(\dot{q}^1 - \dot{q}_0^1), \dots, \dot{q}_0^n + s(\dot{q}^n - \dot{q}_0^n)) ds. \end{aligned} \quad (9.24)$$

*Tale identità vale fino a dove il secondo membro è definito nella carta locale considerata.*

**Dimostrazione.** La dimostrazione di (a) è stata data sopra. Passiamo a (b). Consideriamo un punto  $a \in A(\mathbb{V}^{n+1})$  di coordinate  $(t_0, q_0^1, \dots, q_0^n, \dot{q}_0^1, \dots, \dot{q}_0^n) = (t_0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$  rispetto alla carta locale  $\psi : U \subset A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ . Questa non è una restrizione dato che possiamo sempre restringerci a tale caso traslando l'origine delle coordinate partendo da una carta locale definita intorno allo stato cinetico considerato  $a$ . Restringiamoci in  $\psi(U)$  ad un intorno aperto  $V \subset \psi(U) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  di  $(t_0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$  su cui le coordinate  $(t, sq^1, \dots, sq^n, s\dot{q}^1, \dots, s\dot{q}^n)$  per  $s \in [0, 1]$  corrispondono sempre a punti di  $U$  quando  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in V$ . In altre parole, se  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in V$ , per ogni fissato tempo  $t$ , anche i punti sul segmento in  $\mathbb{R}^{2n}$  parametrizzato da  $s \in [0, 1]$  che congiunge l'origine di  $\mathbb{R}^{2n}$  a  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  cadono sempre in  $\psi(U)$  quando  $s \in [0, 1]$ . Non ci sono “buchi” in  $V$  che possono essere attraversati dal segmento e che non stanno in  $\psi(U)$ . Dato che integreremo lungo questi segmenti delle grandezze definite su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , questa struttura di  $V$  è necessaria per eseguire la dimostrazione. Lasciamo al lettore la prova dell'esistenza di un tale intorno  $V$  basata sul fatto che i prodotti cartesiani di intervalli temporali aperti e di palle aperte sufficientemente piccole definite in coordinate  $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  sono una base della topologia di  $\mathbb{R}^{2n+1}$  (ed individuano una base analoga per la topologia di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  usando il fatto che le carte locali sono omeomorfismi locali). Vogliamo provare che, nelle ipotesi fatte e lavorando in  $V$ , da (9.24) si ricava

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} = \mathcal{Q}_k(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

Lavorando in  $V$  l'espressione (9.24) è ben definita e fornisce le seguenti due identità, con ovvie notazioni:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} = \int_0^1 ds \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q}) + \int_0^1 ds \sum_h sq^h \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial q^k}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} = \int_0^1 ds \sum_h sq^h \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^k}.$$

Si tenga presente nel seguito che, per ipotesi,  $\partial \mathcal{Q}_h / \partial \dot{q}^k$  non dipende dalle  $\dot{q}$ . Usando le identità appena ottenute si ricava subito che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} &= \int_0^1 ds \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q}) + \int_0^1 ds \sum_h sq^h \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial q^k} \\ &\quad - \int_0^1 ds \sum_h s\dot{q}^h \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^k} - \int_0^1 ds \sum_h sq^h \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \end{aligned}$$

Quindi, riordinando il secondo membro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} &= \int_0^1 ds \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q}) - \int_0^1 ds \sum_h s\dot{q}^h \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \\ &\quad - \int_0^1 ds \sum_h sq^h \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{Q}_h(t, sq, s\dot{q})}{\partial q^k} \right) \end{aligned}$$

Facendo infine uso delle (9.22) e (9.23) nel secondo membro, si ha l'identità finale:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} = \int_0^1 ds \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q}) + \int_0^1 ds \sum_h sq^h \frac{\partial \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q})}{\partial q^h} + \int_0^1 ds \sum_h s\dot{q}^h \frac{\partial \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q})}{\partial \dot{q}^h}$$

cioè:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} = \int_0^1 ds \frac{d}{ds} s \mathcal{Q}_k(t, sq, s\dot{q}) ,$$

da cui infine:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}^k} = \mathcal{Q}_k(t, q, \dot{q})$$

che è la nostra tesi.  $\square$

**Osservazioni 9.4.** Le condizioni date nel teorema assicurano l'esistenza locale di un potenziale generalizzato per un insieme di componenti lagrangiane. Non è però ovvio che i vari potenziali locali ottenuti al variare dell'intorno si raccordino definendo una struttura globale. Tale problema viene affrontato caso per caso.

#### 9.2.4 Potenziali generalizzati delle forze inerziali

Consideriamo il solito sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_i$  con masse  $m_i$ . Supponiamo che il sistema sia sottoposto a  $c = 3N - n$  vincoli olonomi ideali e quindi sia descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  dalle equazioni di Eulero-Lagrange in forma generica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (9.25)$$

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (9.26)$$

dove  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento inerziale e le  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane delle forze attive (vere) agenti sul sistema, e ci riferiamo a coordinate locali naturali adattate alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Vogliamo confrontare queste equazioni con quelle relative ad un sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$  di moto assegnato rispetto a  $\mathcal{J}$ . Continueremo ad usare le stesse coordinate locali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k + \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (9.27)$$

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (9.28)$$

le nuove componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}$  sono relative alla forze inerziali presenti nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$  e dipendono dal riferimento al contrario delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$ . Si osservi che se siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità per entrambi i

sistemi di equazioni di Eulero-Lagrange suddetti, ogni soluzione del primo deve anche essere soluzione del secondo e viceversa, dato che entrambi i sistemi equivalgono alle equazioni di Newton per i punti del sistema con le stesse forze vere (incluse quelle vincolari). Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 9.1.** *Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Assumiamo che i vettori posizione  $\mathbf{x}_i := P_i - O$  di ciascun punto materiale di  $\mathfrak{S}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  siano funzioni di classe  $C^3$  nelle coordinate libere su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e nel tempo congiuntamente. e che il moto relativo del sistema di riferimento  $\mathcal{J}'$  rispetto ad assi solidali con riferimento  $\mathcal{J}$  sia assegnato da funzioni di classe  $C^3$  nel tempo (in modo tale che  $t \mapsto O'(t) - O$  sia  $C^3$  e  $t \mapsto \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t)$  sia  $C^2$ ). Allora le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}$  delle forze inerziali in  $\mathcal{J}'$  sono individuate da un potenziale generalizzato  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}'}$  e vale:*

$$\mathcal{V}|_{\mathcal{J}'} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}, \quad (9.29)$$

in ogni sistema di coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . In particolare  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}$  è sempre una funzione lineare delle coordinate  $\dot{q}^k$ .

**Dimostrazione.** L'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}$  sarà differente da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$ . Indicheremo nel seguito con  $\mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n) = P_i - O$  il vettore posizione di  $P_i$  nel riferimento  $\mathcal{J}$  e con  $\mathbf{x}'_i(t, q^1, \dots, q^n) := P_i - O'$  il vettore posizione dello stesso punto materiale rispetto al riferimento  $\mathcal{J}'$ . Queste funzioni sono  $C^2$  per ipotesi. Indichiamo similmente con  $\mathbf{v}_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e  $\mathbf{v}'_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  le corrispondenti velocità, che come noto sono funzioni *lineari* nelle  $\dot{q}^k$  valendo:

$$\mathbf{v}_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}(t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Vale similmente:

$$\mathbf{v}'_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial t}(t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathbf{x}'_i}{\partial q^k}(t, q^1, \dots, q^n).$$

La legge di trasformazione delle velocità si scrive allora:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t) \wedge \mathbf{x}'_i$$

dove le funzioni  $\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t)$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}(t)$  sono assegnate per ipotesi e sono di classe  $C^2$ . Usando l'espressione per l'energia cinetica rispetto a  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}'$ :

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2, \quad \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2$$

abbiamo che entrambe le funzioni sono di classe  $C^1$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Nello stesso modo, le componenti lagrangiane delle forze inerziali

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}'} &= -m_i \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t) - m_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge \mathbf{x}'_i) - 2m_i \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge \mathbf{v}'_i \\ &\quad - m_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}} \wedge \mathbf{x}'_i. \end{aligned}$$

risultano essere di classe  $C^1$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Confrontando le due definizioni di energia cinetica, rispetto a  $\mathcal{J}$  e rispetto a  $\mathcal{J}'$  si trova infine che:

$$\mathcal{V}|_{\mathcal{J}'}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) - \mathcal{T}|_{\mathcal{J}'}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n),$$

è di classe  $C^2$  e vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}|_{\mathcal{J}'}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &:= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge \mathbf{x}'_i(t, q^1, \dots, q^n))^2 \\ &\quad + \frac{M}{2} \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t)^2 + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}'_i \wedge (\mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t) + \mathbf{v}'_i(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)), \end{aligned}$$

dove  $M := \sum_{i=1}^N m_i$ . Per costruzione,  $\mathcal{V}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è una funzione *lineare* nelle  $\dot{q}^k$ , dato che le  $\dot{q}^k$  appaiono, e lo fanno linearmente, solo esplicitando le componenti delle  $\mathbf{v}'_i$  e a loro volta tali componenti appaiono linearmente nell'espressione data sopra per  $\mathcal{V}$ . Pertanto  $\mathcal{V}$  soddisfa la condizione necessaria più importante per essere interpretato come *potenziale generalizzato*, in particolare la derivata  $d/dt$  può essere interpretata come in (9.19). Resta da dimostrare che applicando la (9.18) al nostro  $\mathcal{V}$ , il primo membro risulta definire le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}$  che appaiono in (9.28) quando valutato su ogni stato cinetico  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  delle coordinate considerate. Possiamo confrontare (9.25) e (9.27) dove possiamo scegliere le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  come funzioni identicamente nulle. Tenendo conto che, come osservato sopra, le soluzioni del primo sistema lo sono anche per il secondo e viceversa dato che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità, troviamo subito che vale

$$\frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}'}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{V}|_{\mathcal{J}'}}{\partial \dot{q}^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}'}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (9.30)$$

su ogni stato cinetico  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  attraversato da una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (9.25)-(9.26) e (9.27)-(9.28) con le  $\mathcal{Q}_k$  identicamente nulle. Dato che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza, ogni stato cinetico  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è attraversato da una soluzione (quella che ha tale stato cinetico come condizione iniziale). Quindi la (9.30) vale per ogni stato cinetico e il teorema è dimostrato.  $\square$

### 9.3 Configurazioni di equilibrio e stabilità

In questa sezione specializzeremo alcune definizioni e risultati, ottenuti nel capitolo 7, a sistemi fisici di punti materiali che ammettono descrizione lagrangiana. La prima nozione di cui abbiamo bisogno è quella di *configurazione di equilibrio*. Si tratta di una ovvia specializzazione della definizione 7.2 al caso lagrangiano.

#### 9.3.1 Configurazioni di equilibrio rispetto ad un riferimento

**Definizione 9.2.** (**Configurazione di equilibrio rispetto ad un riferimento**) Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali sottoposti a  $c = 3N - n \geq 0$  vincoli olonomi ideali e descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e si fissi un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ . Consideriamo poi una carta locale naturale adattata alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  con coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  dove:

- (i)  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $(q^1, \dots, q^n) \in V \subset \mathbb{R}^n$  aperto,
- (iii)  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \mathbb{R}^n$ ,
- (iv) le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sono solidali (vedi definizione 8.1) con  $\mathcal{J}$ .

Supponiamo infine che le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  di tutte le forze attive non dipendano esplicitamente dal tempo nelle coordinate lagrangiane dette:  $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_k(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Si dice che la  $n$ -pla di coordinate  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  individua una **configurazione di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{J}$** , se ogni soluzione in  $\mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}^n$  delle equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) con condizioni iniziali

$$(q^1(0), \dots, q^n(0), \dot{q}^1(0), \dots, \dot{q}^n(0)) = (q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0).$$

è una restrizione della curva:

$$(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = (q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

◇

#### Osservazioni 9.5.

(1) È importante notare che la  $n$ -pla  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  non individua una configurazione in  $\mathbb{V}^{n+1}$ , ma una *collezione di esse*, più precisamente una *soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange*. Tale curva appare descrivere un punto *in quiete nel riferimento  $\mathcal{J}$* . La definizione di “configurazione di equilibrio” dipende quindi dal riferimento  $\mathcal{J}$  scelto.

(2) La definizione tuttavia *non* dipende dal sistema di coordinate naturali usate purché esse siano solidali con  $\mathcal{J}$ . La dimostrazione è immediata conseguenza del fatto che, se due sistemi di coordinate naturali definiti sullo stesso aperto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ :  $(t, q^1, \dots, q^n)$  e  $(t', q'^1, \dots, q'^n)$  adattati alle fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , sono entrambi solidali con  $\mathcal{J}$ , allora la trasformazione di coordinate  $q^k = q^k(t', q'^1, \dots, q'^n)$  per  $k = 1, \dots, n$  (e la sua inversa) non può dipendere esplicitamente dal tempo. Infatti, se  $\mathbf{x}_i$  è il vettore posizione in  $\mathcal{J}$  del punto materiale  $P_i \in \mathfrak{S}$ ,  $\mathbf{x}_i$  non può dipendere



esplicitamente dal tempo quando parametrizzato tramite le coordinate primate oppure quelle non primate, per definizione di coordinate solidali definizione 8.1. D'altra parte la dipendenza parametrica di  $\mathbf{x}_i$  dalle coordinate primate si ottiene anche esprimendo (i)  $\mathbf{x}_i$  in funzione delle coordinate non primate e poi (ii) esprimendo queste ultime in funzione di quelle primate:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1(t', q'^1, \dots, q'^n) \dots, q^n(t', q'^1, \dots, q'^n))$$

Pertanto deve risultare che, per ogni scelta di  $(t', q'^1, \dots, q'^n)$  nell'intorno considerato:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{x}_i(q^1(t', q'^1, \dots, q'^n) \dots, q^n(t', q'^1, \dots, q'^n)) = 0.$$

In altre parole:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial t'} = \mathbf{0}.$$

Calcolando il quadrato di entrambi i membri dopo averli moltiplicati per le masse  $m_1$  e sommato su  $i$ , si ricava

$$\sum_{k,h=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \right) \frac{\partial q^h}{\partial t'} \frac{\partial q^k}{\partial t'} = \sum_{k,h=1}^n 2a_{hk} \frac{\partial q^h}{\partial t'} \frac{\partial q^k}{\partial t'} = 0.$$

La matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è quella considerata in proposizione 8.3. In tale proposizione si è provato che tale matrice è strettamente definita positiva. Dobbiamo pertanto concludere che, per ogni  $h = 1, \dots, n$  e per tutte le configurazioni descritte da  $n$ -ple di coordinate  $(q^1, \dots, q^n)$  in  $V$ ,

$$\frac{\partial q^h}{\partial t'} = 0.$$

Abbiamo la proposizione seguente, che fornisce condizioni necessarie e sufficienti affinché una configurazione sia di equilibrio.

**Proposizione 9.2.** *In relazione alla definizione 9.2 si considerino coordinate locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  variabili nell'aperto  $\mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}^n$  e solidali con il riferimento  $\mathcal{J}$ . In tali coordinate si considerino le equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, .$$

*Si supponga infine che la funzione  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  (che non dipende da  $t$  in quanto le coordinate locali naturali sono solidali con  $\mathcal{J}$ ) sia di classe  $C^2$ . Vale quanto segue.*

(a) Se le funzioni  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , per  $k = 1, \dots, n$  sono di classe  $C^1$  e non dipendono esplicitamente dal tempo,  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  è una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  se e solo se

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0) = 0, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.31)$$

(b) Se le  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  sono tutte descritte da un'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  e pertanto il sistema  $\mathfrak{S}$  ammette lagrangiana della forma  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n)$  di classe  $C^2$  su  $V$ ,  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  individua una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , se e solo se  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$  è un punto di stazionarietà di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial q^k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n) \right|_{(q_0^1, \dots, q_0^n)} = 0, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.32)$$

**Dimostrazione.** (a) Dato che le coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  sono solidali con  $\mathcal{J}$ , le funzioni che esplicitano i vettori posizione  $\mathbf{x}_i$  dei punti  $P_i \in \mathfrak{S}$  nel riferimento  $\mathcal{J}$  non dipenderanno esplicitamente dal tempo. Di conseguenza l'espressione dell'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$  non dipenderà esplicitamente dal tempo ed avrà forma (vedi la sezione 8.2.4):

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k,$$

dove i coefficienti  $a_{hk}(q^1, \dots, q^n)$  definiscono funzioni  $C^2$  nelle coordinate considerate. Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno allora, tenendo conto che gli  $a_{hk}$  non dipendono esplicitamente dal tempo:

$$2 \sum_k a_{hk} \frac{d^2 q^k}{dt^2} + 2 \sum_{k,r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q^r} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^r}{dt} - \sum_{r,k} \frac{\partial a_{rk}}{\partial q^h} \frac{dq^r}{dt} \frac{dq^k}{dt} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (9.33)$$

(Si osservi che, per costruzione, il primo membro si annulla se valutato su una curva costante  $q^k(t) = q_0^k$  per ogni  $k = 1, \dots, n$  e ogni  $t \in \mathbb{R}$ ; questo risultato avrebbe potuto essere falso se  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$  avesse avuto una dipendenza temporale esplicita dal tempo (perché?). Tali equazioni si possono scrivere in forma normale semplicemente moltiplicando ambo i membri per l'inversa della matrice di coefficienti  $a_{hk}$  e con altre banali modifiche. Nelle ipotesi fatte, escludendo le funzioni  $\mathcal{Q}^k$ , le rimanenti funzioni delle coordinate  $q^1, \dots, q^n$  che appaiono nella forma esplicita delle equazioni di Eulero-Lagrange data sopra sono di classe  $C^1$ . I coefficienti della matrice inversa di  $[a_{hk}]$  sono di classe  $C^2$  nelle  $q^1, \dots, q^n$  dato che sono rapporti di polinomi (con denominatori mai nulli) dei coefficienti  $a_{hk}$ . Tenendo conto che, escludendo le funzioni  $\mathcal{Q}^k$ , la dipendenza dalle derivate delle coordinate  $q^k$  è polinomiale e che la funzione  $\mathcal{Q}^k$  è di classe  $C^1$ , concludiamo che: *il secondo membro delle equazioni di Eulero Lagrange scritte in forma normale deve essere una funzione di classe (almeno)  $C^1$  congiuntamente nelle variabili  $q^k$  e nelle derivate di esse.* Siamo allora nelle ipotesi del teorema di (esistenza e) unicità globale, teorema 4.5. Per provare la tesi è allora sufficiente verificare che se la soluzione costante:

$$(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = (q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad (9.34)$$

risolve le equazioni di Eulero-Lagrange allora vale (9.31) e che se vale (9.31) allora

$$(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = (q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

è una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange.

Se la soluzione *costante* (9.34) risolve le equazioni di Eulero-Lagrange (9.33), il primo membro deve annullarsi su di essa per costruzione; ne consegue che vale la (9.31). Se d'altra parte vale (9.31), la soluzione costante (9.34) risolve le equazioni di Eulero-Lagrange (9.33) dato che ne annulla il primo membro ed il secondo è già nullo per (9.31)).

(b) La dimostrazione è immediata dalla precedente tenendo conto del fatto che:

$$\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}} = -\frac{\partial}{\partial q^k} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n).$$

□

**Osservazioni 9.6.** La dipendenza delle  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  dal riferimento  $\mathcal{J}$  sussiste solo quando si considerano riferimenti  $\mathcal{J}$  che sono non inerziali: le forze inerziali dipendono dal riferimento. Le forze vere sono invece indipendenti dal riferimento.

La proposizione può essere modificata nella seguente utile estensione.

**Proposizione 9.3.** *In relazione alla definizione 9.2 si considerino coordinate locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  variabili nell'aperto  $\mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}^n$  e solidali con il riferimento  $\mathcal{J}$ . In tali coordinate si considerino le equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k|_{\hat{\mathcal{J}}}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{array} \right. \quad \text{per } k = 1, \dots, n, .$$

dove  $\hat{\mathcal{J}} \neq \mathcal{J}$ . Si supponga infine che la funzione  $\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  sia di classe  $C^2$  e non dipenda esplicitamente dal tempo. Vale quanto segue.

(a) Si consideri la decomposizione standard di  $\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}}$  (vedi la sezione 8.2.4):

$$\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \sum_{h,k} a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k + \sum_k b_k \dot{q}^k + c. \quad (9.35)$$

Se le funzioni  $\mathcal{Q}_k|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathcal{Q}_k|_{\hat{\mathcal{J}}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ , per  $k = 1, \dots, n$  sono di classe  $C^1$  e non dipendono esplicitamente dal tempo,  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  è una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  se e solo se:

$$\mathcal{Q}_k|_{\hat{\mathcal{J}}}(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0) = -\frac{\partial c(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)}{\partial q^k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.36)$$

(b) Se il sistema  $\mathfrak{S}$  ammette lagrangiana della forma  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n)$  di classe  $C^2$  su  $V$ ,  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  individua una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , se e solo se  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$  è un punto di stazionarietà di  $\mathcal{U}' := \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} - c$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial q^k} \mathcal{U}'(q^1, \dots, q^n) \right|_{(q_0^1, \dots, q_0^n)} = 0, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (9.37)$$

**Dimostrazione.** Vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &= \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k + \sum_{k=1}^n b_k(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k \\ &\quad + c(t, q^1, \dots, q^n), \end{aligned}$$

dove a primo membro non abbiamo scritto la variabile  $t$  dato che, per ipotesi  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$  non dipende esplicitamente da  $t$ . Derivando in  $t$  abbiamo dunque che:

$$0 = \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial a_{hk}}{\partial t} \dot{q}^h \dot{q}^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial t} \dot{q}^k + \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Per ogni scelta di  $(t, q^1, \dots, q^n)$  fissate, il polinomio di secondo grado nelle variabili  $\dot{q}^k$  (che sono indipendenti dalle altre variabili) che appare a secondo membro è nullo. Un polinomio è identicamente nullo se e solo se ha tutti i coefficienti nulli. Ne consegue che le derivate parziali in  $t$  dei coefficienti  $a_{hk}$ ,  $b_k$  e  $c$  sono identicamente nulle. Possiamo allora concludere che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k + \sum_{k=1}^n b_k(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k + c(q^1, \dots, q^n),$$

e la dimostrazione procede come nel caso precedente tenendo conto che ora le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere scritte:

$$\begin{aligned} 2 \sum_k a_{hk} \frac{d^2 q^k}{dt^2} + 2 \sum_{k,r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q^r} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^r}{dt} + \sum_r \frac{\partial b_h}{\partial q^r} \frac{dq^r}{dt} - \sum_{r,k} \frac{\partial a_{rk}}{\partial q^h} \frac{dq^r}{dt} \frac{dq^k}{dt} + \sum_k \frac{\partial b_k}{\partial q^h} \frac{dq^k}{dt} \\ = \frac{\partial c(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)}{\partial q^k} + \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \end{aligned}$$

□

### Osservazioni 9.7.

(1) Come nel caso precedente, la dipendenza delle  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  dal riferimento  $\mathcal{J}$  sussiste solo quando si considerano riferimenti  $\mathcal{J}$  che sono non inerziali: le forze inerziali dipendono dal riferimento. Le forze vere sono invece indipendenti dal riferimento.

(2) Ci si può chiedere se esistano davvero casi in cui  $\mathcal{I} \neq \hat{\mathcal{I}}$ , le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{I}$ , ma l'energia cinetica riferita a  $\hat{\mathcal{I}}$  non dipende esplicitamente dal tempo. La risposta è positiva ed un esempio semplice si quando  $\hat{\mathcal{I}}$  è un riferimento inerziale mentre  $\mathcal{I}$  non lo è, ma ruota senza traslare rispetto a  $\hat{\mathcal{I}}$  con vettore  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} \neq \mathbf{0}$  costante.

**Esempi 9.2.** Si fissi un sistema destrorso di assi ortogonali  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  solidali con il riferimento  $\mathcal{I}$  ed uscenti dall'origine  $O$ . Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato sull'asse  $x$ , supposto liscio, e connesso ad  $O$  tramite una molla di massa nulla, costante elastica  $k > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Il riferimento  $\mathcal{I}$  ruota rispetto al riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{I}}$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è costante. Sul punto  $P$ , oltre alla forza della molla ed alla reazione vincolare, agisce una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante.

In questo caso, usando la coordinata  $x$  del punto  $P$  come coordinata libera, abbiamo definito un sistema di coordinate naturali  $(t, x)$  che soddisfa tutti i requisiti della definizione 9.2, rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$ . Nel caso in esame abbiamo immediatamente che:

$$\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{I}}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\Omega^2 x^2.$$

La funzione  $c$  è quindi data da

$$c(x) = \frac{m}{2}\Omega^2 x^2.$$

Riguardo alle forze abbiamo che (omettendo la specificazione  $|_{\hat{\mathcal{I}}}$  essendo  $\hat{\mathcal{I}}$  inerziale e le forze vere):

$$\mathcal{Q} = -kx - \gamma\dot{x}.$$

Le configurazioni di equilibrio  $x_0$  nel riferimento non inerziale  $\hat{\mathcal{I}}$  si ottengono, per la proposizione 9.3, imponendo che:

$$\left. \frac{dc(x)}{dx} \right|_{x_0} = \mathcal{Q}(x_0, 0).$$

In altre parole deve essere  $m\Omega^2 x_0 = kx_0$ , da cui

$$x_0 = 0,$$

dove abbiamo assunto che  $m\Omega^2/k \neq 1$ .

Possiamo studiare il problema delle configurazioni di equilibrio usando direttamente la proposizione 9.2. In questo caso si usa solo il riferimento  $\mathcal{I}$ . In esso

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2.$$

Si osservi che nel riferimento  $\mathcal{I}$  appaiono anche la forza inerziale di Coriolis,  $-2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$ , e quella centrifuga  $-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\hat{\mathcal{I}}} \wedge \mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} := x \mathbf{e}_x$ . La loro somma vale:

$$-2m\Omega\dot{x} \mathbf{e}_y + m\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

Riguardo alle forze abbiamo che mettendo la specificazione  $|_{\mathcal{J}}$  essendo  $\mathcal{J}$  *non* inerziale ed essendo parte delle forze attive di natura inerziale):

$$\mathcal{Q}|_{\mathcal{J}} = -kx - \gamma\dot{x} + m\Omega^2 x.$$

Si osservi che la forza di Coriolis non produce componenti lagrangiane essendo:

$$-2m\Omega\dot{x} \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = -2m\Omega\dot{x} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio  $x_0$  nel riferimento non inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$  si ottengono, per la proposizione 9.2, imponendo che:

$$\mathcal{Q}|_{\mathcal{J}}(x_0, 0) = 0.$$

In altre parole deve essere  $-kx_0 + m\Omega^2 x = 0$ , da cui esattamente come prima:

$$x_0 = 0,$$

dove abbiamo assunto che  $m\Omega^2/k \neq 1$ .

### 9.3.2 Equilibrio stabile ed instabile, teorema di Lagrange-Dirichlet

Ripetiamo per i sistemi lagrangiani alcune considerazioni già fatte nel caso generale nel capitolo 7. Dal punto di vista fisico, la nozione di configurazione di equilibrio data sopra non caratterizza in modo appropriato le configurazioni di equilibrio reali dei sistemi fisici (e degli altri sistemi della realtà descrivibili con equazioni differenziali). Una ragione, forse la più importante, è dovuta al fatto che le configurazioni dei sistemi fisici non corrispondono a configurazioni geometriche *ideali*, perché lo stato di ogni sistema fisico (la posizione e la forma stessa degli oggetti) è sottoposto a continue interazioni con l'ambiente circostante (per lo più interazioni di carattere termodinamico), che rendono lo stato fluttuante, sia pur con fluttuazioni molto piccole. Per questo motivo le configurazioni fisiche di equilibrio *osservabili nella realtà fisica* hanno anche una proprietà di *stabilità* sotto piccole perturbazioni dello stato iniziale. Queste proprietà di stabilità vengono definite a seconda del modello matematico adottato. Nel seguito ci riferiremo alle nozioni più elementari possibili specializzando al caso lagrangiano quelle illustrate nel capitolo 7. L'idea centrale della definizione di configurazione di equilibrio (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ ) stabile è quella che ogni soluzione rimanga confinata *vicino* alla configurazione (nel giudizio del riferimento  $\mathcal{J}$ ) anche partendo da condizioni iniziali, che non coincidono con la configurazione di equilibri, ma se ne discostano un poco.

**Definizione 9.3.** (Configurazione di equilibrio stabile rispetto ad un riferimento) In riferimento alla definizione 9.2 ed alle notazioni usate in essa (in particolare le coordinate lagrangiane usate sono *solidali* con il riferimento  $\mathcal{J}$ ), si assuma che il sistema fisico sia descritto da componenti lagrangiane di tutte le forze attive agenti sul sistema  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}} = \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$

senza dipendenza esplicita dal tempo, in modo tale che le equazioni di Eulero-Lagrange risultanti costituiscano un sistema di equazioni differenziali *autonomo*.

Se l' $n$ -pla di coordinate  $Q_0 := (q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  individua una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ , indichiamo con  $A_0$  la  $2n$ -pla  $(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0) \in V \times \mathbb{R}^n$ .  $Q_0$  è detta:

**(a) stabile nel futuro (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )**, se per ogni intorno aperto  $B \ni A_0$  esiste un intorno aperto  $E \ni A_0$  tale che ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (8.32) in  $V \times \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : J \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$  (dove  $J$  è un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  che contiene  $t = 0$ ) con  $\gamma(0) = \gamma_0 \in E$ , soddisfa  $\gamma(t) \in B$  se  $J \ni t \geq 0$ ;

**(b) stabile nel passato (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )**, se per ogni intorno aperto  $B \ni A_0$  esiste un intorno aperto  $E \ni A_0$  tale che ogni soluzione di (8.32) in  $V \times \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : J \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$  (dove  $J$  è un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$  che contiene  $t = 0$ ) con  $\gamma(0) = \gamma_0 \in E$ , soddisfa  $\gamma(t) \in B$  se  $J \ni t \leq 0$ ;

**(c) stabile (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )**, se è stabile nel futuro e stabile nel passato;

**(d) instabile (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )** (rispettivamente **nel futuro** o **nel passato**), se non è stabile (rispettivamente nel futuro o nel passato);

**(e) asintoticamente stabile nel futuro (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )**, se è stabile nel futuro ed esiste un intorno aperto  $F \ni A_0$  tale che ogni soluzione massimale di (8.32) in  $V \times \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma$  con  $\gamma(0) = \gamma_0 \in F$ , è completa nel futuro e soddisfa  $\gamma(t) \rightarrow A_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ;

**(f) asintoticamente stabile nel passato (rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ )**, se è stabile nel passato ed esiste un intorno aperto  $P \ni A_0$  tale che ogni soluzione massimale di (8.32) in  $V \times \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma$  con  $\gamma(0) = \gamma_0 \in P$ , è completa nel passato e soddisfa  $\gamma(t) \rightarrow A_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .  $\diamond$ .

#### Osservazioni 9.8.

**(1)** Nel caso in cui le  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  siano di classe  $C^1$  e la  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}$  sia di classe  $C^2$  se  $Q_0 := (q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  individua una configurazione di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  che è stabile nel futuro, in virtù della proposizione 4.8, le soluzioni massimali delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizione iniziale nell'intorno  $E$  sono sicuramente complete nel futuro (possiamo prendere  $B$  in modo che abbia chiusura compatta). Lo stesso risultato si ottiene per la stabilità nel passato.

**(2)** Bisogna avere ben chiaro il fatto che, trattando la stabilità di configurazioni di sistemi fisici, ed in particolare di sistemi lagrangiani, *la nozione di stabilità include informazioni e richieste sulle velocità e non solo sulle configurazioni*.

Possiamo ora enunciare l'analogo del teorema 7.5 in formulazione lagrangiana includendo l'analogo del teorema 7.7.

**Teorema 9.3. (Lagrange-Dirichlet)** *Si consideri un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  sottoposti a  $c = 3N - n \geq 0$  vincoli olonomi ideali e descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si consideri un sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n)$  variabili in  $\mathbb{R} \times V$  ( $V \subset \mathbb{R}^n$  aperto) solidali con  $\mathcal{J}$ , e si assuma infine che le forze attive agenti su sistema si decompongano in una parte conservativa in  $\mathcal{J}$  con energia potenziale totale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  (di classe  $C^2$  nelle variabili  $(q^1, \dots, q^n)$ ) ed una parte non conservativa data dalle forze non dipendenti esplicitamente dal tempo  $\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}} = \mathbf{F}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}})$ , con  $i = 1, \dots, N$  (le cui componenti lagrangia-*

ne sono di classe  $C^1$ ) eventualmente tutte nulle, dove  $\mathbf{x}_i := P - O$  è il vettore posizione di  $P_i$  nel riferimento  $\mathcal{J}$ .

Assumendo che l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  sia di classe  $C^2$ , una configurazione di equilibrio rispetto a  $\mathcal{J}$  individuata da  $Q_0 := (q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  è:

(a) stabile nel futuro se la restrizione di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  ad  $V$  ha un minimo stretto in tale punto e, per  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  corrispondente ad ogni configurazione in  $V$  vale:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} \leq 0 \text{ per ogni scelta dei vettori } \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}};$$

(b) stabile (nel passato e nel futuro) se la restrizione di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  ad  $V$  ha un minimo stretto in  $Q_0$  e, per  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  corrispondente ad ogni configurazione in  $V$  vale:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} = 0 \text{ per ogni scelta dei vettori } \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}} \text{ e}$$

ciò accade in particolare se tutte le forze  $\mathbf{F}_k$  sono nulle.

(c) stabile nel futuro e asintoticamente stabile nel futuro se il punto di minimo stretto  $Q_0$  è anche un punto stazionario isolato<sup>2</sup> dell'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  e, per  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  corrispondente ad ogni configurazione in  $V$ :

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}} < 0, \text{ per } (\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \neq (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}).$$

**Osservazioni 9.9.** Prima di procedere con la dimostrazione osserviamo che se  $\mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}$  denota le componenti lagrangiane del sistema di forze non conservative  $\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}}$ , vale l'identità:

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{Q}_k|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \dot{q}^k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}}. \quad (9.38)$$

Questa identità, che esprime la *potenza complessiva* del sistema di forze  $\{\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}}\}_{i=1, \dots, N}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$  usando coordinate naturali solidali con  $\mathcal{J}$  consente di riformulare il teorema appena enunciato in modo alternativo, senza fare riferimento alle forze, ma solo alle componenti lagrangiane di esso.

**Dimostrazione.** (a) e (b). La dimostrazione (che è essenzialmente la stessa data per il teorema 7.5) si basa sulla definizione di una opportuna funzione di Liapunov che coincide sempre con l'energia meccanica del sistema  $\mathfrak{S}$  nel riferimento  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{H}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n),$$

dove

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k.$$

---

<sup>2</sup>Il fatto che  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$  individui un minimo stretto dell'energia potenziale non è sufficiente ad assicurare che sia anche un punto di stazionarietà isolato dell'energia potenziale: si consideri, per  $N = 1$ , la funzione  $\mathcal{U}(q) := q^4(2 + \sin(1/q))$  se  $q \neq 0$  e  $\mathcal{U}(0) := 0$ .  $\mathcal{U} \in C^2(\mathbb{R})$  ed ha un minimo stretto per  $q = 0$  che non corrisponde ad un punto di stazionarietà isolato.



Si osservi prima di tutto che, per ogni scelta della  $n$ -pla  $(q^1, \dots, q^n)$  fissata, la funzione quadratica nelle  $\dot{q}^k$ :  $\sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k$  ha un minimo stretto per  $\dot{q}^k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Questo segue dal fatto che la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è strettamente definita positiva come dimostrato nella proposizione 8.3. Quindi in particolare

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) > \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0) = 0$$

se  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \neq (0, \dots, 0)$ . Nelle ipotesi in cui anche l'energia potenziale ha un minimo stretto in  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$ , si ha anche:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n) > \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q_0^1, \dots, q_0^n)$$

se  $(q^1, \dots, q^n) \neq (q_0^1, \dots, q_0^n)$  in un intorno di tale punto. Sommando membro a membro le due disuguaglianze trovate, si ottiene immediatamente che, come detto sopra, la funzione di Hamilton ha un minimo stretto in  $(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)$ , dato che risulta:

$$\mathcal{H}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) > \mathcal{H}(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)$$

se  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \neq (q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)$  in un intorno di tale punto. Mostriamo che anche l'altra condizione affinché  $\mathcal{H}$  sia una funzione di Liapunov è soddisfatta. Si tratta della condizione che riguarda  $\mathcal{H}$ .

Nel caso in esame, le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono, dove le  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane del sistema di forze non conservative  $\{\mathbf{F}_i|_{\mathcal{J}}\}_{i=1, \dots, N}$ :

$$2 \sum_k a_{hk} \frac{d^2 q^k}{dt^2} + 2 \sum_{k,r} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q^r} \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^r}{dt} - \sum_{r,k} \frac{\partial a_{rk}}{\partial q^h} \frac{dq^r}{dt} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial q^h} = \mathcal{Q}_h|_{\mathcal{J}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$$

Moltiplicando per  $\dot{q}^h$ , sommando su  $h$  ed infine usando l'identità, valida sui moti del sistema,  $\dot{q}^k = dq^k/dt$ , si trova facilmente che, sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange vale:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^1(t), \dots, q^n(t)) \dot{q}^h(t) \dot{q}^k(t) + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q^1(t), \dots, q^n(t)) \right) \\ &= \sum_{h=1}^n \dot{q}^h \mathcal{Q}_h|_{\mathcal{J}}(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)). \end{aligned}$$

Si osservi che la funzione dentro la derivata totale temporale non è altro che la funzione di Hamilton valutata sulla soluzione delle equazioni di E-L che stiamo considerando. Pertanto, tenendo conto di (9.38), abbiamo trovato che:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t)) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}, \dots, \mathbf{v}_{P_N}|_{\mathcal{J}}) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{J}},$$

dove  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(q^1(t), \dots, q^n(t))$  e  $\mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}}(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  sono valutati sulla soluzione considerata. Come sappiamo dalla proposizione 7.3, in virtù del teorema di esistenza delle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, questo risultato è equivalente ad affermare (pensando le equazioni di E-L come equazioni del prim'ordine) che:

$$\dot{\mathcal{H}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \cdot \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}}(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

Nelle nostre ipotesi sul secondo membro dell'identità trovata, le asserzioni (a) e (b) seguono ora immediatamente dal teorema di Liapunov (teorema 7.1) usando  $\mathcal{H}$  (ristretta ad un intorno di  $(q_0^1, \dots, q_0^n, 0, \dots, 0)$ ) come funzione di Liapunov  $W$ . (c) La dimostrazione è essenzialmente identica a quella del teorema 7.7 tenendo conto delle osservazioni fatte sopra.  $\square$

Per concludere enunciamo la proposizione analoga alla proposizione 7.8, una condizione sufficiente per l'instabilità basata sulle proprietà della matrice hessiana dell'energia potenziale, nel caso di sistemi con forze puramente conservative o tali che le forze attive non conservative non hanno componenti lagrangiane, e questo accade in certe situazioni per forze girostatiche come la forza di Coriolis. La dimostrazione è lasciata per esercizio, ricalcando quella della proposizione 7.8.

**Proposizione 9.4.** *Nelle stesse ipotesi del teorema 9.3 si assuma che le forze attive siano completamente conservative (non siano cioè presenti le forze  $\mathbf{F}_i$ ) oppure le eventuali forze attive non conservative non abbiano componenti lagrangiane. Una configurazione di equilibrio rispetto a  $\mathcal{S}$  individuata da  $(q_0^1, \dots, q_0^n) \in V$  è instabile nel passato e nel futuro se la matrice hessiana dell'energia potenziale ha un autovalore negativo, in  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$ .*

## 9.4 Introduzione alla teoria delle piccole oscillazioni e delle coordinate normali

Consideriamo un sistema fisico con  $n$  gradi di libertà, descritto, in coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$  assunte solidali con il riferimento  $\mathcal{S}$  in cui i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo. La dinamica del sistema fisico sarà completamente individuata da una lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$ , pensata come funzione di classe  $C^2$  delle coordinate in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in modo da garantire la validità dei teoremi di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange. Nel seguito ometteremo la specificazione  $|_{\mathcal{S}}$  per semplicità. Supponiamo ora che, al più ridefinendo l'origine delle coordinate, la configurazione  $(q_0^1, \dots, q_0^n) = (0, \dots, 0)$  sia una configurazione di equilibrio stabile nel futuro e nel passato per  $\mathcal{S}$ . Assumiamo più precisamente che l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , che in tale configurazione ha un punto di stazionarietà per ipotesi, abbia matrice hessiana  $H$  di coefficienti

$$H_{hk} := \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q^h \partial q^k} \Big|_{(0, \dots, 0)} \quad (9.39)$$

definita positiva e pertanto la stabilità segua dal teorema di Lagrange-Dirichlet. In altre parole gli autovalori della matrice simmetrica  $H$  sono tutti strettamente positivi. Assumiamo infine che valga  $\mathcal{U}(0, \dots, 0) = 0$ , con una insignificante ridefinizione della costante additiva di  $\mathcal{U}$  se necessario.

Approssimando  $\mathcal{U}$  con lo sviluppo di Taylor attorno all'origine fino al secondo ordine (il primo significativo), abbiamo che, vicino alla configurazione di equilibrio, possiamo scrivere che:

$$\mathcal{L} \simeq \sum_{k,h=1}^n a_{hk}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k - \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^n H_{hk} q^h q^k .$$

Approssimando anche la matrice simmetrica dell'energia cinetica con il suo valore assunto esattamente sulla configurazione di equilibrio:

$$A_{hk} := 2a_{hk}(0, \dots, 0) , \quad (9.40)$$

possiamo ancora scrivere che, in prima approssimazione, attorno alla configurazione di equilibrio, vale:

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_0 := \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^n \dot{q}^h A_{hk} \dot{q}^k - \frac{1}{2} \sum_{k,h=1}^n q^h H_{hk} q^k . \quad (9.41)$$

Il fatto che questa sia una buona approssimazione del valore reale di  $\mathcal{L}$  valutata su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali vicine alla configurazione di equilibrio, segue dal fatto che il moto rimane confinato vicino a tale configurazione proprio per la definizione di configurazione di equilibrio stabile, e dal fatto che  $\mathcal{L}$  sia una funzione continua (in realtà  $C^2$ ) delle coordinate  $q^k$  e delle coordinate puntate  $\dot{q}^k$  per ipotesi. A questo punto nasce naturalmente una domanda (che spesso non ci si pone nemmeno commettendo un pericoloso errore di logica).

A parità di condizioni iniziali, le *soluzioni* delle equazioni di Eulero-Lagrange associate alla lagrangiana approssimata  $\mathcal{L}_0$ , sono delle buone approssimazioni delle *soluzioni* delle analoghe equazioni per la lagrangiana non approssimata  $\mathcal{L}$ , (almeno fino a quando tali soluzioni rimangono vicine alla configurazione di equilibrio e con velocità piccole)?

La risposta è positiva e tale analisi può essere intrapresa a partire dal teorema 4.6. Non ci occuperemo di sviluppare tale analisi qui, ma piuttosto lavoreremo direttamente con le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute dalla lagrangiana  $\mathcal{L}_0$ , assumendo che tali soluzioni siano davvero buone approssimazioni del moto reale del sistema, associato alla lagrangiana completa  $\mathcal{L}$  che che avviene attorno alla configurazione di equilibrio con piccole velocità.

#### 9.4.1 Equazioni linearizzate e disaccoppiate: coordinate normali

Dato che le equazioni che discendono dalla lagrangiana approssimata  $\mathcal{L}_0$  in (9.41) sono *lineari*, tali equazioni sono dette **equazioni linearizzate** e tutta la procedura seguita sopra per passare da  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{L}_0$  porta il nome di **procedura di linearizzazione delle equazioni** quando ci si riferisce alle soluzioni delle corrispondenti equazioni. Abbiamo già introdotto alcuni risultati

generali di tale tecnica nella sezione 7.1.4.

Le equazioni linearizzate ottenute come equazioni di Eulero-Lagrange da  $\mathcal{L}_0$  in (9.41), hanno dunque la forma:

$$\sum_{k=1}^2 A_{hk} \frac{d^2 q^k}{dt^2} = - \sum_{k=1}^2 H_{hk} q^k .$$

Per comodità notazionale introduciamo il vettore colonna  $Q := (q^1, \dots, q^n)^t$  e riscriviamo le equazioni di sopra come:

$$A \frac{d^2 Q}{dt^2} = -HQ .$$

Ricordando che la matrice  $A$  è invertibile, come è stato provato nella proposizione 8.3 che stabilisce la possibilità di scrivere in forma normale le equazioni di Eulero-Lagrange, possiamo infine riscrivere il sistema di equazioni differenziali di sopra in forma normale:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -A^{-1}HQ . \quad (9.42)$$

Quello che vogliamo mostrare ora è che sia sempre possibile cambiare il sistema di coordinate libere  $Q := (q^1, \dots, q^n)^t$ , passando al nuovo sistema  $\tilde{Q} := (\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)^t$  legato al precedente tramite una semplice trasformazione lineare:

$$\tilde{Q} = DQ , \quad \text{con } D \text{ matrice reale } n \times n \text{ non singolare,} \quad (9.43)$$

in modo tale che le equazioni finali siano tutte disaccoppiate perché scritte come:

$$\frac{d^2 \tilde{Q}}{dt^2} = -\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \tilde{Q} , \quad (9.44)$$

dove  $\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$  è la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale i numeri  $\omega_k^2 > 0$  ottenuti come le  $n$  soluzioni  $\omega^2$  (che risultano essere tutte strettamente positive) della cosiddetta **equazione secolare**:

$$\det(\omega^2 A - H) = 0 . \quad (9.45)$$

In tal modo le equazioni (9.44), non sono altro che un set di  $n$  equazioni indipendenti una dall'altra:

$$\frac{d^2 \tilde{q}^k}{dt^2} = -\omega_k^2 \tilde{q}^k , \quad k=1,2,\dots,n . \quad (9.46)$$

Le nuove coordinate  $\tilde{Q} := (\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n)^t$ , nelle quali le equazioni linearizzate risultano avere la forma disaccoppiata (7.8), prendono il nome di **coordinate normali**. Esse sono definite non solo dal sistema, ma anche dalla configurazione di equilibrio stabile rispetto alla quale si esegue la procedura di linearizzazione delle equazioni di Eulero-lagrange.

Per dimostrare quanto asserito procediamo euristicamente. Una volta definite le nuove coordinate come in (9.43), le equazioni (9.42) si possono scrivere, moltiplicando a sinistra per  $D$ :

$$\frac{d^2 DQ}{dt^2} = -DA^{-1}HQ .$$

Notando ora che, dato che  $D$  è invertibile,  $Q = D^{-1}\tilde{Q}$ , le stesse equazioni si riscrivono:

$$\frac{d^2\tilde{Q}}{dt^2} = -DA^{-1}HD^{-1}\tilde{Q}.$$

Per costruzione queste equazioni sono *equivalenti* alle (9.42). Il fatto che queste equazioni si possono ora riscrivere come in (9.44) segue immediatamente dalla seguente proposizione, che dimostra che, nelle nostre ipotesi, la matrice  $A^{-1}H$  è sempre diagonalizzabile. Si osservi, in particolare, che nel caso in esame la matrice  $H$  è strettamente positiva per ipotesi e di conseguenza le soluzioni dell'equazione secolare sono strettamente positive e possono essere scritte come  $\omega_k^2$  con  $\omega_k > 0$ .

**Proposizione 9.5.** *Se  $A$  e  $H$  sono matrici reali  $n \times n$  simmetriche e  $A$  è strettamente definita positiva, allora esiste una matrice reale  $n \times n$  non singolare  $D$  per cui:*

$$DA^{-1}HD^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (9.47)$$

Valgono inoltre i seguenti fatti.

(a) *Gli  $n$  numeri  $\lambda_k$  non dipendono da  $D$  essendo tutte e sole le soluzioni dell'equazione*

$$\det(\lambda A - H) = 0. \quad (9.48)$$

(b)  *$\lambda_k \geq 0$ , per  $k = 1, \dots, n$ , se e solo se  $H$  è definita positiva.*

(c)  *$\lambda_k > 0$ , per  $k = 1, \dots, n$ , se e solo se  $H$  è strettamente definita positiva.*

**Dimostrazione.** Partiamo da (a). Supponiamo che esista una matrice  $D$  non singolare che dia luogo alla (9.47), cioè diagonalizzi  $A^{-1}H$ , e dimostriamo che i numeri  $\lambda_k$  sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione (9.48). Dalla teoria elementare della procedura di diagonalizzazione di matrici, è noto che se una matrice  $B$  è diagonalizzabile nel campo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{C}$ , la matrice diagonale che la rappresenta ammette sulla diagonale principale tutti e soli gli autovalori di  $B$ . Questi si ottengono come tutte e sole le soluzioni  $\lambda$  di  $\det(\lambda I - B) = 0$  nel campo  $\mathbb{K}$ . Nel caso in esame gli autovalori, e quindi i numeri che appaiono sulla matrice diagonale che rappresenta  $A^{-1}H$ , saranno dunque le soluzioni reali di:

$$\det(\lambda I - A^{-1}H) = 0. \quad (9.49)$$

Proviamo che la (9.48) equivale proprio a tale equazione e questo conclude la prova di (a). Infatti, dato che la matrice reale simmetrica  $A$  è strettamente positiva allora è anche invertibile e dunque lo è anche  $A^{-1}$ . Infatti:  $\det(\lambda A - H) = 0$  se e solo se  $\det(A^{-1})\det(\lambda A - H) = 0$ . Ma  $\det(A^{-1})\det(\lambda A - H) = \det[A^{-1}(\lambda A - H)] = \det(\lambda I - A^{-1}H)$ .

Passiamo ora a dimostrare la prima proposizione della tesi. Dobbiamo esibire una matrice  $D$  non singolare che verifica (9.47). Partiamo dal prodotto  $A^{-1}H$ . Dato che  $A$  è simmetrica,  $A^{-1}$  sarà simmetrica (infatti vale  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$  nel caso generale e, quindi, la simmetria di  $A$

implica subito che  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ . Ulteriormente, dato che  $A$  è strettamente definita positiva, lo sarà anche  $A^{-1}$ . Infatti  $A^{-1}$  è invertibile per costruzione ed è definita positiva, pertanto per un generico vettore colonna  $X \in \mathbb{R}^n$ , se  $X' := A^{-1}X$ , possiamo scrivere:

$$X^t A^{-1} X = (AX')^t A^{-1} AX' = X'^t A^t A^{-1} AX' = X'^t A^t X' = (X'^t A^t X')^t = X'^t AX' \geq 0.$$

Essendo simmetrica reale, la matrice  $A^{-1}$  sarà diagonalizzabile attraverso trasformazione di similitudine con una matrice  $R \in O(n)$  ed, essendo  $A^{-1}$  strettamente positiva, sulla diagonale appariranno numeri strettamente positivi:  $RAR^{-1} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ , dove  $a_k > 0$ . Abbiamo allora che:

$$R A^{-1} H R^{-1} = R A^{-1} R^{-1} R H R^{-1} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) R H R^{-1}.$$

Se  $S := \text{diag}(a_1^{-1/2}, \dots, a_n^{-1/2})$  (che è ben definita dato che gli  $a_k$  sono strettamente positivi) abbiamo ancora che:

$$S R A^{-1} H R^{-1} S^{-1} = \text{diag}(a_1^{1/2}, \dots, a_n^{1/2}) R H R^{-1} \text{diag}(a_1^{1/2}, \dots, a_n^{1/2}) = S^{-1} R H R^t S^{-1t},$$

ossia

$$S R A^{-1} H (S R)^{-1} = S^{-1} R H (S^{-1} R)^t \quad (9.50)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $R^{-1} = R^t$  per le matrici di  $O(n)$  e che, per costruzione  $S^{-1} = S^{-1t}$ . Per concludere notiamo che la matrice  $S^{-1} R H (S^{-1} R)^t$  a secondo membro in (9.50) per costruzione è simmetrica:

$$(S^{-1} R H (S^{-1} R)^t)^t = S^{-1} R H^t (S^{-1} R)^t = S^{-1} R H (S^{-1} R)^t,$$

di conseguenza esisterà una seconda  $R' \in O(n)$  tale che

$$R' S^{-1} R H (S^{-1} R)^t R'^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (9.51)$$

Mettendo tutto insieme, applicando  $R' - R'^{-1}$  ai due membri di (9.50), abbiamo ottenuto che:

$$R' S R A^{-1} H (S R)^{-1} R'^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Cioè :

$$R' S R A^{-1} H (R' S R)^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Possiamo pertanto porre  $D := R' S R$  per avere (9.47). Per concludere la dimostrazione, stabiliamo la validità di (b) e (c). Notiamo che, in virtù di (9.51), i numeri  $\lambda_k$  non sono altro che gli autovalori della matrice simmetrica:

$$H' := C^t H C.$$

dove  $C := (S^{-1} R)^t$ . Si osservi che  $C$  è una matrice non singolare nelle nostre ipotesi, dato che  $\det(S^{-1} R)^t = \det(S^{-1} R) = \det(S^{-1}) \det R \neq 0$ , dove abbiamo usato il fatto che  $S^{-1}$  è invertibile e  $\det R = \pm 1$ . Studiamo la positività di  $H'$ :

$$X^t H' X = X^t C^t H C X = (C X)^t H (C X) = Y^t H Y \geq 0$$

dove  $Y = CX$  e abbiamo usato il fatto che  $H$  è definita positiva. Si osservi che dato che  $C$  è non singolare e quindi biettiva, la positività di  $H$  equivale a quella di  $H'$ . Questo risultato ci dice che gli autovalori di  $H'$ , i  $\lambda_k$  di cui studiamo la positività, sono numeri non negativi se e solo se  $H$  è definita positiva. Similmente, dire che  $H$  è strettamente definita positiva, equivale a dire che  $H$  è definita positiva e  $\det H \neq 0$ . Per lo stesso motivo di sopra questo è equivalente a dire che  $H'$  è definita positiva e  $\det H' \neq 0$  cioè che  $H'$  è strettamente definita positiva e quindi, a sua volta che tutti i suoi autovalori  $\lambda_k$  sono strettamente positivi.  $\square$

### Osservazioni 9.10.

(1) Lasciamo per esercizio il compito di provare che matrici  $D$  che verificano (9.47) non sono univocamente determinate dalle ipotesi, quando  $A$  e  $H$  sono assegnate. Si osservi, tuttavia, che i numeri  $\lambda_k$  sono univocamente determinati da  $A$  e  $H$  (più precisamente dalla matrice  $A^{-1}H$ ).

(2) Nella pratica, per determinare la matrice  $D$  che diagonalizza  $A^{-1}H$ , non è necessario seguire la complicata strada della dimostrazione appena svolta, che serviva esclusivamente a provare che una tale matrice esiste. Sapendo che una matrice  $D$  esiste, è sufficiente procedere come segue, adoperando la procedura generale della diagonalizzazione di matrici. Se  $E_{(k)}$  è il  $k$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , l'identità (che sappiamo essere vera per qualche  $D$  non singolare):

$$DA^{-1}HD^{-1} = \text{diag}(\omega_1^k, \dots, \omega_n^2),$$

implica immediatamente che:

$$DA^{-1}HD^{-1}E_{(k)} = \omega_k^2 E_{(k)},$$

e quindi:

$$A^{-1}HD^{-1}E_{(k)} = \omega_k^2 D^{-1}E_{(k)}.$$

In altre parole:

$$N_{(k)} := D^{-1}E_{(k)}$$

è un autovettore per  $A^{-1}H$  con autovalore  $\omega_k^2$ . Se prendiamo il prodotto scalare tra  $N_{(k)}$  e  $E_{(h)}$ , ottenendo la componente  $h$ -esima di  $N_{(k)}$ , l'identità trovata ci dice che:

$$(D^{-1})_{hk} = E_{(h)}^t D^{-1}E_{(k)} = E_{(h)}^t N_{(k)} = (N_{(k)})_h.$$

In definitiva, per determinare la matrice  $D^{-1}$  e quindi  $D$ : (1) si trovano le costanti  $\omega_k^2$  risolvendo l'equazione secolare (9.45), (2) per ciascuno dei  $k$  valori  $\omega_k^2$  si determina un vettore colonna  $N_{(k)} \in \mathbb{R}^n$  che risolve l'equazione agli autovettori:

$$A^{-1}HN_{(k)} = \omega_k N_{(k)}.$$

Sappiamo che devono esistere  $n$  vettori linearmente indipendenti (non univocamente determinati) che soddisfano queste equazioni, dato che  $A^{-1}H$  è diagonalizzabile. (3) La matrice  $D^{-1}$  sarà infine individuata da:

$$(D^{-1})_{hk} = (N_{(k)})_h, \quad \text{per } h, k = 1, \dots, n, \quad (9.52)$$

dove  $(N_{(k)})_h$  denota la componente  $h$ -esima del vettore colonna  $N_{(k)}$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Tenendo conto che  $Q = D^{-1}\tilde{Q}$ , possiamo allora scrivere che:

$$q^k = \sum_{h=1}^n (N_{(k)})_h \tilde{q}^h . \quad (9.53)$$

#### 9.4.2 Pulsazioni normali (o proprie) e modi normali di oscillazione

Torniamo all'equazione linearizzata espressa in coordinate normali (9.46). La soluzione generale è allora immediata, tenendo conto che i numeri  $\omega_k^2$  sono strettamente positivi e, convenzionalmente decidiamo di scegliere gli  $\omega_k$  strettamente positivi anch'essi. La soluzione generale assume la forma, per numeri  $A_k, B_k \in \mathbb{R}$  arbitrari ma fissati.

$$\tilde{q}^k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t) , \quad k = 1, 2, \dots, n . \quad (9.54)$$

Le pulsazioni  $\omega_k$ , ottenute risolvendo l'equazione secolare, prendono il nome di **pulsazioni normali o proprie** del sistema (attorno alla configurazione di equilibrio considerata). Ogni soluzione che si ottiene ponendo tutti nulli i coefficienti  $A_k$  e  $B_k$  esclusi  $A_{k_0}$  e/o  $B_{k_0}$  si dice  **$k_0$ -esimo modo normale di oscillazione**. Dal punto di vista fisico è importantissimo notare (per le conseguenze che tale fatto ha avuto nelle applicazioni quantistiche, alla teoria dei cristalli ma anche in altri campi), che i modi normali di oscillazione sono modi in cui il sistema si muove *collettivamente*, più precisamente, *oscilla collettivamente*. Ciò è dovuto al fatto che le coordinate normali sono *coordinate collettive* nel senso che segue. Solitamente, le coordinate iniziali  $q^1, \dots, q^n$  sono scelte in modo da identificare, ciascuna separatamente o a gruppi, alcune parti del sistema. Per esempio, le prime due coordinate potrebbero essere due coordinate di uno dei punti materiali che costituisce il sistema soggetto a vincoli, le successive 3 potrebbero individuare un altro punto del sistema e via di seguito. Il cambio di coordinate mediato dalla trasformazione lineare  $D$ , per passare alle coordinate normali, è tale da miscelare la corrispondenza iniziale tra coordinate e punti materiali del sistema. Ciò è evidente se si riscrive la soluzione (9.54) nelle coordinate iniziali e poi si vede quale sia il moto del sistema, che in coordinate normali è dato da un preciso modo normale, spegnendo tutti gli altri. Con questa procedura si ha:

$$q^h(t) = \sum_{k=1}^n (D^{-1})_{hk} (A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)) , \quad h = 1, 2, \dots, n . \quad (9.55)$$

Anche nel caso in cui tutti i modi normali vengano spenti eccetto il  $k_0$ -esimo, la soluzione nelle coordinate iniziali prende dunque la forma:

$$q^h(t) = (D^{-1})_{hk_0} (A_{k_0} \cos(\omega_{k_0} t) + B_{k_0} \sin(\omega_{k_0} t)) , \quad h = 1, 2, \dots, n . \quad (9.56)$$

Deve essere chiaro che anche se *solo* il modo  $k_0$ -esimo è attivo, nelle coordinate iniziali, in generale *tutte* le coordinate  $q^h$  oscilleranno – e si ha un moto collettivo – a causa della presenza dei



coefficienti  $(D^{-1})_{hk_0}$ , per  $h = 1, 2, \dots, n$  in (9.56).

**Esempi 9.3.** Consideriamo un segmento orizzontale di lunghezza  $3l > 0$  sul quale scorrono senza attrito due punti materiali entrambi di massa  $m > 0$ . Il primo punto,  $P_1$ , è individuato dalla coordinata  $x$ , misurata a partire dall'estremo sinistro dell'asta, il secondo,  $P_2$ , è individuato dalla coordinata  $y$ , misurata a partire dall'estremo sinistro dell'asta. Il punto  $P_1$  è attaccato ad una molla di costante elastica  $k > 0$ , il cui primo estremo è fissato all'estremo sinistro dell'asta. La molla ha lunghezza  $l$  a riposo ed ha massa trascurabile. Il punto  $P_2$  è attaccato ad una molla della stessa costante elastica  $k > 0$ , il cui secondo estremo è fissato all'estremo destro dell'asta. La molla ha ancora lunghezza  $l$  a riposo ed ha massa trascurabile. Una terza molla dello stesso tipo delle due precedenti è fissata con gli estremi ai due punti  $P_1$  e  $P_2$ . L'asta è in quiete in un riferimento inerziale. La lagrangiana del sistema è data dunque da:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (l - x)^2 - \frac{k}{2} (2l - y)^2 - \frac{k}{2} (y - x - l)^2 .$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono, al solito, annullando il gradiente dell'energia potenziale, già usata per scrivere sopra la lagrangiana:

$$\mathcal{U}(x, y) = \frac{k}{2} (l - x)^2 + \frac{k}{2} (2l - y)^2 + \frac{k}{2} (y - x - l)^2 .$$

Abbiamo le equazioni

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -k(l - x) - k(y - x - l) = 0 , \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -k(2l - y) + k(y - x - l) = 0 ,$$

che individuano l'unica configurazione (che ci si aspetta intuitivamente):

$$(x_0, y_0) = (l, 2l) .$$

Convien allora ridefinire le coordinate libere in modo che la configurazione di equilibrio coincida con l'origine:

$$q^1 := x - l , \quad q^2 := y - 2l .$$

La configurazione è di equilibrio stabile, dato che la matrice hessiana  $H$  dell'energia potenziale risulta essere, quando valutata nella configurazione di equilibrio:

$$H = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

e si hanno i due autovalori positivi: 1 e 3. Conseguentemente:

$$A^{-1}H = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Le pulsazioni caratteristiche risultano essere allora:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

Diagonalizzando la matrice  $A^{-1}H$  e seguendo la procedura illustrata al punto (2) delle osservazioni 9.10, ed applicando (9.53), si trova immediatamente che una coppia di coordinate normali è definita da:

$$q^1 = \tilde{q}^1 + \tilde{q}^2, \quad q^2 = \tilde{q}^1 - \tilde{q}^2,$$

che equivale a:

$$\tilde{q}^1 := \frac{q^1 + q^2}{2}, \quad \tilde{q}^2 := \frac{q^1 - q^2}{2}.$$

Riguardo ai modi normali di oscillazione abbiamo dunque le soluzioni:

$$\tilde{q}^1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad \tilde{q}^2(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right).$$

Risulta allora evidente che, accendendo solo il primo modo, nelle coordinate libere iniziali si ha un moto collettivo dei due punti che oscillano in fase:

$$q^1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad q^2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Viceversa, accendendo solo il secondo modo normale, nelle coordinate iniziali si vede un moto collettivo dei due punti in controfase ed a frequenza diversa dal precedente:

$$q^1(t) = A_2 \cos\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right), \quad q^2(t) = -A_2 \cos\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right) - B_2 \sin\left(\sqrt{3\frac{k}{m}} t\right).$$

### Osservazioni 9.11.

(1) Come accennato precedentemente, la nozione di modo normale ha avuto un enorme successo nella teoria della struttura della materia. In tale contesto, per tenere conto dei gradi di libertà vibrazionali, le strutture cristalline, possono venire descritte da una successione di oscillatori (atomi o molecole) accoppiati in vario modo e con una forte simmetria della struttura. Per studiare la dinamica di questi sistemi risulta essere conveniente la descrizione in coordinate normali, nelle quali il moto viene disaccoppiato. La successiva procedura di quantizzazione può essere fatta partire dal modello classico descritto in coordinate normali. Bisogna precisare che, al contrario di quanto accade in fisica classica, la descrizione quantistica non è, in generale, invariante sotto la scelta arbitraria delle coordinate con cui descrivere il sistema. Si è dimostrato alla prova dei fatti, che la procedura di quantizzazione dei modi normali rende teoricamente conto di proprietà sperimentali, ben note dei sistemi fisici (per es. l'andamento del calore specifico dei solidi cristallini in funzione della temperatura) altrimenti inspiegabili teoricamente. La nozione di *fonone* come (quasi-)particella quantistica associata ai modi normali di oscillazione classici

nasce in questo contesto ed è uno degli strumenti concettuali che ha portato, per esempio, ai primi modelli per spiegare il fenomeno della *superconduttività*.

(2) La decomposizione del moto in modi normali si può estendere al caso di sistemi fisici continui e campi di forze. Questa estensione è stata una delle idee più feconde di tutta la storia della fisica del '900, nel momento in cui si passa dalla descrizione classica a quella quantistica: la quantizzazione dei modi di oscillazione dei sistemi continui, ed in particolare dei campi, prende il nome di *seconda quantizzazione* o *teoria dei campi quantistica* ed è in questa sede che si tratta, per esempio la nozione di *fotone*.

## Capitolo 10

# Simmetrie e leggi di conservazione: teoremi di Noether e di Jacobi.

In questo capitolo consideriamo altri argomenti più avanzati di Meccanica Lagrangiana che hanno avuto delle fondamentali conseguenze nei successivi sviluppi della fisica matematica e teorica, anche in ambiti molto lontani dalla meccanica classica.

Introdurremo i teoremi che mostrano la relazione tra simmetrie della lagrangiana e le varie quantità conservate (integrali primi): il teorema di Noether e quello di Jacobi. Nell'ultima sezione riformuleremo il teorema di Noether in una versione molto generale, usando il linguaggio appropriato della geometria differenziale, che include il teorema di Jacobi come sottocaso.

### 10.1 Il legame tra simmetria e leggi di conservazione: coordinate cicliche.

In questa sezione cominceremo a studiare il legame tra simmetrie di un sistema che ammette lagrangiana ed alcuni dei suoi integrali primi, cioè quantità conservate sui moti del sistema. Ci concentreremo sulla nozione di *coordinata ciclica* e di momento coniugato associato. Esemplificheremo i risultati mostrando come, sotto le debite ipotesi sul sistema fisico in esame, l'invarianza per traslazioni sia connessa alla conservazione dell'impulso, mentre l'invarianza per rotazioni sia connessa alla conservazione del momento angolare.

#### 10.1.1 Coordinate cicliche e conservazione dei momenti coniugati.

Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto nello spaziotempo degli stati cinetici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in termini di una lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Questa lagrangiana potrà essere associata ad un riferimento (inerziale o meno), ma per il momento rimaniamo su un piano generale. Supponiamo di avere scelto coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e che, nello spaziotempo degli

stati cinetici nelle dette coordinate risulti, in riferimento ad una fissata coordinata  $q^j$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n).$$

Diremo in tal caso che la coordinata  $q^j$  è **ciclica** o **ignorabile**. Si osservi che la condizione di ciclicità rispetto alla coordinata  $q^j$  è del tutto *equivalente* alla *condizione di invarianza* della lagrangiana sotto trasformazioni che alterino solo la coordinata  $q^j$  lasciando immutate le altre:

$$(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n).$$

Dire che vale (10.2) è infatti evidentemente equivalente a dire che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{L}(t, q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \\ \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \end{array} \right.$$

Ora le equazioni di Eulero-Lagrange (8.77) forniscono immediatamente l'identità:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \Big|_{(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))}$$

dove  $q^k = q^k(t)$  per  $k = 1, \dots, n$ , è una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange rappresentata nelle coordinate locali dette (e pertanto, su di essa  $\dot{q}^k(t) = dq^k/dt$  per  $k = 1, \dots, n$ ). Nelle nostre ipotesi di ciclicità della coordinata  $q^j$ , la derivata parziale a secondo membro è nulla e pertanto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \Big|_{(t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^j(t))} \right) = 0.$$

Questa equazione dice che il **momento coniugato** alla coordinata  $q^j$ , cioè la funzione definita nelle coordinate locali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  considerate:

$$p_j(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^j} \quad (10.1)$$

si conserva nel tempo *su ogni moto del sistema*. Abbiamo quindi provato la seguente utile proposizione.

**Proposizione 10.1.** *Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto nello spaziotempo degli atti di moto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in termini di una lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Supponiamo di avere scelto coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e che, nelle dette coordinate risulti,*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \text{per ogni scelta di } (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n). \quad (10.2)$$

ovvero, equivalentemente, la lagrangiana  $\mathcal{L}$  sia invariante sotto trasformazioni

$$(q^1, \dots, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n), \quad (10.3)$$

per ogni scelta di  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e per  $\Delta q^j$ . In queste ipotesi il momento coniugato a  $q^j$ ,  $p_j$  definito in (10.1) si conserva nel tempo su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (cioé su ogni moto del sistema).  $\diamond$

Il significato fisico di  $p_j$  dipende dal caso considerato. Vedremo tra poco due esempi importanti riferiti al caso in cui la lagrangiana ha struttura standard “energia cinetica più potenziale” rispetto ad un fissato sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ .

Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ .

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Se  $\mathbf{x}_i := P_i - O$  è il vettore posizione del punto  $i$ -esimo rispetto all’origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$ , avremo che

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^n). \quad (10.4)$$

Nel caso in esame l’energia cinetica si potrà esplicitare come:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \dot{q}^k \dot{q}^h + \sum_{i=1}^N m_i \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \dot{q}^k \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pertanto, con semplici calcoli otteniamo:

$$p_j = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \left( \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} \quad (10.5)$$

ovvero, tenendo conto di (10.4), sui moti del sistema possiamo scrivere che:

$$p_j = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} \quad (10.6)$$

### 10.1.2 Invarianza traslazionale e conservazione dell'impulso.

Consideriamo ancora un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  rispetto al riferimento  $\mathcal{J}$ . Avremo una lagrangiana

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Possiamo allora applicare le formule (10.5) e (10.6) per il calcolo dei momenti coniugati. Supponiamo ora in particolare che la coordinata  $q^j$  descriva *traslazioni rigide del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$* . In altre parole, per ogni  $\Delta q^j \in \mathbb{R}$  ad ogni istante di tempo  $t$  deve valere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) = \mathbf{x}_i(t, q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) + \Delta q^j \mathbf{n}, \\ \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (10.7)$$

Notare che *tutti* i punti sono traslati, al variare di  $q^j$ , della *stessa* traslazione  $\Delta q^j \mathbf{n}$ . In questo senso la traslazione è *rigida*. Assumiamo anche che la coordinata  $q^j$  sia ciclica per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$ . In questo caso il momento coniugato  $p_j$  assume forma sul moto per (10.6)

$$p_j = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{n},$$

ovvero

$$p_j = \mathbf{P}|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.8)$$

Abbiamo di conseguenza la seguente proposizione.

**Proposizione 10.2.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  soggetto a vincoli olonomi ideali e descritto nel riferimento  $\mathcal{J}$ , nel quale le forze attive sono individuate da una funzione potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  e si usino coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$ . Vale quanto segue.*

**(a)** *Se la coordinata  $q^j$  descrive traslazioni rigide in  $\mathcal{J}$  di  $\mathfrak{S}$  nella direzione  $\mathbf{n}$ , il momento coniugato  $p_j$  coincide con la componente lungo  $\mathbf{n}$  dell'impulso totale (rispetto a  $\mathcal{J}$ ) su ogni moto di  $\mathfrak{S}$  del sistema.*

**(b)** *Se, valendo (a), la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$  è invariante sotto traslazioni rigide del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$ , cioè  $q^j$  è ciclica, allora l'impulso totale di  $\mathfrak{S}$  (rispetto a  $\mathcal{J}$ ) lungo la direzione  $\mathbf{n}$  si conserva su ogni moto.  $\diamond$*

#### Esempi 10.1.

**1.** L'esempio più semplice è quello di un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_N$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  non sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive) siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , usando come coordinate libere le  $n = 3N$  coordinate cartesiane

dei punti di  $\mathfrak{S}$  rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidali con  $\mathcal{J}$  di assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  e origine  $O$ . Successivamente cambiamo coordinate libere tramite una trasformazione lineare, possiamo fare in modo che le prime 3 coordinate libere  $q^1, q^2, q^3$  descrivano traslazioni rigide del sistema  $\mathfrak{S}$  rispettivamente lungo gli assi delle coordinate  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  solidali con  $\mathcal{J}$ . Le 3 coordinate  $q^1, q^2, q^3$  suddette, che indicheremo con  $q_G^1, q_G^2, q_G^3$  possono essere fissate come le componenti del vettore centro di massa  $G$  del sistema. Le rimanenti  $3N - 3$  coordinate libere possono per esempio essere fissate come le 3 componenti degli  $N - 1$  vettori  $P_i - P_1$  con  $1 < i \leq N$ . Indicheremo tali coordinate con  $q_i^1, q_i^2, q_i^3$  dove  $i = 2, 3, \dots, N$ . Con queste scelte, dalla definizione di centro di massa e scegliendo  $P_1$  come origine, se  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  troviamo:

$$G - P_1 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} (P_i - P_1) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i q_i^k}{M} \mathbf{e}_k.$$

Dall'identità di sopra e usando ancora  $P_j = P_1 + \sum_{k=1}^3 q_j^k \mathbf{e}_k$  per  $j = 2, 1, \dots, N$  abbiamo infine che:

$$P_1 = O + \sum_{k=1}^3 q_G^k \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{m_i q_i^k}{M} \mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad P_j = O + \sum_{k=1}^3 q_G^k \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{m_i q_i^k}{M} \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^3 q_j^k \mathbf{e}_k.$$

È evidente dalle formule di sopra che le tre coordinate  $q_G^k$  sono coordinate traslazionali rispettivamente lungo  $\mathbf{e}_k$ , con  $k = 1, 2, 3$ . L'energia cinetica è solo funzione delle coordinate puntate ma non delle coordinate non puntate: questo vale per le coordinate cartesiane iniziali, ma anche per le coordinate lagrangiane introdotte sopra dato che sono legate alle prime da una trasformazione lineare (lo si provi per esercizio). L'energia potenziale dipende dalle differenze  $P_i - P_j$ , che sono invarianti sotto traslazioni rigide dell'intero sistema; in particolare si vede subito dalle formule di sopra che queste differenze non dipendono da  $q_G^1, q_G^2, q_G^3$ . Concludiamo che la lagrangiana è invariante per traslazioni lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  cioè  $q_G^1, q_G^2, q_G^3$  sono tutte e tre cicliche. Dalla proposizione precedente abbiamo immediatamente che si conservano le tre componenti dell'impulso totale del sistema.

**2.** Nella situazione considerata nell'esempio precedente, un sistema di coordinate alternativo è quello delle cosiddette **coordinate di Jacobi** che andiamo a discutere. In questo caso la configurazione del sistema degli  $N$  punti materiali non soggetti a vincoli, rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali solidali con  $\mathcal{J}$  di assi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  e origine  $O$ , è individuata dalle seguenti  $3N$  coordinate: le 3 componenti del vettore posizione  $\mathbf{X} := G - O$  del centro di massa del sistema di punti e, per ogni  $i = 1, \dots, N - 1$ , le 3 componenti del vettore

$$\boldsymbol{\xi}_i := \mathbf{x}_i - \frac{\sum_{j=i+1}^N m_j \mathbf{x}_j}{\sum_{j=i+1}^N m_j},$$

dove  $\mathbf{x}_j := P_j - O$  e  $m_j$  è la massa del  $j$ -esimo punto materiale del sistema.  $\boldsymbol{\xi}_i$  rappresenta il vettore posizione della particella  $i$ -esima rispetto al centro di massa del sottosistema di particelle



$P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_N$ . Se introduciamo le **masse ridotte**, per  $i = 1, \dots, N-1$ :

$$\mu_i := \frac{m_i \sum_{j=i+1}^N m_j}{m_i + \sum_{j=i+1}^N m_j}$$

e  $M := \sum_{i=1}^N m_i$  denota la massa totale del sistema di punti, si riesce a provare facilmente per induzione che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \dot{\boldsymbol{\xi}}_i^2$$

e dunque:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \dot{\boldsymbol{\xi}}_i^2 + \mathcal{V}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_N).$$

Possiamo esprimere le differenze  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  in funzione delle sole coordinate  $\boldsymbol{\xi}_i$ , dato che variazioni della posizione del centro di massa del sistema non alterano i valori delle coordinate dei vettori  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  e quelle dei vettori  $\boldsymbol{\xi}_i$ . È allora evidente che la lagrangiana è invariante per traslazioni lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Dalla proposizione precedente e dalla forma della lagrangiana abbiamo immediatamente che si conservano le tre componenti dell'impulso totale del sistema.

Per concludere osserviamo, anche se non è importante in questo punto della teoria, che il momento angolare totale  $\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  ammette la decomposizione seguente in coordinate di Jacobi:

$$\boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = \mathbf{X} \wedge M \dot{\mathbf{X}} + \sum_{i=1}^{N-1} \boldsymbol{\xi}_i \wedge \mu_i \dot{\boldsymbol{\xi}}_i. \quad (10.9)$$

**3.** Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a stare su una retta liscia  $r$ , in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , con  $r$  passante per l'origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$  e con versore tangente  $\mathbf{n}$ . I punti sono interagenti l'uno con l'altro attraverso una coppia di forze conservative di energia potenziale  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\|P_1 - P_2\|)$ . In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, sono presenti le reazioni vincolari (ideali) dovute al vincolo (4 equazioni funzionalmente indipendenti) ed il numero dei gradi di libertà del sistema si riduce a 2. Usando come coordinate libere  $q^1 := (s_1 + s_2)/2$  e  $q^2 := (s_1 - s_2)/2$ , dove  $s_i$  è la coordinata di  $P_i$  su  $r$  presa a partire da  $O$  con segno positivo nella direzione  $\mathbf{n}$ , si vede subito che la coordinata  $q^1$  genera traslazioni rigide del sistema. Ciò segue immediatamente dalle relazioni:  $s_1 = q^1 + q^2$  e  $s_2 = q^1 - q^2$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  non dipenderà, per costruzione, dalla coordinata  $q^1$  (lo si dimostri!). Concludiamo pertanto che, in base alla proposizione precedente, si conserva l'impulso totale del sistema nella direzione  $\mathbf{n}$ .

### 10.1.3 Invarianza rotazionale e conservazione del momento angolare.

Consideriamo ancora un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati di massa  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente e sottoposto a vincoli olonomi ideali oltre che a forze date da un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$

rispetto al riferimento  $\mathcal{I}$ . Si ha la lagrangiana

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) + \mathcal{V}|_{\mathcal{I}}(t, q^1, \dots, q^n).$$

Possiamo allora applicare le formule (10.5) e (10.6) per il calcolo dei momenti coniugati. Supponiamo ora in particolare che la coordinata  $q^j$  descriva *rotazioni rigide del sistema attorno all'asse  $\mathbf{n}$  rispetto al punto  $O$* . In altre parole, per ogni  $\Delta q^j \in \mathbb{R}$  ad ogni istante di tempo  $t$  deve valere:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(t, q^1, \dots, q^{j-1}, q^j + \Delta q^j, q^{j+1}, \dots, q^n) = R_{\mathbf{n}, \Delta q^j} \mathbf{x}_i(t, q^1, q^{j-1}, q^j, q^{j+1}, \dots, q^n), \\ \text{per ogni } i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (10.10)$$

$R_{\mathbf{n}, \Delta q^1} : V^3 \rightarrow V^3$  è l'operatore che ruota il vettore su cui è applicato di un angolo  $\Delta q^1$  positivamente attorno al versore  $\mathbf{n}$ . Notare che *tutti* i vettori posizione  $\mathbf{x}_i = P_i - O$  sono ruotati, al variare di  $q^j$ , della *stessa* rotazione  $R_{\mathbf{n}, \Delta q^1}$ . In questo senso la rotazione è *rigida*. Assumiamo anche che la coordinata  $q^j$  sia ciclica per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$ . In questo caso il momento coniugato  $p_j$  assume forma sul moto per (10.6)

$$p_j = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}_i,$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\frac{d}{d\theta} R_{\mathbf{n}, \theta} \mathbf{x} = \mathbf{n} \wedge (R_{\mathbf{n}, \theta} \mathbf{x}).$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n} \wedge \mathbf{x}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ , possiamo riscrivere  $p_j$  ottenuto sopra come:

$$p_j = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i,$$

ovvero

$$p_j = \Gamma_O|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.11)$$

dove  $\Gamma_O|_{\mathcal{I}}$  è il momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Abbiamo di conseguenza la seguente proposizione.

**Proposizione 10.3.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto nel riferimento  $\mathcal{I}$  nel quale le forze attive sono individuate da una funzione potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$ , e si usino coordinate libere  $q^1, \dots, q^n$ . Vale quanto segue.*

(a) *Se la coordinata  $q^j$  descrive rotazioni rigide in  $\mathcal{I}$  di  $\mathfrak{S}$  attorno all'asse  $\mathbf{n}$  e rispetto al punto  $O$ , il momento coniugato  $p_j$  coincide con la componente lungo  $\mathbf{n}$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ .*

(b) *Se, valendo (a), la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{V}|_{\mathcal{I}}$  è invariante sotto rotazioni rigide del sistema attorno all'asse  $\mathbf{n}$  e rispetto al punto  $O$ , cioè la coordinata  $q^j$  è ciclica allora la componente*

lungo  $\mathbf{n}$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$  si conserva su ogni moto.  $\diamond$

### Esempi 10.2.

1. L'esempio più semplice è quello di un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_N$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  non sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive) siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , usando come coordinate libere le  $3N$  coordinate cilindriche  $\varphi_i, r_i, z_i$  di ciascuno degli  $N$  punti di  $\mathfrak{S}$ , rispetto ad un comune sistema di assi ortogonali di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Successivamente cambiamo coordinate libere tramite una trasformazione lineare degli angoli dei singoli punti, usando come nuove coordinate,  $q^1$  data dalla coordinata angolare del centro di massa del sistema, le rimanenti coordinate di tipo angolare sono invece le differenze  $\varphi_i - \varphi_1$  per  $1 < i \leq N$ . Le rimanenti coordinate libere rimangono le stesse di prima (quelle di tipo  $r_i$  e  $z_i$ ). In questo modo la prima coordinata  $q^1$  descrive rotazioni rigide del sistema  $\mathfrak{S}$  attorno all'asse  $z$ . Dato che sia l'energia cinetica non è funzione delle coordinate non puntate e l'energia potenziale dipende dalle norme delle differenze  $P_i - P_j$ , che sono invarianti sotto rotazioni rigide dell'intero sistema, concludiamo che la lagrangiana è invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$  e rispetto all'origine  $O$ . Dalla proposizione precedente abbiamo immediatamente che si conserva la componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare totale del sistema riferito al polo  $O$  e valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Si osservi che in realtà ciò vale rispetto ad ogni asse ed ogni origine  $O$  (entrambi in quiete in  $\mathcal{I}$ ), in quanto la scelta iniziale di dove posizionare l'asse  $z$  è del tutto arbitraria.

2. Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a stare su una circonferenza liscia  $C$ , in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , con  $C$  centrata nell'origine  $O$  di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$  e normale all'asse  $z$ . I punti sono interagenti l'uno con l'altro attraverso una coppia di forze conservative di energia potenziale  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\|P_1 - P_2\|)$ . In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, sono presenti le reazioni vincolari (ideali) dovute al vincolo (4 equazioni funzionalmente indipendenti) ed il numero dei gradi di libertà del sistema si riduce a 2. Usando come coordinate libere  $q^1 := (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  e  $q^2 := (\varphi_1 - \varphi_2)/2$ , dove  $\varphi_i$  è la coordinata angolare di  $P_i$  riferita a coordinate polari piane nel piano  $z = 0$ , si vede subito che la coordinata  $q^1$  genera traslazioni rigide del sistema. Ciò segue immediatamente dalle relazioni:  $\varphi_1 = q^1 + q^2$  e  $\varphi_2 = q^1 - q^2$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$  non dipenderà, per costruzione, dalla coordinata  $q^1$  (lo si dimostri!). Concludiamo pertanto che, in base alla proposizione precedente, si conserva su ogni moto di  $\mathfrak{S}$  la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  del momento angolare totale del sistema  $\mathfrak{S}$  rispetto al polo  $O$  valutato nel riferimento  $\mathcal{I}$ .

## 10.2 Il legame tra simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Emmy Noether.

In questa sezione formuliamo e dimostriamo il teorema di Emmy Noether (nel caso di un sistema meccanico) che si può dire essere uno dei più importanti teoremi della fisica matematica e teorica. Il teorema suddetto<sup>1</sup> illustra lo strettissimo legame che esiste tra simmetria di un sistema lagrangiano sotto un gruppo di trasformazioni e esistenza di grandezze conservate sui moti del sistema. Il teorema può essere formulato nel caso di sistemi fisici del tutto generali, anche sistemi continui e campi (anche in versioni relativistiche), purché descritti in formulazione lagrangiana.

### 10.2.1 Trasformazioni su $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .

Consideriamo un sistema meccanico  $\mathfrak{S}$  descritto sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$ , fissiamo un sistema di coordinate locali naturali  $t, q^1, \dots, q^n \in (a, b) \times \mathcal{V}$  definite in un aperto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Ricordiamo che le coordinate  $q^1, \dots, q^n$  sono coordinate locali su ciascuno spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  ad ogni tempo  $t$ . Consideriamo infine una trasformazione attiva in  $(t_1, t_2) \times \mathcal{U} \subset (a, b) \times \mathcal{V}$ , che definisca un diffeomorfismo tra i punti di coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$  nei punti di coordinate  $(t', q'^1, \dots, q'^n) \in (t'_1, t'_2) \times \mathcal{U}' \subset (a, b) \times \mathcal{V}$  e che ha la struttura:

$$\begin{cases} t' = t, \\ q'^k = q^k(t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (10.12)$$

In altre parole, per ogni istante  $t$ , i punti di ogni  $\mathbb{Q}_t$  vengono spostati, ma sono mandati biettivamente e bidifferenziabilmente in punti dello stesso spazio delle configurazioni  $\mathbb{Q}_t$  al tempo  $t$  (quindi in particolare  $t_1 = t'_1$  e  $t_2 = t'_2$ ).

Dato che lo spazio delle configurazioni al tempo  $t$  è un sottoinsieme, individuato dai vincoli, dello spazio assoluto al tempo  $t$  (più precisamente del prodotto cartesiano degli spazi assoluti  $\Sigma_t$  al tempo  $t$  dei punti materiali di cui è costituito  $\mathfrak{S}$ ), queste trasformazioni non sono altro che trasformazioni locali differenziabili con inversa differenziabile delle configurazioni di  $\mathfrak{S}$  che: (1) rispettano i vincoli a cui è sottoposto il sistema e che (2) agiscono nello spazio assoluto ad ogni istante, trasformando punti dello spazio assoluto all'istante  $t$  in punti dello spazio assoluto allo stesso istante  $t$ . Quello che queste trasformazioni *non fanno* è mandare punti che esistono nello spazio assoluto  $\Sigma_t$  all'istante  $t$  in un altro spazio assoluto  $\Sigma_{t'}$  con  $t \neq t'$ .

Una trasformazione locale in  $\mathbb{V}^{n+1}$  di questo tipo è detta **preservare le fibre** di  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Ricordiamo che le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$  sono proprio gli spazi  $\mathbb{Q}_t$  per ogni  $t$ .

---

<sup>1</sup>La formulazione generale del teorema, valida per sistemi continui inclusi i campi, apparve in “Invarianten Variationsprobleme” Nachr.d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257 (1918). Una traduzione in inglese si può trovare su <http://arxiv.org/pdf/physics/0503066>.

### Esempi 10.3.

(1). Se  $\mathfrak{S}$ , è un singolo punto materiale e  $q^1, q^2, q^3$  sono le coordinate cartesiane del punto riferite ad un riferimento  $\mathcal{I}$ , una trasformazione del tipo descritto sopra è quella che, ad ogni istante fissato, ruota la posizione del punto attorno ad un fissato asse passante per un punto fissato (entrambi indipendenti dal tempo) secondo un angolo  $\epsilon$  fissato.

(2). L'esempio precedente si generalizza immediatamente al caso di due punti  $P, Q$  connessi da un'asta rigida di lunghezza fissata descritti con coordinate libere  $q^1, \dots, q^5$ , dove  $q^1, q^2, q^3$  sono le coordinate di  $P$  in un sistema di coordinate cartesiane ortonormali di assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e origine  $O$  solidali con un fissato riferimento  $\mathcal{I}$ , mentre  $q^4, q^5$  sono angoli polari che individuano  $Q$  rispetto ad un sistema di assi ortonormali uscenti da  $P$  paralleli agli assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Una trasformazione che preserva le fibre di  $\mathbb{V}^{5+1}$  è ora quella che ruota  $P$  e  $Q$  attorno ad un fissato asse  $\mathbf{n}$  passante per  $O$  (indipendenti dal tempo) secondo un angolo  $\epsilon$ , *preservando la distanza reciproca dei due punti*.

Una trasformazione che preserva le fibre si estende immediatamente alle coordinate puntate, cioè dallo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$  allo spaziotempo degli stati cinetici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , nel modo che segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \\ \dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (10.13)$$

dove  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in (t_1, t_2) \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ .

Nello scrivere l'ultima riga abbiamo supposto euristicamente che le  $\dot{q}^k$  fossero le derivate temporali delle  $q^k$  secondo una curva fissata in  $\mathbb{V}^{n+1}$  e parametrizzata nel tempo. In realtà tale curva non esiste dato che le  $\dot{q}^k$  sono coordinate *indipendenti* dalle  $q^k$ . Tuttavia l'interpretazione data è corretta per ogni una curva fissata in  $\mathbb{V}^{n+1}$  e parametrizzata nel tempo, pur di interpretare le  $\dot{q}^k$  come le derivate temporali delle  $q^k$ . Questo accade in particolare sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

La trasformazione (10.13) si dice **indotta** dalla trasformazione che preserva le fibre (10.12).

### 10.2.2 Il teorema di Noether in forma locale elementare.

Consideriamo un sistema fisico di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e, in riferimento a coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n) \in (a, b) \times \mathcal{V}$  definite su un aperto di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , supponiamo di avere una *classe* di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$  che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$  dipendenti dal parametro  $\epsilon \in (-\alpha, \alpha)$  con  $\alpha > 0$  fissato:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (10.14)$$

Assumiamo che le funzioni a secondo membro siano differenziabili congiuntamente in tutte le variabili (inclusa  $\epsilon$ ) e che la trasformazione si riduca all'identità per  $\epsilon = 0$ :

$$q'^k(0, t, q^1, \dots, q^n) = q^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (10.15)$$

ed infine che valga la proprietà, per  $k = 1, \dots, n$ :

$$q'^k(\epsilon', t, q'^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q'^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)) = q'^k(\epsilon' + \epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad (10.16)$$

quando entrambi i membri siano definiti. In questo caso diremo che  $\mathcal{T}$  è un **gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali** su  $\mathbb{V}^{n+1}$  che preservano le fibre (vedi la Sezione 4.5.3).

**Esempi 10.4.** In riferimento all'esempio (2) in esempi 10.3, un esempio si ottiene considerando la classe di trasformazioni che si ottiene al variare dell'angolo  $\epsilon$  in un  $(-\pi, \pi)$ . Notare che per  $\epsilon = 0$  si ha la rotazione nulla e pertanto (10.15) è verificata. Inoltre la l'azione successiva di due rotazioni, la prima di un angolo  $\epsilon$  e la seconda di un angolo  $\epsilon'$ , coincide con l'unica rotazione di un angolo  $\epsilon + \epsilon'$ . Quindi anche (10.16) è valida.

Nel seguito useremo la notazione  $(t, q, \dot{q}) := (t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ .

**Definizione 10.1.** (**Sistema lagrangiano invariante sotto un gruppo di trasformazioni.**) Diremo che un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è **invariante** sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$ , dato da (10.14), se c'è una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che descrive la dinamica del sistema  $\mathfrak{S}$  tale che, nel sistema di coordinate naturali usate per definire  $\mathcal{T}$  vale:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \text{per ogni } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (10.17)$$

dove:

$$\dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon, t, q) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (10.18)$$

In questo caso  $\mathcal{T}$  è detto **gruppo (di trasformazioni di) simmetria** del sistema  $\mathfrak{S}$ .

Diremo invece che  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è **debolmente invariante** sotto  $\mathcal{T}$  se c'è una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  che descrive la dinamica del sistema  $\mathfrak{S}$  per la quale vale

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = G(t, q, \dot{q}), \quad \text{per ogni } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (10.19)$$

essendo  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  il sistema di coordinate locali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  usato per definire  $\mathcal{T}$ , dove vale (10.18) e dove infine, la funzione  $G$  ha la struttura di *derivata totale formale* (Osservazioni 8.14):

$$G(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, q) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k}(t, q) \dot{q}^k \quad (10.20)$$

per  $g = g(t, q)$  differenziabile definita localmente su  $\mathbb{V}^{n+1}$ .

In questo caso  $\mathcal{T}$  è detto **gruppo (di trasformazioni di) simmetria debole** del sistema  $\mathfrak{S}$ .  $\diamond$

**Osservazione importante.** Un punto importante da notare è il seguente. Si potrebbe pensare che (10.19) sia una richiesta più debole dell'analogha che vale per tutti i valori di  $\epsilon$  e non solo per  $\epsilon = 0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} = G(t, q', \dot{q}') , \quad \text{per ogni } \epsilon \text{ e } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n \quad (10.21)$$

Invece le due richieste sono equivalenti come si prova osservando che, dato che lo stato cinetico (al tempo  $t$ )  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è arbitrario in (10.19), possiamo sempre sceglierlo come  $(q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  ottenuto da  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  per un generico valore di  $\epsilon$ . Derivare in  $\epsilon$  la lagrangiana  $\mathcal{L}(t, q', \dot{q}')$  per  $\epsilon = \epsilon_0$  equivale a derivare  $\mathcal{L}(t, q', \dot{q}')$  in  $\epsilon'$  per  $\epsilon' = 0$  prendendo lo stato cinetico (sempre al tempo  $t$ )  $(q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  ottenuto da  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  per il valore  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon'$ . In questo modo (10.19) implica (10.21). In particolare l'osservazione è valida nel caso in cui  $G \equiv 0$ . La richiesta (10.17) è del tutto equivalente alla richiesta apparentemente molto più forte:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} = 0 , \quad \text{per ogni } \epsilon \text{ e } t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n . \quad (10.22)$$

Possiamo ora enunciare e provare il *teorema di Noether*.

**Teorema 10.1. (Teorema di Noether.)** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  ed invariante sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$ , dato da (10.14). Se  $\mathcal{L}$  è la lagrangiana di  $\mathfrak{S}$  che soddisfa (10.17), sui moti del sistema (fino a quando sono confinati nel domino delle coordinate usate per descrivere l'azione locale di  $\mathcal{T}$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ), la funzione:*

$$I_{\mathcal{T}}(t, q, \dot{q}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} (t, q, \dot{q}) \quad (10.23)$$

*risulta essere costante nel tempo quando valutata su una soluzione delle equazioni di E.-L.*

*Se invece  $\mathfrak{S}$  è debolmente invariante sotto  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{L}$  e  $g$  sono le funzioni che soddisfano (10.19) e (10.20), allora sui moti del sistema (fino a quando sono confinati nel domino delle coordinate usate per descrivere l'azione locale di  $\mathcal{T}$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ) la funzione:*

$$I_{\mathcal{T},g}(t, q, \dot{q}) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} (t, q, \dot{q}) - g(t, q) \quad (10.24)$$

*risulta essere costante nel tempo quando valutata su una soluzione delle equazioni di E.-L.*  $\diamond$

**Dimostrazione.** Se esplicitiamo il primo membro di (10.17) abbiamo che esso vale:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial \dot{q}'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0}$$

che, tenendo conto di (10.15), può risciversi come:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial q^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial \dot{q}'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} .$$

Ora consideriamo un moto del sistema  $q^k = q^k(t)$ ,  $\dot{q}^k(t) = dq^k/dt(t)$ . Da (10.18) si ha facilmente che, sviluppando separatamente i due membri e confrontandoli:

$$\frac{\partial \dot{q}'^k}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q(t))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} .$$

Inserendo il risultato nell'espressione trovata sopra per  $\frac{\partial}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(t', q', \dot{q}')$ , dove ora *assumiamo esplicitamente che le variabili della lagrangiana siano valutate sul moto considerato*, abbiamo che:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \mathcal{L}(t', q', \dot{q}') = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial q^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q(t))}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} .$$

Abbiamo in definitiva trovato che:

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 .$$

Dato che tutto è valutato su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, possiamo riscrivere l'identità trovata come:

$$\sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0 ,$$

che può essere infine riscritta come, se  $\gamma : t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$  è la considerata soluzione delle equazioni di E.-L.,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \Big|_{\gamma(t)} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\gamma(t), \epsilon=0} \right) = 0 ,$$

dove il primo membro, prima di eseguire la derivata totale nel tempo, è *valutato su una qualsiasi soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange*. Questa è la tesi nel primo caso. Per quanto riguarda il secondo caso la dimostrazione è essenzialmente la stessa. Lavorando come nel caso precedente, la condizione di invarianza debole (10.19) si riscrive, su ogni fissata soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \Big|_{\gamma(t)} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\gamma(t), \epsilon=0} \right) = \frac{d}{dt} g(t, \gamma(t)) ,$$



da cui segue immediatamente la tesi.  $\square$

### Esempi 10.5.

1. Il caso di lagrangiana con coordinate cicliche ricade come sottocaso particolare del teorema di Noether: l'integrale primo di Noether coincide con il momento coniugato conservato. Infatti se  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  è tale che  $\partial \mathcal{L} / \partial q^j = 0$ , si consideri il gruppo il gruppo locale ad un parametro di trasformazioni che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$  dato dalle trasformazioni:  $t' = t$ ,  $q'^j = q^j + \epsilon$  e  $q'^k = q^k$  se  $k \neq j$ . Quindi (10.18) fornisce immediatamente:

$$\dot{q}'^k = \dot{q}^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (10.25)$$

Banalmente la lagrangiana soddisfa (10.44) sotto l'azione di  $\mathcal{T}$  non dipendendo esplicitamente da  $q^j$ . Di conseguenza soddisfa anche (10.17). L'integrale primo ottenuto dal teorema di Noether è quindi:

$$I_{\mathcal{T}} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta_{kj} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = p_j.$$

Conseguentemente, per sistemi invarianti sotto traslazioni rigide ovvero sotto rotazioni rigide con lagrangiana del tipo  $\mathcal{T} + \mathcal{V}$ , gli integrali primi conservati in virtù del teorema di Noether sono le corrispondenti componenti dell'impulso totale e del momento angolare totale come visto nella sezione precedente negli esempi 10.3 e 10.4.

2. Un esempio molto più interessante è il seguente. Consideriamo un sistema  $\mathfrak{S}$  di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$ , con masse  $m_1, \dots, m_n$ , assumendo che  $\mathfrak{S}$  non sia sottoposto a vincoli e che le forze (che sono tutte attive) siano tutte interne e conservative. In tal modo l'energia potenziale dipende solo dalle differenze di posizione tra i punti  $P_i - P_j$  con  $i, j = 1, \dots, N$  e  $i \neq j$ . In questo caso possiamo descrivere  $\mathfrak{S}$  in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , usando come coordinate libere le  $3N$  coordinate dei punti  $P_i$  rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Consideriamo l'azione di un sottogruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$  del *sottogruppo delle trasformazioni pure di Galileo* sui punti del sistema: per  $i = 1, \dots, N$ , se  $\mathbf{x}_i := P_i - O$ ,

$$\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \epsilon t \mathbf{n}, \quad \text{con } \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (10.26)$$

Il versore  $\mathbf{n}$  è fissato una volta per tutte. Si osservi che la trasformazione dipende parametricamente dal tempo. L'azione sulle coordinate puntate è quindi:

$$\dot{\mathbf{x}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{x}}'_i = \dot{\mathbf{x}}_i + \epsilon \mathbf{n}, \quad \text{con } \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (10.27)$$

Sotto le trasformazioni dette l'energia potenziale rimane invariata dato che dipende dalle differenze di posizione dei punti. L'energia cinetica invece si trasforma come:

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}' = \mathcal{T} + \epsilon \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i.$$

Pertanto:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i$$

e quindi:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i .$$

Il secondo membro è una derivata totale della funzione:

$$g(t, \mathbf{x}) := \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i .$$

Abbiamo provato che il sistema è debolmente invariante sotto l'azione di  $\mathcal{T}$ . Per il teorema di Noether si ha l'integrale primo dipendente esplicitamente dal tempo:

$$I_{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) := \mathbf{n} \cdot t \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i - \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i . \quad (10.28)$$

Su ogni moto, l'integrale primo sopra ottenuto può essere trascritto come:

$$I_{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) := \mathbf{n} \cdot \left( t \mathbf{P}_{\mathcal{J}} - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \right) .$$

L'equazione di conservazione  $dI_{\mathcal{T}}/dt = 0$ , tenendo conto che l'impulso totale  $\mathbf{P}_{\mathcal{J}}$  si conserva nelle ipotesi fatte, fornisce:

$$\mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{P}|_{\mathcal{J}} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i(t) \right) = 0 ,$$

che deve valere per ogni direzione  $\mathbf{n}$ , dato che il versore  $\mathbf{n}$  iniziale era del tutto arbitrario. In definitiva abbiamo ottenuto, usando le notazioni della Sezione 5.1:

$$\mathbf{P}|_{\mathcal{J}} = M \mathbf{v}_G|_{\mathcal{J}} ,$$

Questo è il teorema del centro di massa già trovato nella Sezione 5.1 espresso dall'equazione (5.1).

### 10.2.3 Invarianza dell'integrale primo di Noether per trasformazione di coordinate.

Vogliamo qui sottolineare come l'integrale primo associato ad un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$  *non* dipenda dalle coordinate naturali usate per rappresentare  $\mathcal{T}$ . Consideriamo il gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$ . Per descriverlo consideriamo una carta locale  $(U, \psi)$

su  $\mathbb{V}^{n+1}$  con  $\psi : U \ni p \mapsto (t, q^1, \dots, q^n)$ , dove  $U \subset \mathbb{V}^{n+1}$  è un aperto. In queste coordinate il gruppo  $\mathcal{T}$  è descritto dalle trasformazioni attive, dipendenti dal parametro  $\epsilon \in (-\delta, \delta)$ :  $T_\epsilon : (t, q^1, \dots, q^n) \mapsto (t', q'^1, \dots, q'^n)$  espresse in coordinate di  $(U, \psi)$  come:

$$\begin{cases} t' = t, \\ q'^k = q^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (10.29)$$

Facciamo un cambiamento di coordinate passando alla carta locale  $(V, \psi)$  con  $\phi : V \ni q \mapsto (\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n)$  con  $V \subset \mathbb{V}^{n+1}$  un altro aperto tale che  $V \cap U \neq \emptyset$ . La legge di trasformazione di coordinate, essendo i due sistemi di coordinate adattati alle fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , avrà al solito la forma:  $\hat{t} = t + c$  e  $\hat{q}^k = \hat{q}^k(t, q^1, \dots, q^n)$  per  $k = 1, \dots, n$ . Il gruppo  $\mathcal{T}$  può essere espresso su  $V \cap U$  nelle nuove coordinate, attraverso la classe di trasformazioni date in coordinate  $\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n$  da:

$$\hat{T}_\epsilon := \psi \circ (\phi^{-1} \circ T_\epsilon \circ \phi) \circ \psi^{-1}$$

corrispondenti, in coordinate, a

$$\begin{cases} \hat{t}' = \hat{t}, \\ \hat{q}'^k = \hat{q}^k \left( \epsilon, \hat{t}, q^1 \left( \epsilon, t(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), q^1(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), \dots, q^n(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n) \right), \dots, \right. \\ \quad \left. \dots q^n \left( \epsilon, t(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), q^1(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n), \dots, q^n(\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n) \right) \right) \\ \text{per } k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (10.30)$$

Assumiamo ora che la il sistema fisico descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$  sia debolmente invariante sotto  $\mathcal{T}$ :

$$\left. \frac{\mathcal{L}(t', q', \dot{q}')}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = G(t, q, \dot{q}), \quad (10.31)$$

dove  $G$  è la solita “derivata totale” di  $g$ .  $G$  e  $\mathcal{L}$  sono pensate come funzione scalari su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . È chiaro che la condizione (10.31) non dipende dalle coordinate usate: passando alle coordinate  $\hat{t}, \hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n$ , essa continua ad essere soddisfatta come si verifica immediatamente per computo diretto. Nello stesso modo si trova subito da (10.30) che (lasciamo il calcolo per esercizio):

$$I_{\mathcal{T}, g} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} - g(t, q) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{q}}^k} \frac{\partial \hat{q}'^k}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} - g(\hat{t}, \hat{q}). \quad (10.32)$$

#### 10.2.4 Le trasformazioni di simmetria (debole) di un sistema lagrangiano trasformano soluzioni delle equazioni di E.-L. in soluzioni delle stesse.

In questa sezione vogliamo mostrare l’aspetto duale della nozione di invarianza di un sistema fisico sotto un gruppo di trasformazioni. Mostriamo che se un sistema fisico è *debolmente* invariante (e quindi in particolare se è invariante) sotto un gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$ , allora l’azione del gruppo  $\mathcal{T}$  trasforma soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange in soluzioni delle equazioni

di Eulero-Lagrange riferite alla *stessa* lagrangiana.

**Teorema 10.2.** *Si consideri un sistema di punti materiali  $\mathfrak{S}$  descritto su  $\mathbb{V}^{n+1}$  e debolmente invariante sotto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali  $\mathcal{T}$ , dato da (10.14), che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ , e siano  $\mathcal{L}$  e  $g$  le funzioni che soddisfano (10.19) e (10.20). Si consideri una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange riferite a  $\mathcal{L}$ :*

$$q^k = q^k(t), \quad \dot{q}^k = \dot{q}^k(t), \quad \text{per } t \in I.$$

*Si consideri infine, la curva che si ottiene facendo agire  $\mathcal{T}$  su  $q^k = q^k(t)$ ,  $\dot{q}^k = \dot{q}^k(t)$  per  $t \in I$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} q'^k(t) = q'^k(\epsilon_1, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}'^k(t) = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon_1, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (10.33)$$

*avendo scelto il valore  $\epsilon = \epsilon_1$  per il parametro di  $\mathcal{T}$ . La curva, definita localmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $q'^k = q'^k(t)$ ,  $\dot{q}'^k = \dot{q}'^k(t)$  per  $t \in I$  è ancora una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange riferite alla *stessa*  $\mathcal{L}$ , purché  $\epsilon_1 \in \mathbb{R}$  sia sufficientemente piccolo (in modo tale che le curve  $q'^k = q'^k(t)$ ,  $\dot{q}'^k = \dot{q}'^k(t)$ , per  $t \in I$ , per  $t \in I$  siano incluse nel dominio della carta locale usata per definire  $\mathcal{T}$  per ogni  $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$  se  $\epsilon_1 > 0$  oppure  $\epsilon \in [\epsilon_1, 0]$  se  $\epsilon_1 < 0$ ).  $\diamond$*

**Dimostrazione.**

Definiamo per  $|\epsilon| \leq |\epsilon_1|$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_\epsilon^k(t) = q'^k(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}_\epsilon^k(t) = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon, t, q^1(t), \dots, q^n(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (10.34)$$

Per comodità di lettura ammettiamo che il numero dei gradi di libertà sia  $n = 1$ , la generalizzazione al caso  $n > 1$  è immediata. Con le definizioni poste, tenendo conto che (10.19) implica (10.21) ed integrando quest'ultima, abbiamo che:

$$\mathcal{L}(t, q'(t), \dot{q}'(t)) = \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) + \int_0^{\epsilon_1} G(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) d\epsilon. \quad (10.35)$$

Applichiamo ora ad ambo i membri l'operatore differenziale:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))}. \quad (10.36)$$

Il primo addendo a secondo membro di (10.35) produrrà un risultato nullo in virtù del fatto che la curva  $q = q(t)$ ,  $\dot{q} = \dot{q}(t)$  risolve le equazioni di Eulero-Lagrange. Il secondo addendo,

può essere studiato passando le derivate sotto il simbolo di integrale (possiamo procedere in tal modo perché le funzioni sono differenziabili con continuità in tutti gli argomenti e  $[-\epsilon_1, \epsilon_1]$  è compatto). Il risultato che si ottiene da esso è :

$$\int_0^{\epsilon_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} G(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t)) d\epsilon .$$

L'applicazione dell'operatore (10.36) al primo membro di (10.35) fornisce invece:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial \dot{q}} \right) \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} .$$

Sviluppando le varie derivate tenendo conto di (10.34) si trova facilmente il risultato finale :

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} \frac{\partial q'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = \int_0^{\epsilon_1} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial G}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t))} \frac{\partial q_\epsilon}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} d\epsilon .$$

La funzione di  $t$  che appare nell'integrando è identicamente nulla in virtù del fatto che  $g(t, q, \dot{q})$  ha una struttura di “derivata totale”. Concludiamo che, ad ogni istante  $t \in I$ :

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} \frac{\partial q'}{\partial q} \Big|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = 0 .$$

Dato che la trasformazione che manda le  $q$  nelle  $q'$  è differenziabile invertibile con inversa differenziabile, la matrice jacobiana deve essere ovunque invertibile. In definitiva possiamo omettere il secondo fattore a primo membro moltiplicando entrambi i membri per la matrice jacobiana inversa, ottenendo alla fine:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right] \Big|_{(t, q'(t), \dot{q}'(t))} = 0 ,$$

per ogni valore di  $t \in I$ . Questo è quanto volevamo provare.  $\square$

### 10.3 L'integrale primo di Jacobi, invarianza sotto “traslazioni temporali” e conservazione dell'energia meccanica.

In questa sezione ci occupiamo di un integrale primo ben noto molto tempo prima del teorema di Noether. Si tratta dell'*integrale primo di Jacobi*. Enunciamo subito il teorema corrispondente.

**Teorema 10.3. (Teorema di Jacobi.)** *Sia  $\mathfrak{S}$  un sistema di  $N$  punti materiali sottoposto a  $C = 3N - n \geq 0$  vincoli olonomi ideali descritto completamente dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$  (non necessariamente della forma  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  con  $\mathcal{U}$  energia potenziale). Se, in riferimento ad un sistema*

di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  definite sull'aperto  $U$  nello spaziotempo degli stati cinetici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  vale l'identità :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad \text{ovunque su } U, \quad (10.37)$$

allora valgono i seguenti fatti.

(a) La funzione definita su  $U$ , detta **hamiltoniana del sistema**,

$$\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) := \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \mathcal{L}, \quad (10.38)$$

si conserva nel tempo sui moti del sistema (nella porzione di essi contenuta in  $U$ ) e si chiama in tal caso **integrale primo di Jacobi**. In altri termini vale

$$\mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t)) = \text{costante}$$

se  $t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  è una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange ed il valore della costante dipende da tale soluzione. Più in generale anche se (10.37) non vale, vale comunque l'identità per ogni istante  $t$  su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$-\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right|_{(t, q(t), \dot{q}(t))} = \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t)). \quad (10.39)$$

(b) Se (i) le forze attive su  $\mathfrak{S}$  sono conservative nel riferimento  $\mathcal{I}$  per cui la lagrangiana ha forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ , (ii) nello stesso riferimento  $\mathcal{I}$  i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo e (iii) le coordinate libere  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sono solidali con  $\mathcal{I}$ , allora  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale di  $\mathfrak{S}$  valutata in  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) := \mathcal{T}|_{\mathcal{I}}(q, \dot{q}) + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(q^1, \dots, q^n). \quad (10.40)$$

◇

**Osservazioni 10.1.** Come si evince subito dalla dimostrazione di sotto, l'identità (10.40) sussiste anche se la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$  non descrive completamente il sistema  $\mathfrak{S}$ , ma tiene conto delle sole forze attive conservative e nelle equazioni di Eulero-Lagrange appaiono a secondo membro *anche* delle componenti lagrangiane di forze attive *non conservative*. In questo caso (10.40) vale purché  $\mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$  descriva tutte le forze attive conservative agenti su  $\mathfrak{S}$ . In tal caso, in generale  $\mathcal{H}$  non è però un integrale primo come discusso sotto in (1) di Osservazioni 10.2.

**Dimostrazione.** (a) Sia  $t \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$  una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Direttamente dalla definizione di  $\mathcal{H}$  abbiamo che:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t))$$

$$= \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) .$$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t)) = \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) .$$

Aggiungendo e togliendo  $\partial \mathcal{L} / \partial t$  a secondo membro si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

D'altra parte, dato che  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))$  deve anche essere:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) = \sum_k \frac{d\dot{q}^k}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} .$$

Inserendo questa identità nell'espressione trovata sopra otteniamo infine che, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange vale l'identità (10.39):

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) .$$

Dato che vale (10.37) si ha infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0 ,$$

e pertanto su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $\mathcal{H}(t, q(t), \dot{q}(t))$  è una costante al variare del tempo.

(b) Nelle ipotesi fatte, usando il contenuto della sezione 8.2.4, abbiamo che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(q, \dot{q}) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}^h \dot{q}^k$$

dove

$$a_{hk}(q) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^h} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} ,$$

dove infine  $\mathbf{x}_i = P_i(q^1, \dots, q^n) - O$  è il vettore posizione in  $\mathcal{S}$  del punto materiale  $i$ -esimo ( $O$  è l'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{S}$ ). In questo caso troviamo:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}(t, q, \dot{q}) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}^h \dot{q}^k - \mathcal{U}(q) .$$

Il calcolo diretto usando (10.38) produce:

$$\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) = \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}^h \dot{q}^k + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(q) .$$

ossia

$$\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} .$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### Osservazioni 10.2.

(1) Cosa succede se il sistema è sottoposto anche a forze  $\mathbf{F}_i$  non conservative e sono descritte da componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$ ? (Si osservi che tali forze non conservative potrebbero comunque essere descritte da un potenziale dipendente dal tempo o da un potenziale generalizzato). Valgono in tal caso i seguenti fatti.

(a) Con un ovvio riadattamento della dimostrazione della prima parte teorema di Jacobi, si trova subito che se  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  è la lagrangiana *che tiene conto delle sole forze attive conservative in in  $\mathcal{J}$* , allora su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, vale l'identità :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} \mathcal{Q}_k , \quad \text{quando vale } \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial t} = 0 \text{ su } U .$$

(b) Quando le coordinate lagrangiane  $q^1, \dots, q^n$  sono solidali con il riferimento  $\mathcal{J}$  si prova facilmente che (provarlo per esercizio):

$$\sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} \mathcal{Q}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_{P_i}|_{\mathcal{J}}$$

(indipendentemente dalla richiesta  $\frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial t} = 0$  su  $U$ ). Il secondo membro è la potenza totale nel riferimento  $\mathcal{J}$ , dissipata dalle forze che non ammettono potenziale.

(c) Se le coordinate lagrangiane sono solidali con  $\mathcal{J}$  e, insieme alle forze conservative ne esistono anche di non conservative,  $\mathcal{H}$  coincide comunque con l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ , dove l'energia potenziale tiene conto delle sole forze conservative (di nuovo tutto questo indipendentemente dalla richiesta  $\frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial t} = 0$ ).

(2) Sembrerebbe che il teorema di Jacobi sia logicamente slegato dal teorema di Noether, in particolare perché le trasformazioni coinvolte nel teorema di Jacobi sono trasformazioni che muovono le coordinate temporali (vedi l'osservazione seguente) e pertanto non preservano le fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . In realtà ciò è dovuto al fatto che abbiamo enunciato il teorema di Noether in una versione troppo elementare per includere il teorema di Jacobi. Nella prossima sezione mostreremo che il teorema di Jacobi è un sottocaso di una forma più generale del teorema di Noether.

(3) La condizione (10.37):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 , \quad \text{ovunque su } U ,$$



si può interpretare come *invarianza del sistema fisico sotto traslazioni temporali*. In altre parole (10.37) sancisce che il sistema fisico ammette una lagrangiana che verifica:

$$\mathcal{L}(t + \tau, q, \dot{q}) = \mathcal{L}(t, q, \dot{q}), \quad \text{per ogni } \tau \text{ e } q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n.$$

In questo senso, se siamo nelle ipotesi dell'enunciato (b), il teorema di Jacobi dice che l'energia meccanica si conserva quando la lagrangiana è invariante sotto traslazioni temporali. Si deve avere ben chiaro però che la condizione (10.37) dipende *strettamente* dalla scelta delle coordinate libere usate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ . La condizione (10.37) riferita alle nuove coordinate libere  $(t', q'^1, \dots, q'^n)$ , cioè: (supponendo per semplicità  $n = 1$ )

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t' + c, q(t', q'), \dot{q}(t', q', \dot{q}'))}{\partial t'} = 0,$$

può essere falsa a causa della possibile dipendenza esplicita da  $t'$  nella relazione che lega le nuove coordinate alle vecchie:

$$t = t' + c, \quad q^k = q^k(t', q'^1, \dots, q'^n).$$

Nello stesso modo, l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  dipende strettamente dalle coordinate libere usate: al contrario di  $\mathcal{L}$ , *non* è un campo scalare su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Inoltre  $\mathcal{H}$  in generale *non* è definito globalmente su tutto lo spaziotempo degli stati cinetici, ma solo su ogni aperto  $U$  dotato di coordinate naturali adattate alle fibre.

(4) Supponiamo che  $\mathcal{L}$ , data da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ , non dipenda esplicitamente dal tempo come richiesto in (10.37), ma le coordinate libere usate non siano adattate a  $\mathcal{J}$ . In tal caso l'integrale primo di Jacobi esiste comunque, ma non ha il significato di energia meccanica totale in  $\mathcal{J}$ . Può in effetti coincidere con l'energia meccanica totale in un altro sistema di riferimento. Un esempio concreto di questa situazione è descritto nell'esercizio 8.1.3.

(5) La condizione  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  (ovunque sul dominio delle coordinate naturali che stiamo usando) implica che le equazioni di E.-L. siano un sistema *autonomo* di equazioni differenziali. In altre parole, quando scriviamo in forma normale tali equazioni, nel secondo membro la variabile  $t$  non appare esplicitamente. Come ben nota conseguenza abbiamo subito che se

$$I \ni t \mapsto (q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$$

è una soluzione di tali equazioni, lo è anche

$$I_\tau \ni t \mapsto (q^1(t + \tau), \dots, q^n(t + \tau), \dot{q}^1(t + \tau), \dots, \dot{q}^n(t + \tau))$$

per ogni scelta della costante  $\tau$  e dove  $I = (a, b)$  e  $I_\tau = (a - \tau, b - \tau)$ . Questo fatto è un altro modo, forse più fisico, di intendere l'invarianza per traslazioni temporali guardando l'insieme delle soluzioni invece della lagrangiana. Si deve osservare che la condizione  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  implica il fatto che le equazioni del moto siano autonome, ma non vale il viceversa. Se ad una lagrangiana che soddisfa  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  aggiungiamo una *derivata totale formale* (di classe  $C^1$  almeno)

$$f(t, q, \dot{q}) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial q^k} \dot{q}^k,$$

che dipende esplicitamente dal tempo, le equazioni del moto continuano ad essere le stesse e quindi continuano ad essere autonome, ma la nuova lagrangiana  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f$  dipende esplicitamente dal tempo.

## 10.4 Commenti finali sul teorema di Noether.

### 10.4.1 Invarianza sotto il gruppo di Galileo in meccanica lagrangiana.

Possiamo ora enunciare il postulato di invarianza della teoria rispetto al gruppo di Galileo riferendoci al contenuto della sezione 3.4.1 e riadattandolo alla descrizione fisica in termini di Lagrangiane. La richiesta è semplice: *in un fissato sistema di riferimento inerziale, ogni sistema di punti materiali interagenti, non sottoposto a vincoli, isolato all'esterno e che ammette descrizione in termini di lagrangiana, deve essere tale che la sua lagrangiana oppure una equivalente ad essa (nel senso che produca le stesse equazioni di Eulero-Lagrange) sia invariante o debolmente invariante sotto l'azione dei sottogruppi ad un parametro del gruppo di Galileo: traslazioni rispetto ad una fissata (arbitrariamente) direzione, rotazioni attorno ad un fissato (arbitrariamente) asse di rotazione, traslazioni temporali, trasformazioni pure di Galileo in una fissata (arbitrariamente) direzione.*

In altre parole abbiamo imposto che nella classe dei riferimenti inerziali la descrizione della meccanica sia tale da verificare, nel linguaggio della meccanica lagrangiana: l'omogeneità dello spazio, l'isotropia dello spazio, l'omogeneità del tempo e l'invarianza galileiana pura. In base al teorema di Noether (che include quello di Jacobi nella formulazione avanzata che daremo nella prossima sezione), ad ognuna di queste proprietà di simmetria corrisponde una grandezza fisica conservata. Riassumendo tutti i risultati ottenuti in questo capitolo per sistemi isolati descritti nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e che ammettono lagrangiana della forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ , con  $\mathcal{U}$  energia potenziale, abbiamo che:

- (i) *l'omogeneità spaziale implica la conservazione dell'impulso totale del sistema,*
- (ii) *l'isotropia spaziale implica la conservazione del momento angolare totale del sistema,*
- (iii) *l'omogeneità temporale implica la conservazione dell'energia meccanica totale del sistema.*
- (iv) *l'invarianza galileiana pura fornisce una grandezza conservata tale che la relazione di conservazione si interpreta come il teorema del centro di massa (vedi l'esempio 2 in esempi 10.5).*

### 10.4.2 Formulazione lagrangiana e teorema di Noether oltre la meccanica classica.

Per concludere la discussione riassuntiva della sezione precedente, ci sarebbe da discutere cosa accade per sistemi che ammettono lagrangiana di forma diversa da  $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ . Ma simili discussioni sarebbero accademiche dato che il mondo fisico *non* è invariante sotto il gruppo di Galileo, ma lo è invece (almeno lontano da forti campi gravitazionali) rispetto al gruppo di Poincaré. La discussione richiederebbe un'estensione del formalismo lagrangiano e del teorema di

Noether, alle teorie relativistiche includendo la teoria dei campi. Diciamo solo che tale estensione esiste, è molto naturale ed ha provato essere di grandissima potenza nelle formulazioni della fisica moderna (specialmente nella teoria delle interazioni fondamentali e delle particelle elementari), dove il legame simmetrie-leggi di conservazione ha giocato e gioca un ruolo fondamentale.

A titolo di esempio si pensi già in elettrodinamica quanto sia difficile definire l'impulso del campo elettromagnetico (oppure il suo momento angolare). L'estensione del formalismo lagrangiano e del teorema di Noether alla teoria dei campi consente di *definire* l'impulso del campo elettromagnetico come quella grandezza che si conserva come conseguenza dell'omogeneità spaziale (invarianza sotto traslazioni spaziali della lagrangiana del campo elettromagnetico). Alla prova dei fatti si vede che questa è la definizione *fisicamente* corretta anche perchè, in particolare, consente di implementare il principio di conservazione dell'impulso: con la definizione data si dimostra che per un sistema isolato, composto di particelle e campi elettromagnetici che interagiscono tra di essi, l'impulso totale di si conserva nel tempo.

## 10.5 \*Formulazione generale e globale del Teorema di Noether.

Il teorema 4.12 permette di associare univocamente un campo vettoriale ad ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $\mathcal{T}$  dato in (10.14). Infatti, se consideriamo, al tempo fissato  $t$ , il campo vettoriale definito localmente su  $\mathbb{Q}_t$  definito nelle coordinate  $q^1, \dots, q^n$  da

$$X_0(t, q^1, \dots, q^n) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)}{\partial \epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^k} \bigg|_{(t, q^1, \dots, q^n)} + 0 \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{(t, q^1, \dots, q^n)}$$

risulta facilmente usando (10.15) e (10.16) che, per un fissato punto  $q^1, \dots, q^n$ , se consideriamo la curva  $\epsilon \mapsto (t'(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), q'^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q'^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)) \in \mathbb{V}^{n+1}$  vale

$$\frac{dt'}{d\epsilon} = 0, \quad \frac{dq'^k}{d\epsilon} = X^k(q^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)).$$

In altre parole il gruppo ad un parametro  $\mathcal{T}$  è dato dalle curve integrali del campo  $X_0$  definito sopra: il campo  $X_0$  è il generatore del gruppo. Il punto individuato dalle coordinate

$$(t'(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), q'^1(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n), \dots, q'^n(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n))$$

è il punto che si trova, per il valore del parametro  $\epsilon$ , sull'unica curva integrale in  $\mathbb{V}^{n+1}$  del campo  $X$  che parte da  $(t, q^1, \dots, q^n)$  per  $\epsilon = 0$ .

Con un po' di pazienza si può verificare che l'insieme delle trasformazioni su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , indotte

da  $\mathcal{T}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t, \\ q'^k = q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \\ \dot{q}'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^j}(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^j \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (10.41)$$

soddisfano ancora le analoghe delle proprietà (10.15) e (10.16) per  $\epsilon \in (-a, a)$ . Pertanto l'azione del gruppo  $\mathcal{T}$  estesa localmente ad  $\mathbb{A}_t$  tramite le (10.41) si ottiene ancora dalle curve integrali del campo, definito localmente su  $\mathbb{A}_t$ :

$$\begin{aligned} X(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) &:= \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial q^k} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} \\ &+ 0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \Big|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Le equazioni (10.41) definiscono ancora un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali agente su un aperto di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , il cui generatore è il campo  $X$  definito in (10.42). La condizione di invarianza (10.17) può allora essere scritta equivalentemente, pensando il campo  $X$  come operatore differenziale sui campi scalari definiti su  $\mathbb{A}_t$ :

$$X(\mathcal{L}) = 0. \quad (10.43)$$

**Osservazioni 10.3.** La (10.43) significa che su ogni  $\mathbb{A}_t$  e lungo ogni linea integrale di  $\widetilde{X}$ ,  $(c, d) \ni \epsilon \mapsto \gamma(\epsilon) \in \mathbb{A}_t$ , vale

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(t, \gamma(\epsilon)) = 0, \quad \text{per ogni } \epsilon \in (c, d)$$

e pertanto la lagrangiana assume valore costante (che dipenderà dalla linea integrale). Integrando la (10.43) lungo la linea integrale che parte da  $q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e termina in  $q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  si ottiene la condizione apparentemente molto più forte di (10.17) (che equivale alla (10.43)):

$$\mathcal{L}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n) = \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \quad (10.44)$$

per ogni scelta di  $\epsilon \in (-a, a)$  e  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  nel sistema di coordinate locali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  usato per definire  $\mathcal{T}$ . In realtà, come appena verificato, le due condizioni (10.17) e (10.44) sono *del tutto equivalenti*.

Nel seguito enunceremo una forma generalizzata del teorema di Noether usando questa identificazione dei gruppi ad un parametro di diffeomorfismi locali e campi vettoriali: invece di parlare di gruppi ad un parametro di trasformazioni parleremo semplicemente di campi vettoriali. L'ipotesi principale del teorema di Noether, cioè la condizione di invarianza della lagrangiana sotto un gruppo di trasformazioni sarà scritta in termini di campi vettoriali come in (10.43). Quello che ci si guadagna in questo modo, dato che i campi vettoriali sono definibili globalmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  senza troppe complicazioni tecniche, è che l'enunciato e la validità del teorema risultano completamente indipendenti dalla scelta delle coordinate e risultano essere validi globalmente. Passiamo a trascrivere, con gli stessi benefici, anche la tesi del teorema di Noether nel linguaggio dei campi vettoriali sullo spaziotempo degli stati cinetici. Ricordiamo a tal fine che le stesse soluzioni massimali delle equazioni di Eulero-Lagrange sono definite globalmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e non sono altro che le linee integrali di un campo vettoriale dinamico  $Z$  (definizione 8.5) (8.82), definito globalmente, e descritto in ogni sistema di coordinate locali naturali da:

$$Z(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n z^k(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (10.45)$$

in virtù della definizione data.

Nel seguito faremo riferimento al contenuto delle sezioni 8.5.2 e 8.5.3 per le proprietà del vettore  $Z$  e per la trattazione intrinseca delle equazioni di Eulero-Lagrange. Utilizzando il vettore  $Z$  abbiamo la seguente proposizione:

**Proposizione 10.4.** *Si consideri un sistema fisico descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  da equazioni di Eulero-Lagrange associate al campo vettoriale dinamico  $Z$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^1$ . La condizione che una funzione  $f : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ , sia un integrale primo è equivalente alla condizione:*

$$Z(f) = 0, \quad \text{ovunque su } A(\mathbb{V}^{n+1}). \quad (10.46)$$

◇

**Dimostrazione.** Le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono in forma globale, tenendo conto della definizione di  $Z$ :

$$\dot{\gamma}(t) = Z(\gamma(t)),$$

dove  $I \ni t \mapsto \gamma(t) \in A(\mathbb{V}^{n+1})$  è una curva sullo spaziotempo degli stati cinetici. Di conseguenza (10.46) implica che:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{per ogni valore di } t \in I$$

per ogni soluzione  $\gamma$  delle equazioni di Eulero-Lagrange e quindi che  $f$  è un integrale primo. Viceversa, se  $f$  è un integrale primo vale

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0, \quad \text{per ogni valore di } t \in I$$

per ogni soluzione  $\gamma : I \rightarrow A(\mathbb{V}^{n+1})$  delle equazioni di Eulero-Lagrange. Ma allora, per definizione di  $Z$  abbiamo in particolare che, se  $t_0 \in I$ :

$$Z_{\gamma(t_0)}(f) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} f(\gamma(t)) = 0.$$

In altri termini vale:

$$Z_p(f) = 0$$

per ogni punto  $p \in A(\mathbb{V}^{n+1})$  che ammette una soluzione  $\gamma$  delle equazioni di Eulero-Lagrange definita nell'intorno di  $t_0$  e con  $\gamma(t_0) = p$ . Per il teorema di esistenza, essendo il campo  $Z$  di classe  $C^1$  almeno, ogni punto  $p \in A(\mathbb{V}^{n+1})$  soddisfa tale richiesta.  $\square$

Nella tesi del teorema di Noether la conservazione dell'integrale primo  $I$  sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, sarà dunque enunciata semplicemente con  $Z(I) = 0$  ovunque sullo spaziotempo degli stati cinetici.

### 10.5.1 Il teorema di Noether nella forma generale.

Vogliamo ora enunciare il teorema di Noether nel linguaggio dei campi vettoriali. Partiamo da alcune considerazioni completamente discusse in coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , passeremo poi ad una versione più intrinseca.

Il campo  $X$  sarà globalmente definito su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  ed è pensato come generatore di un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che lasciano invariata la lagrangiana di un sistema fisico (almeno in senso debole). In coordinate naturali adattate alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  ogni campo  $X$  si può decomporre come:

$$X = X^t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n X_0^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (10.47)$$

dove  $X^t, X_0^k$  e  $X^k$  sono funzioni differenziabili di  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Nelle ipotesi del teorema di Noether in forma elementare si assumeva che, pensando  $Z$  come operatore differenziale sulle funzioni differenziabili definite su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,

$$X^k = Z(X_0^k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Infatti, questa condizione è sicuramente verificata dal generatore di ogni gruppo locale della forma (10.42):

$$\begin{aligned} Z \left( \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial q'^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\partial \dot{q}^k(\epsilon, t, q^1, \dots, q^k)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto dell'ultima equazione in (10.41). Questa ipotesi sembra essenziale dal punto di vista fisico: ricorda in qualche modo al gruppo di trasformazioni come il mondo delle velocità (delle coordinate  $\dot{q}^k$ ) e quello delle posizioni (le coordinate  $q^k$ ) sono imparentati. Nel seguito assumeremo ancora questa ipotesi anche se assumeremo, molto più generalmente di quanto fatto nel teorema di Noether in forma elementare, che le funzioni  $X_0^k$  possano dipendere anche dalle coordinate  $\dot{q}^k$ . I gruppi ad un parametro che ne conseguono sono tali che la loro azione nello spaziotempo delle configurazioni dipende non solo dalle configurazioni stesse, ma anche dalle velocità che il sistema assume nelle varie configurazioni. Si dice in questo caso che si considerano **simmetrie dinamiche** (quelle cioè in cui  $X_0^k$  è funzione di tutte le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ ) piuttosto che **simmetrie geometriche** (quelle cioè in cui  $X_0^k$  è funzione delle sole coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ ).

La richiesta  $X^k = Z(X_0^k)$ , se la si assume valida, come è naturale, in *ogni sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$* , comporta dei vincoli non banali nel caso generale in cui ogni  $X_0^k$  è funzione di tutte le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Vale infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 10.5.** *Se un campo  $X$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^1$  soddisfa la condizione*

$$X^k = Z(X_0^k), \quad \text{per } k = 1, \dots, n \text{ in ogni sistema di coordinate naturali su } A(\mathbb{V}^{n+1}), \quad (10.48)$$

*rispetto ad un campo vettoriale dinamico  $Z$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  (10.45) di classe  $C^1$ , allora è verificata la condizione*

$$Z(\langle X, dT \rangle) = 0. \quad (10.49)$$

*Se vale (10.49) e vale (10.48) in un atlante di coordinate naturali locali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , allora (10.48) vale in ogni sistema di coordinate locali naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .  $\diamond$*

**Dimostrazione.** (10.49) si scrive localmente  $Z(X^t) = 0$  in ogni sistema di coordinate naturali. Dato che le componenti  $X^t$  si trasformano scalarmente cambiando carta locale naturale:

$$X^{t'} = \frac{\partial t'}{\partial t} X^t = X^t,$$

per provare che vale la prima parte della tesi è sufficiente mostrare che c'è un sistema di coordinate naturali nell'intorno di ogni punto in cui  $Z(X^t) = 0$ . Supponiamo che (10.48) valga in ogni sistema di coordinate locali naturali adattati alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Se  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e  $(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  sono siffatti sistemi di coordinate definiti su uno stesso aperto  $U \subset A(\mathbb{V}^{n+1})$ , tenendo conto delle (8.64), (8.65) e (8.66), avremo le relazioni per  $j = 1, \dots, n$ :

$$X'^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial \dot{q}^k} X^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t, \quad (10.50)$$

$$X_0'^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t, \quad (10.51)$$

$$X^{t'} = X^t.$$

Dato che (10.48) vale in entrambi i sistemi di coordinate, dobbiamo concludere che:

$$Z \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial \dot{q}^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t. \quad (10.52)$$

Tenendo conto della relazione (8.66) otteniamo:

$$\frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial q'^j}{\partial q^k},$$

per cui possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$Z \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial q'^j}{\partial t} X^t \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t,$$

che si esplicita in:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \right) X_0^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial t} \right) X^t + \frac{\partial q'^j}{\partial t} Z(X^t) \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} Z(X_0^k) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} X_0^k + \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t} X^t. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Dato che:

$$Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial q^k} \quad \text{e} \quad Z \left( \frac{\partial q'^j}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{q}'^j}{\partial t},$$

(10.53) si riduce a:

$$0 = \frac{\partial q'^j}{\partial t} Z(X^t) \quad \text{per ogni coppia di sistemi di coordinate locali naturali su } A(\mathbb{V}^{n+1}). \quad (10.54)$$

Mostriamo che la validità di questa identità implica la tesi. Nell'intorno di ogni punto  $p \in A(\mathbb{V}^{n+1})$ , fissato il sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  con origine corrispondente a  $p$ , possiamo fissare le nuove coordinate  $(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)$  in modo tale che  $q'^j = q^j$  se  $j > 1$  e  $q'^1 = q^1 + ct$ , dove  $c \neq 0$  (queste nuove coordinate sono ammissibili nell'intorno di  $p$  in quanto la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate ha determinante non nullo in  $p$ ). L'identità (10.54) imposta in  $p$  implica allora che:

$$0 = cZ(X^t)|_p,$$

per cui  $Z(X^t)|_p = 0$ . Questo risultato vale per ogni  $p \in A(\mathbb{V}^{n+1})$  in un sistema di coordinate naturali definite nell'intorno di  $p$  come volevamo provare.

La seconda parte della tesi è ora ovvia: se vale (10.49) e in un atlante di coordinate naturali (non primate) valgono le relazioni (10.48), in ogni sistema locale di coordinate naturali (primate)



deve valere (10.52). Usando (10.48) per le coordinate (non primite) dell'atlante, concludiamo da (10.50) e (10.51) che

$$Z(X_0'^j) = X'^j,$$

cioè la validità di (10.48) in ogni sistema di coordinate locali naturali.  $\square$

#### Osservazioni 10.4.

(1) Nelle applicazioni è bene tener presente che la condizione (10.49), si scrive in coordinate locali naturali ed in relazione alla decomposizione (10.47):

$$Z(X^t) = 0. \quad (10.55)$$

(2) Campi vettoriali  $X$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfi la condizione (10.48) si ottengono *rialzando* a  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  per mezzo del campo  $Z$  ogni campo vettoriale  $\tilde{X}$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$  purché siano soddisfatte opportune ipotesi come vediamo ora. In coordinate locali naturali adattate alle fibre, se

$$\tilde{X} = \tilde{X}^t \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial q^k},$$

dove  $X^k = X^k(t, q^1, \dots, q^n)$ , il suo rialzamento a  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $X$ , è definito come:

$$X = \tilde{X}^t \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + Z(\tilde{X}^k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}.$$

Questa definizione non dipende dalle coordinate locali usate e quindi definisce un campo globalmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  quando, come sappiamo dalla proposizione precedente,  $Z(\tilde{X}^t) = 0$ . Quest'ultima condizione si riduce in questo caso, dato che  $\tilde{X}^t$  può dipendere solo da  $t$  e dalle  $q^k$ , ma non dalle coordinate puntate, alla richiesta:

$$\frac{\partial \tilde{X}^t}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{X}^t}{\partial q^k} \dot{q}^k = 0,$$

che deve valere ovunque. Da questa condizione si ricava subito che le derivate parziali di  $\tilde{X}^t$  rispetto a  $t$  ed alle  $q^k$  devono essere ovunque nulle e pertanto l'unica possibilità è quella di  $\tilde{X}^t = \text{costante}$ .

Concludiamo che, per un campo  $X$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfi (10.48),  $\langle X, dT \rangle$  può non essere costante solo quando  $X$  non è il rialzamento di un campo preesistente su  $\mathbb{V}^{n+1}$ . In particolare le simmetrie geometriche sono tali che  $\langle X, dT \rangle$  sia costante.

(3) La condizione  $\langle X, dT \rangle = 0$  in (10.42) (dove  $T : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è il tempo assoluto) dice che il gruppo ad un parametro generato da  $X$  preserva le fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si osservi infatti che tale condizione si esplicita semplicemente in  $X^t = 0$  ovunque in ogni sistema di coordinate locali naturali adattate alle fibre per cui il significato di preservazione delle fibre da parte del gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generati da  $X$  è del tutto evidente.

Questa condizione è lasciata cadere nell'enunciato del teorema di Noether in forma globale e

generale che diamo sotto.

Passiamo ora a trascrivere le richieste (10.48) e (10.49) in termini più intrinseci facendo riferimento alle *forme di contatto*:

$$\omega^k = dq^k - \dot{q}^k dt, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

associate ad ogni sistema di coordinate naturali ((8.85) in Sezione 8.5.3) ed alla derivata di Lie di forme  $\mathcal{L}_X(\omega)$  (Sezioni B.1.2 e B.4.2).

**Proposizione 10.6.** *Un campo  $X$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^1$  soddisfa la condizione (10.49) e la condizione (10.48) in ogni sistema di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  rispetto al campo dinamico  $Z$  se e solo se*

$$\begin{aligned} Z(\langle X, dT \rangle) &= 0, \\ \langle \mathcal{L}_Z(X), \omega^k \rangle &= 0, \end{aligned} \tag{10.56}$$

la seconda valida per ogni forma di contatto  $\omega^k$  di ogni sistema di coordinate locali naturali.  $\diamond$

**Dimostrazione.** La dimostrazione è equivalente a provare che, assumendo la prima condizione, (10.56) e (10.48) sono equivalenti. Questo è vero perché la seconda condizione si può equivalentemente riscrivere:

$$Z(\langle X, \omega^k \rangle) - \langle X, \mathcal{L}_Z(\omega^k) \rangle = 0.$$

Tenendo conto di (8.91) e passando in componenti:

$$0 = Z(X_0^k) - Z(X^t \dot{q}^k) - X^k + X^t z^k = Z(X_0^k) - X^k - Z(X^t \dot{q}^k) + X^t z^k = Z(X_0^k) - X^k - X^t z^k + X^t z^k,$$

cioè  $Z(X_0^k) - X^k = 0$ , dove abbiamo usato  $Z(\dot{q}^k) = z^k$  e  $Z(X^t) = 0$  che è la trascrizione in coordinate della prima condizione  $Z(\langle X, dT \rangle) = 0$ .  $\square$

**Teorema 10.4.** **(Teorema di Noether in forma generale e globale.)** *Si consideri un sistema fisico descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$  di classe  $C^3$  e sia  $X$  un campo vettoriale  $C^1$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfa le proprietà (10.49) e (10.56):*

$$\begin{aligned} Z(\langle X, dT \rangle) &= 0, \\ \langle \mathcal{L}_Z(X), \omega^k \rangle &= 0, \end{aligned}$$

essendo  $Z$  un campo vettoriale dinamico  $C^1$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  associato a  $\mathcal{L}$ . Si supponga che valga la condizione di **invarianza debole** di  $\mathcal{L}$  sotto l'azione del campo  $X$  per una qualche funzione  $f : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ :

$$X(\mathcal{L}) = Z(f), \tag{10.57}$$

In tal caso  $I_{X,f} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  definita globalmente da:

$$I_{X,f} := \langle X, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - f, \tag{10.58}$$

dove la forma di Poincaré-Cartan  $\Omega_{\mathcal{L}}$  (8.92) è data da, in coordinate locali naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,

$$\Omega_{\mathcal{L}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \omega^k + \mathcal{L} dT,$$

è un integrale primo:

$$Z(I_{X,f}) = 0,$$

detto **integrale primo di Noether**. ◇

**Dimostrazione.** Il fatto che  $I_{X,f}$  risulti essere un campo scalare ben definito su tutto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  segue subito dal fatto che la 1-forma di Poincaré-Cartan è globalmente definita e che  $f$  è un campo scalare. Il calcolo diretto fornisce:

$$\begin{aligned} Z(I_{X,f}) &= \langle \mathcal{L}_Z(X), \Omega_{\mathcal{L}} \rangle + \langle X, \mathcal{L}_Z(\Omega_{\mathcal{L}}) \rangle - Z(f) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \langle \mathcal{L}_Z(X), \omega^k \rangle + \mathcal{L} \langle \mathcal{L}_Z(X), dT \rangle + \langle X, d\mathcal{L} \rangle - Z(f), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la (8.94). Si osservi ora che  $\langle \mathcal{L}_Z(X), \omega^k \rangle = 0$  per la (10.56), inoltre  $\langle \mathcal{L}_Z(X), dT \rangle = Z(\langle X, dT \rangle) - \langle X, \mathcal{L}_Z(dT) \rangle = 0$ , dove abbiamo usato (10.49) e (8.89). Abbiamo in definitiva ottenuto che  $Z(I_{X,f}) = \langle X, d\mathcal{L} \rangle - Z(f) = X(\mathcal{L}) - Z(f) = Z(f) - Z(f) = 0$ . □

### Osservazioni 10.5.

(1) Questa versione del teorema di Noether è più sofisticata della versione data nel teorema 10.1 perché qui l'integrale primo è definito globalmente, ma è anche più generale dato che la funzione  $f$  che appare nella condizione di simmetria debole (10.57) può, localmente, dipendere dalle coordinate  $\dot{q}^k$  a differenza del caso elementare trattato nel teorema 10.1. Infine la condizione (10.49), automaticamente soddisfatta nelle nostre ipotesi, generalizza ed include la richiesta di preservazione delle fibre del gruppo ad un parametro generato da  $X$ . Questa richiesta si scrive esplicitamente  $\langle X, dT \rangle = 0$  che è un sottocaso banale della (10.49). Nel caso generale quindi, il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generati dal campo vettoriale  $X$  non preserva la fibra, ma muove anche nel tempo i punti dello spaziotempo degli stati cinetici.

(2) Abbandonando la richiesta  $\langle X, dT \rangle = 0$ , cioè che il gruppo ad un parametro generato da  $X$  preservi le fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , non c'è più la garanzia che l'azione di tale gruppo su una sezione di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  (cioè su una curva in tale spazio che può essere rappresentata in funzione del tempo e quindi pensata come un moto del sistema per qualche vettore dinamico  $Z$ , non necessariamente quello indotto da  $\mathcal{L}$ ) venga trasformata in una sezione (e quindi in un possibile moto del sistema). Dal punto di vista fisico alcune simmetrie della lagrangiana  $\mathcal{L}$  potrebbero non avere quindi significato fisico, anche se sarebbero comunque associate, tramite il teorema di Noether, ad un integrale primo. In realtà, per ogni simmetria di  $\mathcal{L}$  (anche debole) indotta da un campo vettoriale  $X$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che rispetta le ipotesi del teorema 10.4, c'è sempre una seconda simmetria  $\tilde{X}$  che rispetta le ipotesi del teorema 10.4 inducendo lo stesso integrale primo di  $X$ , ma che

in più soddisfa anche  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  e pertanto il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da  $\tilde{X}$  trasforma sezioni di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in sezioni di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . La dimostrazione è data nella seguente proposizione.

**Proposizione 10.7.** *In riferimento al teorema di Noether 10.4, sia  $X$  un campo vettoriale su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfa (10.49), (10.56) (qui equivalente a (10.48)) e (10.57). Il campo vettoriale su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :*

$$\tilde{X} := X - \langle X, dT \rangle Z ,$$

- (i) *soddisfa (10.49), (10.56) e (10.57), quest'ultima con  $f$  rimpiazzata da  $\tilde{f} := f - \langle X, dT \rangle \mathcal{L}$ ,*
- (ii) *soddisfa la (10.49) nella condizione più forte di preservare fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  rispetto alla base asse del tempo:  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  ovunque su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ,*
- (iii) *produce lo stesso integrale primo di Noether prodotto da  $X$ .*

**Dimostrazione.** (i) e (ii). La proprietà  $\langle \tilde{X}, dT \rangle = 0$  e quindi anche (10.49) è ovvia per costruzione, mentre vale (10.57)

$$\tilde{X}(\mathcal{L}) = X(\mathcal{L}) - \langle X, dT \rangle Z(\mathcal{L}) = Z(f) - Z(\langle X, dT \rangle \mathcal{L}) = Z(f - \langle X, dT \rangle \mathcal{L}) ,$$

dove abbiamo usato il fatto che  $Z(\langle X, dT \rangle) = 0$ . Tenendo conto dello stesso fatto ed anche di  $\mathcal{L}_Z Z = [Z, Z] = 0$ , segue che  $\langle X, dT \rangle Z$  soddisfa l'ipotesi (10.49). Per linearità tale ipotesi sarà soddisfatta anche da  $\tilde{X}$ . (iii) Tenendo conto di  $\langle Z, \omega_k \rangle = 0$  si ha:

$$\langle X, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - f = \langle \tilde{X}, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - f + \langle X, dT \rangle \mathcal{L} = \langle \tilde{X}, \Omega_{\mathcal{L}} \rangle - \tilde{f} .$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### 10.5.2 Il vettore di Runge-Lenz dal teorema di Noether.

Illustriamo qui un caso interessante di *simmetria dinamica* e di corrispondente integrale primo dovuto al teorema di Noether nelle forma generale data sopra. Consideriamo un sistema inerziale  $\mathcal{I}$  e in esso un punto materiale  $P$  di massa  $m$  e vettore posizione  $\mathbf{x} = P - O$  riferito a  $\mathcal{I}$ , sottoposto alla forza centrale coulombiana con centro dato dall'origine  $O$  di coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ . Avremo dunque un energia potenziale:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = -\frac{mg}{\|\mathbf{x}\|} ,$$

dove  $g \neq 0$  è una costante. La lagrangiana del sistema, usando le componenti di  $\mathbf{x}$  come coordinate libere, sarà allora data da:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|} .$$

Le equazioni del moto risultano essere banalmente:

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|^3} x^i , \quad \text{per } i=1,2,3.$$

Dato che questa lagrangiana è evidentemente invariante per rotazioni attorno ad ogni asse  $\mathbf{n}$  uscente da  $O$ , in base al teorema di Noether (vedi esempio 10.5.1) si conserverà nel tempo il momento angolare  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{L}} = \mathbf{x}(t) \wedge m\mathbf{v}(t)$ . Di conseguenza, se  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{L}} \neq \mathbf{0}$ , il moto avverrà sul piano passante per  $O$  e perpendicolare a  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{L}}$ . Assumendo  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{L}} \neq \mathbf{0}$ , ruotiamo gli assi in modo che l'asse  $\mathbf{e}_3$  sia diretto lungo  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{L}}$ . La lagrangiana sopra scritta ristretta al piano  $z = 0$  diventa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|}.$$

dove però ora  $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$  e le equazioni del moto sono di conseguenza:

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{mg}{\|\mathbf{x}\|^3} x^i, \quad \text{per } i=1,2.$$

In altre parole la lagrangiana ristretta al piano  $x^3 = 0$  produce i moti della lagrangiana iniziale che sono confinati al piano  $x^3 = 0$ . In coordinate polari piane, sul piano  $x^3 = 0$  la nuova lagrangiana può essere riscritta equivalentemente come:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + \frac{mg}{r}. \quad (10.59)$$

Useremo d'ora in poi la lagrangiana ridotta (10.59) limitandoci a studiare i moti del punto  $P$  confinati al piano  $z = 0$  (con momento angolare iniziale non nullo). Questa lagrangiana non sembra avere simmetrie evidenti che possano produrre ulteriori integrali primi oltre a quello già ottenuto (usando la lagrangiana completa) ed oltre l'integrale primo di Jacobi (l'energia meccanica del sistema). Vogliamo provare che in realtà esiste una *simmetria dinamica* che produce un nuovo integrale primo detto *vettore di Runge-Lenz*. Tale vettore è ben noto nella dinamica classica ma la sua esistenza non può essere facilmente spiegata in base a principi generali nelle formulazioni elementari della meccanica.

Consideriamo il campo vettoriale  $\mathbf{X}$  su  $A(\mathbb{V}^{3+1})$  che ha la struttura, per un fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbf{X} = r^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \frac{\partial}{\partial r} + r \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) \frac{\partial}{\partial \varphi} + Z(X_0^r) \frac{\partial}{\partial \dot{r}} + Z(X_0^\varphi) \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (10.60)$$

dove abbiamo usato le notazioni della sezione precedente:

$$X_0^r := r^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha), \quad \text{e} \quad X_0^\varphi := r \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha),$$

e dove il vettore dinamico  $Z$  associato alla lagrangiana risulta essere, dopo un facile calcolo:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( r \dot{\varphi}^2 - \frac{mg}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{r}} - \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \quad (10.61)$$

Il calcolo esplicito mostra che:

$$\mathbf{X}(\mathcal{L}) = Z(mg \cos(\varphi + \alpha)). \quad (10.62)$$

Siamo dunque nelle ipotesi del teorema 10.4, e più precisamente nel caso con  $\langle \mathbf{X}, dT \rangle = 0$ , per cui ci sarà un integrale primo  $I_{\mathbf{X}}$  associato alla simmetria debole indotta da  $\mathbf{X}$ . Si osservi che il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da  $\mathbf{X}$  non è del tipo trattato nelle versioni elementari del teorema di Noether (teorema 10.1), dato che le componenti  $X_0^r$  e  $X_0^\varphi$  dipendono *anche* dalle coordinate puntate: siamo dunque alla prese con una genuina simmetria dinamica. Il calcolo esplicito fornisce:

$$I = (\sin \alpha) [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \cos \varphi - (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \sin \varphi] + (\cos \alpha) [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \sin \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \cos \varphi] .$$

Si osservi che abbiamo un integrale primo per ogni  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . La classe completa degli integrali primi si ottiene dalle combinazioni lineari dei due integrali primi per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  rispettivamente. In particolare il seguente vettore, detto *vettore di Runge-Lenz* porta le stesse informazioni della classe degli integrali primi suddetti:

$$\mathbf{K} := [m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \sin \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \cos \varphi] \mathbf{e}_1 + [-m\dot{r}\dot{\varphi}r^2 \cos \varphi + (mr^3\dot{\varphi}^2 - mg) \sin \varphi] \mathbf{e}_2 .$$

Se ora teniamo conto del fatto che nelle nostre ipotesi:  $m\dot{\varphi}r^2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$ , si verifica facilmente che:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{p}|_{\mathcal{J}} \wedge \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}}{m} - mg \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} ,$$

dove  $\mathbf{p}|_{\mathcal{J}} = m\mathbf{v}|_{\mathcal{J}}$  è l'impulso (diverso istante per istante) del punto materiale. Il vettore  $\mathbf{K}$  è una costante del moto in quanto le sue componenti sono tali (sono integrali primi). Nel caso in cui i moti della particella siano chiusi e quindi ellissi (in questo caso la forza coulombiana deve essere attrattiva e quindi  $g > 0$ ), quando il punto materiale attraversa l'asse maggiore dell'ellisse accade che  $\mathbf{p}|_{\mathcal{J}} \wedge \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}}$  e  $\mathbf{x}$  sono entrambi diretti lungo tale asse. Dato che  $\mathbf{K}$  è costante nel tempo, esso sarà dunque diretto lungo l'asse maggiore dell'ellisse ad ogni istante. Nel caso il moto avvenga su una circonferenza, si verifica facilmente che  $\mathbf{K} = 0$ .

### 10.5.3 L'integrale primo di Jacobi come conseguenza del teorema di Noether.

L'esistenza dell'integrale primo di Jacobi non è sicuramente conseguenza del teorema di Noether nella forma elementare data nel teorema 10.1, in quanto non è essere associato ad un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che preservano le fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Mostriamo ora è possibile dedurre l'esistenza dell'integrale primo di Jacobi dal teorema di Noether nella versione generale data nel teorema 10.4. Mettiamoci nelle stesse ipotesi del teorema di Jacobi 10.3 e sia  $Z$  il vettore dinamico associato alla lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Consideriamo il sistema di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  definite sull'aperto  $U$  nello spaziotempo degli stati cinetici  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  su cui valgono le ipotesi del teorema di Jacobi rispetto al il campo vettoriale su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$Y := \frac{\partial}{\partial t} .$$

Questo campo vettoriale soddisfa per costruzione le ipotesi del teorema 10.4 (in particolare con  $\langle Y, dT \rangle = 1$  costantemente). Inoltre nelle ipotesi del teorema di Jacobi:

$$Y(\mathcal{L}) = 0 ,$$

per cui la funzione  $f$  che appare nella tesi del teorema 10.4 è nulla. Sappiamo allora che deve esserci un integrale primo  $\mathcal{H}_Y := -I_{Y,0}$  che, *nelle coordinate considerate* ha la forma:

$$\mathcal{H}_Y := \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} (\dot{q}^k - Y_0^k) - \mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L} ,$$

dato che nelle coordinate considerate vale  $Y_0^k = 0$  identicamente. Abbiamo ritrovato l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_Y$ .

Si deve osservare che il campo  $\frac{\partial}{\partial t}$  è definito solo in un aperto di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , per cui l'integrale primo trovato ha validità solo locale. Tuttavia la procedura si può generalizzare globalmente se il campo  $Y$  è definito globalmente.

Dal punto di vista fisico, la scelta di un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  nello spazio fisico nel quale esiste il sistema fisico lagrangiano (sottoposto a vincoli olonomi) che stiamo considerando, determina un tale campo vettoriale globale. Infatti, la scelta del riferimento individua un atlante privilegiato  $\mathcal{A}_{0,\mathcal{S}}$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$ . Tale atlante è quello dei sistemi di coordinate lagrangiani *solidali* con  $\mathcal{S}$ . A sua volta, questo atlante genera un atlante privilegiato su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , che indicheremo con  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ , dato dai sistemi di coordinate naturali costruiti completando con le coordinate  $\dot{q}^k$ , i sistemi di coordinate di  $\mathcal{A}_{0,\mathcal{S}}$ . È immediato verificare che, se  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  sono carte locali di  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  con  $U \cap U' \neq \emptyset$  e  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), q^1(a), \dots, q^n(a), dq^1(a), \dots, dq^n(a))$  mentre  $\psi' : U' \ni a \mapsto (t'(a), q'^1(a), \dots, q'^n(a), dq'^1(a), \dots, dq'^n(a))$  allora risulta su  $U \cap U'$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$$

proprio perché la legge di trasformazione delle coordinate *non dipende dal tempo* (cfr (2) in osservazioni 9.5):

$$t' = t + c, \quad q'^k = q'^k(q^1, \dots, q^n), \quad \dot{q}'^k = \sum_l \frac{\partial q'^k}{\partial q^l} dq^l, \quad (10.63)$$

dato che entrambi i sistemi di coordinate sono solidali con lo stesso sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ . Di conseguenza viene a definirsi un campo vettoriale  $Y_{\mathcal{S}}$ , definito su tutto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e che verifica  $\langle Y_{\mathcal{S}}, dT \rangle = 1$ , quando si impone che su ogni sistema di coordinate locali dell'atlante  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  valga:

$$Y_{\mathcal{S}} := \frac{\partial}{\partial t}.$$

Consideriamo ora l'integrale primo associato a  $Y_{\mathcal{S}}$  quando  $Y_{\mathcal{S}}(\mathcal{L}) = 0$ . In ogni sistema di coordinate di  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$  esso si scrive esplicitamente:

$$\mathcal{H}_{Y_{\mathcal{S}}} := \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L}. \quad (10.64)$$

Si osservi ora che, cambiando sistema di coordinate, sempre in  $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ , il secondo membro rimane inalterato dato che  $\mathcal{L}$  è una funzione scalare su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  mentre, tenendo conto delle (10.63):

$$\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k = \sum_{k,l,r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^l} \frac{\partial q^l}{\partial q^k} \dot{q}'^r \frac{\partial q'^r}{\partial q^k} = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^r} \dot{q}'^r.$$

Pertanto (10.64) definisce globalmente su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  la funzione  $\mathcal{H}_{Y_{\mathcal{J}}}$ .

**Osservazioni 10.6.** Nelle ipotesi fatte la funzione  $\mathcal{H}_{Y_{\mathcal{J}}} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  risulta essere ben definita globalmente tramite la (10.64) anche se  $Y_{\mathcal{J}}(\mathcal{L}) \neq 0$ .



## Capitolo 11

# Fondamenti di Meccanica Hamiltoniana

In questo capitolo introduciamo la *formulazione di Hamilton* della meccanica classica. Si tratta di una rielaborazione della meccanica lagrangiana che ha avuto una notevole influenza nello sviluppo teorico di vari campi della fisica (moderna). Nella formulazione di Hamilton, l'oggetto matematico fondamentale, che gioca un ruolo simile a quello giocato dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$  nella formulazione di Lagrange portando tutte le informazioni sulla dinamica del sistema fisico in esame, è la funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , che abbiamo introdotto con il teorema di Jacobi. Come sappiamo essa è legata all'energia meccanica e coincide con essa in determinate situazioni. Quindi, al contrario della lagrangiana, l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  è, sotto certe condizioni una grandezza direttamente legata all'esperienza e che entra in gioco *direttamente* in alcuni fenomeni fisici<sup>1</sup>. Nella formulazione hamiltoniana le equazioni del moto, equivalenti a quelle di Eulero-Lagrange espresse nelle variabili lagrangiane  $q^k, \dot{q}^k$ , sono invece espresse in termini di *variabili hamiltoniane* anche dette *variabili canoniche*:  $q^k, p_k$ . Le equazioni del moto, ma anche tutta la struttura della teoria, ha una forma molto più simmetrica delle equazioni di Eulero-Lagrange e della teoria collegata, quando si scambia il ruolo dei due tipi di variabili. Questo punto di vista si è rivelato decisivo nel passaggio dalla meccanica classica alla meccanica quantistica, che nella sua formulazione elementare ha ereditato dalla meccanica hamiltoniana gran parte del linguaggio e dell'impostazione.

---

<sup>1</sup>Questo fatto ha avuto una certa rilevanza nello sviluppo della meccanica statistica classica in cui le grandezze macroscopiche all'equilibrio termodinamico possono essere solo funzione degli integrali primi del sistema. In particolare l'integrale primo che riveste maggiore importanza è l'energia meccanica. Le distribuzioni della meccanica statistica sono infatti descritte da funzioni dell'hamiltoniana del sistema. Il risultato vale anche in meccanica statistica quantistica.

## 11.1 Lo spaziotempo delle fasi e le equazioni di Hamilton

L'ambiente nel quale si imposta la formulazione di Hamilton è lo *spaziotempo delle fasi*. Vediamo euristicamente come si arriva alla definizione di esso. Nella sezione 10.1.1 abbiamo introdotto, per un sistema fisico descritto su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$ , il *momento coniugato* alla coordinata  $q^k$ :

$$p_k(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) := \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^k}.$$

L'idea centrale della formulazione di Hamilton è di usare per formulare il problema del moto le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  invece che quelle lagrangiane  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . In questo senso le coordinate  $(p_1, \dots, p_n)$  vengono pensate come *indipendenti* dalle  $q^k$  e vengono utilizzate *al posto* delle coordinate  $\dot{q}^k$ . Lo spazio (varietà  $2n + 1$  dimensionale) nel quale le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  sono coordinate locali naturali è appunto lo *spaziotempo delle fasi*, che gioca un ruolo simmetrico rispetto allo spaziotempo degli stati cinetici.

Se cambiamo sistemi di coordinate in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in modo tale che le trasformazioni di coordinate siano quelle che ben conosciamo:

$$t' = t + c, \quad (11.1)$$

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (11.2)$$

$$\dot{q}'^k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \dot{q}^h + \frac{\partial q'^k}{\partial t}, \quad (11.3)$$

la lagrangiana soddisferà la seguente proprietà, essendo un campo scalare:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)}{\partial \dot{q}'^h} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \dot{q}^r}{\partial \dot{q}'^h} \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^r}$$

che, dalle (11.3), può al solito essere riscritta come:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n)}{\partial \dot{q}'^h} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial q^r}{\partial q'^h} \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^r}. \quad (11.4)$$

Se teniamo conto dell'identificazione della derivata parziale di  $\mathcal{L}$  rispetto a  $\dot{q}^k$  con  $p_k$ , dobbiamo concludere che eseguire il cambio di coordinate naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  tramite le equazioni (11.1), (11.2) e (11.3) è equivalente a cambiare coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  secondo le leggi di trasformazione seguenti:

$$\begin{aligned} t' &= t + c, \\ q'^h &= q'^h(t, q^1, \dots, q^n), \\ p'_h &= \sum_{r=1}^n \frac{\partial q^r}{\partial q'^h} p_r. \end{aligned}$$

Questo risultato giustifica euristicamente le leggi di trasformazione tra le coordinate naturali sullo spazio delle fasi che assumeremo d'ora in poi. Tuttavia deve essere *ben chiaro* che le coordinate  $p_k$  si identificano con i momenti coniugati solo *dopo* che è stata fissata una lagrangiana. Lo spaziotempo delle fasi è invece pensato come ente astratto indipendente dalla scelta della lagrangiana del sistema.

### 11.1.1 Lo spaziotempo delle Fasi $F(\mathbb{V}^{n+1})$

Possiamo dare la seguente definizione per descrivere lo spazio degli stati relativi ad un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  di cui studieremo la dinamica nella formulazione di Hamilton.

**Definizione 11.1. (Spaziotempo delle Fasi, variabili coniugate)** Lo **spaziotempo delle fasi**  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  è una varietà differenziabile di dimensione  $2n+1$  costruita sullo spaziotempo delle configurazioni  $\mathbb{V}^{n+1}$  che ammette un atlante privilegiato le cui carte locali sono dette **sistemi di coordinate locali naturali di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$** . Indicando con  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  le coordinate di una generica carte locale naturale, valgono le seguenti condizioni.

(i) Le coordinate  $t, q^1, \dots, q^n$  si identificano con le coordinate di un sistema di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  – in particolare la coordinata  $t$  si identifica a meno di costanti additive con il tempo assoluto, visto come funzione differenziabile suriettiva (non singolare)  $T : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  – e le rimanenti coordinate  $p_1, \dots, p_n$ , per ogni scelta di  $t, q^1, \dots, q^n$ , assumono valori su *tutto*  $\mathbb{R}^n$ . Il suddetto sistema di coordinate naturali su  $\mathbb{V}^{n+1}$  è univocamente fissato da quello su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  e ogni sistema di coordinate locali naturali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  può esser completato ad un sistema di coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ .

(ii) I sistemi di coordinate locali naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sono connessi da trasformazioni di coordinate differenziabili con inversa differenziabile della forma

$$t' = t + c, \quad (11.5)$$

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (11.6)$$

$$p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h. \quad (11.7)$$

Lo **spazio delle fasi al tempo  $t$**  è ogni sottovarietà (embedded)  $2n$ -dimensionale  $\mathbb{F}_t := T^{-1}(t)$  di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che si ottiene fissando un valore di tempo assoluto  $t \in \mathbb{R}$ . Un **punto rappresentativo al tempo  $t$** <sup>2</sup>, è ogni punto di  $\mathbb{F}_t$ .  $\diamond$

#### Osservazioni 11.1.

(1) Un *punto rappresentativo del sistema  $\mathfrak{S}$  all'istante  $t$*  è quindi determinato, in un sistema di coordinate naturali del tipo detto, dall'assegnazione di una precisa  $2n+1$ -pla di numeri  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ . Si osservi che tale  $2n+1$ -pla individua anche la configurazione del sistema al tempo  $t$ , in  $\mathbb{Q}_t$ , attraverso il vettore riga  $(q^1, \dots, q^n)$

---

<sup>2</sup>  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  risulta dunque essere l'unione disgiunta di tutti gli spazi  $\mathbb{F}_t$  al variare di  $t \in \mathbb{R}$ .

(2) Ogni spazio degli stati cinetici al tempo  $t$ ,  $\mathbb{F}_t$ , si dice anche **fibra di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  al tempo  $t$**  pertanto i sistemi di coordinate locali naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sono anche detti sistemi di coordinate locali **adattate alle fibre** di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

(3) Quando è assegnata una lagrangiana  $\mathcal{L}$  del sistema  $\mathfrak{S}$ , le coordinate  $p_j$  si identificano con i *momenti coniugati* come detto sopra. Con questa identificazione, come proveremo tra poco, ogni  $2n+1$ -pla  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  individua biunivocamente una  $2n+1$ -pla  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e pertanto determina posizione e velocità di ogni punto materiale di  $\mathfrak{S}$  all'istante  $t$  in ogni sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ . In questo senso fissare un punto rappresentativo del sistema all'istante  $t$  è equivalente posizione e velocità di ogni punto materiale di  $\mathfrak{S}$  all'istante  $t$ .

(4) La richiesta che (11.5)-(11.7) diano luogo ad una trasformazione differenziabile con inversa differenziabile (dove per differenziabile senza precisazioni intendiamo al solito  $C^\infty$ ) che abbia ancora la stessa forma (11.5)-(11.7) con le coordinate primate scambiate con quelle non primate, implica in particolare che la matrice jacobiana  $J$  di coefficienti  $\frac{\partial q^h}{\partial q^k}$  e la matrice jacobiana  $J'$  di coefficienti  $\frac{\partial q'^k}{\partial q^j}$  abbiano sempre determinante non nullo (e siano una l'inversa dell'altra). Infatti, dalle (11.5)-(11.7):

$$\delta_j^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial q^j} + \sum_k \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} + \sum_k \frac{\partial q^i}{\partial p'_k} \frac{\partial p'_k}{\partial q^j} = 0 + \sum_k \frac{\partial q^i}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} + 0 = (JJ')^i_j,$$

da cui  $1 = \det I = \det(JJ') = \det J \det J'$  e quindi  $\det J, \det J' \neq 0$ . In questo modo, a coordinate  $t'$  e  $q'^k$  fissate, la (11.7) individua una trasformazione lineare biettiva da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  al variare delle  $n$  coordinate  $p_h$ .

Affrontiamo più rigorosamente la questione della corrispondenza, mediata da una fissata lagrangiana  $\mathcal{L}$ , tra le coordinate locali naturali sullo spaziotempo delle fasi e quelle sullo spaziotempo degli stati cinetici. Fissiamo una carta locale naturale su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , con coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ . Questa carta si può sempre completare in due modo distinti: come una carta locale naturale di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  passando alle coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  dove  $(t, q^1, \dots, q^n) \in U$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \mathbb{R}^n$ , oppure come una carta locale naturale su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  passando alle coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  dove  $(t, q^1, \dots, q^n) \in U$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  (lo stesso di prima) e  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ . Si consideri infine la trasformazione di coordinate sui domini detti:

$$t = t, \quad (11.8)$$

$$q^k = q^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (11.9)$$

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)}{\partial \dot{q}^k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (11.10)$$

L'ultima trasformazione, la (11.10), *quando considerata a  $(t, q^1, \dots, q^n)$  fissati* e quindi pensata come una trasformazione da  $\mathbb{R}^n \ni (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  in  $\mathbb{R}^n \ni (p_1, \dots, p_n)$ , è detta **trasformazione di Legendre**. Similmente si dice che l'hamiltoniana, *espressa in funzione delle variabili di Hamilton connessa a quelle di Lagrange tramite la trasformazione di Legendre*, è la funzione **trasformata di Legendre** della Lagrangiana.

Vogliamo ora provare che la trasformazione (11.10) è *biettiva* sui domini detti, oltre ad essere differenziabile con inversa differenziabile, per tutte le lagrangiane che abbiamo incontrato fino ad ora.

Tutte le lagrangiane che abbiamo incontrato nella formulazione lagrangiana della meccanica, includendo lagrangiane contenenti potenziali generalizzati (vedi la sezione 9.2.2) sono quadratiche nelle  $\dot{q}^k$ :

$$\mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{k,h=1}^n a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k \dot{q}^h + \sum_{k=1}^n \beta_k(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k + \gamma(t, q^1, \dots, q^n) \quad (11.11)$$

dove la matrice simmetrica di coefficienti  $a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n)$  è *strettamente definita positiva* e tutte le funzioni delle variabili  $(t, q^1, \dots, q^n)$  sono di classe  $C^1$  almeno. In questo caso la trasformazione di Legendre si riduce a:

$$p_k = \sum_{h=1}^n 2a_{kh}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^h + \beta_k(t, q^1, \dots, q^n). \quad (11.12)$$

Dato che la matrice simmetrica dei coefficienti  $a_{kh}$  è strettamente definita positiva deve anche essere invertibile. Pertanto la trasformazione di Legendre scritta sopra, per ogni scelta di  $t, q^1, \dots, q^n$  fissati, si riduce ad una semplice trasformazione biettiva da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Di conseguenza la trasformazione di coordinate (11.8)-(11.10) è una trasformazione biettiva (sui domini delle coordinate precedentemente indicati) di classe  $C^1$  almeno.

**Osservazioni 11.2.** Consideriamo due carte naturali  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  su  $\mathbb{V}^{n+1}$  ed estendiamo le a due corrispondenti carte naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  con domini indicati da  $V$  e  $V'$  rispettivamente e con coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n, \dot{q}'^1, \dots, \dot{q}'^n$  rispettivamente. Estendiamo ancora le due carte iniziali di  $\mathbb{V}^{n+1}$  anche a due corrispondenti carte naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , di domini  $W$  e  $W'$  rispettivamente, e con coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n$  rispettivamente. Supponiamo che i domini  $V$  e  $V'$  abbiano intersezione e  $a \in V \cap V'$ . A questo punto, se è data una lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , possiamo agire sullo stato cinetico  $a$  con *due distinte trasformazioni di Legendre*: quella che connette  $V$  a  $W$  e quella che connette  $V'$  a  $W'$ . Possiamo concludere che queste due trasformazioni di Legendre individuano in realtà *lo stesso punto rappresentativo in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  come immagine di  $a$* ? La risposta è positiva e da ciò possiamo concludere (si vedano i dettagli nella sezione 11.3.2), vista la natura degli atlanti di coordinate naturali, che la trasformazione di Legendre è in realtà un'unica funzione biettiva da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che si restringe alle singole trasformazioni di Legendre su ogni coppia di sistemi di coordinate corrispondenti su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Tale funzione è differenziabile con inversa differenziabile ogni volta che è letta in coordinate. Nel gergo della geometria differenziale è quindi un *diffeomorfismo* da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Il fatto che le due trasformazioni di Legendre su  $V \cap V'$  agiscano nello stesso modo su  $a \in V \cap V'$  segue immediatamente per confronto della (11.7) con la (11.4).

### Esempi 11.1.

1. Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali,  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, non sottoposti a vincoli ma interagenti tramite forze dedotte da un potenziale totale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$ .  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento inerziale nel quale i punti sono individuati da vettori posizione  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ . La lagrangiana del sistema sarà allora data da, usando le componenti di tutti i vettori  $\mathbf{x}_i$  come coordinate libere:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) .$$

In questo caso, riorganizzando le coordinate  $p_k$  a tre a tre come per i vettori posizione, abbiamo che:

$$\mathbf{p}_i = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_i} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = m_i \dot{\mathbf{x}}_i .$$

Possiamo concludere che per sistemi fisici di punti materiali non sottoposti a vincoli, in cui le forze sono conservative o dedotte da un potenziale *non generalizzato*, se si usano come coordinate libere le componenti dei vettori posizione delle particelle, le coordinate  $p_k$  associate si identificano con le componenti degli impulsi delle particelle su ogni moto del sistema.

2. Un caso meno banale del precedente si ha quando il sistema di forze che agisce sui punti materiali è indotto da un potenziale generalizzato. Consideriamo il caso di una particella carica di massa  $m$  e carica  $e$  immersa in un campo elettromagnetico assegnato tramite i potenziali elettromagnetici  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ . Sappiamo dalla sezione 9.2.1 che la sua lagrangiana è, in un riferimento inerziale ed usando le componenti del vettore posizione della particella come coordinate libere:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} .$$

In questo caso si ha subito:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) ,$$

e quindi i momenti coniugati associati alle tre coordinate spaziali non coincidono più (sul moto) con le componenti dell'impulso della particella.

3. Consideriamo una particella di massa  $m$ , vincolata a stare su una sfera liscia di raggio  $R > 0$  e centro  $O$  in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , e sottoposta ad una forza dovuta ad un potenziale  $\mathcal{V}|_{\mathcal{J}}$ . Usiamo coordinate angolari sferiche  $\theta$  e  $\phi$  (solidali con  $\mathcal{J}$ ) per individuare la particella  $P$  sulla sfera. Sappiamo che (vedi capitolo 2), se  $\mathbf{v}$  è la velocità della particella in  $\mathcal{J}$ , in coordinate polari sferiche vale:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi .$$

Adattando al nostro caso ( $r = R$  costantemente) la formula di sopra, possiamo arguire che la lagrangiana della particella è :

$$\mathcal{L}(t, \theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \mathcal{V}|_{\mathcal{J}}(t, \theta, \phi) .$$

Segue immediatamente che i due momenti coniugati  $p_\phi$  e  $\phi_\theta$  hanno la struttura:

$$p_\phi = mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta, \quad p_\theta = mR^2\dot{\theta}.$$

È interessante notare che il significato fisico, di  $p_\phi$ , sui moti della particella, è quello di *componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare della particella* (valutato in  $\mathcal{S}$  rispetto al polo  $O$ ). Infatti è

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = m(P - O) \wedge \mathbf{v} = mR \mathbf{e}_r \wedge (R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_\varphi) = mR^2 (\dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_\theta),$$

e quindi:

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z = mR^2 (\dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z - \dot{\phi} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z) = 0 + mR^2 \dot{\phi} \sin^2\theta = p_\phi.$$

Si osservi che lo stesso risultato riguardante il significato fisico di  $p_\phi$  si ha anche studiando una particella non sottoposta a vincoli (ma sottoposta ad un potenziale), usando coordinate libere date dalle tre coordinate polari sferiche della particella in un riferimento inerziale.

### 11.1.2 Le equazioni di Hamilton

Vogliamo ora determinare quali sono le equazioni che corrispondono, nello spaziotempo delle fasi, alle equazioni di Eulero-Lagrange. Abbiamo la seguente fondamentale proposizione che permette di giungere a tali equazioni.

**Osservazioni 11.3.** D'ora in poi, per evitare di appesantire inutilmente la notazione, useremo anche la seguente notazione contratta:  $(t, q, \dot{q})$  significherà  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  e similmente  $(t, q, p)$  indicherà  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ .

**Proposizione 11.1.** Si consideri un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  descritto dalla lagrangiana di classe  $C^2$   $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  con struttura (11.11) in ogni sistema di coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e dove la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è ovunque strettamente definita positiva.

Riferendoci a due sistemi di coordinate locali naturali:  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , connessi dalle trasformazioni

$$t = t, \tag{11.13}$$

$$q^k = q^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \tag{11.14}$$

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \tag{11.15}$$

valgono le seguenti identità:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \Big|_{(t, q, \dot{q}(t, q, p))}, \tag{11.16}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}^k(t, q, p), \quad \text{per } k = 1, \dots, n \tag{11.17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \Big|_{(t, q, \dot{q}(t, q, p))}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \tag{11.18}$$

dove l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  associata a  $\mathcal{L}$  nelle coordinate dette è stata espressa nelle variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \bigg|_{(t, q, \dot{q}(t, q, p))} \dot{q}^k(t, q, p) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}(t, q, p)). \quad (11.19)$$

**Dimostrazione.** Prima di tutto notiamo che per (11.10), l'equazione (11.19) può essere riscritta banalmente come:

$$\mathcal{H}(t, q, p) = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}^k(t, q, p) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}(t, q, p)). \quad (11.20)$$

Consideriamo una curva in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^1$ , parametrizzata nel tempo assoluto  $t \mapsto (t, q(t), p(t))$ . Ad essa corrisponderà una analoga curva in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :  $t \mapsto (t, q(t), \dot{q}(t, q(t), p(t)))$ . Calcoliamo la derivata di  $\mathcal{H}(t, q(t), p(t))$  usando (11.20). Derivando ambo i membri si trova che:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dp_k}{dt} \dot{q}^k + \sum_{k=1}^n \frac{d\dot{q}^k}{dt} p_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

I due termini:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\dot{q}^k}{dt} p_k - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt}$$

potrebbero ancora essere sviluppati esplicitando le derivate  $d\dot{q}^k/dt$ , ma non conviene dato che si elidono reciprocamente, in virtù della (11.15). Tenendo conto di ciò l'identità trovata sopra si può riscrivere:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) \frac{dq^k}{dt} + \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \dot{q}^k \right) \frac{dp_k}{dt} = 0. \quad (11.21)$$

Dato che per ogni fissato punto  $(t_0, q, p)$  possiamo definire una curva,  $t \mapsto (t, q(t), p(t))$ , che passa per tale punto per  $t = t_0$  e possiamo scegliere le componenti  $\frac{dp_k}{dt}|_{t=t_0}$  e  $\frac{dq^k}{dt}|_{t=t_0}$  del tutto arbitrariamente, possiamo per esempio scegliere nulle tutte queste componenti. L'identità (11.21) si riduce allora a:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \bigg|_{(t_0, q, p)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \bigg|_{(t_0, q, p)} = 0, \quad \text{per ogni punto rappresentativo } (t_0, q, p).$$

Ma allora la (11.21) può risciversi ovunque nella regione considerata di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$\sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) \frac{dq^k}{dt} + \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \dot{q}^k \right) \frac{dp_k}{dt} = 0,$$

per ogni curva differenziabile  $t \mapsto (t, q(t), p(t))$  che attraversa tale regione.

Cambiando curva che passa per  $(t_0, q, p)$  per  $t = t_0$  e scegliendo ora tutti i numeri  $\frac{dp_k}{dt}|_{t=t_0}$  e



$\frac{dq^k}{dt}|_{t=t_0}$  nulli eccetto  $\frac{dp_{k_0}}{dt}|_{t=t_0} = 1$ , per un fissato  $k_0 = 1, \dots, n$ , concludiamo immediatamente che:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{k_0}} \right|_{(t_0, q, p)} - \dot{q}^{k_0}|_{(t_0, q, p)} = 0, \quad \text{per ogni punto rappresentativo } (t_0, q, p).$$

Dato che  $k_0$  è arbitrario, abbiamo anche che l'identità iniziale si riduce a:

$$\sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) \frac{dq^k}{dt} = 0.$$

Reiterando la procedura, tenendo conto che il punto rappresentativo  $(t_0, q, p)$  è del tutto arbitrario, arriviamo a dimostrare tutte le identità (11.16)-(11.18).  $\square$

L'identità (11.17) insieme alla (11.19) producono immediatamente il seguente corollario che prova in particolare come la trasformazione di Legendre sia *involutiva* (applicata due volte corrisponde all'identità).

**Corollario.** *Nelle stesse ipotesi della proposizione 11.1, la trasformazione di Legendre si inverte in*

$$t = t, \quad (11.22)$$

$$q^k = q^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (11.23)$$

$$\dot{q}^k = \frac{\partial \mathcal{H}(t, q, p)}{\partial p_k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (11.24)$$

*Infine la lagrangiana si ottiene dall'funzione di Hamilton come*

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right|_{(t, q, p(t, q, \dot{q}))} p_k(t, q, \dot{q}) - \mathcal{H}(t, q, p(t, q, \dot{q})). \quad (11.25)$$

Come conseguenza immediata della proposizione 11.1 vale il seguente fondamentale teorema che definisce le *equazioni di Hamilton*.

**Teorema 11.1. (Equazioni di Hamilton)** *Si consideri un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  descritto dalla lagrangiana di classe  $C^2$ ,  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , con struttura (11.11) in ogni sistema di coordinate naturali di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e dove la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è ovunque strettamente definita positiva. Riferendoci a due sistemi di coordinate locali naturali:  $(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , connessi dalle trasformazioni*

$$\begin{aligned} t &= t, \\ q^k &= q^k, \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \\ p_k &= \frac{\partial \mathcal{L}(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^k}, \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

La curva  $I \ni t \mapsto (t, q(t), \dot{q}(t))$  di classe  $C^1$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange (8.77) (per qualche intervallo aperto  $I \subset \mathbb{R}$ ):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k(t) \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

se e solo la curva  $I \ni t \mapsto (t, q(t), p(t))$  ottenuta trasformando la curva precedente tramite le (11.13)-(11.15), soddisfa le **equazioni di Hamilton**:

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (11.26)$$

dove l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  associata a  $\mathcal{L}$  nelle coordinate dette è stata espressa nelle variabili di Hamilton (11.25).

Infine vale l'identità, se  $I \ni t \mapsto (t, q(t), p(t))$  è una soluzione delle equazioni di Hamilton:

$$\frac{d\mathcal{H}(t, q(t), p(t))}{dt} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|_{(t, q(t), p(t))}, \quad (11.27)$$

e quindi l'Hamiltoniana è un integrale primo se non dipende esplicitamente dal tempo.  $\diamond$

**Dimostrazione.** La prima equazione di Eulero-Lagrange, si trascrive in coordinate di Hamilton, tenendo conto che  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = p_k$  e usando la (11.18):

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}.$$

La seconda equazione di Eulero-Lagrange, usando (11.17) si trascrive in coordinate di Hamilton:

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}.$$

Per costruzione è allora chiaro che una curva  $I \ni t \mapsto (t, q(t), \dot{q}(t))$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange se e solo se  $I \ni t \mapsto (t, q(t), p(t, q(t), \dot{q}(t)))$  soddisfa le equazioni di Hamilton. Questo conclude la dimostrazione della prima parte della tesi.

L'ultima affermazione della tesi segue dal calcolo diretto tenendo conto delle equazioni di Hamilton:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

□

#### Osservazioni 11.4.

(1) Le equazioni di Hamilton sono già in forma normale e pertanto la validità del teorema di esistenza ed unicità è assicurata purché la funzione hamiltoniana sia sufficientemente regolare.

(2) L'identità (11.27) insieme alla (11.18) implica immediatamente la prima affermazione del teorema di Jacobi 10.3.

(3) La forma delle equazioni di Hamilton rende conto del legame tra *variabili cicliche e grandezze conservate* in una versione hamiltoniana. È infatti evidente che, se la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente da  $q^k$  allora il momento coniugato  $p_k$  è una costante del moto. Si ha un ulteriore risultato che non ha diretta corrispondenza nella formulazione lagrangiana: se la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente dal momento coniugato  $p_k$  allora la coordinata  $q_k$  ad esso associato è una costante del moto.

La lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è un campo scalare, cioè una funzione definita sulla varietà  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  senza alcun riferimento ad un particolare sistema di coordinate (locale o globale) scelto su tale spazio, come indica la stessa notazione che abbiamo appena usato. Questo significa che, se scegliamo due sistemi di coordinate naturali dello spaziotempo degli stati cinetici:

$$\psi_1 : U_1 \ni a \mapsto (t(a), q^1(a), \dots, q^n(a), \dot{q}^1(a), \dots, \dot{q}^n(a)) \in \psi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

e

$$\psi_2 : U_2 \ni a \mapsto (t'(a), q'^1(a), \dots, q'^n(a), \dot{q}'^1(a), \dots, \dot{q}'^n(a)) \in \psi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

e lavoriamo con le immagini nei rispettivi  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dell'intersezione  $U_1 \cap U_2$  dei domini delle due carte, con ovvie notazioni si ha:

$$\mathcal{L}_2(t'(t), q'(t, q), \dot{q}'(t, q, \dot{q})) = \mathcal{L}_1(t, q, \dot{q}) ,$$

dove  $\mathcal{L}_i := \mathcal{L} \circ \psi_i^{-1}$  se  $i = 1, 2$ . Per tale motivo, con una certa improprietà notazionale, abbiamo sempre indicato con  $\mathcal{L}$  la funzione lagrangiana anche quando espressa come funzione delle coordinate, scegliendo differenti sistemi di coordinate naturali.

Viceversa, come ora mostriamo, la funzione di Hamilton associata ad una fissata lagrangiana non è un campo scalare su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  dato che dipende anche dal sistema di coordinate naturali scelto e pertanto notazioni come  $\mathcal{H} : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  sono sbagliate.

Se, per una stessa lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  sono le funzioni hamiltoniane definite su due carte locali naturali con intersezione non vuota ed associate a coordinate naturali locali  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  e  $(t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n)$ , tali che, sull'intersezione delle carte valga come richiesto:

$$\begin{aligned} t' &= t + c , \\ q'^k &= q'^k(t, q^1, \dots, q^n) , \\ p'_k &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h , \end{aligned}$$

allora si ha anche:

$$\mathcal{H}'(t'(t), q'(t, q), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial t} \bigg|_{(t, q, p)} p'_k(t, q, p) . \quad (11.28)$$

che è equivalente a:

$$\mathcal{H}'(t'(t), q'(t, q), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p) - \sum_{h=1}^n p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} \bigg|_{(t'(t), q'(t, q), p'(t, q, p))} . \quad (11.29)$$

La dimostrazione dell'ultima identità segue facilmente dalla definizione di funzione di Hamilton ottenuta in coordinate naturali da una fissata lagrangiana e dalle leggi di trasformazione tra coordinate naturali rispettivamente su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  e  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t', q', p') &= \sum_k p'_k \dot{q}'^k - \mathcal{L} = \sum_{k, h} p_h \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \dot{q}'^k - \mathcal{L} \\ &= \sum_{k, h} p_h \left( \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \dot{q}'^k + \frac{\partial q^h}{\partial t'} \right) - \mathcal{L} - \sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} = \sum_h p_h \dot{q}^h - \mathcal{L} - \sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} \\ &= \mathcal{H}(t, q, p) - \sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} , \end{aligned}$$

che dimostra la seconda delle due identità scritte sopra. La prima identità segue, ed è di fatto equivalente alla prima, tenendo conto dell'identità:

$$\sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} = - \sum_k p'_k \frac{\partial q'^k}{\partial t} . \quad (11.30)$$

Quest'ultima si ha come conseguenza delle leggi di trasformazione tra coordinate naturali dello spaziotempo delle fasi:

$$p'_k = \sum_h \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h , \quad 0 = \frac{\partial q^h}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \frac{\partial q^h}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \frac{\partial q^h}{\partial t'}$$

da cui, come detto:

$$- \sum_k p'_k \frac{\partial q'^k}{\partial t} = \sum_{h, k} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} p_h = \sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial t'} .$$

**Osservazioni 11.5.** La funzione di Hamilton dipende dalle coordinate, tuttavia è la stessa per un fissato *sistema di riferimento* nello spazio fisico nel senso che segue. Se abbiamo un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , e in esso i vincoli non dipendono dal tempo, sappiamo da (2) in osservazioni 9.5 che i vari sistemi di coordinate naturali *solidali* con  $\mathcal{S}$  soddisfano relazioni di trasformazione

di coordinate che non dipendono esplicitamente dal tempo. In altre parole se  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  sono carte locali naturali su  $\mathbb{V}^{n+1}$  con  $U \cap U' \neq \emptyset$  ed entrambi i sistemi di coordinate sono solidali con  $\mathcal{S}$ , le relazioni tra questi due sistemi di coordinate su  $U \cap U'$  si esprimono come

$$t' = t + c$$

e

$$q'^k = q'^k(q^1, \dots, q^n) \quad \text{per} \quad k = 1, \dots, n.$$

con ovvie notazioni. La (11.28) dice allora che

$$\mathcal{H}'(t'(t), q'(t, q), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p). \quad (11.31)$$

e pertanto, *usando sistemi di coordinate locali naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  solidali con  $\mathcal{S}$* , la funzione di Hamilton si può considerare un campo scalare. Tali sistemi di coordinate formano un atlante su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  (si dimostra facilmente ciò pensando a come si costruisce  $\mathbb{V}^{n+1}$  osservando che ogni sistema di riferimento ammette un sistema di coordinate globali su tutto lo spaziotempo dato da coordinate cartesiane solidali con esso). Pertanto una funzione di Hamilton  $\mathcal{H}|_{\mathcal{S}} : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  viene definita in tal modo su *tutto* lo spaziotempo delle fasi quando è stato fissato un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$  in cui i vincoli non dipendono dal tempo (ammesso che esista) e quando è stata assegnata una lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  costruita in quel sistema di riferimento, dato che le varie funzioni di Hamilton costruite con  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  tramite (11.19) si “incollano” cambiando carte dell’atlante associato a  $\mathcal{S}$  come prescritto dalla (11.31). Cambiando sistema di riferimento si trova però una nuova funzione di Hamilton  $\mathcal{H}|_{\mathcal{S}'}$  globalmente definita e, cambiando carte locali naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  non necessariamente solidali con uno dei due riferimenti, le funzioni di Hamilton in carte locali sono in generale connesse tramite le relazioni (11.28).

Malgrado la funzione di Hamilton non sia un campo scalare, vale il seguente importante risultato che dimostra l’invarianza delle equazioni di Hamilton al variare delle coordinate dell’atlante delle carte locali naturali, pur di assumere che le funzioni di Hamilton, al variare della scelta delle coordinate naturali definite nell’intorno di un fissato punto in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  siano legate tramite la relazioni (11.28) (equivalentemente (11.29)). Tale requisito è ovviamente automaticamente soddisfatto quando le funzioni di Hamilton derivano tutte da una stessa funzione lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  tramite la trasformata di Legendre in ogni sistema di coordinate naturali di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Tuttavia si potrebbero considerare (e lo si fa in certi casi di interesse fisico) situazioni in cui vengono assegnate funzioni di Hamilton su ogni carta naturale di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  soddisfacenti (11.28), senza fare riferimento ad una comune lagrangiana che le generi tutte.

**Proposizione 11.2.** *In riferimento allo spazio tempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , si consideri una curva  $C^1$  parametrizzata nel tempo assoluto,  $\gamma : I \ni t \mapsto F(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfa le equazioni di Hamilton nell’aperto  $V \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$  dotato di coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  rispetto alla funzione hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  di classe  $C^1$ . Tale curva soddisferà le equazioni di Hamilton in ogni altro sistema di coordinate naturali  $(t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n)$  definito ancora*

su  $V$  e rispetto a  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t', q', p')$  se vale la (11.28) o, equivalentemente, la (11.29).

**Dimostrazione.** La curva  $\gamma$  nel primo sistema di coordinate sarà descritta da  $q^k = q^k(t)$  e  $p_k = p_k(t)$ . Passando alle nuove coordinate, la stessa curva nello spazio delle fasi sarà individuata dalle funzioni  $q'^h(t') = q^k(t(t'), q(t(t')))$  e  $p'_h(t') = p'_k(t(t'), q(t(t')), p(t(t')))$ , dove abbiamo usato le leggi di trasformazione tra coordinate naturali (11.6)-(11.7). Nel seguito assumeremo  $c = 0$  per cui  $t' = t$  senza perdere generalità in virtù della banale relazione tra  $t'$  e  $t$ . Vale allora, tenendo conto che  $\gamma$  soddisfa le equazioni di Hamilton rispetto a  $\mathcal{H}$  nelle coordinate non primarie:

$$\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} \frac{dq^s}{dt} = \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial q'^k}{\partial q^s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}.$$

Dalla terza in (11.6)-(11.7) abbiamo che:

$$\frac{\partial q'^k}{\partial q^s} = \frac{\partial p_s}{\partial p'_k},$$

da cui, osservando anche che  $\frac{\partial}{\partial p'_k} = \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial p'_k} \frac{\partial}{\partial p_s}$  per le inverse di (11.6)-(11.7):

$$\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial p'_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} = \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'_k}.$$

Abbiamo trovato che

$$\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial q'^k}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p'_k}. \quad (11.32)$$

Procedendo in modo analogo per la seconda classe di componenti si arriva immediatamente a:

$$\frac{dp'_k}{dt} = \frac{\partial p'_k}{\partial t} - \sum_s \frac{\partial q^s}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^s} + \sum_s \frac{\partial p'_k}{\partial q^s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}.$$

A secondo membro possiamo sostituire  $\frac{\partial p'_k}{\partial q^s}$  con  $-\frac{\partial p_s}{\partial q'^k}$  dato che  $\frac{\partial p'_k}{\partial q^s} + \frac{\partial p_s}{\partial q'^k} = 0$  perché:

$$0 = \frac{\partial p_s}{\partial q^k} = \sum_r \frac{\partial p_s}{\partial q'^r} \frac{\partial q'^r}{\partial q^k} + \sum_r \frac{\partial p_s}{\partial p'_r} \frac{\partial p'_r}{\partial q^k} = \sum_r \frac{\partial p_s}{\partial q'^r} \frac{\partial q'^r}{\partial q^k} + \sum_r \frac{\partial q'^r}{\partial q^k} \frac{\partial p'_r}{\partial q^k} = \sum_r \frac{\partial q'^r}{\partial q^k} \left( \frac{\partial p_s}{\partial q'^r} + \frac{\partial p'_r}{\partial q^k} \right),$$

e la matrice dei coefficienti  $\frac{\partial q'^r}{\partial q^k}$  è invertibile per ipotesi. Abbiamo trovato che:

$$\frac{dp'_k}{dt} = \frac{\partial p'_k}{\partial t} - \sum_s \frac{\partial q^s}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^s} - \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial q'^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s}.$$

Valendo, per le relazioni inverse delle (11.6)-(11.7),  $\frac{\partial}{\partial q'^k} = \sum_s \frac{\partial q^s}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial q^s} + \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial p_s}$ , possiamo concludere che:

$$\frac{dp'_k}{dt} = \frac{\partial p'_k}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q'^k}. \quad (11.33)$$

Per finire osserviamo che:

$$\frac{\partial q'^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p'_k} \sum_s p'_s \frac{\partial q'^s}{\partial t}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $\frac{\partial}{\partial p'_k} \frac{\partial q'^s}{\partial t} = \sum_s \frac{\partial p_s}{\partial p'_k} \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{\partial q'^s}{\partial t} = 0$ . Di conseguenza, la (11.32) si può riscrivere, tenendo conto di (11.28):

$$\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k}.$$

Quindi la curva  $\gamma$ , letta in coordinate primate, soddisfa la prima parte delle equazioni di Hamilton rispetto a  $\mathcal{H}'$ . In modo simile vale:

$$-\frac{\partial p'_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q'^k} \sum_s p'_s \frac{\partial q'^s}{\partial t} \quad (11.34)$$

che segue dalla (11.7) come proveremo sotto. Di conseguenza la curva  $\gamma$ , letta in coordinate primate, soddisfa la seconda parte delle equazioni di Hamilton rispetto a  $\mathcal{H}'$ , dato che la (11.33) si può riscrivere, tenendo conto di (11.28):

$$\frac{dp'_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k}.$$

Per concludere proviamo (11.34). Il secondo membro di tale identità si esplicita in:

$$\begin{aligned} \sum_{h,s} p'_s \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial^2 q'^s}{\partial q^h \partial t} &= \sum_{h,s} p'_s \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q'^s}{\partial q^h} = \sum_s p'_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_h \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^s}{\partial q^h} \right) - \sum_{h,s} p'_s \frac{\partial q'^s}{\partial q^h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \\ &= \sum_s p'_s \frac{\partial}{\partial t} (\delta_k^s) - \sum_{h,s} p'_s \frac{\partial q'^s}{\partial q^h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} = 0 - \sum_{h,s} p'_s \frac{\partial q'^s}{\partial q^h} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} = - \sum_h p_h \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} = - \frac{\partial}{\partial t} \sum_h p_h \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} \\ &= - \frac{\partial p'_k}{\partial t}. \end{aligned}$$

□

**Osservazioni 11.6.** Il risultato ha un'importante conseguenza. In generale  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  non è ricopribile con una sola carta locale e considerando una soluzione delle equazioni di Hamilton in una carta locale  $(U, \psi)$ , ci aspettiamo che tale soluzione possa arrivare fino alla frontiera  $\mathcal{F}(U)$  di tale carta. Dal punto di vista fisico ci si aspetta che la soluzione sia estendibile fuori da tale carta, dato che la carta scelta non ha in generale alcun significato fisico privilegiato. Possiamo provare ad usare diversi sistemi di coordinate incollando di volta in volta le varie soluzioni, ma a priori non è detto che la teoria complessiva risulti coerente. La proposizione appena dimostrata ci dice che i vari ingredienti usati nella formulazione delle equazioni di Hamilton, cambiando

coordinate, si comportano coerentemente. Se infatti  $(V, \phi)$  è un'altra carta locale con  $V \cap U \neq \emptyset$ , la soluzione  $\gamma_U$  suddetta, raggiungerà un punto  $\gamma_U(t_1) \in U \cap V$ . Possiamo allora reimpostare il problema di Cauchy delle equazioni di Hamilton ora *trascritte nelle coordinate in  $V$* , usando come condizioni iniziali al tempo  $t_1$ ,  $\gamma_U(t_1)$  e  $\dot{\gamma}_U(t_1)$ . L'unica soluzione  $\gamma_V$  che otteniamo si estenderà in generale su  $V$  *anche fuori da  $U$* . Le curve  $\gamma_U$  e  $\gamma_V$ , per costruzione si raccorderanno differenziabilmente in  $U \cap V$  soddisfacendo entrambi i sistemi di equazioni differenziali hamiltoniane nelle rispettive coordinate. È chiaro che per questa via si ottiene alla fine una soluzione delle equazioni di Hamilton definita, potenzialmente, su *tutto*  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

### Esempi 11.2.

1. Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali,  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  rispettivamente, non sottoposti a vincoli ma interagenti tramite forze dedotte da un'energia potenziale totale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ .  $\mathcal{J}$  è un sistema di riferimento inerziale nel quale i punti sono individuati da vettori posizione  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ . La lagrangiana del sistema sarà allora data da, usando le componenti di tutti i vettori  $\mathbf{x}_i$  come coordinate libere:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

L'hamiltoniana risulta avere forma:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Come già visto abbiamo anche che:

$$\mathbf{p}_i = \nabla_{\dot{\mathbf{x}}_i} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_N) = m_i \dot{\mathbf{x}}_i.$$

da cui:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}.$$

Possiamo allora esprimere l'hamiltoniana nelle variabili di Hamilton ottenendo:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Dato che nel caso in esame l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo essa si deve conservare sulle equazioni del moto di Hamilton (in effetti l'hamiltoniana, sul moto, coincide con l'energia meccanica totale del sistema). Le equazioni di Hamilton risultano essere, per  $i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= (-\nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{H}) = -\nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \\ \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= (\nabla_{\mathbf{p}_i} \mathcal{H}) = \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}. \end{aligned}$$



Le due equazioni insieme forniscono le  $N$  equazioni di Newton (per  $i = 1, \dots, N$ ):

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) .$$

**2.** Consideriamo ora il caso di una particella carica di massa  $m$  e carica  $e$  immersa in un campo elettromagnetico assegnato tramite i potenziali elettromagnetici  $\mathbf{A}$  e  $\varphi$ . Sappiamo dalla sezione 9.2.1 che la sua lagrangiana è, in un riferimento inerziale ed usando le componenti del vettore posizione della particella come coordinate libere:

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e\varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} .$$

L'Hamiltoniana vale, in questo caso, per computo diretto:

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + e\varphi(t, \mathbf{x}) .$$

Notare che nella funzione hamiltoniana non appare più il potenziale magnetico: in formulazione lagrangiana l'Hamiltoniana *non* contiene l'informazione della presenza del campo magnetico. Tuttavia, come già visto:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) ,$$

e dunque:

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) .$$

Riscrivendo l'hamiltoniana in funzione delle variabili di Hamilton l'informazione riguardante il campo magnetico riappare a causa del fatto che i momenti coniugati non sono semplicemente le componenti dell'impulso :

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}))^2}{2m} + e\varphi(t, \mathbf{x}) .$$

Le equazioni di Hamilton risultano:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= (-\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}) = \frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \frac{e}{c} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{A} - e \nabla \varphi , \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= (\nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}) = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{e}{mc} \mathbf{A} . \end{aligned}$$

Dalle due equazioni si ricava:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e \nabla_x \varphi - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \frac{e}{c} \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) .$$

Il secondo membro non è altro che la forza di Lorentz, come visto nella sezione 9.2.1. Di conseguenza abbiamo trovato le corrette equazioni del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico.

**3.** Consideriamo una particella di massa  $m$ , vincolata a stare su una sfera liscia di raggio  $R > 0$  e centro  $O$  in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , e sottoposta ad una forza con energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{I}}$ . In coordinate angolari sferiche  $\theta$  e  $\phi$  la lagrangiana della particella è :

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(\theta, \phi),$$

per cui l'hamiltoniana è :

$$\mathcal{H}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(\theta, \phi).$$

Dato che i due momenti coniugati  $p_\phi$  e  $p_\theta$  hanno la struttura:

$$p_\phi = mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta, \quad p_\theta = mR^2 \dot{\theta},$$

si ha che l'hamiltoniana in variabili di Hamilton è scritta come:

$$\mathcal{H}(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}}(t, \theta, \phi).$$

Lasciamo al lettore di scrivere esplicitamente le equazioni di Hamilton.

**(4)** Studiando sistemi fisici generali  $\mathfrak{S}$  composti da due (o più) sottosistemi  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ , l'hamiltoniana ha spesso una struttura della forma, in riferimento ad un sistema di coordinate locali naturali di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_I,$$

dove  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  sono le hamiltoniane dei due sistemi pensati come non interagenti: ognuna di tali hamiltoniane contiene *solo* coordinate riferite al corrispondente sottosistema, e  $\mathcal{H}_I$  è l'*hamiltoniana d'interazione* che contiene le coordinate di *entrambi* i sottosistemi. L'esempio più semplice è dato da un sistema composto da due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, con coordinate di Hamilton  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)$  e  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2)$  usando le stesse convenzioni che nell'esempio (1) di sopra rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . In tal caso le hamiltoniane libere sono, per esempio:

$$\mathcal{H}_1 := \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1}, \quad \mathcal{H}_2 := \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2},$$

mentre una possibile hamiltoniana d'interazione è quella data da una forza conservativa associata ad un'energia potenziale che dipende dalle posizioni dei due punti materiali:

$$\mathcal{H}_I := \mathcal{U}(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|).$$

Considerando sistemi composti da più sottosistemi l'hamiltoniana d'interazione può essere spesso decomposta in hamiltoniane cosiddette: "a due corpi", "a tre corpi" e via di seguito. Per esempio con 3 particelle, si può avere:

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \mathcal{U}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) + \mathcal{U}^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3),$$

dove  $\mathcal{U}^{(2)}$  rappresenta l'interazione (conservativa in questo caso) a due corpi e  $\mathcal{U}^{(3)}$  quella a tre corpi. Nelle applicazioni pratiche, per esempio in meccanica statistica, si usano a volte metodi approssimati in cui in prima approssimazione si trascura l'hamiltoniana d'interazione o solo una sua parte (es. quella a tre corpi) e se ne tiene conto solo nelle approssimazioni successive.

### Esercizi 11.1.

1. Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato alla superficie liscia data dal toro  $\mathbb{T}^2$  in quiete in un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Fissato un sistema di coordinate car-

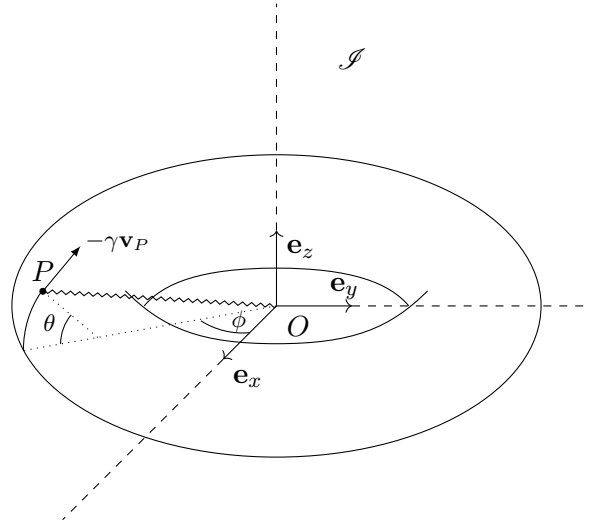


Figura 11.1: Illustrazione dell'esercizio 11.1.1.

tesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ , di assi  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  ed origine  $O$ , il toro  $\mathbb{T}^2$  ha equazione  $P(\theta, \phi) = O + (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_x + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_y + r \sin \theta \mathbf{e}_z$ , dove  $R > r > 0$  sono costanti. Oltre alla reazione vincolare  $\phi$ , su  $P$  agisce la forza di una molla ideale (senza massa e con lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  e con un estremo attaccato in  $O$  ed infine la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P$  dove  $\mathbf{v}_P$  è la velocità del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  e  $\gamma \geq 0$  è una costante. Si risolvano i seguenti quesiti usando le stesse coordinate  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi)$  per descrivere il moto del punto  $P$ .

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del punto  $P$ .
- Dimostrare che se  $\gamma = 0$ , allora su ogni moto del sistema si conserva la componente  $z$  del momento angolare rispetto al polo  $O$  in  $\mathcal{I}$  e l'energia meccanica totale in  $\mathcal{I}$  e scrivere la forma esplicita di tali integrali primi in funzione delle coordinate libere usate.
- Per  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton: scrivere l'espressione esplicita dell'hamiltoniana in coordinate di Hamilton e scrivere esplicitamente le equazioni di Hamilton.
- Nel caso  $\gamma > 0$ , usando le equazioni di Eulero-Lagrange, determinare la soluzione del

problema del moto con condizioni iniziali  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = v > 0$ .

2. Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidali con il riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Una particella  $P$  di massa  $m$  è vincolata a scorrere sulla curva liscia di equazione  $z = \cosh x$ . Una seconda particella  $Q$  di massa  $m$  è libera di scorrere su un'asta rigida ideale liscia che esce da  $O + x\mathbf{e}_x$  (il punto proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ ) e rimane nel piano perpendicolare a  $\mathbf{e}_x$  ed è libera di ruotare attorno a  $O + x\mathbf{e}_x$ . Le due particelle sono connesse l'un l'altra da una molla ideale di costante elastica  $k$  e sono sottoposte alla forza di gravità con accelerazione costante  $-g\mathbf{e}_z$ . Il riferimento  $\mathcal{J}$  ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$ , dotato di assi solidali  $\hat{\mathbf{e}}_x$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_y$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_z \equiv \mathbf{e}_z$  uscenti dall'origine  $\hat{O} \equiv O$ , con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}|\hat{\mathcal{J}}} = \Omega \mathbf{e}_z$  e  $\Omega > 0$  costante. Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate libere del sistema le tre coordinate  $x, \theta, r$  individuate come segue. La coordinata  $x$  è la prima componente in  $\mathcal{J}$  del vettore posizione  $P - O$ , l'angolo  $\theta$  è quello che l'asta  $Q - P$  forma con l'asse  $y$  (trasportato parallelamente in  $P$ ) ed è orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_x$  ed infine  $r$  è la distanza tra  $Q$  e  $O + x\mathbf{e}_x$ .

(a) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Dimostrare che si conserva l'hamiltoniana associata alla lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{L}|\hat{\mathcal{J}}$  con coordinate libere suddette e provare che tale hamiltoniana, sui moti del sistema, coincide con l'energia meccanica totale nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ .

(c) Passare in formulazione di Hamilton: scrivere l'espressione esplicita dei momenti coniugati in funzione delle coordinate lagrangiane e la trasformazione inversa, scrivere l'hamiltoniana precedentemente trovata in funzione delle variabili di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton.

### 11.1.3 Le equazioni di Hamilton da un principio variazionale

Mostreremo ora, molto brevemente, come sia possibile ottenere le equazioni di Hamilton come conseguenza di un principio variazionale, analogamente a quanto fatto per le equazioni di Eulero-Lagrange nel teorema 9.1. Anche questo caso il funzionale che useremo sarà dato dall'azione, cioè dall'integrale della funzione di Lagrange, scritta però nel formalismo di Hamilton ed in variabili di Hamilton. Inoltre, a differenza del caso lagrangiano, ora le variabili  $p_k$  saranno considerate del tutto indipendenti dalle variabili  $q^k$  (nel caso lagrangiano, nel principio variazionale apparivano solo le coordinate  $q^k$  e le  $\dot{q}^k$  erano dal principio assimilate alle derivate nel tempo delle  $q^k$ ).

Consideriamo un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  descritto su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , fissiamo un sistema di coordinate naturali  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$ . Senza perdere generalità, possiamo pensare tali coordinate come variabili in  $I \times \Omega \times \Omega'$  dove  $I = [a, b]$  con  $a < b$  e  $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$  sono aperti (non vuoti). Supponiamo che il sistema fisico  $\mathfrak{S}$  sia descritto nelle coordinate dette dalla funzione di Hamilton  $\mathcal{H} : I \times \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  congiuntamente in tutte le sue variabili. Fissiamo quindi due configurazioni  $Q_a, Q_b \in \Omega$ .

Consideriamo infine il funzionale, detto, come nel caso lagrangiano, **azione**:

$$I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}[\gamma] := \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^n p_k \frac{dq^k}{dt} - \mathcal{H}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \right] dt, \quad (11.35)$$

dove le curve  $\gamma : I \ni t \mapsto (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  appartengono al dominio:

$$D_{Q_a, Q_b} := \{ \gamma \in C^1(I) \mid \gamma(t) \in \Omega \times \Omega' \text{ se } t \in I \text{ e } \gamma^k(a) = Q_a^k \text{ e } \gamma^k(b) = Q_b^k \text{ se } k = 1, \dots, n \}.$$

### Osservazioni 11.7.

(1) Si osservi che nell'integrando del secondo membro di (11.35) appare effettivamente la lagrangiana scritta però in termini della funzione di Hamilton:

$$\mathcal{L} = \sum_k p_k \dot{q}^k - \mathcal{H}.$$

Pertanto il funzionale  $I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}$  si traduce in quello usato nel teorema 9.1 quando si torna in formulazione lagrangiana.

(2) Si noti che le condizioni che le curve di  $D_{Q_a, Q_b}$  devono soddisfare al bordo del loro dominio  $[a, b]$  riguardano solo le prime  $n$  componenti, quelle di tipo  $q^k$  e *non* quelle di tipo  $p_k$ .

Tenendo conto che  $\Omega \times \Omega'$  è aperto, si prova facilmente che ogni curva  $\gamma \in D_{Q_a, Q_b}$  ammette un intorno aperto di  $\gamma(I)$  tutto contenuto in  $\Omega \times \Omega'$ ; usando tale intorno è possibile definire curve  $\eta : I \rightarrow \Omega \times \Omega'$  tali che  $\gamma + \alpha\eta \in D_{Q_a, Q_b}$  per  $\alpha \in (-\delta_\eta, \delta_\eta)$  con  $\delta_\eta > 0$  sufficientemente piccolo. Pertanto ha senso applicare la definizione di punto di stazionarietà data nella sezione 9.1.1 per il funzionale azione, producendo il seguente notevole teorema che, come nel caso lagrangiano, cade ancora sotto il nome, tecnicamente erroneo, di *principio di minima azione* (in formulazione di Hamilton).

**Teorema 11.2. (Principio di Minima Azione hamiltoniano)** *Con le definizioni date sopra, una curva  $\gamma : I \rightarrow (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  che appartiene a  $D_{Q_a, Q_b}$  soddisfa le equazioni di Hamilton (11.26) rispetto a  $\mathcal{H} : I \times \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  congiuntamente in tutte le sue variabili, se e solo se  $\gamma$  è un punto di stazionarietà del funzionale azione  $I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}$  (11.35).*

**Dimostrazione.** Nel seguito  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ . Procedendo come nella dimostrazione del teorema 9.1 abbiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}[\gamma + \alpha\eta] &= \int_a^b \sum_k \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} (p_k + \alpha\eta_k) \left( \frac{dq^k}{dt} + \alpha \frac{d\eta^k}{dt} \right) dt \\ &\quad - \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \mathcal{H}(t, q^1 + \alpha\eta^1, \dots, q^n + \alpha\eta^n, p_1 + \alpha\eta_1, \dots, p_n + \alpha\eta_n) dt. \end{aligned}$$

Eseguendo le derivate:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}[\gamma + \alpha\eta] = \int_a^b \sum_k \left( \eta_k \frac{dq^k}{dt} + p_k \frac{d\eta^k}{dt} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \eta^k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \eta_k \right) dt .$$

Integrando per parti e tenendo conto del fatto che  $\eta^k(a) = \eta^k(b) = 0$  dato che le curve  $\gamma + \alpha\eta$  devono passare per le configurazioni  $Q_a$  e  $Q_b$  abbiamo che:

$$\int_a^b \sum_k p_k \frac{d\eta^k}{dt} dt = - \int_a^b \sum_k \eta^k \frac{dp_k}{dt} dt .$$

Possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I_{Q_a, Q_b}^{(\mathcal{H})}[\gamma + \alpha\eta] &= \int_a^b \sum_{k=1}^n \eta^k(t) \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \Big|_{(t, \gamma(t))} - \frac{dp_k}{dt} \Big|_{(t, \gamma(t))} \right) dt \\ &+ \int_a^b \sum_{k=1}^n \eta_k(t) \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \Big|_{(t, \gamma(t))} + \frac{dq^k}{dt} \Big|_{(t, \gamma(t))} \right) dt . \end{aligned}$$

Con la stessa procedura usata per dimostrare il teorema 9.1 e tenuto conto del fatto che la curva  $\gamma$  e la funzione di Hamilton sono di classe  $C^1$ , si prova che la richiesta che il primo membro dell'identità appena ottenuta sia nullo comunque scegliamo (nell'insieme di funzioni considerato) la curva  $\eta$  è equivalente alle richieste che, esattamente sulla curva  $\gamma$ :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} + \frac{dp_k}{dt} = 0 , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{dq^k}{dt} = 0 .$$

In altre parole abbiamo ottenuto che la curva  $\gamma$  stazionarizza il funzionale considerato se e solo se soddisfa le equazioni di Hamilton.  $\square$

## 11.2 Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$

In questa sezione ci occuperemo di alcune proprietà elementari ma importanti dei sistemi hamiltoniani su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ , in particolare vedremo una prima versione del *teorema di Liouville*.

### 11.2.1 Sistemi hamiltoniani su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$

Consideriamo un sistema fisico  $\mathfrak{S}$  che ammette descrizione Hamiltoniana nello spazio delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Se fissiamo un sistema di coordinate naturali sullo spazio delle fasi:  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ , possiamo identificare lo spazio delle fasi, almeno per quanto concerne la regione aperta coperta dalle coordinate, con un aperto dello spazio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ , dove il primo fattore è l'asse del tempo. Ci metteremo ora nella situazione semplificata in cui le coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  varino su *tutto*  $\mathbb{R} \times \Omega$  dove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$  che si identifica con ogni fibra  $\mathbb{F}_t$  e pertanto possiamo

pensare  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  come dato dal prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Nella situazione detta le equazione di Hamilton prendono la seguente forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) . \quad (11.36)$$

dove:  $\mathbf{x}$  è il vettore colonna  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)^t$  è un generico punto in  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione hamiltoniana del sistema  $\mathfrak{S}$  e assumertemo che  $\nabla \mathcal{H}$  sia  $C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$  per assicurare (con abbondanza di ipotesi) la validità dei teoremi di esistenza ed unicità delle soluzioni<sup>3</sup>, la matrice  $S$ , detta **matrice simplettica**, è una matrice reale  $2n \times 2n$  con struttura

$$S := \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right] , \quad (11.37)$$

dove la matrice  $I$  è la matrice identità  $n \times n$ . Infine  $\nabla f$  è il vettore colonna

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q^n}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n} \right)^t .$$

La forma (11.36) delle equazioni di Hamilton implica importanti conseguenze sulle proprietà fisico-matematiche delle soluzioni. In particolare il fondamentale *teorema di Liouville*, l'*equazione di Liouville* ed il *teorema del ritorno di Poincaré* che discuteremo pienamente nel prossimo capitolo, limitandoci a presentare in questo capitolo una versione semplificata del primo teorema menzionato.

Una questione importante è allora quella di determinare criteri matematici per stabilire se un fissato sistema di equazioni differenziali del prim'ordine su qualche aperto  $\mathbb{R} \times \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) ,$$

si possa ricondurre, almeno localmente, ad un sistema hamiltoniano della forma (11.36), una volta definita una opportuna funzione hamiltoniana.

Per dare una risposta a tale domanda dobbiamo introdurre alcuni rudimenti del *formalismo simplettico*.

## 11.2.2 Il gruppo simplettico ed i sistemi hamiltoniani

**Definizione 11.2.** (**Forma simplettica e spazio simplettico**) Se  $V$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ , un'applicazione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , che associa alla coppia di vettori  $(u, v)$  il numero reale  $\langle u, v \rangle$ , è detta **forma simplettica** su  $V$  se gode delle seguenti proprietà :

- (a) **antisimmetria**:  $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$  per ogni  $u, v \in V$ ,
- (b) **bilinearità**:  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è lineare separatamente in ognuno dei due argomenti,
- (c) **non degeneratezza**: se  $\langle u, v \rangle = 0$  per ogni  $v \in V$  allora  $u = 0$ .

<sup>3</sup>Come sappiamo dall'Appendice 4, sarebbe sufficiente richiedere che  $\nabla \mathcal{H} \in C^0(\mathbb{R} \times \Omega)$  e che valga la condizione di Lipschitz locale nella variabile  $\mathbf{x}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

In tal caso, la coppia  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è detta **spazio simplettico**.  $\diamond$

La rilevanza della nozione di spazio simplettico in meccanica hamiltoniana è dovuta al fatto che la matrice  $S$  è naturalmente associata ad una forma simplettica. L'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_S : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \ni (u, v) \mapsto u^t S v \quad (11.38)$$

definisce infatti una forma simplettica su  $\mathbb{R}^{2n}$ . Infatti la bilinearità è ovvia, l'antisimmetria segue dal fatto che  $S^t = -S$  come si verifica immediatamente dalla definizione di  $S$ , per cui:

$$\langle u, v \rangle_S = u^t S v = (u^t S v)^t = v^t S^t u = -v^t S u = -\langle v, u \rangle_S.$$

La non degeneratezza si prova come segue, notando che, dalla definizione di  $S$ :  $SS = -I$ . Se  $u^t S v = 0$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^{2n}$ , possiamo scegliere  $v = Su$  e pertanto deve valere  $u^t S S u = 0$  che significa  $-u^t u = 0$  cioè  $u^t u = 0$  e quindi  $u = 0$ .

Si osservi per inciso che  $SS = -I$  implica anche che  $\det S = \pm 1$ . Infatti:  $(\det S)^2 = (\det S^2) = (-1)^{2n} = 1$  da cui, infine  $\det S = \pm 1$ . Più precisamente vale  $\det S = 1$  dato che scambiando le prime  $n$  righe partendo dall'alto con le ultime  $n$  partendo dal basso,  $S$  si trasforma nella matrice

$$L := \left[ \begin{array}{c|c} -I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right],$$

Pertanto  $\det S = (-1)^n \det L$  dalle proprietà elementari del determinante, avendo scambiato  $n$  coppie di righe per trasformare  $S$  in  $L$ . Dato che  $L$  è diagonale, il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale e quindi vale  $\det L = (-1)^n (1)^n$ . Conseguentemente  $\det S = (-1)^{2n} = 1$ .

Si può provare che *ogni* forma simplettica su  $V$  spazio vettoriale reale di dimensione pari si può ridurre alla forma (11.38), scegliendo un sistema di coordinate cartesiane opportune. Vale infatti il seguente teorema dovuto a Darboux la cui prova è lasciata per esercizio.

**Teorema 11.3. (Primo teorema di Darboux)** *Se  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  è uno spazio simplettico con  $\dim V = 2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  fissato, esiste una base  $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1, \dots, 2n}$  di  $V$  in cui la forma simplettica è rappresentata dalla matrice  $S$  in (11.37). In altre parole, se  $u$  e  $v$  sono rispettivamente i vettori colonna delle componenti dei vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  in  $V$  rispetto alla base  $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1, \dots, 2n}$ :*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u^t S v. \quad (11.39)$$

#### Osservazioni 11.8.

(1) La base  $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1, \dots, 2n}$  non è l'unica base in cui la forma simplettica si riduce alla (11.38).



Esiste una classe di basi, dette **canoniche** rispetto alla forma symplettica, in cui vale la (11.39). Supponiamo che il vettore  $\mathbf{u} \in V$  sia rappresentato dal vettore colonna  $u' \in \mathbb{R}^{2n}$ , rispetto alla base  $\{\mathbf{s}'_i\}_{i=1,\dots,2n}$ , e dal vettore colonna  $u$ , rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1,\dots,2n}$ . Dovrà quindi valere  $u = Au'$ , dove la matrice  $A \in GL(2n, \mathbb{R})$  (il gruppo delle matrici reali invertibili  $2n \times 2n$ ) è la matrice di passaggio da una base all'altra. Prendendo due vettori  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  e considerandone le componenti rispetto alle due basi dette, possiamo allora scrivere che:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u^t S v = (Au')^t A v' = u'^t (A^t S A) v'.$$

Concludiamo che: anche la base  $\{\mathbf{s}'_i\}_{i=1,\dots,2n} \subset V$  è canonica se e solo se  $A^t S A = S$ .

(2) La precedente osservazione ci ha portato a considerare le matrici  $A \in M(2n, \mathbb{R})$  (l'algebra delle matrici reali  $2n \times 2n$ ) che soddisfano il vincolo  $A^t S A = S$ . Mostriamo che queste matrici formano un gruppo sottogruppo di  $GL(2n, \mathbb{R})$ . Per fare ciò è sufficiente mostrare che le matrici dette (i) formano un sottoinsieme di  $GL(2n, \mathbb{R})$ , (ii) tale sottoinsieme contiene l'identità, (iii) tale sottoinsieme è chiuso rispetto al prodotto matriciale, (iv) tale sottoinsieme è chiuso rispetto al calcolo dell'inversa<sup>4</sup>. Procediamo con ordine.

(i) Se  $A^t S A = S$ , calcolando il determinante e facendo uso della regola di Binet, troviamo che  $(\det A^t) \det S \det A = \det S$ , da cui, tenendo conto che  $\det S \neq 0$  come verificato precedentemente e che  $\det A^t = \det A$ , si ha  $(\det A)^2 = 1$  e pertanto  $\det A \neq 0$ . Quindi effettivamente le matrici che soddisfano il vincolo  $A^t S A = S$  costituiscono un sottoinsieme di  $GL(2n, \mathbb{R})$ .

(ii)  $I$  soddisfa il vincolo:  $I^t S I = S$ .

(iii) Se  $A^t S A = S$  e  $B^t S B = S$  allora  $(AB)^t S (AB) = B^t (A^t S A) B = B^t S B = S$ , per cui  $(AB)^t S (AB) = S$ .

(iv) Cominciamo a provare che l'insieme delle matrici che soddisfano  $A^t S A = S$  è chiuso sotto l'operazione di trasposizione. Se  $A^t S A = S$  allora  $SA^t SA = -I$ , dove si è usato il fatto che  $SS = -I$  (e quindi  $S^{-1} = -S$ ). Moltiplicando per  $A$  a sinistra e  $A^{-1}S$  a destra, troviamo  $ASA^t = S$ . Quindi, se  $A$  è symplettica lo è anche  $A^t$ . Facendo uso di ciò, concludiamo che se  $A^t S A = S$  allora  $ASA^t = S$  e quindi, calcolando l'inverso di entrambi i membri:  $A^{t-1}(-S)A^{-1} = -S$ , da cui: vale  $A^{t-1}SA^{-1} = S$  se  $A^t S A = S$ .

Abbiamo provato la seguente proposizione.

**Proposizione 11.3.** Per ogni fissato  $n = 1, 2, \dots$ , l'insieme di matrici

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(2n, \mathbb{R}) \mid A^t S A = S\},$$

è un gruppo che è sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Inoltre vale  $A \in Sp(n, \mathbb{R})$  se e solo se  $A^t \in Sp(n, \mathbb{R})$ .

**Definizione 11.3.** (Gruppo symplettico) Il gruppo symplettico reale di ordine  $n$  è definito dal sottogruppo di  $GL(2n, \mathbb{R})$

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(2n, \mathbb{R}) \mid A^t S A = S\}.$$

---

<sup>4</sup>Il fatto che l'insieme contenga l'identità segue in realtà da (iii) e (iv).

◇

Se  $E \in M(m, \mathbb{R})$  e  $s \in \mathbb{R}$ , definiamo (dove  $E^0 := I$ ):

$$e^{sE} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} E^k.$$

La serie converge uniformemente nella topologia metrica di  $M(m, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{m^2}$  in ogni intervallo finito per ogni scelta delle matrice  $E$ .

È un fatto noto dalla teoria del gruppo  $GL(m, \mathbb{R})$  (più in generale della teoria dei *gruppi di Lie*) che:

$$e^{sE} \in GL(m, \mathbb{R}) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R} \text{ e ogni } E \in M(m, \mathbb{R}). \quad (11.40)$$

La dimostrazione segue immediatamente dalla nota identità, che prova che il determinante della matrice a primo membro dell'identità di sopra non può mai annullarsi,

$$\det e^F = e^{\text{tr} F} \quad \text{per ogni } F \in M(m, \mathbb{R}).$$

Il risultato in (11.40) può essere parzialmente invertito nel senso che segue. Pensando  $M(m, \mathbb{R})$  come  $\mathbb{R}^{m^2}$ ,  $GL(m, \mathbb{R})$  altro non è che la controimmagine di  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  della funzione determinante. Dato che questa è continua,  $GL(m, \mathbb{R})$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^{m^2}$  che contiene la matrice identica  $I$ . Calcolando il determinante jacobiano per  $F = 0$  dalla funzione  $\mathbb{R}^{m^2} \ni F \mapsto e^F \in \mathbb{R}^{m^2}$  si scopre che esso è non nullo. In tal modo questa applicazione definisce un diffeomorfismo locale di  $\mathbb{R}^{n^2}$  che manda un intorno aperto della matrice 0 nel dominio in un intorno aperto della matrice  $I$  nell'immagine. Questo porta a concludere che, in un intorno aperto  $\mathcal{O}_I$  sufficientemente piccolo dell'identità di  $GL(m, \mathbb{R})$ , ogni elemento  $A \in GL(m, \mathbb{R})$  si può scrivere come  $e^F$  ed  $F$  è univocamente determinata da  $A$  se si lavora in un intorno sufficientemente piccolo di 0.

Dato che  $Sp(n, \mathbb{R})$  è un sottogruppo di  $GL(2n, \mathbb{R})$ , ci si può chiedere se ci sia qualche sottoinsieme dell'intorno  $\mathcal{O}_I$  la cui esponenziazione produce elementi di  $Sp(n, \mathbb{R})$ . La questione si inquadra più in generale nella teoria delle algebre di Lie e nella ben nota corrispondenza locale tra gruppi di Lie ed algebre di Lie associate, ma non ci addentreremo in essa rimamendo su un piano molto elementare. Vale la seguente proposizione.

**Proposizione 11.4.** *Per ogni fissato  $n = 1, 2, \dots$ , vale:*

$$e^{sE} \in Sp(n, \mathbb{R}) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

*se e solo se  $E \in sp(n, \mathbb{R})$  dove*

$$sp(n, \mathbb{R}) := \{E \in M(2n, \mathbb{R}) \mid E^t S + SE = 0\},$$

*è detto insieme delle* **matrici hamiltoniane di ordine  $n$** .

**Dimostrazione.** Dallo sviluppo di  $e^{sE}$  segue facilmente che:

$$(e^{sE})^t = e^{sEt}$$

ed ancora, derivando sotto il segno di serie, data la uniforme convergenza della serie delle derivate,

$$\frac{de^{sE}}{ds} = Ee^{sE} = e^{sE}E.$$

Se  $(e^{sE})^t Se^{sE} = S$ , derivando per  $s = 0$  troviamo subito che  $E^t S + SE = 0$ . Questo prova che  $e^{sE} \in Sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ , implica  $E \in sp(n, \mathbb{R})$ . Sia ora  $E \in sp(n, \mathbb{R})$ , mostriamo che  $e^{sE} \in Sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ . Consideriamo la funzione, per  $t \in \mathbb{R}$ :  $f(s) := (e^{sE})^t Se^{sE}$ . Calcolando la derivata in  $s$  troviamo immediatamente che  $f$  soddisfa il problema di Cauchy autonomo e lineare su  $\mathbb{R}^{n^2}$ :

$$\frac{df}{ds} = E^t f(s) + f(s)E \quad \text{con } f(0) = S.$$

La funzione  $\mathbb{R} \ni s \mapsto f(s) := S$ , *costantemente*, è soluzione di tale problema, dato che  $E^t S + SE = 0$  per ipotesi. Pertanto questa è l'unica soluzione (massimale e completa) del problema di Cauchy. In altre parole:

$$f(s) = (e^{sE})^t Se^{sE} = S \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

cioè  $e^{sE} \in Sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$  se  $E \in sp(n, \mathbb{R})$ . □

**Osservazioni 11.9.**  $GL(m, \mathbb{R})$  e  $Sp(n, \mathbb{R})$  sono gruppi di Lie, cioè hanno una struttura di varietà differenziabile (in questo caso indotta da  $\mathbb{R}^{m^2}$  e  $\mathbb{R}^{(2n)^2}$  rispettivamente) compatibile con le operazioni di prodotto e calcolo dell'inversa (che risultano pertanto essere differenziabili).  $M(m, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $GL(m, \mathbb{R})$ , cioè lo spazio tangente al punto identità  $I \in GL(m, \mathbb{R})$ , dotato della struttura di parentesi di Lie individuata (come al solito nel caso di gruppi matriciali) dal **commutatore matriciale**:  $[A, B] := AB - BA$  con  $A$  e  $B$  matrici di  $M(m, \mathbb{R})$ . Per definizione di algebra di Lie il commutatore di due elementi dell'algebra deve rimanere nell'algebra. Similmente  $sp(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $Sp(n, \mathbb{R})$ . In particolare, per verifica diretta si prova facilmente che  $sp(n, \mathbb{R})$  è un sottospazio vettoriale di  $M(2n, \mathbb{R})$  che soddisfa la relazione di chiusura:

$$[E, E'] \in sp(n, \mathbb{R}) \quad \text{se } E, E' \in sp(n, \mathbb{R}).$$

Siamo ora in grado di enunciare e provare il teorema che connette le matrici hamiltoniane ai sistemi di equazioni differenziali hamiltoniani.

**Teorema 11.4.** *Per  $n = 1, 2, \dots$  fissato, si consideri il sistema di equazioni differenziali su  $\mathbb{R} \times \Omega$ , dove  $\Omega$  è un aperto (non vuoto) di  $\mathbb{R}^{2n}$ :*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \tag{11.41}$$

dove  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ . Vale quanto segue.

(a) Se tale sistema si può scrivere in forma di Hamilton (11.36) per qualche funzione di Hamilton, allora le matrici  $D_{(t,\mathbf{x})}$  i cui coefficienti sono le derivate:

$$\left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_{(t,\mathbf{x})}$$

sono in  $sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$ .

(b) Viceversa se  $D_{(t,\mathbf{x})} \in sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega$ , allora, per ogni sottoinsieme aperto connesso e semplicemente connesso  $B \subset \Omega$ , il sistema (11.41) si può scrivere in forma hamiltoniana su  $\mathbb{R} \times B$ .

**Dimostrazione.** (a) Il sistema è hamiltoniano se e solo se possiamo definire una funzione (il cui gradiente sarà di classe  $C^1$  visto che  $\mathbf{F}$  è tale per ipotesi):  $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathcal{H}(t, \mathbf{x})$  tale che  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x})$ . Questo è equivalente a dire, moltiplicando ambo membri per  $-S$ , che  $\mathbf{G} := -S\mathbf{F}$  è il gradiente di una funzione per ogni fissato istante  $t$ . Dato che  $\mathbf{G}$  è di classe  $C^1$ , il fatto di essere gradiente implica la condizione di irrotazionalità

$$\frac{\partial G^k}{\partial x^h} = \frac{\partial G^h}{\partial x^k}.$$

Ossia, passando in componenti:

$$-\frac{\partial \sum_r S_{kr} F^r}{\partial x^h} = -\frac{\partial \sum_r S_{hr} F^r}{\partial x^k},$$

che può riscriversi:

$$-\sum_r S_{kr} \frac{\partial F^r}{\partial x^h} + \sum_r S_{hr} \frac{\partial F^r}{\partial x^k} = 0,$$

e ancora, ricordando che  $S_{kr} = -S_{rk}$ :

$$\sum_r \frac{\partial F^r}{\partial x^h} S_{rk} + \sum_r S_{hr} \frac{\partial F^r}{\partial x^k} = 0.$$

In forma compatta questa identità dice che:

$$D_{(t,\mathbf{x})}^t S + S D_{(t,\mathbf{x})} = 0,$$

cioè  $D_{(t,\mathbf{x})} \in sp(n, \mathbb{R})$ .

(b) Per dimostrare il viceversa, fissiamo l'aperto  $B \subset \Omega$  connesso e semplicemente connesso e  $t \in \mathbb{R}$ . La condizione sopra scritta è equivalente alla condizione di irrotazionalità per il campo di classe  $C^1$ :  $B \ni \mathbf{x} \mapsto -S\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ . Come ben noto dai corsi di analisi, su  $B$  è allora definito un potenziale

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (-S\mathbf{F}(t, \mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x}, \quad (11.42)$$

il cui gradiente è  $-\mathbf{S}\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ . L'integrale è calcolato su un qualsiasi cammino (indipendente da  $t$ ) di classe  $C^1$ , che congiunge  $\mathbf{x} \in B$  al punto di riferimento fissato arbitrariamente  $\mathbf{x}_0 \in B$ , ed è tutto contenuto in  $B$ . Per costruzione, esattamente al tempo  $t$  su  $B$ :

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = S\nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}).$$

La funzione  $\mathcal{H}$  dipende parametricamente dal tempo dato che il secondo membro di (11.42) dipende dal tempo. Per costruzione l'espressione a secondo membro di (11.42) determina, ad ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$ , una funzione il cui gradiente è  $-\mathbf{S}\mathbf{F}$  su  $B$  ed è pertanto la funzione di Hamilton cercata su  $\mathbb{R} \times B$ .  $\square$ .

**Osservazioni 11.10.** Il teorema prova più generalmente che una funzione a valori vettoriali  $\mathbf{F} := \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  di classe  $C^1((a, b) \times \Omega)$  con  $\Omega$  connesso e semplicemente connesso è scrivibile come  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = S\nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x})$  per qualche funzione scalare  $\mathcal{H}$  definita sullo stesso dominio, se e solo se le matrici i cui coefficienti sono

$$\left. \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right|_{(t, \mathbf{x})}$$

appartengono a  $sp(n, \mathbb{R})$  per ogni  $(t, \mathbf{x}) \in (a, b) \times \Omega$ .

### 11.2.3 Il teorema di Liouville su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$

Il teorema di Liouville è sicuramente uno dei più importanti teoremi di tutta la meccanica Hamiltoniana, della meccanica statistica e di tutta la fisica matematica in generale. In sostanza tale teorema afferma, in termini intuitivi, che: l'evoluzione di un gruppo di punti rappresentativi del sistema nello *spaziotempo* delle fasi, quando questi punti sono in numero grandissimo da essere un insieme continuo, è tale da conservare nel tempo il volume individuato dai punti su ciascuna fibra a tempo fissato (spazio delle fasi al tempo  $t$ ,  $\mathbb{F}_t$ ) incontrata nella storia dei punti rappresentativi. La misura da usare per calcolare il volume in questione nello spazio delle fasi  $\mathbb{F}_t$  è quella individuato dai sistemi di coordinate naturali. Per il momento non ci occuperemo di tale nozione relativa a come definire il volume e lavoreremo ancora con sistemi Hamiltoniani su  $\mathbb{R} \times \Omega$  in un fissato sistema di coordinate naturali  $(t, \mathbf{x})$ , pensando la misura da usare sulle fibre  $\mathbb{F}_t \equiv \Omega$  a tempo costante come quella standard in  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Consideriamo il sistema hamiltoniano su  $\mathbb{R} \times \Omega$  descritto da (11.36) con  $\nabla \mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ . Estendiamo il sistema a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$  facendolo diventare un sistema autonomo:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = S\nabla \mathcal{H}(t(s), \mathbf{x}(s)), \\ \frac{dt}{ds} = 1. \end{cases} \quad (11.43)$$

In questo caso la soluzione del problema sarà parametrizzata dal parametro  $s$  definito su un intervallo aperto  $I_{(t_0, \mathbf{x}_0)}$  che dipende dalle condizioni iniziali  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ . La soluzione massimale sarà dunque una funzione a valori vettoriali con  $1 + 2n$  componenti:  $t = t_0 + s$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0)$ .

Per essere precisi, indichiamo con  $I_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \ni s \mapsto (t_0 + s, \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0))$  la soluzione massimale, con dominio massimale dato dall'intervallo aperto  $I_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \subset \mathbb{R}$ , del sistema (11.43) e con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $t(0) = t_0$ . La forma funzionale ovvia della funzione  $t = t(s)$  deriva dalla forma banale dell'equazione (11.43). Come sappiamo viene in tal modo a definirsi un gruppo locale ad un parametro (indicato con  $s$ ) di diffeomorfismi  $\Phi^{(\mathcal{H})}$  di classe  $C^1$  congiuntamente nelle sue variabili con la sua derivata prima in  $s$ , definito dal fatto che

$$\Phi_s^{(\mathcal{H})}(t_0, \mathbf{x}_0) := (t_0 + s, \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0)) \in \mathbb{R} \times \Omega.$$

**Osservazioni 11.11.**

(1) Si deve ricordare che il range di variazione di  $s$  dipende dall'argomento  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ . Tuttavia, come abbiamo provato nella sezione 4.5.3, l'applicazione  $(s, t_0, \mathbf{x}_0) \mapsto \Phi_s^{(\mathcal{H})}(t_0, \mathbf{x}_0)$  è ben definita su un sottoinsieme aperto non vuoto di  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ .

(2) Ricordiamo che valgono le relazioni:

$$\Phi_0^{(\mathcal{H})}(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x}), \quad \Phi_s^{(\mathcal{H})} \circ \Phi_u^{(\mathcal{H})}(t, \mathbf{x}) = \Phi_{s+u}^{(\mathcal{H})}(t, \mathbf{x}),$$

la seconda ha senso dove entrambi i membri sono ben definiti. Usando il fatto che  $\mathcal{D}$  è aperto si ha che (vedi la Sezione 4.5.3), in un intorno sufficientemente piccolo di ogni  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  che contiene l'argomento  $(t, \mathbf{x})$ , e se  $s$  e  $u$  cadono in un intorno di 0 sufficientemente piccolo, la seconda identità di sopra è sicuramente valida. In base ad essa, se l'insieme aperto  $A \subset \mathbb{R} \times \Omega$  è sufficientemente piccolo e  $s$  è abbastanza vicino a 0,  $\Phi_s^{(\mathcal{H})}|_A$  è un diffeomorfismo da  $A$  all'aperto  $\Phi_s^{(\mathcal{H})}(A)$ . Il diffeomorfismo inverso si ottiene restringendo  $\Phi_{-s}^{(\mathcal{H})}$  a  $\Phi_s^{(\mathcal{H})}(A)$ .

(3) Se tutte le soluzioni del sistema (11.43) sono complete, cioè definite da  $-\infty$  a  $+\infty$ , allora  $\Phi_s^{(\mathcal{H})}$  è definito globalmente su  $\mathbb{R} \times \Omega$  per ogni  $s \in \mathbb{R}$ , e  $\{\Phi_s^{(\mathcal{H})}\}_{s \in \mathbb{R}}$  è propriamente un gruppo ad un parametro ( $s$ ) di diffeomorfismi definiti su tutto  $\mathbb{R} \times \Omega$  e surgettivi su tale insieme (vedi la Sezione 4.5.3). In tal caso vale:

$$\Phi_0^{(\mathcal{H})} = id, \quad \Phi_s^{(\mathcal{H})} \circ \Phi_u^{(\mathcal{H})} = \Phi_{s+u}^{(\mathcal{H})} \quad \forall s, u \in \mathbb{R}.$$

Questa situazione si ha, in particolare, quando  $\mathcal{H}$  è solo funzione di  $\mathbf{x}$ , e dunque il sistema Hamiltoniano è detto *autonomo*, ed il supporto di  $S\nabla\mathcal{H}$  in  $\Omega$  è un compatto.

$\Phi^{(\mathcal{H})}$  è detto **flusso di fase** associato al sistema hamiltoniano (11.36).

Fissiamo un istante  $t_0$  ed un insieme aperto a chiusura compatta  $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$ . Possiamo fare evolvere  $D_{t_0}$  attraverso il gruppo locale  $\Phi^{(\mathcal{H})}$  fino al tempo  $t = t_0 + s$ . Se  $D_{t_0}$  è sufficientemente piccolo  $\{t\} \times D_t := \Phi_s^{(\mathcal{H})}(\{t_0\} \times D_{t_0})$ , con  $D_t \subset \mathbb{F}_t$ , è ben definito. Per costruzione  $D_t$  contiene il punto rappresentativo al tempo  $t$  di ogni soluzione delle equazioni di Hamilton che al tempo  $t_0$  passano per  $D_{t_0}$ .

**Teorema 11.5.** (Teorema di Liouville in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ ) *In riferimento al sistema Hamiltoniano (11.36) su  $\mathbb{R} \times \Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$  aperto non vuoto e  $\nabla\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ , il suo flusso di fase*

$\Phi^{(\mathcal{H})}$  preserva il volume delle fibre nello spaziotempo delle fasi. In altre parole, se  $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$  è un aperto sufficientemente piccolo e  $t > t_0$  è sufficientemente vicino a  $t_0$  in modo tale che  $\{t\} \times D_t := \Phi_s^{(\mathcal{H})}(\{t_0\} \times D_{t_0})$  sia ben definito, allora:

$$\int_{D_{t_0}} d^{2n}\mathbf{x} = \int_{D_t} d^{2n}\mathbf{x}. \quad (11.44)$$

dove  $d^{2n}\mathbf{x}$  denota la misura di Lebesgue standard sulle fibre  $\mathbb{F}_t$ , in coordinate  $\mathbf{x} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  data da  $d^{2n}\mathbf{x} = dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n$ .

Se tutte le soluzioni del sistema (11.36) sono complete, l'identità di sopra vale comunque si scelga  $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$  aperto a chiusura compatta e comunque si prenda  $t \in \mathbb{R}$ .

**Dimostrazione.** Prima di tutto notiamo che  $D_t$  è aperto: per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo, l'aperto  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times D_{t_0}$  viene trasformato nell'insieme  $(t - \delta, t + \delta) \times D_t$  dal diffeomorfismo  $\Phi_t^{(\mathcal{H})}$  e pertanto è anch'esso aperto ed in particolare  $D_t$  deve essere aperto. Di conseguenza  $D_t$  è misurabile. Possiamo scrivere, cambiando variabile nel secondo integrale:

$$\int_{D_t} d^{2n}\mathbf{x} = \int_{D_{t_0}} |\det J_s| d^{2n}\mathbf{x}$$

dove  $\det J_t$  è il determinante della matrice jacobiana della trasformazione  $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0)$ . Possiamo derivare in  $s$  sotto il segno di integrale in quanto  $(s, \mathbf{x}) \mapsto J_s$  è continua e  $\overline{D_{t_0}}$  è compatto. Per provare la tesi è sufficiente mostrare che:

$$\frac{\partial |\det J_s|}{\partial s} = 0, \quad \forall s \in I_{(t_0, \mathbf{x}_0)}. \quad (11.45)$$

Notiamo che per  $s = 0$ ,  $\det J_0 = \det I = 1 > 0$  e pertanto il segno di  $\det J_s$  deve rimanere positivo per ragioni di continuità: non può annullarsi dato che  $(t_0, \mathbf{x}_0) \mapsto (t_0 + s, \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0))$  è un diffeomorfismo (quindi ha determinante jacobiano non nullo) e il determinante della matrice jacobiana di tale trasformazione coincide con quello della trasformazione  $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(s|t_0, \mathbf{x}_0)$ . Dobbiamo quindi dimostrare che:

$$\frac{\partial \det J_s}{\partial s} = 0, \quad \forall s \in I_{(t_0, \mathbf{x}_0)}.$$

Per eseguire il calcolo introduciamo la notazione semplificata, se  $s > s'$ , ed omettendo di scrivere la dipendenza da  $t$  banale:

$$\mathbf{x}_{s'}(\mathbf{x}_s) := \mathbf{x}(s'|t(s'), \mathbf{x}(s)).$$

Abbiamo allora che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det J_s}{\partial s} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_{s+h}(x_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] - \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s(x_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_{s+h}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s} \right] \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] - \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_{s+h}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s} \right] - 1 \right) \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] = (\det J_s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_{s+h}(\mathbf{x}_s)}{\partial \mathbf{x}_s} \right] - 1 \right) .$$

Possiamo calcolare il limite sviluppando la funzione nel determinante con Taylor nella variabile  $h$  per  $h = 0$ . Abbiamo

$$\frac{\partial x_{h=0}^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \delta_j^i ,$$

mentre

$$\frac{\partial}{\partial h} \Big|_{h=0} \frac{\partial x_h^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x_h^i}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial x^j} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i ,$$

e pertanto, dove  $O_{t,\mathbf{x}}(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial x_h^i(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \delta_j^i + h \frac{\partial}{\partial x^j} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i + h O_{t,\mathbf{x}}(h) .$$

Il determinante della matrice i cui coefficienti sono il secondo membro dello sviluppo di sopra si ottiene dal seguente lemma tecnico.

**Lemma 11.1.** *Se  $A(h) = I + hB + hO(h)$  dove  $A(h), B, O(h) \in M(m, \mathbb{R})$  con  $h \in (-\delta, \delta)$  e  $O(h) \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ , allora*

$$\det A(h) = 1 + h \operatorname{tr} B + h \Omega(h) , \quad (11.46)$$

dove  $\Omega : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa  $\Omega(h) \rightarrow 0$  se  $h \rightarrow 0$ .  $\diamond$

**Traccia di dimostrazione.** La dimostrazione si ottiene per via diretta applicando la formula, valida per  $C \in M(m, \mathbb{R})$ ,

$$\det C = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^m \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} C_{1i_1} \cdots C_{mi_m} ,$$

dove i numeri  $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$  sono completamente individuati dalle richieste:  $\epsilon_{123 \dots m-1m} := 1$  e

$$\epsilon_{i_1 \dots i_{h-1} i_h i_{h+1} \dots i_{k-1} i_k i_{k+1} \dots i_n} = -\epsilon_{i_1 \dots i_{h-1} i_k i_{h+1} \dots i_{k-1} i_h i_{k+1} \dots i_n} \quad \text{per ogni scelta di } h \neq k ,$$

cioè si ha antisimmetria per scambio di ogni coppia di indici arbitrariamente scelti.  $\square$

Usando il lemma precedente abbiamo immediatamente che:

$$\det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = 1 + h \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i + h O_{t,\mathbf{x}}(h) .$$

In definitiva:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \det \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i + O_{t,\mathbf{x}}(h) \right\} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i .$$



Abbiamo quindi trovato che:

$$\frac{\partial |\det J_s|}{\partial s} = J_s \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i .$$

Esplicitamente:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} (S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}))^i = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} .$$

Ora tenendo conto del teorema di Schwartz:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^i} ,$$

cambiando nome agli indici nel secondo membro otteniamo:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} = \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ji} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} = - \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} .$$

e pertanto:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{H}(t, \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

che implica la validità di (11.45). Questo conclude la dimostrazione della prima affermazione. La seconda ed ultima affermazione nella tesi del teorema è immediata conseguenza del fatto che, se tutte le soluzioni del sistema (11.36) sono complete, lo sono anche quelle di (11.43) e dunque  $\{\Phi_s^{(\mathcal{H})}\}_{s \in \mathbb{R}}$  è un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi che quindi agisce globalmente su  $\mathbb{R} \times \Omega$  e per ogni  $s \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 11.3 \*La struttura di varietà fibrata di $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e le equazioni di Hamilton come equazioni globali

In questa sezione studieremo più a fondo la struttura geometrico differenziale dello spazio delle fasi ed in particolare la natura globale della trasformazione di Legendre e delle equazioni di Hamilton.

### 11.3.1 Lo spazio fibrato $F(\mathbb{V}^{n+1})$

Lo spazio  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  può essere rigorosamente *definito* come fibrato con base  $\mathbb{V}^{n+1}$  nel modo che segue. Come nel caso di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  si parte da un fibrato standard. In questo caso conviene partire dal fibrato cotangente  $T^*\mathbb{V}^{n+1}$  invece che da quello tangente.

Per ogni punto  $p \in \mathbb{V}^{n+1}$  si considera il sottospazio  $K_p \subset T_p^* \mathbb{V}^{n+1}$  delle 1-forme generate da  $dt_p$  dove  $t : \mathbb{V}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , a meno di costanti additive (che sono irrilevanti per  $dt_p$ ), è il solito tempo assoluto. Quindi si considera lo spazio quoziente

$$F_p(\mathbb{V}^{n+1}) := T_p^* \mathbb{V}^{n+1} / \sim$$

dove la relazione di equivalenza in  $T_p \mathbb{V}^{n+1}$  è quella associata al sottospazio  $K_p$ :

$$\omega \sim \omega', \quad \text{se e solo se } \omega - \omega' \in K_p.$$

Come è facile provare questo spazio eredita una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  da quella di  $T_p^* \mathbb{V}^{n+1}$ . In particolare vale che se  $[\omega] \in F_p(\mathbb{V}^{n+1})$  denota la classe di equivalenza di  $\omega \in T_p^* \mathbb{V}^{n+1}$ , allora, per ogni coppia  $\omega, \omega' \in T_p^* \mathbb{V}^{n+1}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$[a\omega + b\omega'] = a[\omega] + b[\omega'], \quad (11.47)$$

mentre

$$[dt|_p] = 0. \quad (11.48)$$

Con la definizione data si ottiene quanto segue per ogni sistema di coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n)$  definite attorno a  $p \in \mathbb{V}^{n+1}$  con conseguente base associata  $dt|_p, dq^1|_p, \dots, dq^n|_p \in T_p^* \mathbb{V}^{n+1}$ . Due 1-forme

$$\omega = p_t dt|_p + \sum_{k=1}^n p_k dq^k|_p \quad \text{e} \quad \omega' = p'_t dt|_p + \sum_{k=1}^n p'_k dq^k|_p$$

individuano lo stesso elemento di  $F_p(\mathbb{V}^{n+1})$  se e solo se differiscono al più nelle componenti temporali  $p_t$  e  $p'_t$ . Risulta allora chiaro che mentre  $[dq^1|_p], \dots, [dq^n|_p] \in F_p(\mathbb{V}^{n+1})$  è una base di tale spazio, cambiando base (sempre indotta da coordinate naturali su  $F_p(\mathbb{V}^{n+1})$ ) si ha banalmente:

$$[dq'^k|_p] = \sum_{h=1}^n \left. \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \right|_p [dq^h|_p].$$

Questo risultato segue subito dalle (11.47) e (11.48) e dalle relazioni:

$$dq'^k|_p = \sum_{h=1}^n \left. \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \right|_p dq^h|_p + \left. \frac{\partial q'^k}{\partial t} \right|_p dt|_p,$$

tenendo anche conto del fatto che la matrice dei coefficienti  $\frac{\partial q'^k}{\partial q^h}$  ha determinante non nullo.

Il fibrato  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  si ottiene con due distinte fibrazioni:

(a) base data da  $\mathbb{V}^{n+1}$  e fibre date dagli spazi vettoriali  $F_p(\mathbb{V}^{n+1})$ ;  
oppure

(b) base data dall'asse dei tempi  $\mathbb{E}^1$  e fibre date dagli *spazi delle fasi*  $\mathbb{F}_t$ , per ogni tempo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{F}_t = \{(\mathcal{C}_t, p) \mid \mathcal{C}_t \in \mathbb{Q}_t, \quad p \in F_{\mathcal{C}_t}(\mathbb{V}^{n+1})\} .$$

Coordinate naturali locali adattate ad entrambi i tipi di fibrazione sono quelle che associano ad ogni  $(\mathcal{C}_t, p) \in F(\mathbb{V}^{n+1})$  la  $2n+1$ -pla  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  dove  $(q^1, \dots, q^n)$  sono le coordinate della configurazione al tempo  $t$ ,  $\mathcal{C}_t$  e  $p = \sum_{k=1}^n p_k [dq^k|_{\mathcal{C}_t}]$ .

la legge di trasformazione tra coordinate locali naturali adattate alle fibre risulta immediatamente essere proprio:

$$t' = t + c, \quad (11.49)$$

$$q'^k = q^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (11.50)$$

$$p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h. \quad (11.51)$$

Il fatto che  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sia, localmente rispetto alla base, diffeomorfo al prodotto  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ , con  $\mathbb{F}$  diffeomorfo ad ogni  $\mathbb{F}_t$ , si prova esattamente con la stessa procedura del caso di  $\mathbb{V}^{n+1}$  spiegata nella dimostrazione della Proposizione 8.5. Nel caso di  $\mathbb{V}^{n+1}$  la dimostrazione si basava sull'esistenza di carte locali naturali verificanti la condizione (H3). Con la costruzione di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  data prima, le stesse carte danno luogo a coordinate naturali su tale spazio che soddisfano analoghe condizioni: per ogni fissato  $t \in \mathbb{R}$  asse del tempo assoluto esista un intervallo aperto non vuoto  $J \subset \mathbb{R}$  che lo contenga ed una corrispondente classe di sistemi di coordinate naturali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  con  $\phi_i : U_i \ni a \mapsto (t_i(a), q_i^1(a), \dots, q_i^n(a), p_{i1}(a), \dots, p_{in}(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , che soddisfino i tre seguenti requisiti:

(i)  $\cup_{i \in I} U_i \supset \mathbb{F}_\tau$  per ogni  $\tau \in J$ ;

(ii)  $\phi_i(U_i) \supset J \times U'_i$ , con  $U_i \subset \mathbb{R}^{2n}$  aperto, per ogni  $i \in I$ ;

(iii) per ogni scelta di  $i, j \in I$  le funzioni  $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  siano della forma:

$$t_i = t_j, \quad q_i^k = q_j^k(q_j^1, \dots, q_j^n), \quad p_{ik} = \sum_h \frac{\partial q_j^h}{\partial q_i^k} p_{jh}$$

in cui, cioè, la legge di trasformazione tra le coordinate lagrangiane non dipenda esplicitamente dal tempo.

A questo punto, la stessa procedura di incollamento usata nella prova della Proposizione 8.5 mostra che per il suddetto  $J$  attorno al fissato punto  $t \in \mathbb{R}$ , esiste un diffeomorfismo  $f : J \times \mathbb{F}_t \rightarrow T^{-1}(J)$  tale che  $T(f(\tau, a)) = \tau$  se  $\tau \in J$  e  $a \in \mathbb{F}_t$ . Si osservi infine che  $f^{(\tau)} : a \in \mathbb{F}_t \mapsto f(\tau, a) \in \mathbb{F}_\tau$  è un diffeomorfismo tra  $\mathbb{F}_t$  e  $\mathbb{F}_\tau$  per ogni  $\tau \in J$ . Se  $t' \notin J$ , per esempio  $t' < t$ , possiamo ripetere la precedente costruzione definendo un diffeomorfismo  $f' : J' \times \mathbb{F}_{t'} \rightarrow T^{-1}(J')$  tale che  $T(f'(\tau, a)) = \tau$  se  $\tau \in J'$  e  $a \in \mathbb{F}_{t'}$ . Per concludere dobbiamo ancora provare che  $\mathbb{F}_{t'}$  è diffeomorfa a  $\mathbb{F}_t$ , in modo tale che si possa prendere la seconda come fibra canonica per tutto il fibrato. È facile mostrare, usando la compattezza di  $[t', t]$  che esiste un numero finito di intervalli del tipo detto,  $J_1 = J', J_2, \dots, J_N = J$ , tale che  $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$ . Componendo un numero finito

di diffeomorfismi analoghi a  $f^{(\tau)}$ , si ottiene un diffeomorfismo  $g_{t'} : \mathbb{F}_t \rightarrow \mathbb{F}_{t'}$ . Pertanto tutte le fibre sono diffeomorfe a  $\mathbb{F} := \mathbb{F}_t$ . Le trivilizzazioni locali su ogni  $J' \ni t'$  sono infine date dai diffeomorfismi  $g : J' \times \mathbb{F} \ni (\tau, a) \mapsto f'(\tau, g_{t'}(a)) \in T^{-1}(J')$ , per i quali vale banalmente  $T(g(\tau, a)) = \tau$  se  $\tau \in J'$  e  $a \in \mathbb{F}_{t'}$ .

### 11.3.2 Trasformazione di Legendre globale come diffeomorfismo da $A(\mathbb{V}^{n+1})$ a $F(\mathbb{V}^{n+1})$

Supponiamo che sia assegnata una funzione lagrangiana  $\mathcal{L} : A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ , pensata come campo scalare di classe  $C^2$ , che assumeremo della solita forma standard localmente data dalla forma:

$$\mathcal{L}(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \sum_{hk} a_{hk}(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k \dot{q}^h + \sum_k b_k(t, q^1, \dots, q^n) \dot{q}^k + g(t, q^1, \dots, q^n), \quad (11.52)$$

dove la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è ovunque *strettamente definita positiva*.

Fissiamo un sistema locale di coordinate naturali adattate alle fibre di  $\mathbb{V}^{n+1}$ ,  $t, q^1, \dots, q^n$ , variabili nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , e quindi, con la procedura detta sopra estendiamo tale sistema di coordinate, prima sulla varietà spazio cotangente, e quindi ci riduciamo a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , ottenendo una carta locale naturale, dotata di coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  variabili in  $\Omega \times \mathbb{R}^n$ . Siano anche  $t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$  variabili in  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , le analoghe coordinate locali naturali su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Usando questi due sistemi di coordinate definiamo l'applicazione da  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nello stesso insieme data da:

$$t = t, \quad (11.53)$$

$$q^k = q^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (11.54)$$

$$p_k = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right|_{(t, q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)} \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (11.55)$$

Come già parzialmente discusso in osservazioni 11.2 questa classe di trasformazioni, al variare delle carte locali naturali su  $\mathbb{V}^{n+1}$ , definisce in realtà una funzione *globalmente definita* da tutto  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a valori su tutto  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . La prova di questo fatto è immediata, tenendo conto che cambiando coordinate locali su  $\mathbb{V}^{n+1}$  la nuova trasformazione di coordinate corrispondente alle (11.53)-(11.55) coincide con la (11.53)-(11.55) nell'intersezione dei domini delle carte. La prova di quest'affermazione segue immediatamente dalle (11.49)-(11.51). In definitiva si definisce in questo modo un'applicazione da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a valori su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che si chiama **trasformazione di Legendre**. Tale trasformazione è biettiva come ora dimostriamo. Si noti prima di tutto che, in ogni carta locale naturale, nello spaziotempo delle configurazioni, le (11.53)-(11.55) assicurano che la trasformata di Legendre sia biettiva nelle carte naturali nello spaziotempo degli stati cinetici e delle fasi che si ottengono estendendo la carta iniziale. (Riguardo al fatto di ricoprire tutti i valori  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  si osservi che, per  $(t, q^1, \dots, q^n)$  fissati, la (11.55) è sicuramente biettiva per (11.52) in quanto la trasformazione considerata è lineare con matrice a determinante non nullo dato che la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è strettamente positiva.) Questo assicura la biettività locale ed anche la sugettività globale della trasformazione di Legendre.

La trasformazione di Legendre globalmente definita deve anche essere iniettiva come ora mostriamo. Si osservi che considerando le fibrazioni  $F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{V}^{n+1}$  e  $A(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{V}^{n+1}$ , se due punti di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  corrispondono a punti di base differenti, la trasformata di Legendre trasformerà tali punti in punti distinti perché in due fibre differenti. Di conseguenza, la verifica dell'iniettività globale della trasformazione di Legendre si riduce alla verifica dell'iniettività per coppie di punti in  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  con lo stesso punto di base. Per tali coppie di punti possiamo lavorare in un'unica carta locale naturale adattata alle fibre di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ . Data la forma locale (11.53)-(11.55) della trasformazione di Legendre, e la banalità delle prime due equazioni, l'iniettività segue subito dal fatto che la matrice dei coefficienti  $a_{hk}$  è strettamente positiva e quindi ha determinante non nullo.

La trasformazione inversa della trasformazione di Legendre, per costruzione, ha una struttura locale data da:

$$t = t, \quad (11.56)$$

$$q^k = q^k \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (11.57)$$

$$\dot{q}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n a_{kh}^{-1}(t, q^1, \dots, q^n) (p_h - b_h(t, q^1, \dots, q^n)) \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (11.58)$$

Dato che le funzioni  $a_{hk} = a_{hk}(t, q^1, \dots, q^n)$  sono  $C^1$  per definizione, lo saranno anche le corrispondenti funzioni  $a_{kh}^{-1}(t, q^1, \dots, q^n)$ . In definitiva, nelle nostre ipotesi, la trasformazione (globale) di Legendre è un diffeomorfismo di classe  $C^1$  da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

**Osservazioni 11.12.** Abbiamo dimostrato sopra “a mano” che la trasformazione di Legendre è invertibile sfruttando la particolare forma della lagrangiana. Possiamo comunque dare il seguente risultato generale riguardante l'invertibilità globale di trasformazioni definite su insiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 11.5.** *Sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto e convesso<sup>5</sup>. Se la forma quadratica associata alla matrice jacobiana di  $F$  è ovunque non singolare (in particolare per es. strettamente definita positiva) allora:*

(a)  $F(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  è aperto,

(b)  $F : \Omega \rightarrow F(\Omega)$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$  (cioè  $F$  è biettiva e la sua inversa è di classe  $C^k$ ).

**Dimostrazione.** La matrice jacobiana  $J_p$  di  $F$  in ogni punto  $p$  ha determinante non nullo. Se avesse determinante nullo avrebbe anche un autovettore (non nullo)  $\mathbf{u}$  con autovalore nullo:  $J_p \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , ma allora sarebbe anche  $Q_{J_p}(\mathbf{u}) := \mathbf{u} \cdot J_p \mathbf{u} = 0$ , ovvero la forma quadratica associata a  $J_p$  si annullerebbe su un vettore non nullo e questo è impossibile dato che  $Q_{J_p}$  è non singolare per ipotesi. Possiamo allora concludere che, per il teorema del Dini [GiustiII], la funzione  $F$

<sup>5</sup>Ricordiamo che un insieme  $C \subset \mathbb{R}^n$  è detto **convesso** quando, se  $p, q \in C$  allora il segmento di estremi  $p$  e  $q$  è completamente contenuto in  $C$ .

è sicuramente un diffeomorfismo locale di classe  $C^k$  nell'intorno di ogni punto di  $\Omega$ . In altre parole, per ogni  $p \in \Omega$ , c'è un intorno aperto  $U \ni p$  con  $U \subset \Omega$  tale che (i)  $F(U)$  è un aperto tutto contenuto in  $F(\Omega)$  e (ii)  $F|_U: U \rightarrow F(U)$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$ . Quindi in particolare  $F(\Omega)$  è aperto essendo unione di insiemi aperti. Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare che  $F$  è iniettiva su  $\Omega$ . Supponiamo che esistano  $p, q \in \Omega$  con  $p \neq q$  e  $F(p) = F(q)$ . Sia  $\mathbf{n}$  il versore del vettore  $q - p$ . Allora, se  $x(t) = p + t(q - p)$ , la funzione  $f(t) := \mathbf{n} \cdot (F(x(t)) - F(p))$  per  $t \in [0, 1]$  (che è ben definita dato che  $\Omega$  è convesso!) deve avere derivata nulla in qualche punto  $t_0 \in (0, 1)$  per il teorema di Rolle:

$$f'(t_0) = \sum_{i,j=1}^n n^i \frac{\partial F^i}{\partial x^j} \Big|_{x(t_0)} n^j \|p - q\| = \|p - q\| Q_{J_{x(t_0)}}(\mathbf{n}) = 0.$$

Questo significa  $Q_{J_{x(t_0)}}(\mathbf{n}) = 0$  sul vettore non nullo  $\mathbf{n}$ . Questo è impossibile come già detto e pertanto i punti  $p$  e  $q$  suddetti non possono esistere.  $\square$

### 11.3.3 Equazioni di Hamilton assegnate globalmente su $F(\mathbb{V}^{n+1})$ e campo vettoriale dinamico $Z$ : emancipazione dalla formulazione lagrangiana

Quando è assegnata una lagrangiana su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ , viene definita un'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  ogni sistema di coordinate locali naturali di tramite la **trasformata di Legendre** della lagrangiana:

$$\mathcal{H}(t, q, p) := \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}^k(t, q, p) - \mathcal{L}(t, q, \dot{q}(t, q, p)).$$

Un'osservazione cruciale che abbiamo già fatto è che, al contrario della lagrangiana, la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  non ha, in generale, comportamento scalare cambiando sistema di coordinate naturali. Direttamente dalla definizione risulta infatti che, passando ad un nuovo sistema di coordinate naturali  $(t', q', p')$  sullo spaziotempo delle fasi, nell'intersezione dei domini dei nuovi sistemi di coordinate la nuova hamiltoniana risulta essere legata alla precedente dall'equazione:

$$\mathcal{H}'(t'(t, q, p), q'(t, q, p), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{(t, q, p)} p'_k(t, q, p). \quad (11.59)$$

A dispetto di tale risultato, le equazioni di Hamilton hanno significato globale su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Le equazioni di Hamilton determinano infatti sezioni su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  rispetto alla base data dall'asse del tempo assoluto. Tali sezioni sono le curve integrali del campo vettoriale  $Z$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , detto **campo vettoriale dinamico** (o più brevemente **vettore dinamico**), individuato in ogni sistema di coordinate locali naturali da

$$Z(t, q, p) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (11.60)$$

Infatti, è evidente che le linee integrali di tale campo sono tutte e sole le curve che soddisfano le equazioni di Hamilton (11.26). Nel seguito assumeremo che le varie funzioni di Hamilton siano

almeno di classe  $C^2$  e pertanto che  $Z$  sia almeno di classe  $C^1$ .

Il fatto che il campo  $Z$  sia *ben definito globalmente* su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , cioè indipendente dalla scelta delle coordinate locali, si verifica facilmente per computo diretto, mostrando che, cambiando coordinate naturali su  $\mathbb{V}^{n+1}$  ed effettuando i corrispondenti cambiamenti di coordinate naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k} \frac{\partial}{\partial q'^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k} \frac{\partial}{\partial p'_k},$$

*nell'intersezione dei domini delle coordinate naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , quando si assume che le funzioni di Hamilton siano collegate l'una all'altra tramite la (11.59).* Alternativamente la dimostrazione segue immediatamente dalla proposizione 11.2 osservando che, fissata una funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  in coordinate naturali locali definite nell'intorno di un punto  $a$  dello spazio tempo delle fasi, il vettore  $Z$  associato a  $\mathcal{H}$  non è altro che il vettore tangente all'unica soluzione delle equazioni di Hamilton, per  $\mathcal{H}$ , con condizioni iniziali  $a$ . La proposizione 11.2, tenuto conto del teorema di unicità per le equazioni differenziali del prim'ordine, assicura che, a parità di condizioni iniziali, tale curva sia la stessa che si otterrebbe cambiando coordinate naturali nell'intorno di  $a$  e sostituendo  $\mathcal{H}$  con la corrispondente funzione di Hamilton in conformità con tramite la (11.59). Dato che la curva non dipende dalla scelta delle coordinate, non dipenderà da tale scelta nemmeno il vettore tangente,  $Z(a)$ , alla curva in  $a$ .

Quindi  $Z$  è ben definito su tutto  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ed ha senso parlare di soluzione delle equazioni del moto estese a tutto lo spaziotempo delle fasi e non solo ad un sistema di coordinate locali, malgrado ogni funzione  $\mathcal{H}$  non sia definita su tutto  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ma, in generale, lo sia solo localmente.

È fondamentale notare che l'esistenza globale del campo dinamico  $Z$  prescinde completamente dal fatto che le varie funzioni di Hamilton siano ottenute, tramite la trasformata di Legendre, da una fissata lagrangiana su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ : è sufficiente lavorare direttamente su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  assegnando una funzione  $\mathcal{H}$  in ogni sistema di coordinate naturali locali con il vincolo che, cambiando sistema di coordinate naturali, le funzioni di Hamilton corrispondenti siano legate tra di loro dalla (11.59) nell'intersezione dei domini delle carte locali. *In questo modo la formulazione hamiltoniana risulta essere del tutto indipendente da quella lagrangiana e può essere formulata direttamente su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  in modo del tutto indipendente da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  e dall'assegnazione di una lagrangiana su di esso.*

Si deve tuttavia riconoscere che, nel caso generale, non è affatto ovvio che si riescano sempre assegnare funzioni  $\mathcal{H}$  in ogni carta naturale di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  in modo tale da soddisfare i vincoli (11.59) (si pensi al caso in cui tre carte si intesecano a due a due separatamente). I vincoli (11.59) sono invece automaticamente soddisfatti quando le varie funzioni  $\mathcal{H}$  discendono da un'unica fissata lagrangiana tramite le trasformate di Legendre. Si possono però costruire sistemi di interesse fisico che soddisfano equazioni di evoluzione di tipo hamiltoniano in cui tuttavia le funzioni di Hamilton non sono generabili da una lagrangiana tramite la trasformazione di Legendre da  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , perché quest'ultima risulterebbe non invertibile. Ciò accade anche in formulazioni fisiche più avanzate come la teoria dei campi.

## Capitolo 12

# Argomenti più avanzati di Meccanica Hamiltoniana

In questo capitolo ci occuperemo di alcuni argomenti più avanzati di meccanica di Hamilton. In particolare introdurremo le trasformazioni canoniche, le parentesi di Poisson al fine di studiare, in formulazione di Hamilton, il legame tra simmetrie e leggi di conservazione. Nella prima parte introduciamo un atlante particolare dello spaziotempo delle fasi che estende quello delle coordinate naturali. Usando tale atlante riformuleremo il teorema di Liouville e ne otterremo come conseguenza il teorema del ritorno Poincaré. Nella parte finale, ritorneremo sulla nozione di trasformazione canonica da un nuovo punto di vista, con il fine di introdurre la teoria di Hamilton-Jacobi. Per concludere ci occuperemo della formulazione della meccanica di Hamilton sulle varietà simplettiche e su fibrati di varietà simple.

### 12.1 Trasformazioni canoniche e loro proprietà fondamentali

Nel capitolo 11 abbiamo visto che le equazioni di Hamilton hanno la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \end{array} \right. \text{ per } k = 1, \dots, n, \quad (12.1)$$

in ogni sistema locale di coordinate locali naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  dello spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Più precisamente, le leggi di trasformazione tra diversi sistemi di coordinate locali naturali hanno, per definizione, la forma:

$$t' = t + c, \quad (12.2)$$

$$q'^k = q'^k(t, q^1, \dots, q^n), \quad (12.3)$$

$$p'_k = \sum_{h=1}^n \frac{\partial q^h}{\partial q'^k} p_h. \quad (12.4)$$



Come detto sopra, per la proposizione 11.2 nelle nuove coordinate naturali  $(t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n)$ , le equazioni di Hamilton che nelle vecchie coordinate:

$$\begin{cases} \frac{dp'_k}{dt'} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k}, \\ \frac{dq'^k}{dt'} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k}, \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n,$$

quando la nuova funzione Hamiltoniana è legata alla vecchia da:

$$\mathcal{H}'(t'(t, q, p), q'(t, q, p), p'(t, q, p)) = \mathcal{H}(t, q, p) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial q'^k}{\partial t} \bigg|_{(t, q, p)} p'_k(t, q, p). \quad (12.5)$$

Ci chiediamo se esista una più grande classe di coordinate locali, che includa i sistemi di coordinate naturali, in cui le equazioni del moto su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  preservino la forma (12.1) delle equazioni di Hamilton, pur di definire opportune funzioni di Hamilton. La risposta è positiva ed in particolare le trasformazioni di coordinate, che generalizzano le (12.2)-(12.4), sono le cosiddette *trasformazioni canoniche* (tenuto conto di alcuni dettagli di carattere topologico che vedremo nel seguito). In questo modo viene a definirsi su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  un atlante, che include i sistemi di coordinate naturali e i nuovi sistemi di coordinate detti sopra, tale che le equazioni di Hamilton sono valide su ciascuna carta locale dell'atlante. I sistemi di coordinate di tale atlante sono i *sistemi di coordinate canonici*.

### 12.1.1 Trasformazioni canoniche

Assumeremo al solito che  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sia una varietà differenziabile di classe  $C^\infty$  e pertanto tutte le trasformazioni di coordinate saranno pensate di tale classe di differenziabilità.

**Definizione 12.1.** (**Trasformazioni canoniche e coordinate canoniche**) Consideriamo due carte locali  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  tali che  $U \cap U' \neq \emptyset$ ,  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), x^1(a), \dots, x^{2n}(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  e  $\psi' : U' \ni a \mapsto (t'(a), x'^1(a), \dots, x'^{2n}(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  in cui  $t$  e  $t'$  si identificano, a meno di costanti additive con il tempo assoluto (e quindi, per fissati  $t$  e  $t'$  le coordinate  $(x^1, \dots, x^{2n})$  e  $(x'^1, \dots, x'^{2n})$  sono coordinate sulle fibre  $\mathbb{F}_\tau$ ). Si consideri la trasformazione di coordinate su  $\psi' \circ \psi : \psi^{-1}(U \cap U') \rightarrow \psi'(U \cap U')$ , esplicitamente:

$$t' = t + c, \quad (12.6)$$

$$x'^k = x'^k(t, x^1, \dots, x^{2n}), \quad (12.7)$$

Se la matrice jacobiana delle *sole coordinate non temporali*, di coefficienti

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \quad \text{per } i, k = 1, \dots, 2n,$$

appartiene al gruppo  $Sp(n, \mathbb{R})$  per ogni tempo  $t$ , la trasformazione (12.6)-(12.6) è detta **trasformazione canonica**. Nel caso in cui non compaia esplicitamente  $t$  nel secondo membro in

(12.22) la trasformazione di coordinate (12.6)-(12.7) è detta **completamente canonica**.

Un sistema di coordinate locali  $(U, \psi)$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  è detto **sistema di coordinate (locali) canoniche** se soddisfa i seguenti requisiti.

(i)  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), x^1(a), \dots, x^{2n}(a))$  dove  $t(a)$  è il tempo assoluto (a meno di una costante additiva).

(ii) L'aperto connesso  $U \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$  è **relativamente semplicemente connesso**.

In altre parole, indicando con  $T : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione tempo assoluto e definito l'intervallo aperto  $I_U := T(U) \subset \mathbb{R}$ , allora c'è un diffeomorfismo  $f_U : I_U \times \mathbb{F}_U \rightarrow U$  tale che  $T(f_U(t, r)) = t$  se  $(t, r) \in I_U \times \mathbb{F}_U$  dove  $\mathbb{F}_U \subset \mathbb{R}^{2n}$  è aperto, connesso e semplicemente connesso.

(iii) Esiste un sistema di coordinate locali naturali  $(V, \phi)$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  per cui  $U = V$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  è una trasformazione canonica.  $\diamond$

### Osservazioni 12.1.

(1) È chiaro che la composizione di trasformazioni canoniche definisce ancora una trasformazione canonica in quanto la matrice jacobiana della trasformazione risultante è semplicemente il prodotto delle due matrici jacobiane delle due trasformazioni fattore e l'insieme delle matrici simpletiche è chiuso per prodotto matriciale essendo un gruppo matriciale.

(2) È chiaro che l'inversa di una trasformazione canonica definisce ancora una trasformazione canonica: la matrice jacobiana dell'inversa di una trasformazione canonica, in riferimento alla sottomatrice riguardante solo le coordinate non temporali, è data dall'inversa della matrice jacobiana della trasformazione di partenza in riferimento alla sottomatrice riguardante solo le coordinate non temporali. Dato che l'insieme delle matrici simpletiche è chiuso sotto inversione dei suoi elementi essendo un gruppo matriciale, la trasformazione inversa di una trasformazione canonica risulta essere ancora canonica.

(3) Consideriamo un insieme (non vuoto), aperto, connesso e relativamente semplicemente connesso  $U \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Dato che la proiezione di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sull'asse del tempo assoluto  $\mathbb{R}$  è continua (differenziabile) e che  $U$  relativamente semplicemente connesso è connesso, l'insieme  $I_U$  dei valori  $t \in \mathbb{R}$  per cui l'aperto  $U \cap \mathbb{F}_t$  è non vuoto, costituisce un insieme connesso, cioè un intervallo. Dato che la proiezione detta è anche una funzione aperta (segue dalla teoria dei fibrati), l'intervallo suddetto è un intervallo aperto. Concludiamo che  $U = \cup_{t \in I_U} \mathbb{F}_{U_t}$  dove  $I_U$  è un intervallo aperto e  $\mathbb{F}_{U_t} := U \cap \mathbb{F}_t$ . Ogni  $\mathbb{F}_{U_t}$  è un aperto diffeomorfo a  $\mathbb{F}_U$  per costruzione, dato che  $T(f(t, r)) = t$  implica che  $\mathbb{F}_U : \ni r \mapsto f_U(t, r) \in U \cap \mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{U_t}$  è un diffeomorfismo, se  $f_U$  è il diffeomorfismo nella definizione di sopra. Di conseguenza tutti gli insiemi  $\mathbb{F}_{U_t}$  sono tra di loro diffeomorfi e sono aperti connessi e semplicemente connessi.

(4) Partendo da un qualunque sistema di coordinate naturali  $(V, \phi)$ , la richiesta topologica (ii) risulta sempre essere verificata pur di restringere opportunamente il dominio  $V$  a un suo sottoinsieme aperto  $U$ . Più precisamente, ogni punto  $a \in F(\mathbb{V}^{n+1})$  ammette un intorno dotato di coordinate naturali in modo tale che la condizione (ii) sia verificata. Infatti se  $(V, \phi)$  è un sistema di coordinate naturali attorno ad  $a \in F(\mathbb{V}^{n+1})$  (che esiste per definizione di spaziotempo delle fasi), dato che  $\phi(V) = (t(a), \mathbf{x}(a)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$  è un aperto, possiamo sempre prendere un cilindro  $I \times D \subset \phi(V)$  tale che  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto che contiene  $t(a)$  e  $D \subset \mathbb{R}^{2n}$  una palla aperta che contiene  $\mathbf{x}(a)$ . Ogni intersezione  $\phi^{-1}(I \times D) \cap \mathbb{F}_t$  è omeomorfa (diffeomorfa)

a  $D$  per costruzione, se  $t \in I$ , per cui  $U := \phi^{-1}(I \times D)$  è un intorno aperto di  $a$  connesso e relativamente semplicemente connesso.

Mostriamo ora che esistono sistemi di coordinate canonici e l'insieme di essi estende l'atlante dei sistemi di coordinate naturali il cui dominio è connesso e relativamente semplicemente connesso.

**Proposizione 12.1.** *Nello spazio delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ogni sistema locale di coordinate naturali  $(U, \psi)$  – con, quindi,  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), q^1(a), \dots, q^n(a), p_1(a), \dots, p_n(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  – è canonico se e solo se l'aperto  $U$  è connesso e relativamente semplicemente connesso. Ulteriormente, le trasformazioni di coordinate tra sistemi di coordinate naturali sono canoniche.*

**Dimostrazione.** Evidentemente è sufficiente provare l'ultima affermazione. La prima segue immediatamente dalla definizione di sistema di coordinate canoniche tenendo conto del fatto che la trasformazione identità è una trasformazione canonica.

Consideriamo la trasformazione di coordinate (12.2)-(12.4) che rappresenta una generica trasformazione di coordinate naturali. La matrice jacobiana di tale trasformazione, considerando solo la parte relativa alle coordinate non temporali ha struttura:

$$J := \left[ \begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline P & Q^{-1t} \end{array} \right], \quad (12.8)$$

Dove  $Q$  è la matrice jacobiana i cui coefficienti sono

$$Q_{ki} := \frac{\partial q'^k}{\partial q^i},$$

$P$  è la matrice i cui coefficienti sono

$$P_{kr} := \sum_{l,s=1}^n p_s \frac{\partial^2 q^s}{\partial q'^k \partial q'^l} \frac{\partial q'^l}{\partial q^r}.$$

La forma della matrice  $J$ , per computo diretto ed usando il fatto che risulta  $Q^t P = P^t Q$  dal teorema di Schwartz, implica immediatamente che:

$$J^t S J = S.$$

Questo prova la tesi. □

**Osservazioni 12.2.** Ci sono sistemi di coordinate canoniche che *non sono* sistemi di coordinate naturali sullo spazio delle fasi. Basta considerare la trasformazione che, partendo dalle coordinate naturali  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  (che variano in un insieme che soddisfa le restrizioni topologiche che sappiamo) definisce le nuove coordinate locali:  $(t, Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$  individuate dalla trasformazione di classe  $C^\infty$  con inversa nella stessa classe:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ Q^k &= p_k, \quad k = 1, \dots, n \\ P_k &= -q^k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

In questo caso la matrice jacobiana delle coordinate non temporali è proprio  $S$  e vale  $S^t S S = -S S S = -S(-I) = S$ . Non possiamo pensare le coordinate  $(t, Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$  come coordinate naturali sullo spazio delle fasi e quindi connesse ad un sistema di coordinate naturali  $(t, Q^1, \dots, Q^n, \dot{Q}^1, \dots, \dot{Q}^n)$  nello spaziotempo degli stati cinetici, in quanto la legge di trasformazione tra coordinate naturali non ammette trasformazioni in cui compaia la *seconda* equazione scritta sopra. In tale equazione, a secondo membro può solo apparire una funzione delle coordinate  $(t, q^1, \dots, q^n)$ .

L'insieme dei sistemi di coordinate locali canonici include l'atlante dei sistemi di coordinate locali naturali che soddisfano la solita restrizione topologica sul dominio ed è esso stesso un atlante per costruzione. Tale atlante verrà detto **atlante canonico** di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

**Proposizione 12.2.** *Se  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  sono sistemi di coordinate locali canoniche tali che  $U \cap U' \neq \emptyset$  allora le funzioni  $\psi \circ \psi'^{-1} : \psi'(U \cap U') \rightarrow \psi(U \cap U')$  e  $\psi' \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U') \rightarrow \psi'(U \cap U')$  definiscono trasformazioni canoniche.*

**Dimostrazione.** La tesi segue immediatamente come conseguenza delle osservazioni (1) e (2) in 12.1, della definizione di sistema di coordinate canoniche e della seconda affermazione in Proposizione 12.1.  $\square$

**Esempi 12.1.** Consideriamo lo spaziotempo delle fasi per un punto materiale vincolato a stare su una retta in quiete in un riferimento. Possiamo dunque identificare  $F(\mathbb{V}^3)$  con  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  con coordinate naturali  $(t, q, p) \in \mathbb{R}^3$ , dove  $q$  è una coordinata che ricopre completamente la retta,  $p$  il suo momento coniugato e  $t$  è il tempo assoluto. Le coordinate sono dunque definite su tutto lo spaziotempo delle fasi  $U = F(\mathbb{V}^3)$ . Definiamo quindi la carta globale  $(U, \phi)$  dove  $\phi : V \ni a \mapsto (t(a), q(a), p(a)) \in \mathbb{R}^3$  con  $V = F(\mathbb{V}^3)$ . Per costruzione quindi  $\phi$  è suriettiva e la sua immagine ricopre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Sottolineiamo  $(U, \phi)$  è un sistema di coordinate naturali per ipotesi.

Consideriamo ora una nuova carta  $(U, \psi)$  dove  $\psi : U \ni a \mapsto (t'(a), q'(a), p'(a)) \in \mathbb{R}^3$  con ancora  $U = F(\mathbb{V}^3)$ . Assumiamo che la trasformazione di coordinate tra le due carte globali sia,  $\Omega > 0$  è una costante fissata sia:

$$t = t', \quad p = p' \cos \Omega t' - q' \sin \Omega t', \quad q = q' \cos \Omega t' + p' \sin \Omega t'. \quad (12.9)$$

Si verifica facilmente che tale trasformazione di coordinate da  $\mathbb{R}^3$  in tutto  $\mathbb{R}^3$  è  $C^\infty$ , invertibile con inversa  $C^\infty$ , data da

$$t' = t, \quad p' = p \cos \Omega t + q \sin \Omega t, \quad q' = q \cos \Omega t - p \sin \Omega t. \quad (12.10)$$

In particolare dunque anche  $\psi(U)$  ricopre tutto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ . Si vede facilmente che la matrice jacobiana  $J$  della parte non temporale della seconda trasformazione:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial q'}{\partial p} \\ \frac{\partial p'}{\partial q} & \frac{\partial p'}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

soddisfa  $J^t S J = S$  e pertanto entrambe le trasformazioni di sopra sono canoniche e coordinate  $t', q', p'$  sono canoniche dato che  $U = V$  che è diffeomorfo a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  ed essendo  $\mathbb{R}^2$  semplicemente connesso.

Possiamo ora modificare  $V$  restringendolo, richiedendo che  $\phi(V) = (a, b) \times D$ , dove definiamo  $D := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid q^2 + p^2 < R\}$  per  $R > 0$  fissato. Dato che l'insieme aperto  $\mathbb{R} \times D$  è connesso,  $D$  è semplicemente connesso, e  $\phi$  è un omeomorfismo, il dominio  $V$  definito in questo modo è connesso e relativamente semplicemente connesso. L'insieme  $V$  letto in coordinate  $t', q', p'$  ha ancora la forma  $(a, b) \times D$  come si verifica subito dalla trasformazione di coordinate sopra scritta. Restringendo anche  $\psi$  al dominio  $U := V$  si individua una carta  $(U, \psi)$ , questa volta solo locale, che è canonica ma non naturale.

### 12.1.2 Preservazione della forma delle equazioni di Hamilton

L'atlante canonico gode della notevole proprietà di preservare la forma delle equazioni di Hamilton. Più precisamente, se abbiamo assegnato una funzione hamiltoniana per ogni sistema di coordinate locali naturali (in modo tale che siano soddisfatte le relazioni (12.5), in ogni sistema di coordinate locali canoniche) le curve soluzioni delle equazioni di Hamilton su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  continuano ad avere la forma (12.1) anche in un sistema di coordinate locali canoniche, per opportune scelte della nuova funzione hamiltoniana, e dove abbiamo convenzionalmente indicato con  $q^1, \dots, q^n$  le prime  $n$  coordinate canoniche diverse da  $t$  e con  $p_1, \dots, p_n$  le rimanente  $n$  coordinate. La scelta di questa notazione è tuttavia abbastanza arbitraria, visto che le coordinate canoniche non sono in generali naturali e non possiamo pensare le prime  $n$  coordinate non temporali, le  $q^k$ , come coordinate nello spazio delle configurazioni. Una notazione equivalente per le equazioni di Hamilton è comunque

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S \nabla \mathcal{H}(t, \mathbf{x}). \quad (12.12)$$

dove  $(t, \mathbf{x}) \equiv (t, x^1, \dots, x^{2n})$  sono le coordinate canoniche considerate.

Il risultato menzionato è un'immediata conseguenza del seguente teorema e della definizione di sistema di coordinate canoniche.

**Teorema 12.1.** *Siano  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  sistemi di coordinate locali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  tali che, indicate con  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  e  $(t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n)$  le rispettive coordinate,  $t$  e  $t'$  si identifichino con il tempo assoluto a meno di costanti additive. Sia  $\gamma: I \rightarrow U$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo aperto, una soluzione di*

$$\begin{cases} \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}, \\ \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (12.13)$$

per una fissata funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}$  (di classe  $C^1$ ) definita su  $U$ .

(a) Se la trasformazione tra i due sistemi di coordinate è canonica e  $U \cap U'$  è connesso e

relativamente semplicemente connesso, allora la curva  $\gamma$  soddisfa ancora le equazioni di Hamilton su  $U \cap U'$  quando descritta nelle coordinate di  $U'$

$$\begin{cases} \frac{dp'_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial q'^k}, \\ \frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'_k}, \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (12.14)$$

Vale inoltre su  $U \cap U'$ :

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')) + \mathcal{K}(t', q', p') \quad (12.15)$$

dove la funzione  $\mathcal{K}$ , di classe  $C^1$ , è individuata dalla trasformazione canonica considerata, non dipende da  $\mathcal{H}$ , è definita a meno di funzioni additive della sola variabile  $t'$  e soddisfa:

$$\begin{cases} \frac{\partial q'_k}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'_k}, \\ \frac{\partial p'_k}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'^k}, \end{cases} \quad \text{per } k = 1, \dots, n. \quad (12.16)$$

**(b)** Se la trasformazione di coordinate tra i due sistemi di coordinate è completamente canonica si può scegliere:

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')) ,$$

ed in tal caso (a) vale anche se  $U \cap U'$  non è connesso e relativamente semplicemente connesso.

**(c)** Se i due sistemi di coordinate sono sistemi di coordinate naturali di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  si può scegliere in (12.15):

$$\mathcal{K}(t', q', p') = - \sum_{k=1}^n p'_k \frac{\partial q'^k}{\partial t} \bigg|_{(t(t'), q(t', q'), p(t', q', p'))}$$

ed in tal caso (a) vale anche se  $U \cap U'$  non è connesso e relativamente semplicemente connesso.

**Dimostrazione.** Osserviamo preventivamente che (c) è stato provato dimostrando la (11.29), per cui dimostreremo solo gli asserti rimanenti. Per semplicità notazionale faremo la dimostrazione nel caso in cui  $t' = t$ , dato che il caso generale  $t' = t + c$  dove  $c$  è una costante non presenta alcun problema in più. Consideriamo una curva differenziabile  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  (non supponiamo per ora che sia soluzione delle equazioni di Hamilton (12.13)) in  $U$ . Passiamo in coordinate primate in  $U \cap U'$  ottenendo la curva  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(t, \mathbf{x}(t))$ . Abbiamo allora che:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + J \frac{d\mathbf{x}}{dt} ,$$

dove  $J(t, \mathbf{x})$  è la matrice jacobiana i cui coefficienti sono le derivate  $\partial x'^i / \partial x^k$ , valutata sulla funzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Tale curva soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali se e solo se

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t)) .$$

Pertanto la curva  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$  soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate non primarie se e solo se

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + JS\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t)) .$$

Essendo

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x'^i} ,$$

deve essere:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + JSJ^t\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'(t))) .$$

Dato che  $JSJ^t = S$  come provato in Proposizione 11.3 (in quanto  $J \in Sp(n, \mathbb{R})$  per ipotesi e quindi  $J^t \in Sp(n, \mathbb{R})$ ), la curva  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t)$  soddisfa le equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali se e solo se:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} + S\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}'(t))) .$$

Nel caso la trasformazione di coordinate  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t, \mathbf{x})$  non dipenda in realtà dal tempo, la dimostrazione è conclusa provando (b) dato che non sono state fatte ipotesi sulla topologia di  $U \cap U'$ , definendo

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') := \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')) .$$

Per concludere nel caso generale è sufficiente verificare che la funzione:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}') := \frac{\partial \mathbf{x}'(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t, \mathbf{x}')} .$$

si possa sempre scrivere, nelle nostre ipotesi, nella forma:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}') = S\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}') \tag{12.17}$$

per qualche funzione scalare  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}')$ , infatti tornando nella notazione  $(t, q, p)$  l'identità (12.17) coincide con (12.16). Dato che  $-SS = I$ , quanto dobbiamo provare è che, per ogni fissato  $t$ , il campo vettoriale

$$\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}') := -S\mathbf{F}(t, \mathbf{x}')$$

si può scrivere come il gradiente di un campo scalare,  $\mathcal{H}(t, \mathbf{x}')$ , parametrizzato nel tempo, in modo che la funzione  $(t, \mathbf{x}) \mapsto \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}')$  sia  $C^1$ . La funzione  $(t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}')$  è definita sull'aperto connesso e relativamente semplicemente connesso  $U \cap U'$ , che pertanto è diffeomorfo al prodotto  $I \times \mathbb{F}_{U \cap U'}$  come prescritto dalla definizione di insieme connesso relativamente semplicemente connesso, dove  $I \subset \mathbb{R}$  è l'intervallo aperto che si ottiene proiettando  $U \cap U'$  sull'asse del tempo assoluto. In coordinate  $t, \mathbf{x}'$  tale insieme si potrà scrivere come  $\cup_{t \in I} V_t$  dove  $V_t := \{t\} \times V'_t$  con  $V'_t \subset \mathbb{R}^{2n}$  è aperto connesso e semplicemente connesso. Se per un fissato  $t$  il campo  $V'_t \ni \mathbf{x}' \mapsto \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}')$  di classe  $C^1$  soddisfa le condizioni di irrotazionalità

$$\frac{\partial Y^i}{\partial x'^j} = \frac{\partial Y^j}{\partial x'^i} , \tag{12.18}$$

allora, come è noto, vale, come richiesto  $\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}') = \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}')$  con:

$$\mathcal{K}(t, \mathbf{x}') := \int_{\mathbf{x}'(t)}^{\mathbf{x}'} \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} \quad (12.19)$$

dove l'integrale di linea è calcolato lungo un qualsiasi cammino differenziabile tutto contenuto in  $V'_t$  che parte da  $\mathbf{x}'(t)$  ed arriva a  $\mathbf{x}'$ , dove  $\mathbf{x}'(t)$  è un qualsiasi fissato punto in  $V'_t$  (il valore dell'integrale non dipende dalla scelta del cammino). Al variare di  $t$  in  $I$ , la (12.19) individua una funzione di  $t$  e  $\mathbf{x}'$ , definita su tutto il dominio  $\cup_{t \in I} V_t$  (ossia  $U \cap U'$  quando visto in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ), il cui gradiente rispetto a  $\mathbf{x}'$  coincide con  $\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}')$  come richiesto. Si osservi ancora che, se scegliamo una curva (infinitamente) differenziabile della forma<sup>1</sup>  $I \ni t \mapsto (t, \mathbf{x}'(t)) \in \{t\} \times V'_t$ , la funzione

$$\cup_{t \in I} V_t \ni (t, \mathbf{x}') \mapsto \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') := \int_{\mathbf{x}'(t)}^{\mathbf{x}'} \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y}$$

risulta anche essere sicuramente di classe  $C^1$ . L'unica cosa da verificare è in realtà che la derivata rispetto a  $t$ , che risulta essere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{x}'(t)}^{\mathbf{x}'} \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} = \int_{\frac{d\mathbf{x}'(t)}{dt}}^{\mathbf{x}'} \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{y} + \int_{\mathbf{x}'(t)}^{\mathbf{x}'} \frac{\partial \mathbf{Y}(t, \mathbf{y})}{\partial t} \cdot d\mathbf{y} ,$$

sia una funzione continua congiuntamente in  $t$  e  $\mathbf{x}'$ . La prova di ciò, basata sulle proprietà dell'integrale come funzione degli estremi e sui teoremi di passaggio della derivata sotto il segno di integrale, è lasciata per esercizio. Per provare l'esistenza di  $\mathcal{K}$  è dunque sufficiente provare la validità di (12.18) per ogni valore di  $t$ .

Tale richiesta si scrive esplicitamente:

$$\sum_{r,k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} S_{ik} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^r \partial t} = \sum_{r,k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} S_{jk} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^r \partial t} ,$$

cioè, equivalentemente, tenendo conto del teorema di Schwarz (le trasformazioni di coordinate sono infinitamente differenziabili)

$$\sum_{r,k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^j} S_{ik} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial t \partial x^r} = \sum_{r,k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} S_{jk} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial t \partial x^r} .$$

Definendo la matrice jacobiana  $J$  di coefficienti  $J_{kr} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r}$  e definendo  $\dot{J}$  come la matrice di coefficienti  $\frac{\partial}{\partial t} J_{kr}$ , l'identità da provare risulta essere:

$$(S \dot{J} J^{-1})_{ij} = (S \dot{J} J^{-1})_{ji}$$

---

<sup>1</sup>Una tale curva esiste come si prova facilmente identificando  $U \cap U'$  con il prodotto  $I \times \mathbb{F}_{U \cap U'}$ , è sufficiente prendere l'immagine in coordinate della curva  $I \ni t \mapsto (t, r)$  con  $r \in \mathbb{F}_{U \cap U'}$  costante fissato.



che equivale a dire:

$$S\dot{J}J^{-1} = (S\dot{J}J^{-1})^t.$$

Sviluppando la trasposta del prodotto e ricordando che  $S^t = -S$ , l'identità suddetta può essere equivalentemente riscritta:

$$S\dot{J}J^{-1} + J^{-1t}\dot{J}^tS = 0.$$

Si osservi che l'operazione di trasposizione e quella di inversione commutano. Applicando  $J^t$  a sinistra e  $J$  a destra, l'identità ottenuta risulta essere equivalente alla seguente:

$$J^tS\dot{J} + \dot{J}^tSJ = 0. \quad (12.20)$$

Quest'identità è vera per il fatto che la trasformazione di coordinate è canonica e pertanto  $J^tSJ = S$ , derivando rispetto a  $t$  ambo membri si ottiene proprio la (12.20). Dunque la (12.18), che equivale alla (12.20), è verificata e la funzione  $\mathcal{H}$  si costruisce come indicato sopra. Si osservi infine che  $\mathcal{H}$  è indipendente dalla scelta di  $\mathcal{H}$  per costruzione (dato che non è mai stata usata nella sua costruzione) ed è definita a meno di costanti additive per ogni fissato istante di tempo: a  $t$  fissato il gradiente della differenza  $f = f(t', \mathbf{x}')$  di due funzioni  $\mathcal{H}$  che soddisfano la (12.16) è nullo. Dato che a  $t'$  fissato  $\mathbf{x}'$  varia in un insieme aperto e connesso  $A_{t'} \subset \mathbb{R}^{2n}$  e quindi connesso per archi differenziabili, consideriamo una curva di classe  $C^1$  indicata con  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(s)$  con  $s \in [0, 1]$  che congiunge  $\mathbf{x}'_1$  e  $\mathbf{x}'_2$  in  $A_{t'}$  rimanendo completamente inclusa in  $A_{t'}$ . La funzione composta  $[0, 1] \ni s \mapsto f(t', \mathbf{x}'(s))$  è di classe  $C^1([0, 1])$  per costruzione, per cui il teorema di Lagrange afferma che per qualche  $s_0 \in (0, 1)$  vale:  $f(t', \mathbf{x}'_2) - f(t', \mathbf{x}'_1) = f(t', \mathbf{x}'(1)) - f(t', \mathbf{x}'(0)) = 1 \frac{d\mathbf{x}'}{ds}|_{s_0} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} f(t', \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}'(s_0)} = 0$ . Di conseguenza  $f(t', \mathbf{x}'_2) = f(t', \mathbf{x}'_1)$  e quindi  $f$  può solo dipendere da  $t$  nell'insieme  $U \cap U'$ .  $\square$

### Osservazioni 12.3.

(1) Sottolineiamo ancora che, nel caso in cui la trasformazione canonica sia completamente canonica, possiamo lasciare cadere l'ipotesi sulla topologia di  $U \cap U'$  per avere la preservazione della forma hamiltoniana delle equazioni differenziali.

Osserviamo anche che, se  $(U', \psi')$  è un sistema di coordinate canoniche, esiste per definizione un sistema di coordinate naturali  $(U, \phi)$  con  $U = U'$  connesso e relativamente semplicemente connesso collegato al precedente tramite una trasformazione canonica. Se è assegnata una funzione di Hamilton in ogni sistema di coordinate naturali risulta quindi assegnata una funzione di Hamilton anche su ogni sistema di coordinate canoniche tramite il teorema appena dimostrato, in modo tale che una curva è soluzione delle equazioni di Hamilton nel primo sistema di coordinate se e solo se lo è nel secondo. In questo modo, se le funzioni di Hamilton in coordinate naturali sono assegnate in accordo con le richieste (12.5) (per esempio tramite una comune lagrangiana) le equazioni di Hamilton risultano avere un significato globale su tutto  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  (vedi l'osservazione 11.6), non solo lavorando in coordinate locali naturali, ma anche riferendosi ai sistemi di coordinate dell'atlante canonico.

(2) Ci si può chiedere se la più generale trasformazione di coordinate che preserva la forma hamiltoniana delle equazioni del moto sia una trasformazione canonica. La risposta è negativa. A

titolo di esempio, la trasformazione:

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ q'^k &= \lambda q^k, \quad k = 1, \dots, n \\ p'_k &= \mu p_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

dove  $\lambda, \mu > 0$  sono costanti, preserva banalmente la forma delle equazioni del moto, pur di definire:

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \lambda \mu \mathcal{H}(t(t'), q(t', q', p'), p(t', q', p')) .$$

Tuttavia  $J^t S J = \mu \lambda S$ , per cui non si ha una trasformazione canonica se  $\mu \lambda \neq 1$ . In effetti si riesce a dimostrare che una trasformazione differenziabile con inversa differenziabile (entrambe almeno di classe  $C^2$ ):

$$t' = t + c, \tag{12.21}$$

$$x'^k = x'^k(t, x^1, \dots, x^{2n}), \tag{12.22}$$

preserva la forma hamiltoniana delle equazioni del moto se e solo se la matrice jacobiana delle sole coordinate non temporali associata alla trasformazione soddisfa, per ogni  $(t, \mathbf{x})$ ,  $J^t S J = a S$  per qualche costante  $a \neq 0$ .

**(3)** Il fatto che la funzione hamiltoniana *non* abbia comportamento scalare sotto trasformazione di coordinate canoniche, ma riceva un addendo della forma  $\mathcal{K}$  come in (12.15), suggerisce, per una fissata  $\mathcal{H}$ , di cercare un sistema di coordinate canoniche in cui  $\mathcal{H}'$  sia identicamente nulla. Questo equivale evidentemente a risolvere le equazioni di Hamilton per ogni condizione iniziale, dato che nelle nuove coordinate canoniche le equazioni di Hamilton risultano essere banali  $q'^k = q'_0$  costante,  $p'_k = p'_{0k}$  costante. Il metodo che parte da questa osservazione, sviluppato da Jacobi, conduce alla famosa equazione di Hamilton-Jacobi.

**(4)\*** Il campo vettoriale dinamico  $Z$  introdotto nella sezione 11.3.3 assume la forma standard (11.60) in coordinate naturali ed è ben definito assumendo che l'assegnazione delle funzioni di Hamilton sia data in conformità con le richieste (12.5). Le linee integrali di tale campo sono tutte e sole le curve che soddisfano le equazioni di Hamilton. È chiaro che, per merito del Teorema 12.1 e tenendo conto dell'osservazione (1), il campo vettoriale dinamico avrà sempre la stessa espressione (11.60) anche in ogni sistema locale di coordinate canonico:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k}. \tag{12.23}$$

**Esempi 12.2.** Riferiamoci ancora al sistema di coordinate canoniche  $t', q', p'$  costruito nell'esempio 12.1, dove  $U$  in coordinate è dato dall'aperto  $(a, b) \times D$ . Vogliamo calcolare la funzione  $\mathcal{H}$  in quel caso. Sappiamo che tale funzione esiste, perché sono rispettate tutte le ipotesi del Teorema 12.1. Posto  $\mathbf{x}' := (q', p')^t$  e ricordando che  $t = t'$ , deve essere:

$$-S \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}'),$$

che si traduce nelle due equazioni

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'} , \quad \frac{\partial p'}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'} .$$

Tenendo conto della (12.10), ciò equivale a scrivere:

$$-q \sin \Omega t - p \cos \Omega t = \Omega^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'} , \quad -p \sin \Omega t + q \cos \Omega t = -\Omega^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'} .$$

Tenendo conto di (12.9), le due equazioni trovate possono essere riscritte, usando le sole variabili primarie, come:

$$\Omega p' = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p'} , \quad -\Omega q' = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q'} .$$

Integrando la prima equazione, senza prestare attenzione ai domini, troviamo:

$$\mathcal{K}(t, q', p') = \frac{\Omega}{2} p'^2 + f(t, q) .$$

La seconda equazione allora, analogamente, fornisce:

$$\frac{\partial f}{\partial q'} = \Omega q' .$$

In definitiva:

$$\mathcal{K}(t, q', p') = \frac{\Omega}{2} p'^2 + \frac{\Omega}{2} q'^2 + g(t) ,$$

dove la funzione  $g$  è arbitraria. Per computo diretto, si vede subito che tale funzione, che è ben definita su  $U$ , soddisfa come richiesto:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = S \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') .$$

In base al teorema 12.1 questa è l'unica soluzione al problema di trovare la funzione  $\mathcal{K}$  richiesta (tenendo conto dell'arbitrarietà della funzione  $g$ ).

## 12.2 \*Il teorema di Liouville in forma globale ed il teorema “del ritorno” di Poincaré

Il formalismo introdotto nella sezione precedente permette di dare la versione globale del teorema di Liouville sullo spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  senza alcuna restrizione alla forma di questo spazio. Una conseguenza di tale formulazione è il teorema del ritorno di Poincaré che esamineremo di seguito.

### 12.2.1 Teorema di Liouville e l'equazione di Liouville

Un'altra proprietà fondamentale delle trasformazioni canoniche è che esse preservano il volume di ogni spazio delle fasi. Fissiamo una fibra  $\mathbb{F}_{\tau_0}$  al tempo  $\tau_0$  e consideriamo un sistema locale di coordinate canoniche (o naturali)  $(t, \mathbf{x}) \equiv (t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  definito nell'intorno  $\mathcal{O}$  di un punto  $p \in \mathbb{F}_{\tau_0}$ . Passiamo ad un altro analogo sistema di coordinate canoniche (o naturali) definite nell'intorno  $\mathcal{O}'$  dello stesso punto:  $(t', \mathbf{x}') \equiv (t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n)$ . Se  $D \subset \mathbb{F}_{\tau_0}$  è un insieme misurabile contenuto in  $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ , possiamo ad esso associare due misure di volume:

$$\int_{\mathbf{x}(D)} dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n \quad \text{e} \quad \int_{\mathbf{x}'(D)} dq'^1 \cdots dq'^n dp'_1 \cdots dp'_n.$$

In virtù della canonicità della trasformazione di coordinate, in realtà le due misure coincidono. Infatti:

$$\int_{\mathbf{x}'(D)} dq'^1 \cdots dq'^n dp'_1 \cdots dp'_n = \int_{\mathbf{x}(D)} |\det J(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)| dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n$$

$J$  è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate che deve avere determinante di modulo 1 in virtù del fatto che  $J^t S J = S$  per cui  $(\det J)^2 = 1$  come già osservato. In definitiva:

$$\int_{\mathbf{x}(D)} dq^1 \cdots dq^n dp_1 \cdots dp_n = \int_{\mathbf{x}'(D)} dq'^1 \cdots dq'^n dp'_1 \cdots dp'_n.$$

I sistemi di coordinate canonici definiti su uno stesso aperto  $V$  in uno spazio delle fasi al tempo  $\tau_0$  individuano un'unica misura naturale che coincide con la misura di Lebesgue  $dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n$  quando letta in coordinate. Se  $(U, \psi)$  è un sistema di coordinate canoniche o naturali definite nell'intorno di  $p \in \mathbb{F}_{\tau_0}$  e  $V := U \cap \mathbb{F}_{\tau_0}$ , indichiamo con  $\nu_{\tau_0}$  la misura definita su  $V$  come detto sopra.

Usando tecniche standard di teoria della misura su varietà differenzibili che fanno uso di una partizione dell'unità, si arriva a definire una **misura canonica**  $\mu_{\tau_0}$  globale su ogni fibra  $\mathbb{F}_{\tau_0}$  dello spazio delle fasi individuata completamente dall'atlante canonico di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ed ottenuta “incollando” le varie misure  $\nu_{\tau_0}$  come ora accenniamo. Si consideri un atlante di  $\mathbb{F}_{\tau_0}$  costruito restringendo a  $\mathbb{F}_{\tau_0}$  una classe di carte locali canoniche o naturali definite in un intorno di ogni punto di  $\mathbb{F}_{\tau_0}$ . Possiamo sempre scegliere questo atlante su  $\mathbb{F}_{\tau_0}$ , che indicheremo con  $\{(V_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ , in modo tale che i domini aperti  $V_i$  siano insieme a chiusura compatta, la cui chiusura sia ancora inclusa in un sistema di coordinate naturali. In questo modo sappiamo che esiste una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dei  $V_i$  (vedi il Teorema B.4). Sia infine  $\{f_i\}_{i \in I}$  una *partizione dell'unità* definita su  $\mathbb{F}_{\tau_0}$  subordinata al ricoprimento dato dai domini delle carte suddette. Se  $E \subset \mathbb{F}_{\tau_0}$ , definiamo, dove il secondo membro può anche valere  $+\infty$  se la serie diverge:

$$\mu_{\tau_0}(E) := \sum_{i \in I} \int_{E \cap V_i} f_i d\nu_{\tau_0}^{(i)}.$$

Con una procedura del tutto simile a quella usata nella dimostrazione della Proposizione B.3, si verifica che la definizione è ben posta, nel senso che non dipende dall'atlante di (restrizioni di)

carte naturali o canoniche su  $\mathbb{F}_{\tau_0}$ . Inoltre si vede che, al variare di  $E$  negli insiemi di Borel di  $\mathbb{F}_{\tau_0}$ , la funzione  $E \mapsto \mu_{\tau_0}(E)$  è  $\sigma$ -additiva e pertanto definisce una misura di Borel che coincide con la misura di Lebesgue di  $\mathbb{R}^{2n}$  quando ci si restringe ad ogni sistema di coordinate canoniche. Di conseguenza con  $\mu_{\tau}$  possiamo misurare in particolare gli insiemi aperti di  $\mu_{\tau}(E)$  che non possono avere misura nulla ed i compatti che devono avere misura finita. Possiamo infine sempre completare tale misura ed assumere da subito che sia completa<sup>2</sup>.

Usando questa misura canonica si giunge infine (sempre con tecniche standard e facendo uso del teorema di Liouville su  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$  dimostrato nel capitolo 11) a provare il teorema di Liouville nella forma generale che segue.

**Teorema 12.2. (Teorema di Liouville)** *Si consideri un sistema fisico descritto nello spazio delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  con fibre (spazi delle fasi al tempo  $\tau$ )  $\mathbb{F}_{\tau}$  e campo vettoriale dinamico hamiltoniano  $Z$ . Si considerino due fibre  $\mathbb{F}_{\tau_1}$  e  $\mathbb{F}_{\tau_2}$  e un insieme di Borel  $D_{\tau_1} \subset \mathbb{F}_{\tau_1}$  tale che, per ogni  $a \in D_{\tau_1}$  la curva integrale massimale di  $Z$  con condizione iniziale  $a$  raggiunga  $\mathbb{F}_{\tau_2}$ , in modo che venga a definirsi l'insieme  $D_{\tau_2} \subset \mathbb{F}_{\tau_2}$ . L'evoluzione hamiltoniana conserva il volume canonico delle fibre:*

$$\int_{D_{\tau_2}} d\mu_{\tau_2} = \int_{D_{\tau_1}} d\mu_{\tau_1} .$$

La presenza di una misura naturale nello spazio delle fasi consente di dare senso alla nozione di distribuzione di probabilità che ha avuto fondamentali applicazioni in fisica. Il teorema enunciato sopra è infatti il punto di partenza della cosiddetta *meccanica statistica*. Si tratta della teoria matematica che descrive un insieme statistico di sistemi fisici identici e quindi soggetti alla stessa dinamica hamiltoniana, ma descritti da punti rappresentativi differenti istante per istante a causa di differenti condizioni iniziali. Un tale insieme di sistemi fisici può descrivere la situazione nella quale noi non conosciamo con precisione lo stato del sistema ad ogni singolo istante. Tale approccio è anche usato per dare una descrizione microscopica alla termodinamica dei sistemi all'equilibrio, quando si assume che lo stato macroscopico del sistema all'equilibrio corrisponda ad una descrizione mediata su intervalli di tempo lunghi dello stato microscopico del sistema, e che tale operazione di media temporale sia equivalente all'assegnazione, istante per istante, di una distribuzione di stati microscopici (punti rappresentativi) invece che un unico punto rappresentativo (ipotesi ergodica).

Nella meccanica statistica si assegna una densità di probabilità  $\rho = \rho(t, q, p) \geq 0$  (funzione di classe  $C^1$  almeno) nello spaziotempo delle fasi il cui integrale all'istante  $t$ , sull'insieme misurabile  $D_t \subset \mathbb{F}_t$ , integrale valutato *rispetto alla misura canonica*  $\mu$ , definisce la probabilità  $P_t(D_t)$  che il punto rappresentativo del sistema fisico si trovi in  $D_t$  al tempo  $t$ :

$$P_t(D_t) := \int_{D_t} \rho(t, q, p) d\mu_t(q, p) . \quad (12.24)$$

---

<sup>2</sup>Anche la misura completata risulta essere invariante sotto l'evoluzione hamiltoniana, come si prova subito dalla procedura di completamento.

La richiesta naturale che si deve imporre sulla funzione  $\rho$  è che, individuato all'istante  $t_0$  un insieme misurabile  $D_{t_0} \subset \mathbb{F}_{t_0}$  di punti rappresentativi con probabilità  $P_{t_0}(D_{t_0})$ , la probabilità  $P_t(D_t)$ , per ogni istante  $t \neq t_0$ , calcolata su  $D_t$  ottenuto da  $D_{t_0}$  attraverso l'evoluzione hamiltoniana, soddisfi:

$$P_t(D_t) = P_{t_0}(D_{t_0}) . \quad (12.25)$$

In particolare, se  $D_t = \mathbb{F}_t$  tale probabilità deve valere sempre 1.

La richiesta (12.25) può essere trascritta equivalentemente come:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(t, q, p) d\mu_t(q, p) = 0 .$$

Questa equazione, restringendosi a lavorare con insiemi  $D_t$  a chiusura compatta, coperti da coordinate canoniche, può scriversi equivalentemente:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_{t_0}} \rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)) |\det J_t| d\mu_{t_0}(q_0, p_0) = 0 ,$$

dove  $q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)$  sono la posizione nello spaziotempo delle fasi al tempo  $t$  del punto rappresentativo che evolve soddisfacendo le equazioni di Hamilton, partendo dalla condizione iniziale  $(q_0, p_0)$  al tempo  $t_0$ . Tenendo conto che  $|\det J_t|$  è costante, l'identità di sopra si trascrive equivalentemente passando la derivata sotto il segno di integrale:

$$\int_{D_{t_0}} \frac{d}{dt} (\rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0))) |\det J_t| d\mu_{t_0}(q_0, p_0) = 0 ,$$

Per l'arbitrarietà di  $D_{t_0}$  (che possiamo scegliere essere una palla coordinata sufficientemente piccola) e usando la continuità della funzione integranda, la richiesta è equivalente a<sup>3</sup>:

$$\frac{d}{dt} \rho(t, q(t, q_0, p_0), p(t, q_0, p_0)) = 0 .$$

Questa equazione dice che, lungo ogni linea di universo che soddisfa le equazioni di Hamilton, il valore di  $\rho$  deve rimanere costante (ma può dipendere dalla linea di universo). Questo fatto, da solo, assicura che se al tempo iniziale  $t_0$ ,  $\rho \geq 0$  ovunque su  $\mathbb{F}_{t_0}$ , allora  $\rho$  soddisferà tale condizione per tutti i tempi. In forma esplicita ed in coordinate canoniche o naturali, l'equazione di evoluzione scritta sopra prende la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \right) = 0 \quad \text{in ogni punto dello spazio delle fasi.}$$

---

<sup>3</sup>Se, per una funzione continua  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subset \mathbb{R}^n$  aperto, vale  $\int_A g(x) d^n x = 0$  per ogni insieme misurabile  $A \subset D$  allora deve essere  $g(x) = 0$  ovunque su  $D$ . Se fosse  $g(x_0) > 0$  in  $x_0$ , la funzione dovrebbe verificare  $0 < \epsilon_0 < g(x_0) - \epsilon < g(x) < g(x_0) + \epsilon$  in un intorno aperto  $A_{x_0}$  di  $x_0$ . In tale intorno avremmo:  $\int_{A_{x_0}} g(x) d^n x \geq \epsilon_0 \int_{A_{x_0}} d^n x > 0$  che contraddice le ipotesi. Se fosse  $g(x_0) < 0$ , usando  $-g$  si arriverebbe allo stesso assurdo.

Facendo infine uso delle equazioni di Hamilton troviamo infine la celebre **equazione di Liouville**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} - \frac{\partial \rho}{\partial q^k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) \quad \text{in ogni punto dello spazio delle fasi.} \quad (12.26)$$

Si può verificare, procedendo in senso contrario (ed usando una partizione dell'unità), che la validità dell'equazione di Liouville è anche sufficiente affinché valga la (12.25).

### 12.2.2 Il teorema “del ritorno” (o “di ricorrenza”) di Poincaré

Consideriamo il caso di un sistema dinamico hamiltoniano descritto nello spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  (per esempio derivante da una teoria lagrangiana su  $A(\mathbb{V}^{n+1})$ ) che possa decomporsi canonicamente nel prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ . Assumiamo più fortemente che valgano le seguenti tre richieste.

**(R1)** Sia possibile ricoprire  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  con un atlante di sistemi di coordinate canoniche o naturali  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  in cui la coordinata temporale, corrispondente al tempo assoluto, vari su tutto  $\mathbb{R}$  ed in modo tale che le trasformazioni di coordinate tra questi sistemi siano completamente canoniche. (Non è in realtà necessaria la richiesta topologica di relativa semplice connessione sui domini delle coordinate, trattando con sistemi di coordinate canonici e la richiesta (R1) è automaticamente vera quando la formulazione dinamica hamiltoniana deriva da una formulazione lagrangiana con una lagrangiana che non dipende dal tempo in un riferimento  $\mathcal{I}$  rispetto al quale si definisce un atlante di  $A(\mathbb{V}^{n+1})$  di coordinate naturali solidali).

**(R2)** Le funzioni hamiltoniane del sistema (pensate come funzioni di classe  $C^2$ ) siano indipendenti dal tempo in ciascuna di tali carte locali. (In questa situazione la funzione hamiltoniana si estende ad un campo scalare indipendente dal tempo su tutto lo spaziotempo delle fasi. Le equazioni di Hamilton risultano essere in questa situazione, un sistema di equazioni differenziali autonomo sulla varietà spazio delle fasi  $M := \mathbb{F}$  nel senso discusso nella sezione 4.5).

**(R3)** Le soluzioni massimali delle equazioni di Hamilton siano complete, cioè definite per  $t$  che varia in tutto  $\mathbb{R}$ .

Come chiarito nella sezione 4.5.3, l'ultima condizione implica che venga a definirsi un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di  $\mathbb{F}$ , detto **flusso di fase hamiltoniano**,  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  con  $\phi_t : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ , definito dalla richiesta che  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$  sia l'unica soluzione delle equazioni di Hamilton con condizione iniziale  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}$  al tempo  $t = 0$ . Si osservi che si ha un vero gruppo additivo definito per tutti i valori di  $t \in \mathbb{R}$  e i cui diffeomorfismi  $\phi_t$  sono definiti su tutta la varietà  $\mathbb{F}$ .

Sappiamo dalla sezione precedente che i diffeomorfismi  $\phi_t$  preservano il volume canonico dei sottoinsiemi misurabili di  $\mathbb{F}$ . Vale allora il famoso *teorema “del ritorno” o “di ricorrenza” di Poincaré*.

**Teorema 12.3.** (“Teorema del ritorno”, Poincaré.) *Si consideri un sistema fisico descritto in formulazione di Hamilton e che soddisfi le richieste (R1), (R2) e (R3) e  $\mathcal{R} \subset \mathbb{F}$  verifichi*

le seguenti ipotesi:

- (i)  $\phi_t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\mathcal{R}$  sia misurabile secondo la misura (di Borel) canonica  $\mu$  dello spazio delle fasi ed abbia misura finita:  $\mu(\mathcal{R}) < +\infty$ .

In questo caso, per ogni  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}$ , intorno aperto arbitrariamente piccolo di ogni punto di  $\mathcal{R}$  fissato arbitrariamente, valgono i seguenti fatti.

(a) L'insieme  $\mathcal{G}$  “ritorna infinite volte” in  $\mathcal{G}$  stesso. Più precisamente, esiste una successione di tempi  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow +\infty$  per cui  $\mathcal{G} \cap \phi_{\tau_n}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$  dove  $\mu(\mathcal{G} \cap \phi_{\tau_n}(\mathcal{G})) > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) I punti di  $\mathcal{G}$  che “non ritornano mai più” in  $\mathcal{G}$  formano un sottoinsieme di misura nulla:

$$\mu(\{p \in \mathcal{G} \mid \phi_t(p) \notin \mathcal{G} \quad t > 0\}) = 0.$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo il teorema premettendo un lemma.

**Lemma 12.1.** Se  $A \subset \mathcal{R}$  è misurabile con  $\mu(A) > 0$  e  $t > 0$  è una costante fissata arbitrariamente, consideriamo gli insiemi:

$$A_n := \phi_{nt}(A) := (\phi_t)^n(A) \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per qualche  $k_t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , deve valere  $A \cap A_{k_t} \neq \emptyset$  ed inoltre  $\mu(A \cap A_{k_t}) > 0$ .

*Dimostrazione del Lemma.* Gli insiemi  $A_m$  sono misurabili perchè controimmagine di insiemi misurabili secondo funzioni continue (che sono misurabili essendo la misura  $\mu$  di Borel). Definiamo, per  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , gli insiemi  $B_n := A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)$ , in modo che, per costruzione,  $B_m \cap B_n = \emptyset$  se  $n \neq m$ . Assumiamo ora, per assurdo, che  $\mu(A_n \cap A_m) = 0$  per ogni coppia  $m, n$  con  $n \neq m$  e verifichiamo che ciò porta ad una contraddizione. Se  $\mu(A_n \cap A_m) = 0$  allora  $\mu(A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)) = 0^4$  e quindi, decomponendo  $A_n$  come l'unione dei due insiemi disgiunti  $A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)$  e  $A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)$ :

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)) + \mu(A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)) = \mu(A_n \setminus (\cup_{m \neq n} A_m)) = \mu(B_n).$$

Infine, dato che  $B_m \cap B_n = \emptyset$  se  $n \neq m$ :

$$\mu\left(\bigcup_m B_n\right) = \sum_m \mu(B_m) = \sum_m \mu(A_m) = \sum_m \mu((\phi_t)^n(A)) = \sum_m \mu(A) = +\infty.$$

Questo è impossibile visto che  $\bigcup_m B_n \subset \mathcal{R}$  e quindi:

$$\mu\left(\bigcup_m B_n\right) \leq \mu(\mathcal{R}) < +\infty.$$

---

<sup>4</sup>Infatti:  $0 \leq \mu(A_n \cap (\cup_{m \neq n} A_m)) = \mu(\cup_{m \neq n} (A_n \cap A_m)) \leq \sum_{m \neq n} \mu(A_n \cap A_m) = \sum_{m \neq n} 0 = 0$ .



Allora deve accadere che  $\mu(A_n \cap A_m) > 0$  per qualche  $m, n$  con  $m \neq n$ . Se  $n$  è il minimo tra  $m$  e  $n$ , applicando  $(\phi_{nt})^{-1}$  e tenendo conto che tale trasformazione preserva il volume, abbiamo che

$$0 < \mu(A_n \cap A_m) = \mu((\phi_{nt})^{-1}(A_n \cap A_m)) = \mu((\phi_{nt})^{-1}(A_n) \cap (\phi_{nt})^{-1}(A_m)) = \mu(A \cap (\phi_{nt})^{-1}(A_m)).$$

Definendo  $k_t := m - n > 0$ , abbiamo che  $A_{k_t} = \phi_{kt}(A) = \phi_{nt}^{-1}(A_m)$  dove  $k_t := m - n > 0$ . Abbiamo quindi trovato che  $\mu(A \cap A_{k_t}) > 0$ .  $\square$

Il lemma precedente prova la proposizione (a) scegliendo  $A = \mathcal{G}$ . La successione  $\tau_1 < \tau_1 < \dots$  si ottiene applicando il lemma per tempi  $t_1 < t_2 < t_3, \dots \rightarrow +\infty$  scelti di volta in volta in modo tale che  $t_2 > k_{t_1}t_1$ ,  $t_3 > k_{t_2}t_2$  e via di seguito, e definendo infine  $\tau_1 := k_{t_1}t_1$ ,  $\tau_2 := k_{t_2}t_2$  e in generale  $\tau_n := k_{t_n}t_n$ . Per costruzione  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow +\infty$ .

Passiamo alla proposizione (b). Consideriamo quindi il sottoinsieme  $E \subset \mathcal{G}$  dei punti  $p \in \mathcal{G}$  che non ritornano in  $\mathcal{G}$  sotto evoluzione discreta:  $\phi_{nt}(p) \notin \mathcal{G}$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$  per qualche  $t > 0$  fissato. L'insieme  $E$  è misurabile dato che può essere scritto come intersezione numerabile di insiemi misurabili:

$$E = \{p \in \mathcal{G} \mid \phi_{nt}(p) \notin \mathcal{G} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \mathcal{G} \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} (\phi_{nt})^{-1}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{G}).$$

Se fosse  $\mu(E) > 0$ , applicando il lemma precedente per  $A = E$  avremmo che  $E \cap \phi_{kt}(E) \neq \emptyset$  per qualche  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e questo è impossibile proprio per definizione di  $E$ . Quindi deve essere  $\mu(E) = 0$ . L'insieme  $E_0$  dei punti di  $\mathcal{G}$  che non ritornano mai più in  $\mathcal{G}$ :

$$E_0 := \{p \in \mathcal{G} \mid \phi_t(p) \notin \mathcal{G} \quad t > 0\}$$

soddisfa banalmente  $E_0 \subset E$ . Dato che la misura  $\mu$  è completa per costruzione, deve essere  $E_0$  misurabile e quindi  $\mu(E) = \mu(E_0) = 0$   $\square$

### Esempi 12.3.

1. Sistemi hamiltoniani che soddisfano le ipotesi del teorema di Poincaré sono abbastanza comuni. Prendiamo un sistema fisico sottoposto a forze indipendenti dal tempo in un riferimento inerziale e supponiamo che il sistema fisico ammetta descrizione di Lagrange e quindi di Hamilton. Queste ipotesi, lavorando in coordinate solidali con il riferimento inerziale implicano la validità delle richieste (R1) e (R2). Supponiamo inoltre che il sistema fisico ammetta un integrale primo  $H : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , tipicamente l'energia, le cui superfici di livello nello spazio delle fasi, ottenute fissando un valore generico dell'integrale primo

$$\Sigma_h := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F} \mid H(\mathbf{x}) = h\}$$

siano insiemi compatti. Sotto queste ipotesi, dato che ogni soluzione delle equazioni di Hamilton deve rimanere confinata all'interno dell'insieme compatto  $\Sigma_h$  (dove  $h$  è il valore che assume l'integrale primo  $H$  all'istante iniziale), ogni soluzione massimale sarà completa in virtù della

proposizione 4.10. In questo caso anche (R3) è soddisfatta.  
Se infine accade che il volume della regione

$$\mathcal{R} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F} \mid h_1 < H(\mathbf{x}) < h_2\}$$

ha misura finita – è a tal fine sufficiente che la chiusura di  $\mathcal{R}$  sia compatta – allora sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Poincaré, visto che  $\phi_t(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$  nelle nostre ipotesi: se  $p \in \mathcal{R}$ ,  $H(p) = h_p \in (h_1, h_2)$  e, dato che  $H$  è integrale primo  $H(\phi_t(p)) = h_p \in (h_1, h_2)$  per cui  $\phi_t(p) \in \mathcal{R}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**2.** La situazione descritta nel precedente esempio si concretizza prendendo un sistema fisico di  $N$  particelle con hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$$

dove l'energia potenziale  $\mathcal{U}$  di classe  $C^1$  è limitata dal basso – cioè per ogni  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  vale  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \geq C$  per qualche costante  $C \in \mathbb{R}$  – e tale che gli insiemi dei punti  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  con  $\mathcal{U}((\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)) \leq u$  siano compatti  $K_u \subset \mathbb{R}^{3N}$  per ogni  $u$  fissato in un intervallo di valori. (Quest'ultima condizione è per esempio assicurata se  $\mathcal{U}$  è una somma di energie potenziali per la singola particelle descriventi buche di potenziale). In questo caso, se  $\mathcal{H}$  è tenuto costante al valore  $h$ , se  $M$  è la più grande delle masse  $m_i$  per cui  $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2 / (2M) \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2 / (2m_i)$ , i valori assunti da  $\sqrt{\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i^2}$  non possono superare  $\sqrt{2M(h - C)}$ , e pertanto anche il vettore  $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  è contenuto nella palla chiusa  $B_h \subset \mathbb{R}^{3N}$  centrata nell'origine e di raggio  $\sqrt{2M(h - C)}$ . In definitiva la superficie chiusa  $\Sigma_h \subset \mathbb{R}^{6N}$  individuata da

$$\Sigma_h := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = h\}$$

è confinata nel compatto  $K_h \times B_h \subset \mathbb{R}^{6N}$  ed è pertanto compatta.

Al variare di  $h$  in  $(h_1, h_2)$ , il compatto  $K_{h_2}$  include tutti i compatti  $K_h$  per costruzione, quindi l'insieme

$$\mathcal{R} := \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N} \mid \mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in (h_1, h_2)\}$$

ha volume finito essendo incluso nel compatto  $K_{h_2} \times B_{h_2}$  ed è invariante sotto il flusso dinamico per costruzione.

Un esempio unidimensionale della situazione descritta è una particella sottoposta ad una forza la cui energia potenziale, nell'intorno di un punto di equilibrio descrive una buca di potenziale limitata dal basso. L'esempio più semplice è dato dalla buca di potenziale dell'oscillatore armonico.

**3.** Una particella sottoposta al potenziale coulombiano attrattivo invece può non soddisfare le ipotesi, in quanto i valori assumibili dall'impulso possono essere arbitrariamente alti a spese dell'energia potenziale che può essere arbitrariamente piccola nei negativi, pur rimanendo l'energia totale costante. Le superfici ad energia costante nello spazio delle fasi possono non essere

limitate e dunque non compatte. Tuttavia se si considera anche l'integrale primo del momento angolare, si vede che è possibile definire, per valori arbitrari dell'energia e valori *non nulli* del momento angolare<sup>5</sup>, insiemi compatti contenenti le soluzioni del moto, la cui unione forma un insieme  $\mathcal{R}$  invariante con misura canonica finita.

**Osservazioni 12.4.** Un caso fisicamente interessante nel quale si applica il teorema del ritorno è quello di un gas di particelle confinato in una buca di potenziale limitata dal basso (una scatola contenente il gas può essere pensata come una buca di potenziale limitata dal basso) che non interagiscono tra di loro (gas ideale). In questo caso, partendo da ogni stato iniziale – in particolare quello in cui tutte le particelle si trovano in metà scatola – ed aspettando un tempo sufficientemente lungo, il sistema tornerà vicino a tale stato. È chiaro che questa situazione è in contrasto con il secondo principio della termodinamica. Tuttavia si riescono a stimare i tempi “di ritorno” per sistemi fisici come quello descritto e si scopre che hanno ordini di grandezza comparabili con quelli dell'età del sistema solare [Arnold92]. In base a tale risultato si può ritenere la termodinamica dell'equilibrio una descrizione approssimata valida su scale temporali relativamente brevi. È importante, infine menzionare il fatto che esiste una versione quantistica del teorema del ritorno, valida per sistemi hamiltoniani con “spettro discreto” dell'energia (P. Bocchieri e A. Loinger, Phys. Rev. 107, 337 - 338 (1957)). Per un gas ideale quantistico confinato in una scatola, ma anche per una o più particelle che interagiscono con forze coulombiane attrattive, lo spettro dell'energia è realmente discreto (nel caso di potenziale d'interazione coulombiano attrattivo ciò accade per energie negative); pertanto continuano a valere, anche in ambito quantistico, le implicazioni del teorema di ricorrenza nei confronti della validità della termodinamica dell'equilibrio.

## 12.3 Simmetrie e leggi di conservazione in meccanica di Hamilton

Introdurremo ora un utile strumento teorico e pratico dato dalle cosiddette *parentesi di Poisson*. Si tratta di funzionali bilineari che agiscono su funzioni definite nello spaziotempo delle fasi. L'importanza di tale strumento matematico è, da un lato che esso consente di studiare agevolmente il legame tra simmetrie e quantità conservate in formulazione di Hamilton, dall'altro che diversi risultati della meccanica hamiltoniana se scritti in termini di parentesi di Poisson hanno un corrispondente quantistico quando si sostituiscono alle parentesi di Poisson i commutatori quantistici (si tratta del cosiddetto *principio di corrispondenza di Dirac*).

In questa sezione useremo in particolare il formalismo delle parentesi di Poisson per riformulare, nel linguaggio hamiltoniano, il legame tra simmetrie e leggi di conservazione già introdotto in formulazione di Lagrange attraverso il teorema di Noether.

---

<sup>5</sup>Nella trattazione in coordinate radiali, quando il momento angolare è non nullo, la teoria è descritta da un'energia potenziale effettiva che tiene conto del cosiddetto “potenziale centrifugo” repulsivo in aggiunta all'energia potenziale coulombiana. A causa di questo termine l'energia potenziale effettiva è limitata dal basso quando il momento angolare è non nullo.

### 12.3.1 Parentesi di Poisson

Consideriamo una funzione (campo scalare)  $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Restringiamoci ora a lavorare in un sistema locale di coordinate canoniche  $(t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (t, \mathbf{x})$ . Alla funzione  $f$  possiamo associare il campo vettoriale  $X_f$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  definito localmente da

$$X_f := \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q^k} \right). \quad (12.27)$$

Questo campo definito localmente ha in realtà una natura globale, nel senso che se, per la stessa  $f$  definiamo l'analogo campo vettoriale su un altro sistema di coordinate canoniche, nell'intersezione dei domini delle due carte (se non è vuota) i due campi coincidono. Dato che tali sistemi di coordinate locali canonici formano un atlante, viene a definirsi univocamente un campo vettoriale su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che indicheremo ancora con  $X_f$ .  $X_f$  è pertanto definito come campo vettoriale su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che si riduce all'espressione (12.27) in ogni sistema locale di coordinate canoniche. Per dimostrare che i campi associati alla stessa  $f$  e definiti in due sistemi di coordinate canonici coincidono sull'intersezione dei domini, supponiamo che  $(t', \mathbf{x}')$  siano le coordinate di un secondo sistema di coordinate canoniche con dominio sullo spazio delle fasi che interseca quello delle precedenti. In tale intersezione abbiamo la catena di uguaglianze che prova quanto asserito:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i,j,k,r=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r} = \sum_{k,r=1}^{2n} (JSJ^t)^{kr} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r} = \sum_{k,r=1}^{2n} S^{kr} \frac{\partial f}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x'^r},$$

dove abbiamo usato il fatto che la trasformazione di coordinate tra sistemi di coordinate canoniche è una trasformazione canonica, e quindi il fatto che la matrice jacobiana  $J$  (e la sua trasposta) della parte non temporale della trasformazione di coordinate è un elemento del gruppo  $Sp(n, \mathbb{R})$  e pertanto  $JSJ^t = S$ .

#### Osservazioni 12.5.

(1) Si osservi che lo stesso risultato e lo stesso campo vettoriale globale  $X_f$  si otterrebbe lavorando con l'atlante dei sistemi di coordinate naturali oppure con l'unione di tale atlante con quello canonico, dato che le trasformazioni di coordinate tra carte locali naturali oppure tra carte naturali e carte canoniche sono pur sempre trasformazioni canoniche.

(2)\* Il campo vettoriale dinamico  $Z$  (12.23) le cui linee integrali sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton, si può scrivere localmente come:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - X_{\mathcal{H}},$$

dove  $\mathcal{H}$  è la funzione di Hamilton in coordinate locali naturali o canoniche  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  per il sistema fisico considerato.

Consideriamo ora due funzioni  $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Ha senso costruire un terzo campo scalare definito localmente, in coordinate canoniche da:

$$\{f, g\} := X_f(g) = -X_g(f) := \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q^k} \right). \quad (12.28)$$

Tale campo scalare sarà in realtà ben definito *su tutto lo spaziotempo delle fasi* per la stessa ragione per la quale il campo  $X_f$  è ben definito su tutto lo spaziotempo delle fasi.

**Definizione 12.2.** Si considerino  $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Il **campo vettoriale associato** a  $f$  è il campo vettoriale su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $X_f$ , definito in coordinate locali canoniche da (12.27). La **parentesi di Poisson di  $f$  e  $g$**  è il campo scalare  $\{f, g\}$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  definito, in coordinate locali canoniche, da (12.28).  $\diamond$

### Osservazioni 12.6.

(1) A titolo di esempio si verifica immediatamente che se  $(t, q, p)$  sono coordinate canoniche (o naturali), restringendosi a lavorare nel dominio di tale carta, allora valgono le condizioni:

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Classi di funzioni  $f^i, g_j$ , con  $i, j = 1, \dots, n$ , definite sullo spaziotempo delle fasi o solo localmente, che soddisfano tutte le identità scritte sopra sono dette essere **canonicamente coniugate**. Questa condizione (che rivestirà un ruolo importante in meccanica quantistica dato che è legata al *principio di indeterminazione di Heisenberg*) è in realtà una condizione *sufficiente* (soddisfatte le solite ipotesi topologiche sul dominio) per assicurare che le funzioni definiscano un sistema di coordinate canoniche come proviamo sotto.

(2) È importante notare che, assumendo come faremo d'ora in poi che ogni spazio delle fasi al tempo  $t_0$  sia connesso,  $X_f = X_{f'}$  se e solo se  $f - f'$  è una *qualsiasi* funzione del *solo* tempo<sup>6</sup>. Per provare ciò consideriamo una funzione  $g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $X_g = 0$  ovunque (per esempio  $g = f - f'$  come detto sopra). Consideriamo poi due stati cinetici  $a$  e  $a'$  allo stesso istante  $t_0$  e proviamo che  $g(a) = g(a')$  e di conseguenza  $g$  può essere solo una funzione del solo tempo (il viceversa è ovvio dalla definizione di  $X_g$ ). Per provare ciò osserviamo che essendo ogni spazio delle fasi a tempo fissato connesso, esiste una curva differenziabile  $\gamma : [0, 1] \rightarrow F(\mathbb{V}^{n+1})$  tutta contenuta nello spazio delle fasi a tempo  $t_0$  che congiunge  $a$  ad  $a'$ . L'immagine di  $\gamma$  è un compatto visto che è l'immagine secondo una funzione continua del compatto  $[0, 1]$ . Per definizione di compatto,  $\gamma([0, 1])$  può essere ricoperta da un numero finito di carte naturali o canoniche  $(U_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Concludiamo che con una catena di  $N$  carte la cui unione include  $\gamma([0, 1])$  congiungiamo  $a$  ad  $a'$ . Possiamo, se necessario, restringere i domini

<sup>6</sup>Dato che  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ha la natura di fibrato sulla base data dall'asse del tempo assoluto  $\mathbb{R}$ , la nozione di funzione  $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  del solo tempo è ben definita, significa che  $f(a) = f(a')$  se  $T(a) = T(a')$  dove  $T$  è il tempo assoluto, cioè la proiezione canonica di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sulla base  $\mathbb{R}$ . Questo è equivalente a dire che per ogni carta locale canonica o naturale  $(U, \psi)$  la funzione  $f \circ \psi^{-1}$  dipende dalla sola coordinata temporale.

$U_i$  in modo tale che  $U_k$  intersechi solo  $U_{k-1}$  e  $U_{k+1}$  (escluso ovviamente il caso in cui  $k = 1$  o  $k = N$ ). Se la porzione di  $\gamma$  inclusa in  $U_i$  è rappresentata in coordinate da  $t \mapsto (t_0, \mathbf{x}(t))$ , vale  $\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot S\nabla_{\mathbf{x}}f + \frac{\partial g}{\partial t}0 = 0$ , e pertanto  $g \circ \gamma$  è costante su  $U_i$ . Sui domini adiacenti  $U_{i-1}$  e  $U_{i+1}$ ,  $f \circ \gamma$  prenderà ovviamente lo stesso valore costante che ha in  $U_i$ . Considerando la catena completa di carte avremo che  $g(a) = g(\gamma(0)) = g(\gamma(1)) = g(a')$ . Pertanto  $g$  è costante su ogni spazio delle fasi al tempo fissato e può quindi solo essere una funzione del tempo.

Come conseguenza di quanto osservato abbiamo che il campo vettoriale  $X_f$  porta *meno* informazioni del campo scalare  $f$  perché  $X_f = X_{f+g}$  dove  $g$  è una funzione  $C^1$  del solo tempo.

**Proposizione 12.3.** *Si considerino due sistemi di coordinate locali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $(t, q, p)$  e  $(t', q', p')$  definite su un dominio comune in cui  $t' = t + c$  è il tempo assoluto e le rimanenti coordinate definiscono sistemi di coordinate (per ogni  $t$  e  $t'$  fissati), sulle fibre di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Si supponga infine che  $(t, q, p)$  sia un sistema locale di coordinate canoniche. I seguenti fatti sono equivalenti.*

(a) *Le coordinate locali  $(t', q', p')$  sono canoniche;*

(b) *per ogni scelta di  $f, g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  risulta:*

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q'^k} \frac{\partial g}{\partial p'_k} - \frac{\partial f}{\partial p'_k} \frac{\partial g}{\partial q'^k} \right) ;$$

(c) *Valgono le condizioni:*

$$\{q'^i, q'^j\} = \{p'_i, p'_j\} = 0 \quad e \quad \{q'^i, p'_j\} = \delta_j^i, \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n. \quad (12.29)$$

**Dimostrazione.** Il fatto che (a) implichi (b) è immediato dal fatto che il campo  $X_f$  ha la stessa struttura in tutti i sistemi di coordinate canoniche come dimostrato precedentemente. Il fatto che (b) implichi (c) si prova per computo diretto come già osservato sotto la definizione 12.2 esprimendo le parentesi di Poisson direttamente nelle coordinate canoniche primate. Proviamo per concludere che (c) implica (a). Notiamo che il dominio delle coordinate primate è lo stesso di quelle non primate per cui è connesso e relativamente semplicemente connesso. Non resta da provare che le coordinate primate sono legate a coordinate naturali definite su tale dominio tramite una trasformazione canonica. Dato che la composizione di trasformazioni canoniche è una trasformazione canonica e che le coordinate non primate sono canoniche per ipotesi, è sufficiente provare che la trasformazione tra le coordinate primate e quelle non primate è canonica. Le condizioni (12.29) si possono riscrivere tutte insieme:

$$\sum_{k,h=1}^{2n} S^{kh} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^h} = S^{ij}.$$

In forma compatta:

$$J^t S J = S.$$

Questo significa che la trasformazione di coordinate è canonica e dunque le coordinate  $(t', q', p')$  sono canoniche.  $\square$

La seguente proposizione illustra alcune proprietà più avanzate delle parentesi di Poisson.

**Proposizione 12.4.** *Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà.*

(1)  $f, g \mapsto \{f, g\}$  è un'applicazione bilineare e antisimmetrica che associa campi scalari di classe  $C^k(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  ( $k > 0$ ) ad un campo scalare di classe  $C^{k-1}(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ .

(2) Vale la regola di Leibniz:

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + g \cdot \{f, h\}$$

dove  $\cdot$  indica il prodotto punto per punto ed  $f, g, h$  sono campi scalari di classe  $C^1$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

(3) Vale la regola di Jacobi, se  $f, g, h$  sono campi scalari di classe  $C^2$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

(4) Se  $[\cdot, \cdot]$  indica la parentesi di Lie di campi vettoriali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  e  $f, g$  sono campi scalari di classe  $C^2$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ :

$$[X_f, X_g] = X_{h+\{f, g\}}$$

dove  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una qualsiasi funzione del solo tempo.

**Osservazioni 12.7.** L'insieme  $C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  delle funzioni infinitamente differenziabili a valori in  $\mathbb{R}$  definite sullo spaziotempo delle fasi ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale. Si tratta della struttura indotta dalla legge di composizione, se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ :  $(af + bg)(p) = af(p) + bg(p)$  per ogni  $p \in F(\mathbb{V}^{n+1})$ . L'aggiunta della nozione di parentesi di Poisson fornisce a  $C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  l'ulteriore struttura di *algebra di Lie* (vedi Definizione B.1), dato che la parentesi di Poisson è un'applicazione bilineare su  $C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ , antisimmetrica che soddisfa l'identità di Jacobi come asserito sopra.

**Dimostrazione della proposizione 12.4.** Le proprietà (1) e (2) sono di dimostrazione ovvia. Dimostriamo la proprietà (3). Vale:

$$\{\{f, g\}, h\} = \sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r} + \sum_{ijk} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial^2 g}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r}.$$

Gli altri due addendi a primo membro di  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$  sono ottenuti dall'espressione precedente permutando in essa  $f, g, h$ . È sufficiente mostrare che, nella somma  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}$ , i termini che contengono le derivate seconde di  $f$  si annullano reciprocamente, la stessa cosa accadrà per simmetria per i termini che contengono le derivate seconde in  $g$  ed in  $h$ . Il primo termine con le derivate seconde di  $f$  è quello che appare sopra nello sviluppo di  $\{\{f, g\}, h\}$ . Ne compare solo un altro nello sviluppo di  $\{\{h, f\}, g\}$  che si

ottiene dal secondo addendo nello sviluppo di  $\{\{f, g\}, h\}$  con la permutazione  $f, g, h \rightarrow h, f, g$ . In definitiva bisogna verificare che:

$$\sum_{ijk r} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^r} + \sum_{ijk r} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^r} = 0. \quad (12.30)$$

Il secondo addendo a primo membro di (12.30), cambiando i nomi agli indici ( $k \leftrightarrow i$  e poi  $i \leftrightarrow j$ ), può essere riscritto come:

$$\sum_{ijk r} S^{kj} S^{ri} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{ijk r} S^{kj} S^{ri} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema di Schwarz (per questo abbiamo richiesto le funzioni di classe  $C^2$  e non solo differenziabili fino al secondo ordine). Scambiando ancora i nomi di  $i$  e  $k$  arriviamo a dire che il secondo addendo a primo membro di (12.30):

$$\sum_{ijk r} S^{ij} S^{rk} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} = - \sum_{ijk r} S^{ij} S^{kr} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'antisimmetria della matrice  $S$ . Abbiamo ottenuto che:

$$\sum_{ijk r} S^{kr} S^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^r} = - \sum_{ijk r} S^{ij} S^{kr} \frac{\partial h}{\partial x^r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

Sostituendo a primo membro in (12.30) si ha immediatamente che (12.30) è verificata. Per concludere dimostriamo la proprietà (4). Se  $h$  è un campo scalare su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^2$  almeno, si ha:

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= X_f X_g h - X_g X_f h = X_f \{g, h\} - X_g \{f, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= -\{\{g, h\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f, g\}} h. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di  $h$  implica che:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

L'osservazione (2) in osservazioni 12.6 conclude la dimostrazione □

Ricordando la definizione B.1 di algebra di Lie possiamo concludere con la seguente importante proposizione, la cui dimostrazione segue immediatamente dalla proposizione precedente.

**Proposizione 12.5.** *Si consideri lo spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  pensato come varietà differenziabile di classe  $C^\infty$  e quindi si consideri l'algebra di Lie  $V(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  data dallo spazio vettoriale reale dei campi vettoriali<sup>7</sup> su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  di classe  $C^\infty$  con commutatore di Lie dato dal*

---

<sup>7</sup>La struttura di spazio vettoriale è quella solita indotta dalla legge di composizione, se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $X, Y \in V(F(\mathbb{V}^{n+1}))$ :  $(aX + bY)(p) = aX(p) + bY(p)$  per ogni  $p \in F(\mathbb{V}^{n+1})$ .



commutatore di campi vettoriali, e l'algebra di Lie  $C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  data dallo spazio vettoriale delle funzioni su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  a valori in  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty$  e con commutatore di Lie dato dalla parentesi di Poisson.

L'applicazione:

$$L : C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1})) \ni f \mapsto X_f$$

è un omomorfismo di algebre di Lie il cui nucleo è dato da:

$$\text{Ker}(L) := \{f \in C^\infty(F(\mathbb{V}^{n+1})) \mid f = f(t) \quad t \in \mathbb{R}\}$$

dove  $\mathbb{R}$  è la base del fibrato  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , cioè l'asse del tempo assoluto.

### 12.3.2 Gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche attive

Mostriamo ora come sia possibile associare ad ogni campo scalare  $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche *attive*. Attivo significa che le trasformazioni non si devono intendere come trasformazioni di coordinate, ma come trasformazioni che spostano il punto rappresentativo del sistema fisico. Consideriamo a tal fine  $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  ed il campo associato  $X_f$ . Vogliamo trovare le curve integrali di tale campo e con esse costruire il gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi,  $\Phi^{(X_f)}$ , associato a  $X_f$ . Si noti che per definizione,  $\Phi^{(X_f)}$  lavora su *tutto* lo spaziotempo delle fasi, prescindendo dalla scelta di ogni particolare sistema di coordinate locali. Tuttavia, per ciò che segue, è conveniente studiare  $\Phi^{(X_f)}$  in un fissato sistema di coordinate locali. Fissato dunque un sistema locale di coordinate canoniche su un aperto  $U$  nello spaziotempo delle fasi  $U \ni a \mapsto (t(a), \mathbf{x}(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , si tratta prima di tutto di risolvere l'equazione differenziale del prim'ordine nell'incognita data dalla curva, in coordinate,  $(t, \mathbf{x}) = (t(u), \mathbf{x}(u))$ ,  $u \in \mathbb{R}$ :

$$X_f(t(u), \mathbf{x}(u)) = \frac{dx^k}{du} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t},$$

cioé, esplicitamente:

$$\sum_{k=1}^n S^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{(t(u), \mathbf{x}(u))} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{dx^k}{du} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Notiamo prima di tutto che la funzione  $t = t(u)$  deve essere costante. Pertanto l'equazione differenziale iniziale, *istante per istante*, si riduce al sistema:

$$S^t \nabla_{\mathbf{x}} f|_{(t, \mathbf{x}(u))} = \frac{d\mathbf{x}}{du}. \quad (12.31)$$

Le curve soluzioni  $(t, \mathbf{x}) = (t(u), \mathbf{x}(u))$  che si ottengono nello spazio delle fasi sono tali da rimanere ciascuna nella stessa fibra individuata all'istante iniziale. In altre parole, il gruppo locale di diffeomorfismi ad un parametro  $\Phi^{(X_f)}$  associato al campo  $X_f$  *preserva le fibre* dello spaziotempo delle fasi. Fissiamo un istante  $t$  una volta per tutte e consideriamo il gruppo locale

ad un parametro  $\phi^{(t, X_f)}$  associato su  $\mathbb{F}_t$  all'equazione differenziale autonoma (si noti che  $t$  non è il parametro che descrive le curve!). Per definizione

$$u \mapsto \phi_u^{(t, X_f)}(\mathbf{x}) =: \mathbf{x}'$$

è l'unica soluzione locale dell'equazione (12.31) che esce dal punto  $\mathbf{x}$  per  $u = 0$ . Vogliamo mostrare che per ogni valore di  $u$  la trasformazione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  definita localmente (in dipendenza dal valore assunto da  $u$ ), è *canonica, nel senso che la sua matrice jacobiana appartiene a  $Sp(n, \mathbb{R})$* . Definiamo, per  $t$  fissato, la matrice jacobiana  $J$ , dipendente da  $\mathbf{x}$  e da  $u$ , di coefficienti:

$$J^i{}_k := \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}.$$

Consideriamo poi l'unica soluzione  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(u)$  di (12.31) che congiunge  $\mathbf{x}$ , preso a  $u = 0$  a  $\mathbf{x}'_1$  preso a  $u = u_1$ . In questo modo  $\mathbf{x}' = \phi_{u_1}^{(t, X_f)}(\mathbf{x})$ . Vogliamo calcolare, lungo questa curva la derivata in  $u$  di

$$u \mapsto (J^t S J)_{\mathbf{x}'(u)},$$

e mostrare che è nulla. Questo fatto implica che  $J^t S J$  è costante lungo la curva e quindi la trasformazione  $\mathbf{x}' = \phi_{u_1}^{(t, X_f)}(\mathbf{x})$  ha matrice jacobiana che soddisfa  $J^t S J = S$  dato che ciò accade per  $u = 0$ . Notiamo che

$$\frac{d}{du} (J^t S J) = \left( \frac{dJ^t}{du} S J \right) + J^t S \frac{dJ}{du}. \quad (12.32)$$

Tenendo conto che

$$\frac{d}{du} (J_{\mathbf{x}'(u)})^i{}_k = \frac{d}{du} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \Big|_{\mathbf{x}'(u)} = \frac{\partial^2 x'^i}{\partial u \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{dx'^i}{du} = \frac{\partial X_f^i}{\partial x^k},$$

esplicitando in componenti, il secondo membro di (12.32) è:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial X_f^i}{\partial x^j} S_{ik} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} S_{ik} \frac{\partial X_f^k}{\partial x^l} = \sum_{i,k,p=1}^n S_{pi} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x'^p} S_{ik} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{i,k,s=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} S_{ik} S_{sk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x'^s} \\ & = - \sum_{k,p=1}^n \delta_{kp} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x'^p} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{i,s=1}^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \delta_{is} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x'^s} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x'^s} \\ & = - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^l \partial x^j} = 0. \end{aligned}$$

Dato che per  $u = 0$  si ha  $J = I$  e pertanto  $J^t S J = S$ , concludiamo che, per ogni  $u$  deve valere  $J^t S J = S$  come già detto all'inizio. In particolare ciò accade per  $u = u_1$ . Concludiamo che la trasformazione

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto (t', \mathbf{x}') = \left( t, \phi_u^{(t, X_f)}(\mathbf{x}) \right),$$

è canonica ovunque è definita. Abbiamo provato la seguente proposizione.

**Proposizione 12.6.** *Il gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi  $\Phi^{(X_f)}$  generato dal campo vettoriale  $X_f$  associato ad ogni campo scalare  $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  è costituito da trasformazioni canoniche attive nel senso che segue. Se l'aperto  $A \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$  è dotato di coordinate canoniche  $(t, \mathbf{x})$  e  $\Phi_u^{(X_f)}(A') \subset A$  per un aperto  $A' \subset A$  ed un certo  $u$ , allora l'applicazione  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t', \mathbf{x}')$  che corrisponde in coordinate all'azione di  $\Phi_u^{(X_f)}$  è tale che:*

(i)  $t' = t$  e

(ii) la matrice jacobiana delle coordinate non temporali appartiene a  $Sp(n, \mathbb{R})$ .

**Esempi 12.4.** Consideriamo una particella di massa  $m$ , che si muove in un piano, individuata da coordinate polari  $(r, \theta)$ . Consideriamo la funzione  $f(r, \theta, p_r, p_\theta) := p_\theta$  ed il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche ad essa associato. Tale gruppo si ottiene integrando l'equazione differenziale, se  $\mathbf{x} := (r, \theta, p_r, p_\theta)$ :

$$S^t \nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{d\mathbf{x}}{du}.$$

Il calcolo diretto mostra che tale equazione si riduce semplicemente a:

$$\frac{dr}{du} = 0, \quad \frac{d\theta}{du} = -1, \quad \frac{dp_r}{du} = 0, \quad \frac{dp_\theta}{du} = 0.$$

In definitiva il gruppo  $\phi^{X_{p_\theta}}$  agisce come:

$$\phi_u^{(X_{p_\theta})}(r, \theta, p_r, p_\theta) = (r, \theta - u, p_r, p_\theta) =: (r', \theta', p'_r, p'_\theta), \quad (12.33)$$

e quindi, nello spazio delle configurazioni, corrisponde a rotazioni di un angolo  $-u$  del punto attorno all'origine.

Se, per un certo sistema fisico interpretiamo *passivamente* la trasformazione canonica indotta da  $f$  possiamo chiederci quale sia l'hamiltoniana  $\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}')$  associata alle coordinate  $(t', \mathbf{x}')$  quando l'hamiltoniana nelle coordinate iniziali  $(t, \mathbf{x})$  è nota e data da  $\mathcal{H}(t, \mathbf{x})$ . Si osservi che tuttavia, dato che ora la trasformazione di coordinate è attiva, cioè il sistema di coordinate rimane lo stesso ma sono gli stati cinetici ad essere trasformati, la nuova funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}'$  si deve correttamente pensare come la funzione hamiltoniana di un *nuovo* sistema fisico, quello che si è ottenuto dal precedente in seguito alla trasformazione attiva generata dalla funzione  $f$  (per esempio la rotazione del sistema fisico di un fissato angolo  $u$ , attorno all'asse cartesiano  $z$ , indotta dalla funzione  $f(r, \theta, p_r, p_\theta) := p_\theta$  discussa nell'esempio precedente). Il punto importante è che questo nuovo sistema ammette ancora una descrizione di Hamilton perché la trasformazione tra i due sistemi di coordinate è canonica. Si osservi infine che non è in generale vero che l'hamiltoniana  $\mathcal{H}'$  abbia la stessa forma dell'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ . In questo senso il nuovo sistema fisico sarà *differente* da quello iniziale.

Quello che faremo ora è determinare  $\mathcal{H}'$  a meno di infinitesimi in  $u$  del secondo ordine e quindi l'espressione finita. La sua forma sarà utile nello stabilire le connessioni tra simmetrie di un sistema di Hamilton e grandezze conservate.

**Proposizione 12.7.** *Consideriamo un sistema fisico Hamiltoniano con Hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, \mathbf{x})$  di classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) riferito ad un assegnato sistema di coordinate canoniche o naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ ,  $U \ni a \mapsto (t(a), \mathbf{x}(a)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ , e si supponga che sul sistema agisca un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche generate dalla funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^h$  ( $h \geq 2$ ), in modo tale che  $(t, \mathbf{x}) \mapsto (t'_u(t, \mathbf{x}), \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x}))$ . Per ogni valore del parametro  $u$  associamo al sistema una nuova funzione di Hamilton  $\mathcal{H}'_u$ , in modo tale che, interpretando la trasformazione canonica in modo passivo,  $\mathcal{H}'_u(t', \mathbf{x}'_u)$  sia legata a  $\mathcal{H}(t, \mathbf{x})$  in conformità con (a) in Teorema 12.1.*

La funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}'_u$  può sempre essere scelta localmente in modo tale che:

$$\mathcal{H}'_u(t', \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - u \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + u O_{(t, \mathbf{x})}(u), \quad (12.34)$$

dove  $(u, t, \mathbf{x}) \mapsto u O_{(t, \mathbf{x})}(u)$  è una funzione  $C^2$  tale che  $O_{(t, \mathbf{x})}(u) \rightarrow 0$  per  $u \rightarrow 0$  per ogni fissato  $(t, \mathbf{x})$ . Con tale scelta, vale (localmente) l'espressione per l'hamiltoniana del sistema trasformato:

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{y}) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}'_{-u}(t, \mathbf{y})) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^u f(t, \mathbf{x}'_{s-u}(t, \mathbf{y})) ds. \quad (12.35)$$

**Dimostrazione.** Porremo  $t = t'$  ovunque nel seguito dato che la trasformazione canonica considerata non altera la coordinata temporale. Inoltre ometteremo l'indice  $_u$  quando non sarà strettamente necessario scriverlo. Dal Teorema (12.1) sappiamo che vale:

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')) + \mathcal{K}(t, \mathbf{x}'),$$

dove la funzione  $\mathcal{K}$  è determinata, a meno di funzioni della sola variabile  $t$  additive, dalla richiesta

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = S \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}'),$$

cioè

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -S \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t},$$

Sviluppiamo con Taylor nella variabile  $u$  la funzione  $\partial \mathbf{x}' / \partial t$ , dove  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})$ . Si osservi che per  $u = 0$ , vale  $\mathbf{x}'_0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$  e pertanto la derivata parziale rispetto a  $t$  si annulla. Avremo allora:

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = u \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} \right|_{u=0} + u O_{(t, \mathbf{x})}(u),$$

dove  $(u, t, \mathbf{x}) \mapsto O_{(t, \mathbf{x})}(u)$  è una funzione continua definita su un insieme aperto, tale che, per ogni fissato  $(t, \mathbf{x})$ , vale  $O_{(t, \mathbf{x})}(u) \rightarrow 0$  per  $u \rightarrow 0$ . In altre parole, scambiando l'ordine delle

derivate ed usando la definizione di  $X_f$ :

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial t} S^t \nabla_{\mathbf{x}} f + u O_{(t, \mathbf{x})}(u) .$$

Applicando  $-S$  ad entrambi i membri, ricordando che  $SS^t = I$  e notando che  $SO_{(t, \mathbf{x})}(u)$  è ancora infinitesimo per  $u \rightarrow 0$  (nel seguito rinominiamo pertanto  $-SO$  semplicemente  $O$ ), si trova che deve essere:

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -u \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) + u O_{(t, \mathbf{x})}(u) .$$

Nel secondo membro possiamo sostituire  $\nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x})$  con  $\nabla_{\mathbf{x}'} f(t, \mathbf{x}')$  commettendo un errore di ordine superiore al primo in  $u$  come è facile verificare<sup>8</sup>. In definitiva abbiamo trovato che:

$$\nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{K}(t, \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}'} u \frac{\partial f(t, \mathbf{x}')}{\partial t} + u O_{(t, \mathbf{x}')} (u) ,$$

dove, con abuso di notazione, la  $O$  che appare sopra è quella della riga precedente in cui abbiamo espresso la funzione infinitesima in termini delle coordinate primarie senza alterare il fatto che la funzione sia infinitesima per  $u \rightarrow 0$ . Se lavoriamo in un dominio semplicemente connesso (a  $t$  fissato) siamo liberi di scegliere, dove l'integrale è calcolato lungo una qualsiasi curva differenziabile che congiunge un fissato  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$  rimanendo nel dominio:

$$\mathcal{K}(t, \mathbf{x}) = -u \frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} + u \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} O_{(t, \mathbf{y})}(u) \cdot d\mathbf{y} .$$

Dato che la funzione  $(u, t, \mathbf{x}) \mapsto O_{(t, \mathbf{y})}(u)$  è continua, sarà limitata su insiemi compatti. Il teorema della convergenza dominata prova immediatamente che, valendo  $O_{(t, \mathbf{y})}(u) \rightarrow 0$  se  $u \rightarrow 0$  per fissati  $(t, \mathbf{y})$ , deve anche essere:

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} O_{(t, \mathbf{y})}(u) \cdot d\mathbf{y} \rightarrow 0 \quad \text{se } u \rightarrow 0 .$$

In definitiva vale la (12.34) avendo ridefinito un'altra volta la funzione  $O_{(t, \mathbf{x})}(u)$  nel modo ovvio. Si osservi che la funzione  $(u, t, \mathbf{x}) \mapsto u O_{(t, \mathbf{x})}(u)$  in la (12.34) è sicuramente una funzione  $C^2$  per differenza di funzioni  $C^2$ . È possibile passare all'espressione finita della (12.34). Infatti la stessa formula può anche scriversi (ricordando che  $t' = t$  e pensando  $(t, \mathbf{x})$  fisso):

$$\frac{d}{du} \mathcal{H}'_u(t, \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})) = -\frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})) ,$$

da cui integrando:

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^u f(t, \mathbf{x}'_s(t, \mathbf{x})) ds ,$$

---

<sup>8</sup>Sviluppando con Taylor per  $u = 0$ , abbiamo che  $u \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}') = u (\nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) + u H(t, \mathbf{x})) = u \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x}) + u O(u)$ . Accade la stessa cosa rimpiazzando  $\nabla_{\mathbf{x}}$  con  $\nabla_{\mathbf{x}'}$ .

e quindi si ottiene la (12.35):

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{y}) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}'_{-u}(t, \mathbf{y})) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^u f(t, \mathbf{x}'_{s-u}(t, \mathbf{y})) ds .$$

□

Un'utile relazione che merita di essere scritta esplicitamente, e che è stata appena provata come risultato intermedio è la seguente:

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{x}'_u(t, \mathbf{x})) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^u f(t, \mathbf{x}'_s(t, \mathbf{x})) ds . \quad (12.36)$$

Passiamo ora a dare la nozione di sistema Hamiltoniano invariante sotto un gruppo di trasformazioni canoniche ad un parametro.

**Definizione 12.3.** Nelle ipotesi della proposizione precedente, l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  si dirà essere **invariante in forma al prim'ordine** sotto il gruppo locale ad un parametro di trasformazioni canoniche generate dalla funzione  $f$  quando, per ogni valore di  $(t, \mathbf{y})$  ove i due membri sono definiti insieme:

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{y}) = \mathcal{H}(t, \mathbf{y}) + u O_{(t, \mathbf{y})}(u) , \quad (12.37)$$

dove  $O_{(t, \mathbf{y})}(u) \rightarrow 0$  se  $u \rightarrow 0$  per ogni fissata coppia  $(t, \mathbf{y})$  ◇.

È chiaro che possiamo indifferentemente scrivere  $(t, \mathbf{x})$  o  $(t, \mathbf{x}')$  al posto di  $(t, \mathbf{y})$  nell'argomento di sopra, dato che la (12.37) vale per ogni scelta di  $(t, \mathbf{y})$ .

### Osservazioni 12.8.

(1) Il significato della definizione dovrebbe essere fisicamente ovvio: se l'hamiltoniana è invariante in forma il sistema fisico associato all'hamiltoniana  $\mathcal{H}'$  che si ottiene sottoponendo il sistema fisico iniziale, associato all'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , ha la stessa forma (nelle nuove coordinate) della precedente hamiltoniana. La trasformazione canonica attiva che abbiamo usato è in questo senso una **simmetria hamiltoniana** del sistema fisico. Vedremo nella prossima sezione che in questa situazione abbiamo nuovamente uno strettissimo legame tra presenza di simmetria ed esistenza di quantità fisiche conservate (integrali primi).

(2) L'invarianza in forma al prim'ordine può essere scritta come:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}'_u(t, \mathbf{x})}{\partial u} \right|_{u=0} = 0 .$$

*Esattamente come nel caso dei gruppi ad un parametro che si usano per enunciare il teorema di Noether, anche in questo caso l'invarianza in forma al prim'ordine della funzione di Hamilton è equivalente all'invarianza in forma ad ogni ordine:*

$$\mathcal{H}'_u(t, \mathbf{x}) = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) , \quad \text{per ogni } u \text{ e ogni } (t, \mathbf{x}).$$

La dimostrazione si basa sul fatto che, dalla (12.35), con qualche calcolo segue che:

$$(\mathcal{H}'_u)'_v(t, \mathbf{y}) = \mathcal{H}'_{u+v}(t, \mathbf{y}) ,$$

cioè fare agire due volte di seguito il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche sul sistema è equivalente a farlo agire una sola volta per un valore del parametro pari alla somma dei parametri, almeno ai fini della valutazione della funzione di Hamilton.

### 12.3.3 Simmetrie e leggi di conservazione: il teorema di Noether hamiltoniano

Consideriamo una funzione  $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  quando sullo spazio delle fasi è stato fatto un assegnamento di funzioni Hamiltoniane  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  in ogni sistema di coordinate dell'atlante naturale (o quello canonico) che si trasformano come in (11.28). In questo modo la dinamica del sistema è globalmente definita (e le curve di evoluzione sono tutte e sole le linee integrali del campo vettoriale dinamico  $Z$  (12.23) associato all'assegnazione coerente di funzioni di Hamilton suddetta). La condizione che  $f$  sia un integrale primo per il sistema hamiltoniano  $\mathfrak{S}$  la cui dinamica è descritta dalle funzioni di Hamilton dette, in coordinate naturali o canoniche si scrive:

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{x}(t)) = 0 , \quad (12.38)$$

dove  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  è una qualsiasi soluzione delle equazioni di Hamilton:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = S\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t)) .$$

Sviluppando il secondo membro di (12.38), la stessa condizione si può riscrivere:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla f \Big|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0 ,$$

cioè, usando le equazioni di Hamilton:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(t, \mathbf{x}(t))} + \sum_{i,j=1}^{2n} S^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0 .$$

Abbiamo trovato che  $f$  è un integrale primo se e solo se, su ogni soluzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  delle equazioni di Hamilton vale:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \right] \Big|_{(t, \mathbf{x}(t))} = 0 .$$

D'altra parte, assumendo che l'hamiltoniana sia una funzione di classe  $C^2$  e pertanto valendo il teorema di esistenza (ed unicità) delle soluzioni delle equazioni di Hamilton, possiamo concludere che per ogni evento  $(t, \mathbf{x})$  nello spazio delle fasi, c'è sicuramente una soluzione che ha quell'evento

come condizione iniziale. Questo significa che affinché  $f$  sia integrale primo è necessario e sufficiente che *ovunque* sullo spaziotempo delle fasi (in ogni sistema locale di coordinate canoniche) valga l'identità :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0.$$

**Osservazioni 12.9.** In tale identità non compaiono più le soluzioni delle equazioni del moto e pertanto, in virtù di tale identità, non è più necessario risolvere il problema del moto per stabilire se una funzione è un integrale primo.

Esprimiamo questo risultato formalmente aggiungendo un ulteriore importante risultato.

**Teorema 12.4.** *Si consideri un sistema fisico hamiltoniano  $\mathfrak{S}$  descritto sullo spazio delle fasi da un assegnamento di funzioni Hamiltoniane  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  in ogni sistema di coordinate dell'atlante naturale che si trasformano come in (11.28). Assumiamo che tali funzioni di Hamilton siano di classe  $C^2$ . Valgono i seguenti fatti.*

(a) *Una funzione  $f : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  è integrale primo per il sistema hamiltoniano  $\mathfrak{S}$  se e solo se vale la condizione, ovunque su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ :*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0. \quad (12.39)$$

(b) *Se  $f$  è di classe  $C^2$  e  $g : F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$  è un ulteriore integrale primo di classe  $C^2$ , allora il campo scalare su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  dato dalla parentesi di Poisson  $\{f, g\}$  è un ulteriore integrale primo.*

**Dimostrazione.** La prima proposizione è stata provata sopra. Per quanto riguarda la seconda osserviamo che:

$$\frac{\partial \{f, g\}}{\partial t} + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{\{\mathcal{H}, f\}, g\} - \{g, \{\mathcal{H}, f\}\},$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità di Jacobi. Usando l'antisimmetria e la linearità della parentesi di Poisson, possiamo ancora scrivere che:

$$\frac{\partial \{f, g\}}{\partial t} + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, \mathcal{H}\} \right\} = 0.$$

Notiamo ora che, essendo  $f$  e  $g$  integrali primi, deve essere:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \{g, \mathcal{H}\} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0.$$

Per linearità  $\{f, g\}$  soddisfa la condizione (12.39) ed è dunque anch'esso un integrale primo.  $\square$

**Osservazioni 12.10.**

(1) Il primo enunciato del teorema implica immediatamente che l'hamiltoniana stessa è un integrale primo se nel sistema di coordinate canoniche usato essa non dipende esplicitamente dal



tempo, essendo evidentemente  $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = 0$  per antisimmetria. Tuttavia questo risultato, a differenza del caso generale, vale solo nella carta considerata, dato che la funzione di Hamilton non definisce un campo scalare al variare della carta sullo spaziotempo delle fasi.

(2) Il numero massimo possibile di integrali primi su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  funzionalmente indipendenti è  $2n + 1$ . Questo segue dal fatto che sistemi di funzioni a valori in  $\mathbb{R}$  che siano funzionalmente indipendenti possono essere usati localmente come sistemi di coordinate su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  – oppure su sottovarietà – a causa della loro funzionale indipendenza, e del fatto che  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ha esattamente  $2n + 1$  dimensioni. Questo significa che, calcolando ricorsivamente parentesi di Poisson di integrali primi, ad un certo punto si troveranno gli stessi integrali primi già ottenuti oppure funzioni di essi.

(3) L'equazione di Liouville per la densità di probabilità  $\rho$  nello spaziotempo delle fasi può essere scritta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, \mathcal{H}\} = 0.$$

Diamo infine il teorema hamiltoniano che, giocando lo stesso ruolo del teorema di Noether in meccanica lagrangiana, connette la presenza di simmetrie di un sistema hamiltoniano all'esistenza di integrali primi.

**Teorema 12.5.** *Sia  $f \in C^2(F(\mathbb{V}^{n+1}))$  un campo scalare che genera un gruppo locale ad un parametro di trasformazioni canoniche attive  $\Phi^{(X_f)}$ . Sia  $\mathcal{H}$  una funzione di Hamilton riferita ad un sistema locale di coordinate canoniche su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  il cui dominio è invariante sotto l'azione di  $\Phi^{(X_f)}$ . I seguenti tre fatti sono equivalenti.*

(1)  *$f$  è un integrale primo.*

(2) *Vale ovunque nelle coordinate considerate:*

$$\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

(3) *La funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}$  può essere definita in modo tale che risulti essere invariante in forma al prim'ordine sotto l'azione del gruppo locale ad un parametro di diffeomorfismi generato da  $X_f$ .*

*Se valgono le condizioni (1), (2) e (3), e se  $Z$  è il campo vettoriale dinamico associato all'evoluzione hamiltoniana, allora vale anche:*

$$[X_f, Z] = 0 \tag{12.40}$$

*sulla carta considerata e pertanto, per il Teorema 4.13,  $\Phi^{(X_f)}$  trasforma soluzioni delle equazioni di Hamilton associate a  $\mathcal{H}$  in analoghe soluzioni.*

*Viceversa, se vale (12.40) allora esiste una funzione  $g = g(t)$  per cui  $f_1 := f + g$  è un integrale primo. Per costruzione  $f_1$ , genera lo stesso gruppo ad un parametro di  $f$  sotto al quale l'hamiltoniana è invariante.*

**Osservazioni 12.11.** Il teorema è in realtà più potente del teorema di Noether dato che, in questo contesto hamiltoniano abbiamo due ulteriori fatti, assenti con tale generalità, nella formulazione di Lagrange:

(a) l'integrale primo associato ad una simmetria risulta essere proprio la funzione che *genera la simmetria* nel senso dei gruppi locali ad un parametro di trasformazioni canoniche;

(b) come si evince dalle due ultime asserzioni, l'invarianza in forma della funzione di Hamilton rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni canoniche *equivale* al fatto che le soluzioni delle equazioni di Hamilton rimangano tali sotto l'azione del gruppo.

Il punto (b) è di fondamentale importanza in fisica, perché riunisce due idee sulla nozione di *invarianza di un sistema sotto un gruppo di trasformazioni*: una di natura più teorica e più dipendente dalla formalizzazione matematica che si usa (invarianza della funzione di Lagrange, della funzione di Hamilton ecc.) e l'altra di natura più pratica (i moti del sistema sono trasformati in moti del sistema).

**Dimostrazione del Teorema 12.5.** L'equivalenza tra (1) e (2) è già stata provata nel teorema precedente. Mostriamo l'equivalenza di tali condizioni con (3). La condizione di invarianza in forma al prim'ordine si scrive (si ricordi che  $t = t'$ ):

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}') + uO'_{(t, \mathbf{x}')} (u) . \quad (12.41)$$

Tenendo conto che deve anche valere, per la Proposizione 12.7:

$$\mathcal{H}'(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{x}')) - u \frac{\partial f}{\partial t} + uO_{(t', \mathbf{x}')} (u) , \quad (12.42)$$

dalla precedente formula si trova che:

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}') = \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) - u \frac{\partial f}{\partial t} + uO''_{(t', \mathbf{x}')} (u) . \quad (12.43)$$

Tenendo fisse le altre variabili, dividendo per  $u$  e facendo il limite per  $u \rightarrow 0$  otteniamo che:

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \mathcal{H}(t, \mathbf{x}') + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

Esplicitamente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} \frac{dx'^k}{du} \Big|_{u=0} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

ossia

$$\sum_{k,i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} S^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

che può finalmente riscriversi nella forma (2):

$$\{f, \mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 .$$

Procedendo al contrario abbiamo che questa identità implica (12.43). Quest'ultima, in virtù di (12.42) implica (12.41) cioè la (1). Abbiamo provato in questo modo che (1), (2) e (3) sono equivalenti.

Per quanto riguarda la penultima affermazione, si osservi che il vettore dinamico  $Z$  può scriversi formalmente:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - X_{\mathcal{H}} ,$$

pertanto, usando il fatto che  $[X_f, \frac{\partial}{\partial t}] = X_{-\frac{\partial f}{\partial t}}$  e facendo in particolare uso di (4) della Proposizione 12.4 si trova:

$$[X_f, Z] = \left[ X_f, \frac{\partial}{\partial t} - X_{\mathcal{H}} \right] = \left[ X_f, \frac{\partial}{\partial t} \right] + [X_f, X_{-\mathcal{H}}] = X_{-\frac{\partial f}{\partial t}} + X_{-\{f, \mathcal{H}\}} = -X_{\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}} = 0 .$$

Per provare l'ultima affermazione si osservi che, assumendo valida la (12.40) e procedendo come appena fatto sopra, si trova che:

$$X_{\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}} = 0 .$$

Applicando la definizione di  $X_g$  ne consegue che, per  $i = 1, \dots, 2n$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \right) = 0$$

per cui, localmente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = h(t) .$$

Definendo  $g(t) = -\int_{t_0}^t h(u)du$  e quindi  $f_1 = f + g$  si ha la

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{f_1, \mathcal{H}\} = 0 .$$

Dato che  $f$  e  $f_1$  differiscono per una sola funzione di  $t$ , si ha anche  $X_f = X_{f_1}$  e quindi il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche che generano è lo stesso. In base all'equivalenza di (2) e (3), tale gruppo lascia invariata in forma al prim'ordine la funzione di Hamilton. Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

### Esempi 12.5.

1. Consideriamo nuovamente la particella di massa  $m$ , che si muove in un piano, individuata da coordinate polari  $(r, \theta)$  e sottoposta ad una forza conservativa con energia potenziale centrale  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(r)$ . L'hamiltoniana della particella sarà allora:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \mathcal{U}(r) . \quad (12.44)$$

Consideriamo ancora la funzione  $f(r, \theta, p_r, p_\theta) := p_\theta$  ed il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche ad essa associato. Tale gruppo, come visto precedentemente, agisce come:

$$\phi_u^{(X_{p_\theta})}(r, \theta, p_r, p_\theta) = (r, \theta - u, p_r, p_\theta) =: (r', \theta', p_r', p_\theta') , \quad (12.45)$$

e quindi, nello spazio delle configurazioni, corrisponde a rotazioni di un angolo  $-u$  del punto attortale gruppono all'origine. Dato che la trasformazione canonica  $\phi_u^{(X_{p_\theta})}$  non dipende dal tempo ed è quindi completamente canonica, possiamo porre  $\mathcal{K} \equiv 0$  e l'hamiltoniana  $\mathcal{H}'(\mathbf{x}')$  può essere definita come  $\mathcal{H}'(\mathbf{x}') = \mathcal{H}(\mathbf{x}(\mathbf{x}'))$  cioè, da (12.45):

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \mathcal{H}(r', \theta' + u, p'_r, p'_\theta) .$$

Abbiamo trovato che:

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \frac{p'^2_r}{2m} + \frac{p'^2_\theta}{2mr'^2} + \mathcal{U}(r') .$$

Per confronto con (12.44) abbiamo che:

$$\mathcal{H}'(r', \theta', p'_r, p'_\theta) = \mathcal{H}(r', \theta', p'_r, p'_\theta)$$

e quindi l'hamiltoniana è invariante in forma (non solo al prim'ordine) sotto l'azione di  $\phi^{X_{p_\theta}}$ . Di conseguenza la funzione  $p_\theta$  si conserva sui moti del sistema. Tale grandezza è il momento angolare del punto materiale considerato.

Equivalentemente, il calcolo diretto di  $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}$  mostra che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

mentre

$$\{f, \mathcal{H}\} = 1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 ,$$

dato che  $\mathcal{H}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto  $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = 0$  e ritroviamo, in base al teorema provato sopra, che  $f$  è un integrale primo.

Infine, per l'ultima affermazione del teorema, deve accadere che, se  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  descrive un moto del punto materiale, anche  $t \mapsto \phi_u^{X_{p_\theta}}(\mathbf{x}(t))$  deve descrivere un moto del sistema fisico per ogni fissato valore dell'angolo  $u$ .

**2.** Consideriamo un sistema di due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, descritte in coordinate cartesiane ortonormali di un sistema di riferimento inerziale. Il vettore posizione di ciascuno dei due punti sarà indicato con  $\mathbf{x}_i$  dove  $i = 1, 2$  etichetta i due punti. I momenti coniugati alle componenti dei due vettori posizione saranno le componenti dell'impulso  $\mathbf{p}_i$  di ciascuno dei due punti. Ammettiamo che le due particelle interagiscano con forze conservative individuate dall'energia potenziale  $\mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = U(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2)$ , dove  $U$  è una funzione di classe  $C^2$ . Nel sistema di riferimento considerato, la funzione hamiltoniana del punto materiale sarà dunque, usando le coordinate canoniche dette:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) .$$

Fissiamo un versore  $\mathbf{n}$  e consideriamo la funzione

$$f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) := \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n} - t \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} .$$

Il calcolo diretto mostra che:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} - t\mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^2 \nabla_{\mathbf{x}_i} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 ,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che, per costruzione  $\nabla_{\mathbf{x}_1} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\nabla_{\mathbf{x}_2} \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . In base al teorema provato, ne consegue che  $f$  è un integrale primo, ma anche che l'hamiltoniana è invariante in forma al prim'ordine sotto il gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche generate da  $f$ . La legge di conservazione di  $f$  esprime semplicemente il fatto che sui moti del sistema (cioè sulle soluzioni delle equazioni di Hamilton) vale la ben nota identità, che segue dalla conservazione dell'impulso totale e dal terzo principio della dinamica e che afferma che il centro di massa del sistema evolve come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema ed impulso pari all'impulso totale del sistema:

$$\sum_{i=1}^2 m_i \frac{\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)}{t} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} .$$

Cosa possiamo dire del gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche generate da  $f$ ? Le equazioni che determinano tale gruppo di trasformazioni sono:

$$\frac{d\mathbf{p}'_i}{du} = \nabla_{\mathbf{x}'_i} f(t, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = m\mathbf{n} , \quad \frac{d\mathbf{x}'_i}{du} = -\nabla_{\mathbf{p}'_i} f(t, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = t\mathbf{n} .$$

Queste possono essere integrate completamente e producono:

$$\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i + m u \mathbf{n} , \quad \mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + t u \mathbf{n} . \quad (12.46)$$

Deve allora essere chiaro che per ogni fissato  $u$ , la trasformazione scritta sopra è una *trasformazione pura di Galileo* (vedi il capitolo 2) nella direzione  $\mathbf{n}$  e con velocità  $u\mathbf{n}$ .

*L'invarianza in forma della funzione di Hamilton sotto tale gruppo di trasformazioni esprime il fatto che i sistemi di riferimento inerziali connessi da tali trasformazioni sono fisicamente equivalenti ai fini dello studio della dinamica.*

Controlliamo direttamente l'invarianza in forma della funzione di Hamilton. La (12.36) nel caso in esame produce:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) &= \mathcal{H}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \int_0^u \sum_{i=1}^2 (\mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{n}) du \\ &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \int_0^u \sum_{i=1}^2 (\mathbf{p}_i + u m_i \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} du \\ &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) + u \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} + \frac{u^2}{2} \sum_{i=1}^2 m_i , \end{aligned}$$

dove abbiamo anche usato il fatto che, a causa dell'invarianza traslazionale dell'energia potenziale tenendo conto della seconda in (12.46):

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \mathcal{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) .$$

Eseguendo gli ovvi calcoli, dove  $t' = t$  e tenendo ancora conto di (12.46), troviamo infine:

$$\mathcal{H}'(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \frac{\mathbf{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}'_2{}^2}{2m_2} + \mathcal{U}(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = \mathcal{H}(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) . \quad (12.47)$$

L'invarianza in forma della funzione di Hamilton è allora evidente.

**3.** Per sistemi di  $N$  punti materiali isolati che interagiscono con forze interne conservative, si verifica facilmente, descrivendoli in coordinate cartesiane ortonormali di un riferimento inerziale, che l'hamiltoniana è invariante informale al prim'ordine (ma anche finitamente), sotto l'azione di ognuno dei 9 tipi di sottogruppi ad un parametro indipendenti in cui si decompone il gruppo di Galileo, viste come trasformazioni canoniche, escludendo le traslazioni temporali, che non preservano le fibre dello spaziotempo delle fasi e devono essere discusse a parte. In questo modo si vede che, nel senso chiarito dal teorema precedente:

(1) le rotazioni attorno ad un asse sono generate dalla componente del momento angolare totale del sistema rispetto all'asse di rotazione,

(2) le traslazioni lungo una direzione sono generate dalla componente dell'impulso totale del sistema rispetto a tale direzione,

(3) le trasformazioni pure di Galileo lungo una direzione ( $\mathbf{n}$ ) sono generate dalla componente del boost totale del sistema rispetto a tale direzione:  $\mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{x}_i - t \mathbf{p}_i)$ . Tali funzioni generatrici sono a loro volta integrali primi.

## 12.4 Forma di Poincaré-Cartan e teoria di Hamilton-Jacobi

In questa sezione ritorniamo a considerare la nozione di trasformazione canonica e di funzione generatrice, da un punto di vista differente rispetto a quanto fatto precedentemente. Il fine principale quello di arrivare a formulare la teoria di Hamilton-Jacobi. Si tratta della teoria relativa all'omonima equazione che individua una certa classe di funzioni generatrici di alcune trasformazioni canoniche molto particolari: nelle nuove coordinate canoniche l'evoluzione del sistema, letta nelle prime  $n$  coordinate  $q^1, \dots, q^n$  è la quiete. Dal punto di vista applicativo determinare questa trasformazione canonica è equivalente a risolvere il problema del moto, ma dal punto di vista teorico, il nuovo punto di vista ha consentito nuovi ed importantissimi sviluppi della meccanica di Hamilton. In particolare, questo genere di nozioni hanno permesso la prima formulazione della Meccanica Quantistica da parte di Schrödinger in termini dell'equazione che porta il suo nome.

### 12.4.1 La forma di Poincaré-Cartan e la condizione di Lie come caratterizzazione delle trasformazioni canoniche

Vogliamo arrivare a provare un teorema di caratterizzazione delle trasformazioni canoniche che giocherà un ruolo importante nel seguito. Tale teorema, dovuto a Lie, tira in causa la **forma di Poincaré-Cartan**:

$$\Theta_{\mathcal{H}} := \sum_{k=1}^n p_k dq^k - \mathcal{H} dt. \quad (12.48)$$

Sopra abbiamo supposto di lavorare in un sistema di coordinate locali  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  nello spaziotempo delle fasi, in cui  $t$  è il tempo assoluto (definito a meno della solita costante additiva) e  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  sono coordinate locali sulla fibra  $\mathbb{F}_t$ , ma non abbiamo fatto alcuna richiesta esplicita sul tipo delle coordinate (che possono non essere canoniche o naturali). La funzione differenziabile a valori reali  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  non ha alcun significato particolare, per il momento. La forma differenziale  $\Theta_{\mathcal{H}}$  è definita nel dominio delle coordinate considerate e dipende esplicitamente sia dalle coordinate scelte che dalla funzione  $\mathcal{H}$ .

**Osservazioni 12.12.** Si osservi che se le coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  sono coordinate naturali dello spaziotempo delle fasi e  $\mathcal{H}$  è la funzione di Hamilton riferita ad una certa lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la forma di Poincaré-Cartan  $\Theta_{\mathcal{H}}$  si ottiene formalmente (tramite la trasformazione di Legendre) dalla forma di Poincaré-Cartan  $\Omega_{\mathcal{L}}$  introdotta nel teorema 8.3, come è immediato provare.

Mostreremo come le equazioni di Hamilton si possano scrivere in termini della forma di Poincaré-Cartan nel momento in cui si pensa a  $\mathcal{H}$  in termini della funzione di hamilton del sistema fisico. Premettiamo un importante lemma tecnico.

**Lemma 12.2.** Se  $p \in F(\mathbb{V}^{n+1})$ , l'applicazione lineare  $d\Theta_{\mathcal{H}}|_p : T_p F(\mathbb{V}^{n+1}) \rightarrow T_p^* F(\mathbb{V}^{n+1})$  ha nucleo di dimensione 1.

**Dimostrazione.** Vale:

$$d\Theta_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k - d\mathcal{H} \wedge dt.$$

Se pensiamo  $d\Theta_{\mathcal{H}}|_p$  come matrice antisimmetrica  $(2n+1) \times (2n+1)$  che agisce sui vettori colonna le cui componenti sono quelle di

$$Z = Z^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \dots + Z^n \frac{\partial}{\partial q^n} + Z_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + Z_n \frac{\partial}{\partial p_n} + Z' \frac{\partial}{\partial t} \quad (12.49)$$

abbiamo immediatamente che il minore superiore di ordine  $2n$  coincide con la matrice  $S$  che ha determinante non nullo dato che  $SS = -I$  e quindi  $(\det S)^2 = 1$ . Ne consegue che la matrice che rappresenta  $d\Theta_p$  ha rango  $\geq 2n$  e dunque il nucleo della matrice può, al più, avere dimensione 1. D'altra parte la matrice suddetta è antisimmetrica per cui è diagonalizzabile sul campo

complesso e i suoi  $2n + 1$  autovalori sono nulli o immaginari puri. Dato che il prodotto di tali autovalori deve coincidere con il determinante che è reale dato che la matrice è reale e  $2n + 1$  è un numero dispari, almeno un autovalore deve essere nullo. Concludiamo che la dimensione del nucleo di  $d\Theta_{\mathcal{H}}|_p$  è esattamente 1.  $\square$

Come preannunciato, la forma di Poincaré-Cartan consente di scrivere in modo alternativo le equazioni di Hamilton, o meglio le equazioni che determinano il campo vettoriale dinamico  $Z$  (12.23) (vedi (2) in osservazioni 12.5) le cui linee integrali sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton. Vale a tal proposito la seguente utile proposizione.

**Proposizione 12.8.** *Si consideri un sistema fisico hamiltoniano descritto sullo spazio delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  dal campo vettoriale dinamico  $Z$  definito globalmente. Si consideri poi un sistema di coordinate locali canoniche o naturali  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$ , sia  $\mathcal{H}$  la funzione di Hamilton del sistema (per cui vale (12.23)) nelle coordinate dette e sia  $\Theta_{\mathcal{H}}$  la corrispondente forma di Poincaré-Cartan.*

*Nel sistema di coordinate considerato, il campo vettoriale dinamico  $Z$  suddetto è completamente individuato dalla coppia di richieste:*

$$\langle Z, dT \rangle = 1, \quad (12.50)$$

$$(d\Theta_{\mathcal{H}})(Z) = 0, \quad (12.51)$$

dove  $T$  è al solito il tempo assoluto.

**Dimostrazione.** Si prova facilmente per sostituzione diretta che  $Z$  definito come in (12.23) soddisfa (12.50) e (12.51). Ogni altro vettore che soddisfa (12.51) deve allora essere proporzionale a  $Z$  per il lemma 12.2. Tale vettore deve infine essere uguale a  $Z$  se soddisfa anche (12.50).  $\square$

**Osservazioni 12.13.** È possibile definire sistemi hamiltoniani in cui il campo dinamico  $Z$  sia ben definito globalmente, localmente sia indotto da funzioni di Hamilton, ma non esista alcuna funzione di Hamilton assegnabile globalmente (anche sfruttando un atlante specifico) che individui il campo  $Z$ . Ciò segue dalla discussione sviluppata nella sezione 8.5.4. Supponiamo che  $\mathbb{V}^{2+1} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ . Al solito  $\mathbb{R}$  è l'asse del tempo assoluto e  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  si identifica con ogni spazio delle configurazioni al tempo  $t$ . Supponiamo quindi che le equazioni newtoniane del moto siano le seguenti, in coordinate standard di  $\mathbb{R}^2$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{kx}{x^2 + y^2}.$$

Se consideriamo il campo globalmente definito su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  in coordinate naturali *globali* associate alle coordinate standard di  $\mathbb{R}^2$ :

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_x}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{p_y}{m} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{k}{m} \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial p_x} + \frac{k}{m} \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial p_y}.$$



le equazioni di Hamilton associate a questo campo sono evidentemente equivalenti a quelle di sopra quando scritte al secondo ordine. Tuttavia non si può definire una funzione di Hamilton di classe  $C^1$  assegnata globalmente su  $F(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}))$  che generi il campo  $Z$  suddetto. Infatti, se esistesse una funzione di Hamilton, in base alla forma del campo di sopra dovrebbe avere la forma (a meno di funzioni additive del tempo):

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \mathcal{U}(x, y),$$

dove il gradiente della funzione  $\mathcal{U}$  deve riprodurre il campo vettoriale che appare a secondo membro delle equazioni newtoniane scritte sopra. Tale funzione  $\mathcal{U}$  non esiste, se si richiede che sia definita su tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Il motivo è stato spiegato nella sezione 8.5.4: il campo di forze a secondo membro delle equazioni newtoniane è irrotazionale, ma non è conservativo, perché l'integrale di esso lungo un cammino chiuso che circonda l'origine non si annulla. Usando coordinate polari piane *ed escludendo per esempio il semiasse  $x$  negativo*, una funzione di Hamilton che genera nell'insieme detto il campo  $Z$  è:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + k\theta.$$

È ovvio che tale funzione non può essere estesa, nemmeno per continuità, a tutto lo spazio delle fasi.

Possiamo ora enunciare e provare l'importante teorema di Lie che caratterizza le trasformazioni canoniche in termini delle forme di Poincaré-Cartan. (Sotto assumiamo che i sistemi di coordinate su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  siano di classe  $C^\infty$ , ma sarebbe sufficiente lavorare con una struttura differenziabile di classe  $C^2$ .)

**Teorema 12.6.** (di Lie) *Si consideri un sistema fisico descritto sullo spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  e due sistemi di coordinate locali  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  e  $t', q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n$  definiti su due domini  $U, U' \subset F(\mathbb{V}^{n+1})$  rispettivamente, con  $U \cap U' \neq \emptyset$ , dove quindi  $t$  e  $t'$  siano il tempo assoluto a meno di costanti additive e anche  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  e  $q'^1, \dots, q'^n, p'_1, \dots, p'_n$  siano coordinate locali sulle fibre  $\mathbb{F}_\tau$  in modo tale che su  $U \cap U'$ :*

$$t' = t + c, \quad (12.52)$$

$$q'^k = q^k(t, q, p), \quad k = 1, \dots, n, \quad (12.53)$$

$$p'_k = p'_k(t, q, p), \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.54)$$

*Valgono i fatti seguenti.*

(a) *Se la trasformazione di coordinate (12.52)-(12.54) è canonica, allora, per ogni scelta della funzione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  di classe  $C^1$ , per ogni  $a \in U \cap U'$ , esiste un intorno  $V_a$  di  $a$ , una funzione differenziabile  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t', q', p')$  di classe  $C^1$  ed una funzione  $f$  di classe  $C^1$  definite in  $V_a$ , in modo tale che valga la **condizione di Lie**:*

$$\Theta_{\mathcal{H}} - \Theta'_{\mathcal{H}'} = df, \quad (12.55)$$

dove  $\Theta_{\mathcal{H}}$  è la forma di Poincaré-Cartan (12.48) e  $\Theta'_{\mathcal{H}'}$  è l'analogia forma di Poincaré-Cartan riferita alle coordinate  $t', q^1, \dots, q^n, p'_1, \dots, p'_n$  rispetto a  $\mathcal{H}'$  in  $V_a$ .

(b) Se per ogni fissata funzione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  di classe  $C^1$  definita su  $U$  esiste una funzione differenziabile  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t', q', p')$  di classe  $C^1$  su  $U'$  per la quale, su  $U \cap U'$  vale la condizione di Lie (12.55) per qualche funzione  $f$  di classe  $C^2$  su  $U \cap U'$ , allora la trasformazione di coordinate (12.52)-(12.54) è canonica.

(c) Se la carta locale delle coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  è canonica o naturale,  $\mathcal{H}$  (di classe  $C^1$ ) è la funzione di Hamilton di un sistema fisico in tale carta, ogni  $\mathcal{H}'$  (di classe  $C^1$ ) definita in coordinate  $t', q^1, \dots, q^n, p'_1, \dots, p'_n$  che soddisfa (12.55) per qualche  $f$ , produce le stesse equazioni di Hamilton associate a  $\mathcal{H}$  in  $U \cap U'$ .

(d) Se in (12.52)-(12.54)  $t$  non appare a secondo membro in (12.53) e (12.54), allora la trasformazione di coordinate è completamente canonica se e solo se

$$\sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k = \sum_{k=1}^n dp'_k \wedge dq'^k. \quad (12.56)$$

In questo caso, se  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  è la funzione di Hamilton del sistema nelle coordinate iniziali, la funzione di Hamilton nelle coordinate  $t' = t, q, p$  è:

$$\mathcal{H}'(t', q', p') = \mathcal{H}(t, q(q', p'), p(q', p')).$$

**Dimostrazione.** (a) In virtù del lemma di Poincaré (teorema B.3), la tesi equivale a provare che, se la trasformazione è canonica, allora, per ogni fissato  $\mathcal{H}$  possiamo trovare  $\mathcal{H}'$  per il quale la forma differenziale  $\Theta_{\mathcal{H}} - \Theta'_{\mathcal{H}'}$  è chiusa cioè  $d\Theta_{\mathcal{H}} - d\Theta'_{\mathcal{H}'} = 0$ , che può scriversi (usando il teorema B.2):

$$\sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k - \sum_{k=1}^n dp'_k \wedge dq'^k - (d\mathcal{H} - d\mathcal{H}') \wedge dt = 0, \quad (12.57)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $dt = dt'$ . Nel seguito vogliamo quindi provare per ogni fissato  $\mathcal{H}$ , nell'intorno di ogni punto possiamo trovare  $\mathcal{H}'$  per cui vale (12.57).

Usando la stessa notazione della definizione 12.1, si ha facilmente che:

$$\sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq^k - d\mathcal{H} \wedge dt = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} dx^i \wedge dx^j - d\mathcal{H} \wedge dt.$$

Con qualche banale calcolo, passando alle nuove coordinate  $(t', x') \equiv (t', q', p')$ , risulta:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} dx^i \wedge dx^j - d\mathcal{H} \wedge dt = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^k \wedge dx'^l + \left( \sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l - d\mathcal{H} \right) \wedge dt'$$

Dato che, per ipotesi la trasformazione  $t' = t + c$ ,  $x' = x'(t, x)$  è canonica, risulta che

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^k \wedge dx'^l = \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{ij} dx'^i \wedge dx'^j.$$

In questo modo il primo membro di (12.57) può essere trascritto come:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{ij} dx'^i \wedge dx'^j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{ij} dx'^i \wedge dx'^j + \left( \sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l - d\mathcal{H} \right) \wedge dt + d\mathcal{H}' .$$

Cioè:

$$\left( \sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l - d\mathcal{H}' \right) \wedge dt + d\mathcal{H}' \wedge dt .$$

Per provare la (12.57), è allora sufficiente provare che, *per ogni fissato  $t'$* , la forma

$$\sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l$$

sia chiusa (calcolando il differenziale rispetto alle sole coordinate  $x'$ ). Infatti, in tal caso, il lemma di Poincaré implicherebbe che, se fissiamo un punto su  $p \in \mathbb{F}_{t'_0}$  di coordinate  $(t'_0, x'_0)$  e variamo  $t'$  intorno a  $t'_0$ , in una palla  $B \subset \mathbb{F}_{t'}$  (in coordinate) centrata in  $x'_0$  di raggio finito, indipendente da  $t'$ , abbastanza piccolo:

$$\sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l = dg_{t'}$$

dove il differenziale  $d$  a secondo membro agisce nelle sole coordinate  $x'$ . Potremmo allora concludere che, al variare di  $t'$  attorno a  $t'_0$ , in un cilindro attorno a  $p$  sufficientemente piccolo verrebbe definita una funzione  $g$  rispetto a tutte le  $n+1$  coordinate  $t'$  e  $x'$  tale che<sup>9</sup>:

$$dg = \sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l + \frac{\partial g}{\partial t'} dt' .$$

Se, in queste condizioni definissimo  $\mathcal{H}' := \mathcal{H} - g$  la (12.57) risulterebbe essere immediatamente verificata. Per concludere, è quindi sufficiente verificare che, per ogni fissato  $t'$ , la forma  $\sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l$  sia chiusa, cioè:

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial}{\partial x'^k} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} = \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial}{\partial x'^l} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}$$

e cioè:

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} + \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^k \partial x'^l} = \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^l \partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} + \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^l \partial x'^k} ,$$

---

<sup>9</sup>Si osservi che la funzione  $g = g(t', x')$  è sicuramente di classe  $C^1$ , dato che si può esplicitamente costruire tramite un integrale di linea di  $\sum_{i,j,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l$  lungo il segmento che unisce  $(t', x'_0)$  a  $(t', x)$ , vedi (5) nelle osservazioni B.4.

che, tenendo conto del teorema di Schwarz, equivale a:

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} = \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^l \partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}$$

e che, ancora, si può scrivere equivalentemente, tenendo conto dell'antisimmetria della matrice  $S$ :

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^k \partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} + \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^l \partial t'} = 0. \quad (12.58)$$

In definitiva possiamo concludere che (a) è valido se la (12.58) è verificata. Questa identità è vera nelle nostre ipotesi. Infatti, dato che la trasformazione è canonica deve essere:

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} = S_{kl}.$$

Se deriviamo i due membri in  $t'$ , tenendo conto che i coefficienti  $S_{rs}$  sono costanti e che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di Schwarz, otteniamo la (12.58). Questo conclude la dimostrazione di (a).

(b) Le ipotesi in (b) implicano che, per una fissata  $\mathcal{H}$  valga la (12.57) per qualche funzione  $\mathcal{H}'$  che può essere esplicitata in:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^k \wedge dx'^l + \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l - d\mathcal{H} \right) \wedge dt' - \frac{1}{2} \sum_{k,l} S_{ij} dx'^k \wedge dx'^l + d\mathcal{H}' \wedge dt' = 0$$

cioè:

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - S_{kl} \right) dx'^k \wedge dx'^l + \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l + d(\mathcal{H} - \mathcal{H}') \right) \wedge dt' = 0.$$

Esplicitando i calcoli nel secondo addendo, si ottiene all fine che deve essere, per qualche set di funzioni  $A_k$

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - S_{kl} \right) dx'^k \wedge dx'^l + \sum_k A_k(t', x') dx'^k \wedge dt' = 0.$$

Dato che  $dx'^l \wedge dx'^l$  e  $dx'^k \wedge dt'$  sono linearmente indipendenti, deve essere in particolare:

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - S_{kl} \right) dx'^k \wedge dx'^l = 0,$$

che equivale a dire che:

$$\sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} = S_{kl} . \quad (12.59)$$

Per definizione, questo significa che la trasformazione di coordinate (12.52)-(12.54) è canonica.

(c) La prova di (c) segue immediatamente dalla proposizione 12.8 osservando che (12.55) implica che  $d\Theta_{\mathcal{H}} = d\Theta_{\mathcal{H}'}$  e pertanto i vettori dinamici  $Z$  e  $Z'$  associati a  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  secondo (12.23) devono coincidere su  $U \cap U'$ .

(d) Dire che la trasformazione è canonica equivale a dire che vale (12.59) che, a sua volta, equivale a:

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - S_{kl} \right) dx'^k \wedge dx'^l = 0 . \quad (12.60)$$

Mettiamoci ora nelle ipotesi  $\frac{\partial x^i}{\partial t'} = 0$  – che, vista la struttura delle (12.52)-(12.54), equivalgono a  $\frac{\partial x'^k}{\partial t} = 0$  – In questo caso la trasformazione (12.52)-(12.54) è canonica se e solo se è completamente canonica. Dato che  $\frac{\partial x^i}{\partial t'} = 0$  l'identità (12.60) può allora equivalentemente risciversi:

$$\frac{1}{2} \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} - S_{kl} \right) dx'^k \wedge dx'^l + \left( \sum_{i,j} S_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t'} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} dx'^l \right) \wedge dt' = 0 .$$

Questa identità non è altro che la (12.56). Concludiamo che, sotto le ipotesi  $\frac{\partial x'^k}{\partial t} = 0$ , la (12.56) è equivalente alla completa canonicità della trasformazione (12.52)-(12.54). L'ultimo asserto è vero come conseguenza dell'ultimo asserto del teorema 12.1.  $\square$

## 12.4.2 Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche

Il Teorema 12.6 consente di introdurre un'utilissima nozione, quella di *funzione generatrice* di una trasformazione canonica. Nel seguito, dato che tutti i ragionamenti saranno di carattere locale, non presteremo attenzione alle richieste topologiche sui domini dei sistemi di coordinate canoniche, dato che ci si può sempre ridurre ad un dominio connesso e relativamente semplicemente connesso restringendo il dominio iniziale attorno ad ogni fissato punto dello spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

Nello spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , consideriamo una trasformazione canonica dalle coordinate canoniche  $t, q, p$  alle coordinate canoniche  $T, Q, P$  per un sistema fisico descritto dalla funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  (di classe  $C^1$ ) nelle coordinate  $t, q, p$ . Sappiamo per il teorema 12.6 che, localmente, deve essere verificata la condizione di Lie:

$$\sum_k P_k dQ^k - \mathcal{H} dT = \sum_k p_k dq^k - \mathcal{H} dt + dF_1$$

per qualche coppia di funzioni  $\mathcal{K}$  e  $F_1$  e  $\mathcal{K}$  può essere pensato come la funzione di Hamilton nelle nuove coordinate canoniche  $T, Q, P$ . Dato che  $dt = dT$ , possiamo scrivere l'identità di sopra come:

$$\sum_k P_k dQ^k - \sum_k p_k dq^k - (\mathcal{K} - \mathcal{H})dt = dF_1 . \quad (12.61)$$

Conseguentemente, se pensiamo  $F_1$  come funzione di  $t, q, Q$  (ammesso che ciò sia possibile), devono valere le relazioni:

$$p_k = -\frac{\partial F_1}{\partial q^k}, \quad P_k = \frac{\partial F_1}{\partial Q^k}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \mathcal{H} .$$

Queste relazioni possono essere usate nella direzione opposta per definire una trasformazione canonica. Supponiamo infatti che, fissato un sistema di coordinate canonico  $t, q, p$  (di classe  $C^2$  almeno e d'ora in poi assumeremo di lavorare con sistemi di coordinate di tale classe almeno), sia assegnata una funzione  $F_1$  di classe  $C^3$  delle variabili  $t, q, Q$ , dove  $Q^1, \dots, Q^n$  sono nuove variabili definite in un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , e che, *per fissati*  $t, q$ , la funzione che associa  $(Q^1, \dots, Q^n)$  a  $(p_1, \dots, p_n)$  secondo la relazione:

$$p_k = -\frac{\partial F_1}{\partial q^k}(t, q, Q), \quad (12.62)$$

sia biettiva con inversa  $C^2$ . Usando il teorema della funzione implicita, una condizione sufficiente affinché localmente valga quanto appena richiesto è che ovunque e per ogni  $t$ :

$$\det \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^k \partial Q^h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0 . \quad (12.63)$$

Nelle ipotesi dette, se definiamo:

$$P_k := \frac{\partial F_1}{\partial Q^k}, \quad (12.64)$$

$$\mathcal{K} := \frac{\partial F_1}{\partial t} + \mathcal{H} . \quad (12.65)$$

dove,  $\mathcal{H}$  è una qualsiasi funzione  $C^1$  di  $t, q, p$ , abbiamo che la condizione (12.61) è automaticamente soddisfatta e quindi la trasformazione

$$T = t, \quad (12.66)$$

$$Q^k = Q^k(t, q, p), \quad (12.67)$$

$$P_k = P_k(t, q, p), \quad (12.68)$$

che viene a definirsi, in virtù del fatto che possiamo esprimere le  $Q^k$  in funzione delle  $p_k$  a  $t, Q$  fissati, è una trasformazione canonica per (b) del teorema 12.6, se risulta essere biettiva con inversa  $C^2$ . Quest'ultima richiesta è ancora localmente verificata se vale la condizione (12.63) perché, in tal caso, la relazione che associa  $q$  a  $P$  per  $t, p$  fissati può essere invertita

con regolarità come conseguenza del teorema della funzione implicita. Tale relazione inversa, insieme alla (12.62) individuano la trasformazione inversa

$$t = T, \quad (12.69)$$

$$q^k = q^k(T, Q, P), \quad (12.70)$$

$$p_k = p_k(T, Q, P). \quad (12.71)$$

Osserviamo ancora che, per (c) de teorema 12.6, se  $\mathcal{H}$  è la funzione hamiltoniana del sistema fisico in coordinate canoniche  $t, q, p$ , la funzione  $\mathcal{K}$  (espressa in coordinate  $T, Q, P$ ) è la funzione di Hamilton nelle nuove coordinate canoniche.

In definitiva, se in un sistema di coordinate canonico  $t, q, p$  è assegnata una funzione  $F_1$  di classe  $C^3$  delle variabili  $t, q, Q$  in modo tale che valga (12.63), allora, in un intorno di  $(t_0, q_0, p_0)$  nel dominio delle coordinate dette, viene definito un secondo sistema di coordinate canoniche  $T, Q, P$  tramite le relazioni  $t = T$  (12.62) e (12.64), in modo tale che la nuova funzione di Hamilton  $\mathcal{K}$  in queste coordinate, sia legata alla vecchia  $\mathcal{H}$  nelle coordinate iniziali, dalla (12.65). La funzione  $F_1 = F_1(t, q, Q)$  viene detta **funzione generatrice** della trasformazione canonica (12.66)-(12.68).

Possiamo procedere analogamente considerando altri tipi di funzioni generatrici:

$$F_2 = F_2(t, q, P), \quad F_3 = F_3(t, Q, p), \quad F_4 = F_4(t, P, p),$$

con rispettivamente la richiesta che:

$$\det \left[ \frac{\partial^2 F_2}{\partial q^k \partial P_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0, \quad \det \left[ \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q^k \partial p_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0, \quad \det \left[ \frac{\partial^2 F_4}{\partial P_k \partial p_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0. \quad (12.72)$$

In questi casi, le corrispondenti trasformazioni canoniche e la nuova hamiltoniana sono rispettivamente individuate da:

$$Q^k = -\frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad p_k = -\frac{\partial F_2}{\partial q^k}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \mathcal{H},$$

e

$$P_k = \frac{\partial F_3}{\partial Q^k}, \quad q^k = \frac{\partial F_3}{\partial p_k}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial F_3}{\partial t} + \mathcal{H},$$

ed infine:

$$Q^k = -\frac{\partial F_4}{\partial P_k}, \quad q^k = \frac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad \mathcal{K} = \frac{\partial F_4}{\partial t} + \mathcal{H}.$$

Nei tre casi considerati, la condizione di Lie,

$$\sum_k P_k dQ^k - \sum_k p_k dq^k - (\mathcal{K} - \mathcal{H})dt = df,$$

che assicura la canonicità delle trasformazioni è verificata definendo, rispettivamente:

$$f := F_2 + \sum_k Q^k P_k, \quad f := F_2 - \sum_k q^k p_k \quad f := F_2 - \sum_k q^k p_k + \sum_k Q^k P_k.$$

La prova di ciò è immediata per verifica diretta.

**Osservazioni 12.14.**

(1) Le varie funzioni generatrici  $F_k$  sono tra di loro connesse da trasformazioni di Legendre come per esempio:

$$F_2(t, q, P) = F_1(t, q, Q) - \sum_k P_k Q^k, \quad (12.73)$$

$$-Q^k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}. \quad (12.74)$$

(2) Ogni trasformazione canonica può essere generata da una funzione generatrice di tipo  $F_k$  con  $k = 1, 2, 3, 4$ , con l'aggiunta di qualche trasformazione che corrisponde allo scambio di componenti dei momenti  $p_k$  con componenti delle coordinate  $q^k$  e cambiamenti di segno.

**Esempi 12.6.**

1. L'esempio più semplice di funzione generatrice è:

$$F_2(q, P) := - \sum_k q^k P_k.$$

Si vede immediatamente che la trasformazione canonica generata è quella identica:

$$T = t, \quad Q^k = q^k, \quad P_k = p_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

2. Un esempio meno banale è la trasformazione canonica che scambia le  $q$  con le  $p$  a meno di un segno (necessario per la richiesta che la trasformazione sia canonica):

$$T = t, \quad Q^k = -p_k, \quad P_k = q^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si verifica immediatamente che questa trasformazione canonica ammette una funzione generatrice di tipo  $F_4$ ;

$$F_4(t, p, P) := - \sum_k p_k P_k.$$

3. Consideriamo la trasformazione di coordinate su  $\mathbb{R}^2$ , pensando  $q, p$  come le coordinate naturali di  $\mathbb{R}^2$ :

$$P = p/\sqrt{1 + (qp)^2}, \quad Q = q\sqrt{1 + (qp)^2}. \quad (12.75)$$

Si tratta di un'applicazione  $C^\infty$  da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ . Tale trasformazione è sicuramente biettiva, dato che, per costruzione risulta:  $QP = qp$  e quindi la trasformazione inversa esiste è  $C^\infty$  ed ha la forma:

$$p = P\sqrt{1 + (QP)^2}, \quad q = Q/\sqrt{1 + (QP)^2}. \quad (12.76)$$



La trasformazione (12.75) (in aggiunta all'ovvia  $T = t$ ) definisce anche una trasformazione totalmente canonica dato che il tempo non appare esplicitamente e  $dP \wedge dQ = dp \wedge dq$  come richiesto in (d) del teorema 12.6. Dimostriamolo. Vale:

$$dQ = \sqrt{1 + (qp)^2} dq + \frac{q(qp^2 dq + q^2 p dp)}{\sqrt{1 + (qp)^2}}$$

e quindi:

$$PdQ = pdq + \frac{pq}{1 + (qp)^2} (qp^2 dq + q^2 p dp),$$

cioè:

$$PdQ = pdq + \frac{(qp)^2}{1 + (qp)^2} d(qp) = pdq + d(qp - \arctan(qp)), \quad (12.77)$$

ed infine, calcolando la derivata esteriore:

$$dP \wedge dQ = dp \wedge dq.$$

La (12.77) implica anche che, comunque fissiamo la funzione  $\mathcal{H}$  pensabile indifferentemente come funzione di  $t, q, p$  oppure  $T, Q, P$ , valga la condizione di Lie:

$$PdQ - pdq - (\mathcal{K} - \mathcal{H})dt = d(qp - \arctan(qp))$$

se  $\mathcal{K} := \mathcal{H}$ . Il risultato ottenuto suggerisce che, localmente, possiamo pensare  $f(q, p) := qp - \arctan(qp)$  come funzione generatrice della trasformazione canonica (12.75). Per dare questa interpretazione dobbiamo prima di tutto cercare di esprimere questa funzione nelle variabili  $q, Q$ . Osserviamo a tal fine che dalla seconda in (12.76) risulta che, se  $(Q/q)^2 > 1$  ed il segno a secondo membro è fissato dal segno di  $pq$ :

$$p = \pm \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}.$$

La condizione  $(Q/q)^2 > 1$  è in realtà equivalente a  $qp \neq 0$  come segue immediatamente dalla seconda in (12.75). Pertanto, per esempio nella regione  $q, p > 0$  di  $\mathbb{R}^2$  (che, per (12.75), corrisponde a  $Q, P > 0$  nelle nuove variabili) vale che:

$$p = \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}, \quad P = p / \sqrt{1 + (qp)^2}$$

che, usando nella seconda relazione la prima, si può ancora scrivere come:

$$p = \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}, \quad P = \frac{1}{Q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}.$$

A questo punto torniamo alla funzione  $f(q, p) = qp - \arctan(qp)$  e, per  $qp > 0$ , esprimiamola come funzione di  $q, Q$ , cioè definiamo:

$$F_1(q, Q) := \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1} - \arctan\left(\sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}\right).$$

Per costruzione, o per verifica diretta, si ha subito che:

$$p = \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1} = -\frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad P = \frac{1}{Q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1} = \frac{\partial F_2}{\partial Q},$$

e ovviamente, dato che  $F_2$  non dipende esplicitamente da  $t$ :

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Si osservi infine che, come richiesto per poter dire che  $F_1$  è una funzione generatrice di una trasformazione canonica, nella regione  $q, p > 0$  (equivalente a  $Q, P > 0$ ) la relazione

$$p = -\frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{Q}{q}\right)^2 - 1}$$

per  $q$  fissato si può invertire con regolarità valendo:

$$Q = \sqrt{q^2(1 + (qp)^2)}.$$

Discorsi analoghi si possono fare per le altre regioni del piano  $\mathbb{R}^2$  che non includono l'origine.

### 12.4.3 Introduzione alla teoria di Hamilton-Jacobi

Consideriamo un sistema hamiltoniano descritto su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  e, in riferimento a coordinate locali canoniche  $t, q, p$ , indichiamo con  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q, p)$  la funzione di Hamilton del sistema. Un modo drastico per cercare di risolvere il problema del moto è quello di trovare, se esiste, una trasformazione canonica:

$$t = t, \tag{12.78}$$

$$Q^k = Q^k(t, q, p), \quad k = 1, \dots, n, \tag{12.79}$$

$$P_k = P_k(t, q, p), \quad k = 1, \dots, n, \tag{12.80}$$

in cui la nuova funzione di Hamilton  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t, Q, P)$  sia *identicamente nulla*. Se si riuscisse a determinare una simile trasformazione canonica, le soluzioni delle equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate canoniche risulterebbe avere forma banale. In altre parole, al variare di  $t$  varrebbe costantemente:

$$Q^k(t) = Q^k(t_0, q_0, p_0) =: Q_0^k, \quad P_k(t) = P_k(t_0, q_0, p_0) =: P_{0k}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{12.81}$$

dove  $q_0, p_0$  sono le condizioni iniziali assegnate al tempo  $t_0$  nelle coordinate iniziali. La soluzione delle equazioni di Hamilton nelle coordinate iniziali sarebbe allora, invertendo la trasformazione canonica:

$$q^k(t) = q^k(t, Q_0, P_0), \quad p_k(t) = P_k(t, Q_0, P_0), \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.82)$$

Almeno localmente, possiamo cercare di costruire una simile trasformazione canonica determinandone la sua funzione generatrice, per esempio del tipo  $F_2$ , cioè della forma  $S = S(t, q, P)$ . Le richieste su di essa saranno, come discusso precedentemente, che  $S$  è di classe  $C^3$  almeno e che, ovunque e per ogni  $t$  nel suo dominio di definizione:

$$\det \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial P_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0.$$

In questa situazione la condizione di Lie diventa (come precedentemente discusso):

$$\sum_k p_k dq^k - \mathcal{H} dt = - \sum_k Q^k dP_k + dS,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la funzione di Hamilton  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t, Q, P)$  deve essere la funzione identicamente nulla. Da tali relazioni abbiamo che deve essere, come sappiamo:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}, \quad Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

e ancora deve valere, considerando la derivata in  $t$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0.$$

Invertendo il ragionamento, possiamo concludere che se siamo riusciti a trovare una classe di funzioni  $S = S(t, q, P)$ , parametrizzata in  $P_1, \dots, P_n$ , che sia congiuntamente  $C^3$  in tutte le variabili (parametri inclusi), che soddisfi ovunque e per ogni  $t$  nel suo dominio di definizione:

$$\det \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial P_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0, \quad (12.83)$$

e che infine risolva l'**equazione di Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q, \nabla_q S) = 0, \quad (12.84)$$

allora, almeno localmente

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}, \quad Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (12.85)$$

individuano una trasformazione canonica tale che nelle nuove coordinate canoniche  $t, Q, P$  la funzione di Hamilton è identicamente nulla e pertanto il problema del moto è automaticamente

risolto come discusso sopra come in (12.82) (tenendo conto di (12.81)).

Una classe di soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi,  $S = S(t, q, P)$ , parametrizzata in  $P_1, \dots, P_n$ , di classe  $C^3$  congiuntamente e che soddisfi (12.83), si dice **integrale completo** di tale equazione. Nel caso un sistema fisico hamiltoniano ammetta un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi, si dice che tale sistema è **integrabile per quadrature**.

#### Osservazioni 12.15.

(1) Consideriamo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q, \dot{q})$  di classe  $C^3$  su un aperto di  $I \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto. Sia  $t_0 \in I$  e  $Q \in \Omega$  e consideriamo il problema di trovare le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange che escano da  $Q$  al tempo  $t_0$  e che arrivino, ad un fissato tempo  $t \in I$ , alla configurazione  $q \in \Omega$ .

Si noti che non si tratta di un problema di Cauchy, ma di un *problema con dati al bordo* e che, in particolare, non sono assegnate le componenti delle derivate temporali delle  $q$  al tempo iniziale. Si riesce comunque a provare [Arnold92] che, se  $|t - t_0|$  e  $\|q - Q\|$  sono abbastanza piccoli (cioè in un intorno aperto di  $(t_0, Q)$ ) esiste ed è unica una soluzione del problema detto, data dalla curva  $q' = q'(\tau|t, q)$  con il tempo assoluto  $\tau$  definito in un certo intervallo aperto che dipende da  $t$  e  $q$ . Inoltre la funzione  $(\tau, t, q) \mapsto q'(\tau|t, q)$  è  $C^2$ . Possiamo allora considerare la seguente funzione, detta **funzione principale di Hamilton**:

$$S(t, q) := \int_{t_0}^t \mathcal{L} \left( \tau, q'(\tau|t, q), \frac{\partial q'(\tau|t, q)}{\partial \tau} \right) d\tau. \quad (12.86)$$

Mostriamo ora che:  $S$  soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi (12.84) oltre che la prima delle (12.85).

Dalla definizione (12.86) di  $S$  abbiamo che:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} \left( t, q'(t|t, q), \frac{\partial q'(\tau|t, q)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right) + \int_{t_0}^t \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} d\tau + \int_{t_0}^t \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial^2 q'^k}{\partial t \partial \tau} d\tau.$$

L'ultimo integrale, scambiando l'ordine delle derivate in  $t$  e  $\tau$  per il teorema di Schwarz, può essere calcolato per parti producendo alla fine:

$$- \int_{t_0}^t \sum_k \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \right) \frac{\partial q'^k}{\partial t} d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} d\tau.$$

Inserendo nell'espressione trovata prima per  $\frac{\partial S}{\partial t}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \mathcal{L} \left( t, q'(t|t, q), \frac{\partial q'(\tau|t, q)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right) + \int_{t_0}^t \sum_k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^k} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \right) \right) \frac{\partial q'^k}{\partial t} d\tau \\ &\quad + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{\tau=t} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{\tau=t_0}. \end{aligned}$$

Cioè, tenendo conto del fatto che la curva  $q'$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} \left( t, q'(t|t, q), \frac{\partial q'(\tau|t, q)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right) + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{\tau=t} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{\tau=t_0} .$$

L'ultimo addendo a secondo membro è nullo dato che  $q'(t_0|t, q) = Q$  costantemente in  $t$ . Nello stesso modo, tenendo conto che  $q'(t|t, q) = q$ , derivando questa funzione in  $t$ , abbiamo che:

$$\frac{\partial q'^k}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} + \frac{\partial q'^k}{\partial t} \Big|_{\tau=t} = 0 .$$

Sostituendo sopra concludiamo che:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} \left( t, q'(t|t, q), \frac{\partial q'(\tau|t, q)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} \right) - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} .$$

In altre parole, se  $\mathcal{H}$  è la funzione di Hamilton associata a  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(t, q, \dot{q}) .$$

Passando in formulazione di Hamilton, se  $p_k$  indica il momento coniugato di  $q^k$ , possiamo anche scrivere:

$$\frac{\partial S(t, q)}{\partial t} + \mathcal{H}(t, q, p) = 0 .$$

Per concludere è sufficiente provare che:

$$\frac{\partial S(t, q)}{\partial q^h} = p_h .$$

Per provare questa identità partiamo ancora dalla (12.86) e, questa volta, deriviamo in  $q^h$ . Con passaggi del tutto analoghi a quelli svolti sopra, tenendo conto della validità delle equazioni di Eulero-Lagrange, otteniamo subito che:

$$\frac{\partial S}{\partial q^h} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \Big|_{\tau=t} - \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^k} \frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \Big|_{\tau=t_0} .$$

L'ultimo addendo a secondo membro è nullo dato che  $q'(t_0|t, q) = Q$  costantemente in  $q$ . Nello stesso modo, tenendo conto che  $q'(t|t, q) = q$ , derivando questa funzione in  $q^h$ , abbiamo che:

$$\frac{\partial q'^k}{\partial q^h} \Big|_{\tau=t} = \delta_h^k .$$

Sostituendo sopra abbiamo infine che:

$$\frac{\partial S}{\partial q^h} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^h} = p_h .$$

Questo conclude la dimostrazione.

(2) Si osservi che, nel caso in cui la funzione principale di Hamilton  $S$  soddisfi anche la richiesta:

$$\det \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial Q^h} \right]_{h,k=1,\dots,n} \neq 0,$$

ribattezzando le variabili  $Q^k$  con i nomi  $P_k$ , avremmo anche trovato un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

#### 12.4.4 Equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo

È interessante il sottocaso in cui la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$ , nelle coordinate canoniche considerate, non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p).$$

In questo caso si cerca una classe di soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi parametrizzate in  $P \equiv (P_1, \dots, P_n)$  della forma:

$$S = W(q, P) - tE(P), \quad (12.87)$$

dove  $E$  è una funzione differenziabile con continuità *assegnata* e  $W$  è una funzione *incognita* due volte differenziabile con continuità congiuntamente, detta **funzione caratteristica di Hamilton-Jacobi**. In questa situazione, l'equazione di Hamilton-Jacobi (12.84) diventa:

$$E(P) = \mathcal{H}(q, \nabla_q W). \quad (12.88)$$

Il requisito (12.83) diventa ora:

$$\det \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial q^k \partial P_h} \right]_{k,h=1,\dots,n} \neq 0. \quad (12.89)$$

Se, per un sistema hamiltoniano, esiste una funzione  $W$  come detto sopra per una qualche funzione  $E$ , si dice che il sistema è **separabile**. Più in generale, se vale:

$$\mathcal{H}(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = h(q^1, p_1) + \mathcal{H}'(q^2, \dots, q^n, p_2, \dots, p_n),$$

la variabile  $q^1$  è detta **separabile** se esiste una funzione  $W$  come detto sopra, della forma:

$$W(q^1, \dots, q^n, P_1, \dots, P_n) = w(q^1, P_1) + W'(q^2, \dots, q^n, P_2, \dots, P_n),$$

Una volta individuata una funzione  $W$  come detto per una fissata funzione  $E$ , si possono usare due procedure per determinare, localmente, la soluzione generale delle equazioni di Hamilton. Una procedura è quella di considerare la funzione principale di Hamilton:

$$S(q, P) := W(q, P) - tE(P)$$

e procedere esattamente come nel caso generale discusso sopra. Una seconda procedura consiste invece nel definire, localmente, una trasformazione *completamente canonica* usando le richieste:

$$t = t, \quad (12.90)$$

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q^k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (12.91)$$

$$Q^k = \frac{\partial W}{\partial P_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.92)$$

La (12.89) assicura che, localmente, le relazioni di sopra so possano scrivere come una funzione di classe  $C^2$  biettiva con inversa  $C^2$ :  $Q = Q(q)$ . Ulteriormente tale trasformazione è completamente canonica per (d) del teorema 12.6, valendo:

$$dW = \sum_k \frac{\partial W}{\partial q^k} dq^k + \sum_k \frac{\partial W}{\partial P_k} dP_k = \sum_k p_k dq^k + \sum_k Q^k dP_k,$$

e quindi, calcolando il differenziale:

$$0 = \sum_k dp_k \wedge dq^k + \sum_k dQ^k \wedge dP_k;$$

cioè:

$$\sum_k dq^k \wedge dp_k = \sum_k dQ^k \wedge dP_k.$$

La stessa (12.88) insieme a (d) nel teorema 12.6, dice che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  nelle nuove coordinate  $Q, P$  vale:

$$\mathcal{H}(Q, P) = E(P)$$

e quindi le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili producono banalmente:

$$P_k(t) = P_k(0) \quad k = 1, \dots, n, \quad (12.93)$$

$$Q^k = \left. \frac{\partial E}{\partial P_k} \right|_{P(0)} + Q^k(0), \quad k = 1, \dots, n. \quad (12.94)$$

## 12.5 \*Meccanica di Hamilton e strutture simplettiche

In questa sezione dopo aver introdotto la nozione di varietà simplettica prendendo come spunto particolari sistemi hamiltoniani, mostreremo come tale struttura si possa usare per formalizzare ulteriormente la meccanica di Hamilton.

### 12.5.1 Spazio delle fasi come varietà simplettica per sistemi hamiltoniani autonomi

Ci occuperemo ora della nozione di *varietà simplettica* e del suo uso in meccanica di Hamilton nella descrizione di **sistemi hamiltoniani autonomi**, cioè in cui la funzione di Hamilton, definita globalmente, non dipende esplicitamente dal tempo.

Cominciamo con il considerare sistemi hamiltoniani il cui spaziotempo delle fasi e le cui funzioni di Hamilton soddisfino certe ipotesi aggiuntive che abbiamo già incontrato discutendo il teorema del ritorno di Poincaré (Teorema 12.3). Consideriamo pertanto il caso in cui un certo sistema hamiltoniano sia descritto su uno spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  con l'ulteriore proprietà che esista una classe di sistemi di coordinate canonici o naturali  $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I} =: \mathcal{A}$  che formi un atlante (al solito  $C^\infty$ ) con le seguenti caratteristiche.

(i) Per ogni carta  $(U_i, \psi_i) \in \mathcal{A}$  con, dunque,  $\psi_i : U \ni a \mapsto (t_i(a), x_i^1(a), \dots, x_i^{2n}(a))$  dove  $t_i$  è il tempo assoluto a meno di costanti additive, valga  $t_i(U) = \mathbb{R}$ . In altre parole la coordinata temporale ricopre tutto l'asse del tempo.

(ii) Le trasformazioni di coordinate  $\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$  soddisfino  $t_i(a) = t_j(a)$  per ogni  $a \in U_i \cap U_j$ . In altre parole esiste un'unica coordinata temporale in comune con tutti i sistemi di coordinate.

(iii) Le trasformazioni di coordinate  $\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$  siano completamente canoniche. In altre parole, in coordinate,  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  ha la forma particolare  $t = t$  e  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j)$ , dove il tempo non appare nella seconda legge di trasformazione.

In questa situazione, possiamo identificare, tramite un diffeomorfismo  $f$ ,  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  con il prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ , dove  $\mathbb{F}$  è un'arbitraria fibra  $\mathbb{F}_{t_0}$ , pensata come varietà differenziabile dotata dell'atlante  $\{(V_i, \psi'_i)\}_{i \in I} =: \mathcal{A}'$ , con  $V_i := U_i \cap \mathbb{F}_{t_0}$  e  $\psi'_i : V_i \ni r \mapsto (x_i(r), \dots, x_i^{2n}(r))$  e dove le  $x_i^k$  sono le coordinate non temporali della carta  $(U_i, \psi_i)$ .

Il diffeomorfismo  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{F}_{t_0} \rightarrow F(\mathbb{V}^{n+1})$  al quale stiamo facendo riferimento è completamente individuato dalla richiesta che, in riferimento agli atlanti  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$ , per ogni fissato  $i \in I$ :

$$\psi_i \circ f(t, \psi'_i(x_i^1, \dots, x_i^n)) = (t, x_i^1, \dots, x_i^n).$$

Si osservi che in tal modo vale  $T(f(t, r)) = t$  per ogni  $(t, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{F}_{t_0}$ . In gergo il diffeomorfismo  $f$  è una *trivializzazione* del fibrato  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  sulla base  $\mathbb{R}$ .

È importante osservare che la decomposizione di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  come prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$  è subordinata alla scelta dell'atlante  $\mathcal{A}$  che soddisfi le richieste dette. In questa situazione  $\mathbb{F}$  è detto **spazio delle fasi** del sistema.

Come ipotesi aggiuntive assumeremo anche che valgano le seguenti.

(iv) Ogni sistema di coordinate dell'atlante  $\mathcal{A}$  sia dotato di una funzione di Hamilton  $\mathcal{H}_i$  che soddisfi (in conformità con (b) nel Teorema 12.1):

$$\mathcal{H}_i(a) = \mathcal{H}_j(a) \quad \text{se } a \in U_i \cap U_j.$$

In coordinate:

$$\mathcal{H}_i(t, \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_j)) = \mathcal{H}_j(t, \mathbf{x}_j).$$



Sotto quest'ipotesi, viene a definirsi globalmente su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  un'unica funzione di Hamilton  $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , che si restringe a  $\mathcal{H}_i$  su ogni corrispondente dominio  $U_i$  della carta locale  $(U_i, \psi_i) \in \mathcal{A}$ .

(v) La funzione  $\mathcal{H}$  suddetta soddisfi  $\mathcal{H}(t, r) = \mathcal{H}(t', r)$  per ogni  $t, t' \in \mathbb{R}$  e  $r \in \mathbb{F}$ .

### Osservazioni 12.16.

(1) Come si evince da (b) nel Teorema 12.1, possiamo non imporre alcuna condizione di carattere topologico sui domini  $U_i$  dell'atlante  $\mathcal{A}$ .

(2) Le richieste di esistenza di un atlante soddisfacente (i), (ii) e (iii) (e equivalentemente l'esistenza della corrispondente trivializzazione) come l'esistenza di una funzione hamiltoniana globale, sono abbastanza naturali dal punto di vista fisico. Come già discusso nella sezione 10.5.3 in ambiente lagrangiano, dal punto di vista fisico ci si aspetta che la scelta di un sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  nello spazio fisico in cui i vincoli, se ci sono, non dipendono dal tempo (sempre che un tale sistema di riferimento esista) individui i due enti matematici seguenti per quanto riguarda la teoria hamiltoniana di un sistema fisico concreto.

(a) Un atlante  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  che soddisfi le richieste (i), (ii) e (iii). Tale atlante è costruito partendo dalla classe di tutti i sistemi di coordinate locali *solidali* con  $\mathcal{J}$ , nello *spaziotempo delle configurazioni*, e completando ciascuno di tali sistemi ad un corrispondente sistema di coordinate naturali su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ed aggiungendo tutti i sistemi di coordinate legati ai precedenti tramite trasformazioni *completamente canoniche*. Quindi  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  contiene in particolare un sottoatlante dei sistemi di coordinate naturali di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  ed un sottoatlante dei sistemi di coordinate canoniche di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ .

(b) Una funzione di Hamilton  $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$  che soddisfi (iv), cioè globalmente definita sullo spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1}) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{F}_{\mathcal{J}}$ . La funzione  $\mathcal{H}_{\mathcal{J}}$  è globalmente definita proprio in virtù del fatto che le trasformazioni di coordinate in  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  sono completamente canoniche. O comunque, lavorando nei sistemi di coordinate naturali in  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  ciò segue direttamente dalla (11.28). (Si veda l'osservazione 10.6 per quanto riguarda la versione lagrangiana di tale fatto.)

In generale, tuttavia, la richiesta (v) non risulta essere soddisfatta.

Nelle ipotesi (i)-(iii), sullo spazio delle fasi  $\mathbb{F}$  viene globalmente a definirsi una 2-forma privilegiata  $\omega$  detta **2-forma simplettica** completamente individuata dal fatto che, in ogni sistema di coordinate locali  $(V, \phi) \in \mathcal{A}'$  suddetto, dove faremo uso delle notazioni standard  $\psi : U \ni a \mapsto (x^1(a), \dots, x^{2n}(a)) = (q^1(a), \dots, q^n(a), p_1(a), \dots, p_n(a))$  valga:

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{2n} S_{ik} dx^i \wedge dx^k = \sum_{l=1}^n dp_l \wedge dq^l. \quad (12.95)$$

La prova che tale 2-forma sia ben definita su  $\mathbb{F}$  (cioè non dipenda dalle coordinate usate purché nella classe considerata) segue immediatamente da (d) nel Teorema 12.6. La seconda identità a secondo membro in in (12.95), già usata precedentemente, segue immediatamente dalla definizione di  $\wedge$ , dalle componenti della matrice  $S$  e dalla decomposizione del set di coordinate

$x^1, \dots, x^{2n}$  in un primo gruppo di  $n$  coordinate indicate con  $q^k$  ed un secondo gruppo di  $n$  coordinate indicate con  $p_k$ . Si osservi ora che, direttamente dalla definizione di prodotto  $\wedge$ , la 2-forma  $\omega$ , se  $r \in \mathbb{F}$ , individua un'applicazione:

$$\omega|_r : T_r\mathbb{F} \times T_r\mathbb{F} \ni (u, v) \mapsto \omega(u, v) \in \mathbb{R}$$

che è bilineare, antisimmetrica e non degenera. L'ultimo fatto segue facilmente dal fatto che la matrice antisimmetrica dei coefficienti  $S_{rs}$  ha determinante non nullo<sup>10</sup>. C'è ancora una proprietà di  $\omega$  che è degna di interesse. Direttamente dalla (12.95), tenendo conto del fatto che  $dd = 0$ , abbiamo subito che  $d\omega = 0$ , cioè la forma  $\omega$  è chiusa. (Si noti che il lemma di Poincaré implica allora che  $\omega$  sia esatta almeno nell'intorno di ogni punto e in effetti vale sempre  $\omega = d(\sum_{k=1}^n p_k dq^k)$  nei sistemi di coordinate che stiamo considerando).

La struttura individuata da  $\mathbb{F}$  e da  $\omega$  è ben nota in matematica ed è definita come segue.

**Definizione 12.4.** La coppia  $(M, \omega)$  in cui  $M$  è una varietà differenziabile (di classe  $C^\infty$ ) di dimensione  $2n$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , e  $\omega$  è una 2-forma differenziale (di classe  $C^\infty$ ) chiusa, con le proprietà che, per ogni  $p \in M$ , l'applicazione bilineare antisimmetrica:

$$\omega|_p : T_p M \times T_p M \ni (u, v) \mapsto \omega(u, v) \in \mathbb{R}$$

sia non degenera, è detta **varietà simplettica** e  $\omega$  è detta **2-forma simplettica** su  $M$ . ◇

Un risultato di cruciale importanza dovuto a Darboux (vedi per es. [Fasano-Marmi]), prova che ogni varietà simplettica ammette un atlante in cui la forma simplettica prende la forma canonica (12.95).

**Teorema 12.7.** (**Secondo teorema di Darboux**) *Se  $(M, \omega)$  è una varietà simplettica, esiste un atlante di  $M$  (di classe  $C^\infty$ ), detto **atlante simplettico** di  $M$ , compatibile con la struttura differenziabile di  $M$  nelle cui carte locali la forma simplettica  $\omega$  assume la forma canonica (12.95), dove  $n := \dim M$ .*

In base al teorema appena citato se  $(U, \psi)$  e  $(V, \phi)$  appartengono all'atlante simplettico della varietà simplettica  $M$ , la trasformazione di coordinate  $\psi \circ \phi^{-1}$  definita su  $\phi(U \cap V)$  ha matrice jacobiana  $J$  che soddisfa  $J^t S J = S$  ed è pertanto equivalente ad una trasformazione completamente canonica di  $\mathbb{R} \times M$ . Se si considera l'atlante simplettico come massimale, si ha facilmente che la richiesta  $J^t S J = S$  è anche sufficiente perché la carta locale  $(V, \phi)$  appartenga all'atlante simplettico, quando la richiesta è verificata rispetto ad un ricoprimento di  $V$  di carte  $(U, \psi)$  dell'atlante simplettico.

---

<sup>10</sup>In componenti risulta infatti  $\omega(u, v) = \sum_{i,j} u^i S_{ij} v^j$ . Se esistesse un vettore  $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_r \in T_r\mathbb{F}$  con  $\omega(u, v) = 0$  per ogni altro vettore  $u \in T_r\mathbb{F}$ , scegliendo  $u$  con componenti  $u^i = \sum_j S_{ij} v^j$  troveremmo che  $0 = \omega(u, v) = \sum_i (\sum_k S_{ik} v^k \sum_j S_{ij} v^j)$  per cui  $\sum_k S_{ik} v^k = 0$ . Dato che  $\det S \neq 0$ , questo è possibile solo se tutte le componenti  $v^k$  sono nulle e cioè  $v = 0$ .

Quanto appena visto ci permette di trascrivere completamente le nostre richieste iniziali sul sistema hamiltoniano e sullo spaziotempo delle fasi nel linguaggio della teoria simplettica. Possiamo infatti pensare di modellizzare lo spaziotempo delle fasi, nella situazione che stiamo discutendo come il prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ , dove ora  $\mathbb{F}$  è una varietà simplettica. I sistemi di coordinate interessanti per teoria hamiltoniana saranno quelli definiti su domini  $\mathbb{R} \times V$ , dove  $(V, \phi)$  è un elemento dell'atlante simplettico di  $\mathbb{F}$  e le coordinate avranno sempre struttura  $\mathbb{R} \times V \ni (t, r) \mapsto (t, \phi(r)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ . Se  $\mathcal{H} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ , siamo allora sicuri che (per (b) nel Teorema 12.1 e (d) del Teorema 12.6), usando le carte dell'atlante suddetto (cioè dell'atlante simplettico) le equazioni di Hamilton saranno ben definite, indipendentemente dalla carta locale usata, assumendo che su ogni carta con dominio  $\mathbb{R} \times V$  la funzione di Hamilton sia semplicemente la restrizione di  $\mathcal{H}$  a tale dominio. Dato che  $\mathcal{H}$  non è funzione del tempo, tutta la dinamica hamiltoniana può essere letta come la teoria di un *sistema di equazioni differenziali autonomo* su  $\mathbb{F}$ .

### Osservazioni 12.17.

(1) È importante notare che, in realtà, questo approccio pur rimanendo nell'ambito dei sistemi hamiltoniani autonomi, è leggermente più generale di quello standard, perché non assume che la struttura di spaziotempo delle fasi sia costruita su una struttura di spaziotempo delle configurazioni. Se fosse in tal modo, infatti, si dovrebbe postulare l'esistenza di un atlante particolari sistemi di coordinate locali su  $\mathbb{F}$  in cui le coordinate di tipo  $p_k$  assumono valori su tutto  $\mathbb{R}$  e la legge di trasformazione di coordinate all'interno di tale atlante sia della forma speciale relativa ai sistemi di coordinate naturali, in cui le  $p_k$  si trasformano come componenti di 1-forme. L'esistenza di un atlante di tali sistemi di coordinate non è garantita con la sola assunzione che  $\mathbb{F}$  sia una varietà simplettica.

(2) Su  $\mathbb{F}$  esiste una **forma naturale di volume** data da:

$$\mu = \frac{(-1)^{(n-1)n/2}}{n!} \omega \wedge \cdots (n \text{ volte}) \cdots \wedge \omega. \quad (12.96)$$

dove  $2n = \dim(\mathbb{F})$ , che è quella che appare nella formulazione del teorema di Liouville. Infatti, per computo diretto, si vede che con la definizione data risulta localmente:

$$\mu = dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dp^n,$$

dove  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  sono coordinate di una qualsiasi carta locale dell'atlante simplettico.

L'osservazione (2) ha un'importante conseguenza: ogni varietà simplettica è orientabile e l'atlante dei sistemi di coordinate simplettici induce un'orientazione naturale.

**Proposizione 12.9.** *Ogni varietà simplettica è orientabile e l'atlante simplettico è contenuto in un'orientazione.*

**Dimostrazione.** Per provare la tesi, è ovviamente sufficiente mostrare che se  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  – dove assumiamo che  $U \ni x \mapsto (q^1(x), \dots, q^n(x), p_1(x), \dots, p_n(x)) \in \mathbb{R}^{2n}$  e similmente, per l'altra

carta,  $U' \ni x \mapsto (q'^1(x), \dots, q'^n(x), p'_1(x), \dots, p'_n(x)) \in \mathbb{R}^{2n}$  – sono sistemi di coordinate locali simplettiche con  $U \cap U' \neq \emptyset$ , allora la matrice jacobiana  $J$  della trasformazione di coordinate ha determinante positivo per ogni punto  $x \in U \cap U'$ . Dall'osservazione (2) segue che, su  $U \cap U'$

$$dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n = dq'^1 \wedge \dots \wedge dq'^n \wedge dp'^1 \wedge \dots \wedge dp'^n.$$

D'altra parte, dalla teoria generale delle forme di ordine massimo abbiamo anche che:

$$dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n = (\det J) dq'^1 \wedge \dots \wedge dq'^n \wedge dp'^1 \wedge \dots \wedge dp'^n.$$

Concludiamo che deve essere  $\det J = 1$ . Quindi, in particolare  $\det J > 0$  che conclude la dimostrazione.  $\square$

Dal punto di vista fisico la forma naturale di volume  $\mu$ , che è di fatto quella che abbiamo usato nel teorema del ritorno di Poincaré, è costante sotto l'azione del flusso di fase hamiltoniano, perché vale:

$$\mathcal{L}_Z \mu = 0,$$

dove  $Z$ , definito su  $\mathbb{F}$  (e non su  $\mathbb{R} \times \mathbb{F}$ ), è il **campo vettoriale dinamico**, le cui curve integrali sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton, producendo la versione simplettica infinitesima del teorema di Liouville. Possiamo essere più precisi con il seguente teorema.

**Teorema 12.8.** *Se  $(\mathbb{F}, \omega)$  è una varietà simplettica ed è assegnata  $\mathcal{H} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , una curva  $I \ni t \mapsto \mathbb{F}$  di classe  $C^1$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto, soddisfa le equazioni di Hamilton, con funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$ , in ogni sistema di coordinate  $(V, \phi)$  dell'atlante simplettico di  $\mathbb{F}$  se e solo se:*

$$\dot{\gamma}(t) \lrcorner \omega|_{\gamma(t)} = -d\mathcal{H}|_{(t, \gamma(t))} \quad (12.97)$$

dove  $\dot{\gamma}$  denota il vettore tangente a  $\gamma$ .

Se ulteriormente  $Z$  indica il **campo vettoriale dinamico**, cioè l'unico campo vettoriale su  $\mathbb{F}$  che soddisfa

$$Z \lrcorner \omega = -d\mathcal{H} \quad (12.98)$$

(le cui linee integrali sono quindi le soluzioni delle equazioni di Hamilton), allora vale:

$$\mathcal{L}_Z \omega = 0 \quad (12.99)$$

e di conseguenza si ha anche:

$$\mathcal{L}_Z \mu = 0, \quad (12.100)$$

dove la **forma di volume simplettico**  $\mu$  è stata definita in (12.96).

**Dimostrazione.** Sviluppando i due membri in coordinate simplettiche, usando la rappresentazione  $\gamma : I \ni t \mapsto (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ , si ottiene l'identità equivalente:

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} \frac{\partial}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^n \frac{dp_k}{dt} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \lrcorner \sum_{l=1}^n dp_l \wedge dq^l = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} dq^k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k.$$

Dalle proprietà di  $\lrcorner$  abbiamo:  $\frac{\partial}{\partial q^k} \lrcorner dp_l \wedge dq^l = \frac{\partial}{\partial q^k} \lrcorner (-dq^l \wedge dp_l) = -\frac{\partial}{\partial q^k} \lrcorner dq^l \wedge dp_l - \delta_k^l dp_l$  e  $\frac{\partial}{\partial p_k} \lrcorner dp_l \wedge dq^l = \delta_l^k dq^l$ . Usando tali identità, la relazione trovata si può riscrivere in modo del tutto equivalente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dq^k}{dt} dp_k - \sum_{k=1}^n \frac{dp_k}{dt} dq^k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k} dq^k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k. \quad (12.101)$$

Raccogliendo le varie componenti e ricordando che le forme  $dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n$  sono linearmente indipendenti, si vede che l'identità scritta sopra altro non è che il set di equazioni di Hamilton in coordinate  $t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$ . La procedura è evidentemente reversibile e procedendo in senso opposto partendo dalle equazioni di Hamilton scritte come in (12.101) si deduce la (12.97). Si osservi quindi che  $Z$  è punto per punto univocamente individuato da l'equazione (12.98) dato che  $\omega$  è non degenere. Si trova in tal modo una campo di classe  $C^1$  dato che  $\omega$  è  $C^\infty$  e  $\mathcal{H}$  è  $C^1$ . La (12.100) segue immediatamente dalla (12.99) dalle proprietà generali della derivata di Lie (vedi Sezione B.4.1). Quest'ultima si prova tramite la (B.27), tenendo conto del fatto che  $\omega$  è chiusa e della definizione di  $Z$ :

$$\mathcal{L}_Z \omega = d(Z \lrcorner \omega) + Z \lrcorner d\omega = -d\mathcal{H} + Z \lrcorner 0 = 0 + 0 = 0.$$

□

Si noti che, in virtù della proposizione B.4, la (12.100) può essere considerata la versione infinitesima del teorema di Liouville.

### 12.5.2 Caso generale: $F(\mathbb{V}^{n+1})$ come fibrato di varietà simplettiche

Torniamo infine a considerare la situazione generica senza fare alcuna ipotesi sulla forma della funzione di Hamilton e sull'esistenza di particolari atlanti su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Consideriamo due sistemi di coordinate  $(U, \psi)$  e  $(U', \psi')$  per entrambi dei quali la prima coordinata,  $t$  e  $t'$ , si identifica con il tempo assoluto a meno di costanti additive e supponiamo che i due sistemi di coordinate, in  $U \cap U' \neq \emptyset$ , siano connessi da una trasformazione canonica. Indichiamo con  $t, x^1, \dots, x^{2n}$  e  $t', x'^1, \dots, x'^{2n}$  le rispettive funzioni coordinate. Senza perdere generalità assumiamo infine che  $t = t'$ . Per  $t = t'$  fissato, entrambi i sistemi di coordinate definiscono sistemi di coordinate locali su  $\mathbb{F}_t \cap U \cap U'$  supponendo non vuota tale intersezione. Dato che  $\mathbb{F}_t$  ha dimensione  $2n$ , possiamo definire due forme simplettiche nel punto  $a \in \mathbb{F}_t \cap U \cap U'$ , rispettivamente ottenute restringendo a  $T_a \mathbb{F}_t \times T_a \mathbb{F}_t$  le 2-forme differenziali chiuse definite su  $U \cap U'$ :

$$\omega := \frac{1}{2} \sum_{rs} S_{rs} dx^r \wedge dx^s \quad \text{e} \quad \omega' := \frac{1}{2} \sum_{hk} S_{hk} dx'^h \wedge dx'^k.$$

La domanda che sorge naturale è se le due forme simplettiche su  $\mathbb{F}_t$  coincidano o no. Nel primo caso, ogni spazitempo delle fasi indurrebbe in maniera naturale (e differenziabile al variare di  $t$ ) una struttura di varietà simplettica su ogni suo spazio delle fasi a tempo fissato  $\mathbb{F}_t$ , la forma

simplettica sarebbe in tal caso quella ottenuta dalle coordinate non temporali di ogni sistema di coordinate naturali o canoniche pensate come coordinate sulle fibre  $\mathbb{F}_t$ . È fondamentale notare che il confronto tra le due forme simplettiche sopra scritte deve essere fatto quando esse agiscono su coppie di vettori tangenti a  $\mathbb{F}_t$  e non su vettori tangenti a  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ . Un vettore tangente a  $\mathbb{F}_t$  in  $a$ , in coordinate  $t, x^1, \dots, x^{2n}$  suddette ha struttura:

$$X = X^0 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_a + \sum_{k=1}^{2n} X^k \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_a \quad \text{con } X^0 = 0.$$

È evidente che questa condizione è invariante per il fissato  $X \in T_a F(\mathbb{V}^{n+1})$ , passando a nuove coordinate  $t', x'^1, \dots, x'^{2n}$ , quando si richieda che nei due sistemi di coordinate  $t$  e  $t'$  si identifichino con il tempo assoluto a meno di costanti additive. Infatti, dalla richiesta  $t = t' + c$  risulta subito:

$$X'^0 = \frac{\partial t'}{\partial t} X^0 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial t'}{\partial x^k} X^k = 1 X^0 + \sum_{k=1}^{2n} 0 X^k = X^0.$$

Abbiamo a tal fine il seguente teorema in cui l'ultimo enunciato è una nuova versione del teorema di Liouville.

**Teorema 12.9.** *Si consideri uno spaziotempo delle fasi  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  costruito sullo spaziotempo delle configurazioni e pensato come fibrato sull'asse del tempo assoluto  $\mathbb{R}$  (vedi la Sezione 11.3). Valgono i fatti seguenti.*

(a) *Su ogni fibra  $\mathbb{F}_\tau$  di un generico  $\tau \in \mathbb{R}$  esiste una naturale struttura di varietà simplettica la cui 2-forma simplettica  $\Omega_\tau$  coincide con la restrizione agli spazi  $T_a \mathbb{F}_\tau \times T_a \mathbb{F}_\tau$ , per  $a \in \mathbb{F}_\tau$  delle 2-forme differenziali chiuse associate alle coordinate:*

$$\omega := \frac{1}{2} \sum_{rs} S_{rs} dx^r \wedge dx^s$$

*referite ad ogni sistema di coordinate locali naturali o canoniche  $t, x^1, \dots, x^{2n}$  definite nell'intorno di  $a \in \mathbb{F}_\tau$ . Tale restrizione risulta non dipendere dalla scelta delle coordinate. In questo modo ogni sistema di coordinate naturali o canoniche individua un sistema di coordinate simplettiche su  $\mathbb{F}_\tau$ .*

(b) *Tramite l'assegnazione di una 2-forma simplettica  $\Omega$ , è possibile dotare di una struttura di varietà simplettica la fibra standard  $\mathbb{F}$  del fibrato  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  in modo tale che, se  $g : J' \times \mathbb{F} \rightarrow T^{-1}(J')$  è un diffeomorfismo del tipo introdotto nella sezione 11.3 – con  $J' \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto e valendo  $T(g(\tau, a)) = \tau$  – allora, per ogni  $(\tau, a) \in J' \times \mathbb{F}$ :*

$$\Omega_\tau(dg_{(\tau,a)}(0, X), dg_{(\tau,a)}(0, Y)) = \Omega(X, Y) \quad (12.102)$$

*per ogni scelta di  $X, Y \in T_a \mathbb{F}$ .*

*Se  $g^{(\tau)} : \mathbb{F} \ni a \mapsto g(\tau, a) \in \mathbb{F}_\tau$  è il diffeomorfismo tra fibre individuato da  $g$  per ogni fissata fibra*

$\mathbb{F}_\tau$  con  $\tau \in J'$ , allora tale diffeomorfismo preserva la struttura di varietà simplettica valendo anche:

$$\Omega_\tau(dg_a^{(\tau)}X, dg_a^{(\tau)}Y) = \Omega(X, Y), \quad (12.103)$$

per ogni scelta di  $X, Y \in T_a\mathbb{F}$ .

(c) Se  $\mathcal{H}$  è una funzione di Hamilton di classe  $C^1$  definita su una carta naturale o canonica  $(U, \psi)$  alla quale si associa la 2-forma  $\omega$ , una curva  $I \ni s \mapsto \gamma(s) \in U$  soddisfa le equazioni di Hamilton rispetto alla funzione di Hamilton detta se e solo se, contemporaneamente

$$\langle \dot{\gamma}, dT \rangle = 1, \quad (12.104)$$

$$\dot{\gamma} \lrcorner (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) = 0 \quad (12.105)$$

dove  $T$  è il tempo assoluto,  $\dot{\gamma}$  è il vettore tangente a  $\gamma$ .

(d) La forma di volume canonica  $\mu_t$  definita su  $\mathbb{F}_t$  lasciata invariante dal flusso hamiltoniano soddisfa, quando valutata in un sistema di coordinate naturali o canoniche definite nell'intorno di un punto di  $\mathbb{F}_t$ :

$$\mu_t = \iota_t^* \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!} \omega \wedge \cdots (n \text{ volte}) \cdots \wedge \omega, \quad (12.106)$$

dove  $\iota_t : \mathbb{F}_t \rightarrow F(\mathbb{V}^{n+1})$  è la mappa di inclusione canonica.

(e)  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  è una varietà orientabile e l'atlante dei sistemi di coordinate naturali e quello dei sistemi di coordinate canonici inducono lo stesso orientamento. L'orientamento indotto infine sulle fibre  $\mathbb{F}_\tau$  da quello in  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  è proprio quello naturale tenendo conto del fatto che  $\mathbb{F}_\tau$  è una varietà simplettica.

(f) Siano  $D_{t_1} \subset \mathbb{F}_{t_1} \subset e$  e  $D_{t_2} \subset \mathbb{F}_{t_2}$  insiemi misurabili di misura  $\mu_{t_1}$  e  $\mu_{t_2}$  finita tali che, per ogni punto  $a \in D_{t_1}$ , esista una linea integrale  $\gamma_a : [t_1, t_2] \ni t \mapsto \gamma_a(t) \in F(\mathbb{V}^{n+1})$  di un campo vettoriale dinamico Hamiltoniano  $Z$  ovunque definito su  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  (le cui linee integrali sono dunque le curve in (c)) che uscendo da  $a$  interseca  $D_{t_2}$  in modo da esaurire tutti i punti di quest'ultimo al variare di  $a$ . Allora vale:

$$\int_{D_{t_2}} d\mu_{t_2} = \int_{D_{t_1}} d\mu_{t_1} \quad (12.107)$$

purché l'insieme  $T := D_{t_1} \cup D_{t_2} \bigcup_{a \in D_{t_1}, t \in [t_1, t_2]} \gamma_a(t)$  sia una varietà con bordo sufficientemente regolare da poter applicare il teorema di Stokes-Poincaré.

**Dimostrazione.** Per quanto riguarda l'affermazione (a), è sufficiente dimostrare che due sistemi di coordinate canonici o naturali, o comunque legati da una trasformazione canonica, inducono la stessa forma simplettica sulle fibre. Presi due di tali sistemi di coordinate per cui  $t' = t + c$  corrispondono al tempo assoluto  $\tau$ :

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s} S_{rs} dx^r \wedge dx^s = \frac{1}{2} \sum_{h,k,r,s} S_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial x'^h} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} dx'^h \wedge dx'^k + \sum_{r,s,k} S_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial t'} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} dt' \wedge dx'^k.$$

Tenendo conto del fatto che la trasformazione è canonica, l'identità trovata si scrive:

$$\frac{1}{2} \sum_{r,s} S_{rs} dx^r \wedge dx^s = \frac{1}{2} \sum_{h,k} S_{hk} dx'^h \wedge dx'^k + \sum_{r,s,k} S_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial t'} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} dt' \wedge dx'^k.$$

In altre parole:

$$\omega = \omega' + \sum_{r,s,k} S_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial t'} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} dt' \wedge dx'^k.$$

Si osservi ora che quando i due membri agiscono su vettori  $X, Y$  tangenti a  $\mathbb{F}_\tau$ , l'assenza della componente rispetto a  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\frac{\partial}{\partial t'}$ , produce:

$$\omega_\tau(X, Y) = \omega'_\tau(X, Y),$$

che dimostra che le due forme simplettiche su  $\mathbb{F}_t$  coincidono.

L'affermazione (b) si prova in coordinate usando la costruzione dei diffeomorfismi  $g$  tramite i diffeomorfismi  $f$  discussa nella sezione 11.3. Prima di tutto, fissato  $t \in \mathbb{R}$  consideriamo un intervallo aperto  $J \ni t$  ed una classe di sistemi di coordinate naturali relativi a tale intervallo del tipo precisato in Sezione 11.3. Sia quindi  $f : J \times \mathbb{F}_t \rightarrow T^{-1}(J)$  il diffeomorfismo associato a tale classe di sistemi di coordinate che realizza la trivializzazione locale del fibrato  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  come visto nella sezione menzionata. Se  $(U, \psi)$  con  $\psi : U \ni a \mapsto (\tau(a), \mathbf{x}(a))$  è uno dei sistemi di coordinate detti, le coordinate  $\mathbf{x}$  definiscono un sistema di coordinate su  $\mathbb{F}_t$ . Usando tale sistema di coordinate  $f$  agisce banalmente come l'identità:  $(\tau, \mathbf{x}) \mapsto (\tau, \mathbf{x})$ , dove  $\mathbf{x}$  nella prima coppia sono le coordinate di un punto su  $\mathbb{F}_t$ , mentre  $(\tau, \mathbf{x})$  della seconda coppia sono le coordinate di un punto su  $T^{-1}(J)$ . In queste coordinate le identità (12.102) risultano banalmente vera quando si prende  $\mathbb{F}_t$ , dotata della forma simplettica  $\Omega_t$  indotta su di essa dalle stesse coordinate naturali  $(U, \psi)$ . Tale 2-forma non dipende dalle coordinate scelte come provato in (a). Dato che i sistemi di coordinate suddetti ricoprono  $T^{-1}(J)$ , (12.102) è verificata su tutta  $T^{-1}(J)$ . (12.103) è una banale conseguenza della prima. Sia ora  $t' \notin J$ . Possiamo dotare  $\mathbb{F}_{t'}$  della forma  $\Omega_{t'}$  e costruire un diffeomorfismo  $f' : J' \times \mathbb{F}_{t'} \rightarrow T^{-1}(J')$  del tutto analogo al precedente prendendo come riferimento la fibra  $\mathbb{F}_{t'}$ . Per concludere bisogna mostrare che le due fibre  $\mathbb{F}_t$  e  $\mathbb{F}_{t'}$  sono identificabili come varietà simplettiche, in modo da definire un'unica fibra canonica  $\mathbb{F} := \mathbb{F}_t$ . Per provare ciò, come già sappiamo dalla discussione nella sezione 11.3, possiamo definire una classe finita di intervalli aperti  $J' = J_1, J_2, \dots, J_N = J$  in modo che  $J_k \cap J_{k+1} \neq \emptyset$ ,  $t' \in J'$  e su ciascun intervallo  $J_k$  possiamo eseguire la costruzione precedente. Componendo i vari diffeomorfismi tra fibre interni a ciascun  $J_k$ , si ottiene il diffeomorfismo  $g_{t'} : \mathbb{F}_t \rightarrow \mathbb{F}_{t'}$ . Dato che ciascun diffeomorfismo in cui si decompone  $g_{t'}$  soddisfa (12.103) (rimpiazzando  $\mathbb{F}$  con  $\mathbb{F}_{t_k}$  dove  $t_k \in J_k$ ), la (12.103) sarà verificata da  $g_{t'}$  con  $(\mathbb{F}, \Omega)$  rimpiazzata da  $(\mathbb{F}_t, \Omega_t)$  e  $(\mathbb{F}_\tau, \Omega_\tau)$  rimpiazzata da  $(\mathbb{F}_{t'}, \Omega_{t'})$ . In tal modo la fibra particolare che abbiamo fissato all'inizio  $\mathbb{F}_t$  può essere pensata come la fibra canonica  $\mathbb{F}$  di tutto il fibrato, includendo nella sua definizione anche la struttura simplettica individuata da  $\Omega := \Omega_t$ . Proviamolo. Come sappiamo, le trivializzazioni locali su ogni  $J' \ni t'$  sono infine date dai diffeomorfismi  $g : J' \times \mathbb{F} \ni (\tau, a) \mapsto f'(\tau, g_{t'}(a)) \in T^{-1}(J')$ . Per questi diffeomorfismi  $g$  vale banalmente  $T(g(\tau, a)) = \tau$  se  $\tau \in J'$  e  $a \in \mathbb{F}_{t'}$ , ma vale anche



(12.102), come si prova immediatamente, tenendo conto della loro definizione e del fatto che tali proprietà sono vere per  $f'$  rispetto a  $\mathbb{F}_{t'}$  e  $g_{t'}$  verifica la (12.103). Infine la (12.103) per  $g$  è una banale conseguenza della (12.102).

L'affermazione (d) segue per computo diretto immediatamente.

L'affermazione (e) si prova osservando che il determinante della matrice jacobiana tra sistemi di coordinate canoniche o sistemi di coordinate naturali è dato dal determinante della trasformazione tra le corrispondenti coordinate non temporali (ciò segue immediatamente sviluppando il determinante sulla prima riga (quella della coordinata temporale). Le coordinate non temporali, a tempo  $\tau$  fissato, definiscono sistemi di coordinate simplettici sulla fibra  $\mathbb{F}_\tau$  e pertanto il determinante detto vale 1 (Proposizione 12.9) ed in particolare è positivo. Quindi, da una parte ciò mostra che l'atlante delle coordinate canoniche o l'atlante delle coordinate naturali inducono un'orientazione, la stessa, sullo spaziotempo delle fasi, dall'altra mostra anche che tale orientazione induce quelle fibre quella dovuta all'esistenza della struttura simplettica.

L'enunciato (f) segue dal teorema di Stokes-Poincaré. Prima di tutto si osservi che nella (12.106) possiamo sostituire  $\omega - d\mathcal{H} \wedge dT$  a  $\omega$ , dato che la prima forma è ben definita su tutto  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  anche se non lo è  $\mathcal{H}$  e, ulteriormente, l'azione di  $\iota_t^*$  annulla tutti gli addendi nello sviluppo del prodotto in (12.106) che includono  $dT$  tra i fattori, dato che  $\iota_t^* dT = 0$ . Ulteriormente:

$$d((\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) \wedge \cdots n \text{ volte} \cdots \wedge (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT)) = 0 ,$$

dato che  $d\omega = 0$  e  $dd = 0$ . Pertanto

$$\begin{aligned} 0 &:= \int_T d((\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) \wedge \cdots n \text{ volte} \cdots \wedge (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT)) \\ &= \int_{\partial T} (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) \wedge \cdots n \text{ volte} \cdots \wedge (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) . \end{aligned}$$

Il bordo  $\partial T$  è costituito dall'unione di  $D_{t_1}$ ,  $D_{t_2}$  e  $B$  insieme di curve tangenti a  $Z$ . L'integrale su  $D_{t_1}$  e  $D_{t_2}$  fornisce integrali rispetto alle misure  $\mu_t$  come osservato sopra. Provando che l'integrale su  $B$  è nullo si ha la tesi. Il fatto che l'integrale su  $B$  sia nullo segue immediatamente dal fatto che  $Z \lrcorner (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) = 0$  da cui

$$Z \lrcorner (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) \wedge \cdots n \text{ volte} \cdots \wedge (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) = 0$$

e quindi il pullback della  $2n$ -forma  $(\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) \wedge \cdots n \text{ volte} \cdots \wedge (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT)$  sulla sottovarietà  $2n$ -dimensionale  $B$  è nullo per la Proposizione B.6.  $\square$

### 12.5.3 Una nozione più generale di spaziotempo delle fasi e dinamica di Hamilton

Il teorema 12.9 consente di assumere un punto di vista superiore svincolandosi completamente dalla costruzione di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$  come fibrato sullo spaziotempo delle configurazioni e considerando la situazione in cui non esistono funzioni di Hamilton se non localmente, come discusso nelle Osservazione 12.13.

In modo del tutto generale possiamo pensare allo spaziotempo delle fasi  $F^{2n+1}$  come una varietà fibrata su  $\mathbb{R}$  tramite la proiezione canonica identificata con il tempo assoluto  $T : F^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e con fibra canonica data da una varietà simplettica  $(\mathbb{F}, \Omega)$  (necessariamente di dimensione  $n$ ) con la richiesta che sia selezionata una sottoclasse delle trivializzazioni locali  $\{(J_i, g_i)\}_{i \in I}$  del fibrato (dove quindi  $J_i \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto e  $g_i : J_i \times \mathbb{F} \rightarrow T^{-1}(J_i)$  è un diffeomorfismo con  $T(f_i(\tau, a)) = \tau$  per ogni  $\tau \in J_i$  e  $a \in \mathbb{F}$ ). La classe privilegiata di trivializzazioni locali deve essere tale che, indicata la fibra in  $t$  con  $\mathbb{F}_t := T^{-1}(\{t\})$  e con  $g_i^{(t)} : \mathbb{F} \ni a \mapsto g_i(t, a) \in \mathbb{F}_t$  il diffeomorfismo tra fibra standard e fibra in  $t$  associato alla trivializzazione  $(J_i, g_i)$  quando  $t \in J_i$ :

$$(i) \bigcup_{i \in I} U_i = \mathbb{R},$$

$$(ii) \text{ se } t \in U_j \cap U_k \text{ e } a \in \mathbb{F}_t, \text{ allora}$$

$$\Omega \left( (dg_{ja}^{(t)})^{-1} X, (dg_{ja}^{(t)})^{-1} Y \right) = \Omega \left( (dg_{ka}^{(t)})^{-1} X, (dg_{ka}^{(t)})^{-1} Y \right) =: \Omega_t(X, Y)$$

per ogni scelta di  $X, Y \in T_a \mathbb{F}_t$ .

In questo modo viene a definirsi su ogni fibra una 2-forma simplettica  $\Omega_t$  indotta da  $\Omega$ , indipendentemente dalla scelta della trivializzazione.

È importante sottolineare che la struttura definita sopra è meno rigida di quella di  $F(\mathbb{V}^{n+1})$ , dato che non è detto che esista una classe privilegiata di coordinate locali corrispondenti alle coordinate naturali. Tuttavia, tutta la teoria di Hamilton può essere formulata in questo ambiente. Prima di tutto osserviamo che esiste comunque un atlante di coordinate privilegiate. Si tratta di tutti i sistemi di coordinate adattati alle fibre di  $F^{2n+1}$ , cioè carte locali  $(U, \psi)$  con  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), x^1(a), \dots, x^{2n}(a))$  e  $T(a) = t(a) + c$  per qualche costante  $c$ , per le quali, se definiamo la 2-forma differenziale chiusa:

$$\omega := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} S_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

vale anche:

$$\omega(X, Y) = \Omega_\tau(X, Y) \quad \text{se } X, Y \in T_a \mathbb{F}_\tau \subset T_a F^{2n+1} \text{ con } T(a) = \tau.$$

Come segue da (d) nel Teorema 12.6, notando che per la dimostrazione sono sufficienti le ipotesi che abbiamo fatto fino ad ora, le trasformazioni di coordinate tra sistemi di coordinate locali di questo tipo sono tutte e sole trasformazioni canoniche. Si osservi tuttavia che non abbiamo fatto alcuna richiesta di carattere topologico sul dominio  $U$  e neppure abbiamo distinto tra sistemi di coordinate naturali e sistemi di coordinate canoniche, dato che tale distinzione in generale non è possibile nelle ipotesi fatte. I sistemi di coordinate locali definiti in questo modo li diremo ancora **sistemi di coordinate canoniche** (attenzione che non si tratta dei sistemi di coordinate canoniche su una varietà simplettica, ma dei sistemi di coordinate canoniche su una struttura più complessa).

In questo contesto la dinamica hamiltoniana può essere formulata supponendo che in ogni sistema

di coordinate canoniche  $(U, \psi)$ , con  $\psi : U \ni a \mapsto (t(a), x^1(a), \dots, x^{2n}(a))$ , sia assegnata una 1-forma (almeno di classe  $C^1$ )  $h$  su  $U$  che verifichi:

$$dh \wedge dT = 0, \quad (12.108)$$

e che, cambiando coordinate canoniche  $(U', \psi')$ , valga la relazione su  $U \cap U'$  se non è vuoto:

$$\omega - h \wedge dT = \omega' - h' \wedge dT =: \nu|_{U \cap U'}. \quad (12.109)$$

In tal modo risulta globalmente definita una 2-forma differenziale  $\nu$  che localmente si riduce all'espressione di sopra. Le equazioni di Hamilton per una sezione  $\gamma = \gamma(t)$  sono allora date da

$$\langle \dot{\gamma}, dT \rangle = 1, \quad (12.110)$$

$$\dot{\gamma} \lrcorner \nu = 0 \quad (12.111)$$

Esaminiamo il significato della condizione (12.108). In ogni fissato sistema di coordinate canoniche  $(U, \phi)$  su  $U$ , non necessariamente lo stesso alquale associamo  $h$ , con  $\phi : U \ni a \mapsto (t(a), x^1(a), \dots, x^{2n}(a))$ , in cui  $h = h_0 dt + \sum_{k=1}^{2n} h_k dx^k$ , la condizione considerata si scrive esplicitamente:

$$\sum_{i,k=1}^{2n} \left( \frac{\partial h_i}{\partial x^k} - \frac{\partial h_k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i \wedge dt = 0 \quad \text{per } i, k = 1, \dots, 2n.$$

Applicando  $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner$ , si vede che tale condizione implica:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x^k} = \frac{\partial h_k}{\partial x^i} \quad \text{per } i, k = 1, \dots, 2n.$$

Questa condizione implica la precedente e quindi è equivalente alla (12.108). Concludiamo che la validità di (12.108), se  $U$  è connesso e relativamente semplicemente connesso, similmente a quanto abbiamo fatto nella parte più importante della dimostrazione del Teorema 12.1, implica che esista una funzione  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, x^1, \dots, x^{2n})$ , definita a meno di funzioni additive della sola variabile temporale, per cui:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^k} = h_k.$$

Ciò vale per ogni sistema di coordinate adattate alla fibra definite su  $U$ . In questo caso, supponendo che le coordinate siano anche simplettiche, le equazioni per  $\gamma$  sopra scritte, prendono la forma standard:

$$\langle \dot{\gamma}, dT \rangle = 1, \quad (12.112)$$

$$\dot{\gamma} \lrcorner (\omega - d\mathcal{H} \wedge dT) = 0 \quad (12.113)$$

Tuttavia le equazioni (12.110)-(12.111), sono comunque ben definite su tutto  $F^{2n+1}$  anche se la funzione di Hamilton non è definita, la sola assegnazione delle 1-forme  $h$  che verifichino (12.109)

è sufficiente. La costruzione assicura anche la validità del teorema di Liouville nella versione in (f) del Teorema 12.9, dato che solo la forma di Poincaré-Cartan e le equazioni sopra scritte entrano in gioco nella dimostrazione.

Un punto importante è verificare se le condizioni (12.109) siano compatibili con le richieste (12.108). La condizione (12.109) implica immediatamente che

$$(h' - h) \wedge dT = \omega - \omega' .$$

Le richieste (12.108) allora pretendono che, su  $U \cap U'$ :

$$0 = (dh' - dh) \wedge dT = d[(h' - h) \wedge dT] = d(\omega - \omega') = 0 .$$

e cioè:

$$d\omega - d\omega' = 0 .$$

che sappiamo essere vera, dato che le forme  $\omega$  e  $\omega'$  sono chiuse.

## Appendice A

# Elementi di Topologia Generale, Analisi e Geometria Differenziale

Vediamo in questa appendice alcune nozioni di grande importanza in meccanica classica e più in generale in fisica matematica. Si tratta delle nozioni di base di geometria differenziale, dopo avere richiamato alcune nozioni elementari di topologia generale. Precediamo gli argomenti detti con anche alcuni risultati tecnici di analisi elementare.

### A.1 Limite e derivazione sotto il segno di integrale

Data l'elementarità di queste dispense tratteremo la questione riferendoci al solo *integrale di Riemann* invece che a quello di *Lebesgue*, rispetto al quale i risultati che seguono possono dimostrarsi con ipotesi molto più deboli usando il *teorema della convergenza dominata di Lebesgue*.

Consideriamo una funzione almeno continua  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $K \subset \mathbb{R}^n$  è un compatto (tipicamente la chiusura di un aperto limitato) e  $I = (a, b)$  un intervallo aperto sulla retta reale. Ci chiediamo (1) quando la funzione integrale

$$F(t) := \int_K f(t, x) d^n x \quad \text{per } t \in I \quad (\text{A.1})$$

sia continua e (2) quando sia derivabile in  $t$  se lo è  $f$ . L'integrale è assunto essere quello di Riemann come già detto (anche se coincide con quello di Lebesgue vista la continuità in  $x$  della funzione integranda).

Abbiamo i seguenti risultati elementari.

**Teorema A.1.** *Sia  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, dove  $K \subset \mathbb{R}^n$  è un compatto e  $I = (a, b)$  un intervallo aperto. Se  $t_0 \in I$  vale:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_K f(t, x) d^n x = \int_K \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) d^n x = \int_K f(t_0, x) d^n x .$$

In particolare la funzione  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita in (A.1) è continua.

**Dimostrazione.** Consideriamo un intervallo chiuso  $J = [t_0 - c, t_0 + c] \subset I$  per qualche  $c > 0$  e restringiamo  $f$  all'insieme compatto (perché prodotto cartesiano di compatti)  $J \times K$ . La funzione  $f$  restretta in questo modo è uniformemente continua perché continua su un compatto: se  $\epsilon > 0$  allora esistono  $\delta > 0$ ,  $\delta' > 0$  tali che

$$|f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon \quad \text{se } |t - t'| < \delta \text{ e } \|x - x'\| < \delta' \text{ con } t, t' \in J \text{ e } x, x' \in K.$$

In particolare

$$|f(t, x) - f(t', x)| < \epsilon \quad \text{se } |t - t'| < \delta \text{ con } t \in J \text{ e } x \in K.$$

Di conseguenza, se  $M := \int_K 1 d^n x$  (che è sicuramente finito dato che  $K$  è compatto),

$$\left| \int_K f(t, x) d^n x - \int_K f(t_0, x) d^n x \right| \leq \int_K |f(t, x) - f(t_0, x)| d^n x < M\epsilon \quad \text{per } |t - t_0| < \delta.$$

Da ciò segue immediatamente la tesi.  $\square$

Possiamo passare all'analogia questione riguardante la possibilità di scambiare integrale in  $x$  e derivata in  $t$ .

**Teorema A.2.** Sia  $f : I \times K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, tale che esista  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$  e definisca una funzione continua su  $I \times K$ , dove  $K \subset \mathbb{R}^n$  è un compatto e  $I = (a, b)$  un intervallo aperto. Se  $t_0 \in I$  vale:

$$\exists \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \int_K f(t, x) d^n x = \int_K \frac{\partial f(t_0, x)}{\partial t} d^n x.$$

Infine la funzione  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita in (A.1) è  $C^1(I)$ .

**Dimostrazione.** Consideriamo  $t_0 \in I$  e un intervallo  $I' = (-c, c)$  per qualche  $c > 0$  in modo che  $t_0 \pm c \in I$ . La funzione  $g : I' \times K \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$g(h, x) := \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} \quad \text{per } h \neq 0 \text{ e } x \in K, \text{ oppure } \quad g(0, x) := \frac{\partial f(t_0, x)}{\partial t} \quad \text{per } x \in K \quad (\text{A.2})$$

è ben definita e continua come proveremo sotto. Possiamo allora applicare il teorema precedente alla funzione  $g$  concludendo che

$$\begin{aligned} \exists \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \int_K f(t, x) d^n x &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_K \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} d^n x = \int_K \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} d^n x \\ &= \int_K \frac{\partial f(t_0, x)}{\partial t} d^n x, \end{aligned}$$

Dato che la funzione integranda nell'ultimo integrale è continua, in base all'ultima affermazione del precedente teorema concludiamo anche che

$$I \ni t \mapsto \frac{d}{dt} \int_K f(t, x) d^n x = \int_K \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} d^n x$$

è una funzione continua. Di conseguenza  $F$  in (A.1) è  $C^1(I)$ .

Per concludere la dimostrazione non resta che provare che la funzione  $g : I' \times K \mapsto \mathbb{R}$  definita in (A.2) è continua. L'unica cosa da provare è che se  $x_0 \in K$  allora

$$\lim_{(h, x) \mapsto (0, x_0)} g(h, x) = g(0, x_0),$$

dato che gli altri casi sono ovvi. Il teorema di L'argange, applicato per ogni fissato  $x \in K$ , implica che esista  $h'_x \in [-h, h]$  tale che:

$$g(h, x) = \frac{f(t_0 + h, x) - f(t_0, x)}{h} = \frac{\partial f(t_0 + h'_x, x)}{\partial t}.$$

La funzione  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$  è (congiuntamente) continua in  $(t_0, x_0)$  per ipotesi: per ogni  $\epsilon > 0$  esistono  $\delta, \delta' > 0$  tali che

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial f(t_0, x_0)}{\partial t} \right| < \epsilon$$

se  $|t - t_0| < \delta$  e  $\|x - x_0\| < \delta'$ . Da ciò segue subito che

$$|g(h, x) - g(0, x_0)| = \left| g(h, x) - \frac{\partial f(t_0, x_0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial f(t_0 + h'_x, x)}{\partial t} - \frac{\partial f(t_0, x_0)}{\partial t} \right| < \epsilon$$

se  $|h| < \delta$  e  $\|x - x_0\| < \delta'$ , dato che  $|(t_0 + h'_x) - t_0| = |h'_x| \leq |h| < \delta$ . Abbiamo provato che  $g$  è continua nei punti  $(0, x_0)$  concludendo la dimostrazione.  $\square$

## A.2 Deformazione di curve

**Proposizione A.1.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e  $\gamma : I \rightarrow \Omega$  una funzione continua, dove  $I = [a, b]$  con  $a < b$ . Se  $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'altra funzione continua allora esiste  $\delta > 0$  tale che  $\gamma(t) + \alpha\eta(t) \in \Omega$  se  $t \in I$  e  $|\alpha| < \delta$ .*

**Dimostrazione.** Assumeremo che  $\eta$  non sia la funzione ovunque nulla, in qual caso la dimostrazione sarebbe ovvia. Per ogni  $t \in I$  esiste una palla aperta  $B_t$  centrata in  $\gamma(t)$  e di raggio finito tale che  $B_t \subset \Omega$ . L'unione di tali palle ricopre il compatto  $\gamma(I)$  (immagine di un compatto secondo una funzione continua). Per la definizione di compatto possiamo estrarre un numero finito di tali palle dal ricoprimento  $\{B_t\}_{t \in I}$  ottenendo ancora un ricoprimento (ora finito) di  $\gamma(I)$ . Sia  $B \subset \Omega$  l'unione delle palle di tale ricoprimento finito. Evidentemente  $B$  è un insieme limitato perché unione finita di insiemi limitati e pertanto la sua frontiera  $\partial B$  è compatta

(dato che è chiusa e limitata). Inoltre, per costruzione,  $\gamma(I) \cap \partial B = \emptyset$ . La funzione distanza  $\partial B \times I \ni (p, t) \mapsto d(p, \gamma(t))$  è continua ed è definita su un compatto (prodotto di compatti), pertanto ammette minimo  $d$  assunto in qualche  $(p_0, t_0) \in B \times I$ . Dato che  $\gamma(t_0) \neq p_0$ , in quanto  $\gamma(I) \cap \partial B = \emptyset$ , deve valere  $d = d(p_0, \gamma(t_0)) > 0$ . Se  $D := \|\eta(t_1)\| > 0$  è il massimo assunto dalla funzione continua non nulla  $I \ni t \mapsto \|\eta(t_1)\|$  sul compatto  $I$ , definiamo  $\delta = d/D$ . Concludiamo che se  $|\alpha| < \delta$  allora  $\gamma(t) + \alpha\eta(t) \in B \subset \Omega$ . Infatti, se esistesse  $\alpha_0 \geq 0$  (se fosse  $\alpha_0 \leq 0$  il ragionamento sarebbe analogo) con  $\alpha_0 < \delta$  per cui  $\gamma(t) + \alpha_0\eta(t) \notin B$  per qualche  $t \in I$ , definendo  $\alpha_1 = \sup\{\beta \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) + \beta\eta(t) \in B, \text{ se } 0 \leq \alpha \leq \beta\}$  (che esiste finito perché l'insieme è non vuoto e maggiorato da  $\alpha_0$ ), dovrebbe valere  $\gamma(t) + \alpha_1\eta(t) = p \in \partial B$ . Questo è impossibile perché avremmo  $d(p, \gamma(t)) = \|\alpha_1\eta(t)\| < \delta D = d = \min\{d(p, \gamma(u)) \mid p \in \partial B, u \in I\}$ .  $\square$

### A.3 Richiami di Topologia elementare

Ricordiamo qui alcuni fatti di topologia generale elementare. Una coppia  $(X, \mathcal{T})$ , dove  $X$  è un insieme e  $\mathcal{T}$  una classe di sottoinsiemi di  $X$ , si dice **spazio topologico** se valgono i seguenti fatti:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ ,
- (ii) l'unione di elementi (in cardinalità arbitraria anche infinita non numerabile) di  $\mathcal{T}$  è ancora un elemento di  $\mathcal{T}$ ,
- (iii) l'intersezione di una quantità finita di elementi di  $\mathcal{T}$  è ancora un elemento di  $\mathcal{T}$ .

In questo caso gli insiemi di  $\mathcal{T}$  vengono detti (**insiemi**) **aperti**,  $\mathcal{T}$  viene detta **topologia** su  $X$ . Gli **insiemi chiusi** di  $X$  sono, per definizione, i complementi rispetto a  $X$  degli aperti.

La **chiusura**  $\bar{S}$  di un insieme  $S \subset X$  è, per definizione, l'insieme chiuso dato dall'intersezione di tutti i chiusi che includono  $S$ :

$$\bar{S} := \bigcap \{C \mid X \setminus C \in \mathcal{T}, C \supset S\}.$$

Se  $A \subset X$ , allora  $\mathcal{F}(A)$  indica la **frontiera** di  $A$ , cioè l'insieme di tutti i punti  $p \in X$  tali che ogni insieme aperto  $V$  tale che  $p \in V$  soddisfi  $V \cap A \neq \emptyset$  e  $V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$  insieme. Similmente  $\text{Int}(A)$  denota l'*interno* di  $A$ , cioè l'insieme dei punti  $p \in A$  per cui esiste un insieme aperto  $V$  tale che  $p \in V \subset A$ . Infine  $\text{Ext}(A) := \text{Int}(X \setminus A)$  indica l'*esterno* di  $A$ .

In  $\mathbb{R}^n$  esiste una topologia naturale detta **topologia euclidea** o anche **topologia standard**, i cui aperti sono, oltre all'insieme vuoto, gli insiemi dati dalle unioni arbitrarie di palle aperte di centro e raggio arbitrario. Le nozioni topologiche elementari di  $\mathbb{R}^n$  studiate nei corsi di analisi sono sottocasi delle nozioni generali date sopra. In particolare i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  chiusi nel senso di sopra sono tutti e soli quelli che contengono i loro punti di accumulazione, cioè chiusi nel senso della topologia standard di  $\mathbb{R}^n$ . La chiusura di  $S \subset \mathbb{R}^n$  coincide con l'unione di  $S$  e dei suoi punti di accumulazione.

Ricordiamo che in  $\mathbb{R}^n$  un insieme è detto **limitato** se esiste una palla di raggio finito che lo include.

Se  $A \subset X$  è un insieme arbitrario e  $(X, \mathcal{T})$  è uno spazio topologico, è possibile indurre su  $A$  una topologia  $\mathcal{T}_A$  tramite  $\mathcal{T}$ . Ponendo infatti:  $\mathcal{T}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{T}\}$ , si verifica subito che



$(A, \mathcal{T}_A)$  è ancora uno spazio topologico.  $\mathcal{T}_A$  è detta **topologia indotta (da  $\mathcal{T}$ ) su  $A$** .

Se  $p \in X$ , dove  $(X, \mathcal{T})$  è uno spazio topologico, un **intorno aperto** di  $p$  è un qualsiasi  $A \in \mathcal{T}$  tale che  $p \in \mathcal{T}$ .

Se  $(X, \mathcal{T})$  e  $(X', \mathcal{T}')$  sono spazi topologici, una funzione  $f : X \rightarrow X'$  è detta **continua**, se è tale che  $f^{-1}(A) \subset \mathcal{T}$  quando  $A \in \mathcal{T}'$  (cioè la controimmagine di un aperto dello spazio di arrivo è un aperto nello spazio di partenza). Se  $(X, \mathcal{T})$  e  $(X', \mathcal{T}')$  sono spazi topologici e  $p \in X$ , una funzione  $f : X \rightarrow X'$  è detta **continua in  $p$**  se, per ogni intorno aperto  $B$  di  $f(p)$ , esiste un intorno aperto  $A$  di  $p$  tale che  $f(A) \subset B$ . Si verifica facilmente che  $f : X \rightarrow X'$  è continua se e solo se è continua in ogni punto  $p \in X$ . Se  $(X, \mathcal{T})$  e  $(X', \mathcal{T}')$  sono spazi topologici, una funzione  $f : X \rightarrow X'$  è detta **omeomorfismo** quando è continua, biettiva e l'inversa è continua.

Si prova che se i due spazi  $X, X'$  usati sopra sono  $\mathbb{R}^n$  ed  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente, oppure sottoinsiemi di tali spazi, dotati delle rispettive topologie euclidee, la definizioni classiche di funzione continua e continua in un punto sono equivalenti a quelle generali date sopra.

Uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  è detto **spazio di Hausdorff** o **spazio  $T_2$**  o **spazio separabile di secondo tipo**, se per ogni coppia di punti  $p, q \in X$  ci sono due intorni aperti  $U \ni p$  e  $V \ni q$  con  $U \cap V = \emptyset$ .

Uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  è detto essere **a base numerabile** se esiste una classe numerabile  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  (appunto la “base numerabile”) tale che ogni insieme aperto di  $X$  si possa ottenere come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

$\mathbb{R}^n$  dotato della topologia standard è sia di Hausdorff che a base numerabile.

Un insieme  $S \subset X$  di uno spazio topologico  $(X, \mathcal{T})$  è detto:

**compatto**, se per ogni classe  $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  tali che  $\bigcap_{i \in I} B_i \supset S$  esiste una sottoclasse *finita*, cioè  $F \subset I$  finito, tale che  $\bigcap_{i \in F} B_i \supset S$ . (Nella topologia standard di  $\mathbb{R}^n$  per un famoso teorema di Heine-Borel, gli insiemi compatti sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati);

**relativamente compatto**, se la sua chiusura è compatta;

**sconnesso**, se esistono due aperti  $A, A' \in \mathcal{T}$  tali che  $A \cap S \neq \emptyset$ ,  $A' \cap S \neq \emptyset$ ,  $A \cup A' \supset S$ , ma  $(A \cap S) \cap (A' \cap S) = \emptyset$ ;

**connesso**, se non è sconnesso. (Quindi per esempio, nella topologia standard di  $\mathbb{R}$ , l'insieme  $S := (0, 1) \cup [1, 2)$  è connesso ma  $S := (0, 1) \cup (1, 2)$  è sconnesso.)

**connesso per archi**, se per ogni coppia  $p, q \in S$  esiste un'applicazione continua, detta arco continuo,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ ; gli insiemi connessi per archi risultano essere connessi e in  $\mathbb{R}^n$  un insieme aperto e connesso è sempre connesso per archi (continui e infinitamente differenziabili);

**semplicemente connesso**, se è connesso, connesso per archi e per ogni coppia di punti  $p, q \in S$  e ogni coppia di archi continui  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow S$  con  $\gamma_i(0) = p$ ,  $\gamma_i(1) = q$  esiste una funzione continua  $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$  con  $\Gamma(r, 0) = p$ ,  $\Gamma(r, 1) = q$  per ogni  $r \in [0, 1]$  ed infine  $\Gamma[0, s] = \gamma_1(s)$  e  $\Gamma(1, s) = \gamma_2(s)$ . In altre parole  $\gamma_1$  può essere deformato con continuità in  $\gamma_2$  rimanendo dentro  $S$ . In  $\mathbb{R}^n$  un insieme aperto semplicemente connesso soddisfa la proprietà di semplice connessione anche per  $\Gamma$  infinitamente differenziabile se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono tali.

Esiste una definizione equivalente di semplice connessione basata sulla nozione di *gruppo di omo-*

*topia*, della quale non abbiamo mai fatto uso.

Gli insiemi compatti sono chiusi negli spazi di Hausdorff (come in  $\mathbb{R}^n$ ) e, in generale, i sottoinsiemi chiusi degli insiemi compatti sono compatti a loro volta. Le funzioni continue trasformano insiemi compatti in insiemi compatti, gli insiemi connessi (per archi) in insiemi connessi (per archi). Gli omeomorfismi trasformano anche gli insiemi semplicemente connessi in insiemi semplicemente connessi. Risulta banalmente che un sottoinsieme  $S \subset X$  di uno spazio topologico è compatto, connesso, semplicemente connesso se e solo se è uno spazio topologico rispettivamente compatto, connesso, semplicemente connesso, rispetto alla topologia indotta da  $X$  su di esso.

Se  $(X, \mathcal{T}_X)$  e  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  sono spazi topologici,  $X \times Y$  ammette una topologia naturale, detta prodotto, i cui aperti sono le unioni di tutti i prodotti cartesiani  $A \times A'$  con  $A \in \mathcal{T}_X$  e  $A' \in \mathcal{T}_Y$ . La topologia standard di  $\mathbb{R}^{n+m}$  non è altro che la topologia prodotto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Una funzione  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , con  $(Z, \mathcal{T}_Z)$  ulteriore spazio topologico, è detta essere **congiuntamente continua** se è continua nella topologia prodotto del dominio.

## A.4 Elementi di geometria differenziale

Lo strumento matematico più generale e potente atto a descrivere le proprietà generali dello spaziotempo, dello spazio fisico tridimensionale e dello spazio astratto in cui descrivere i sistemi fisici delle teorie classiche, è la nozione di *varietà differenziabile*. Si tratta in essenza di un insieme di oggetti arbitrari, indicati con il nome generico di *punti*, che può essere ricoperto localmente con sistemi di coordinate i quali identificano i punti dell'insieme con  $n$ -ple di  $\mathbb{R}^n$ . La definizione formale di varietà differenziabile è stata data nel capitolo 1 dopo avere precisato la terminologia usata riguardo alle varie nozioni di differenziabilità von la Definizione 1.6.

Per completezza riportiamo di seguito la definizione di varietà differenziabile (Definizione 1.7) e le osservazioni corrispondenti già fatte nel Cap. 1.

**Definizione A.1.** Una **varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^k$** , con  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $k = 1, 2, \dots, \infty$  fissati, è uno spazio topologico  $M$  i cui elementi sono detti **punti**, dotato di alcune strutture geometriche con proprietà che precisiamo di seguito.

(1) L'insieme  $M$  deve essere dotato di una **struttura differenziabile di classe  $C^k$  e dimensione  $n$** ,  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  cioè, una collezione di coppie  $(U_i, \phi_i)$ , dette **carte locali** o **sistemi di coordinate locali**, in cui  $U_i$  è sottoinsieme aperto di  $M$  e  $\phi_i$  è un'applicazione con dominio  $U_i$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  e vale:

(i)  $\cup_{i \in I} U_i = M$ , ogni  $\phi_i$  è iniettiva e  $\phi_i(U_i)$  aperto in  $\mathbb{R}^n$ ;

(ii) le carte locali in  $\mathcal{A}$  devono essere  $C^k$ -compatibili a due a due. Due applicazioni iniettive  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U, V \subset M$  sono dette  **$C^k$ -compatibili** (o più brevemente  **$k$ -compatibili**) se vale  $U \cap V \neq \emptyset$  e le funzioni  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  e  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  sono entrambe di classe  $C^k$ , oppure se vale  $U \cap V = \emptyset$ ;

(iii)  $\mathcal{A}$  è **massimale** ossia soddisfa: se  $U \subset M$  è aperto e  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è compatibile con ogni carta di  $\mathcal{A}$ , allora  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ .

(2) Dal punto di vista topologico, si richiede che:

(i) lo spazio topologico  $M$  sia di Hausdorff a base numerabile;

(ii) lo spazio topologico  $M$  sia, tramite le carte di  $\mathcal{A}$ , *localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$* . In altre parole, se  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ , allora  $U$  è aperto e  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  è un omeomorfismo.  $\diamond$

### Osservazioni A.1.

(1) Ogni carta locale  $(U, \phi)$  su una varietà differenziabile  $M$  permette di assegnare biunivocamente una  $n$ -pla di numeri reali  $(x_p^1, \dots, x_p^n) = \phi(p)$  ad ogni punto  $p$  di  $U$ . Gli elementi della  $n$ -pla sono le **coordinate** di  $p$  nella carta  $(U, \phi)$ . I punti in  $U$  sono quindi in corrispondenza biunivoca con le  $n$ -ple di  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Una carta locale con dominio dato da tutto  $M$  è detta **carta globale** o **sistema di coordinate globale**.

(2) Nell'ipotesi  $U \cap V \neq \emptyset$ , la  $k$ -compatibilità di carte locali  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  implica che la matrice jacobiana di  $\phi \circ \psi^{-1}$ , essendo invertibile, abbia determinante ovunque non nullo. Viceversa, se  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è biettiva, di classe  $C^k$ , con determinante della matrice jacobiana non nullo su  $\psi(U \cap V)$ , allora  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è anch'essa  $C^k$  e quindi le due carte locali sono  $k$ -compatibili. La prova di ciò (esercizio A.1.5) si basa sul noto [GiustiII]:

### Teorema A.3. (Teorema della funzione inversa)

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $D \subset \mathbb{R}^n$  aperto non vuoto, una funzione di classe  $C^k$ , con  $k = 1, 2, \dots, \infty$  fissato. Se la matrice jacobiana di  $f$ , valutata in  $p \in D$ , ha determinante non nullo allora esistono un intorno aperto  $U \subset D$  di  $p$  ed un intorno aperto  $V$  di  $f(p)$  tali che: (i)  $f|_U : U \rightarrow V$  sia biettiva (ii) la sua inversa  $f|_U^{-1} : V \rightarrow U$  sia di classe  $C^k$ .  $\diamond$

(3) Le due richieste sul *tipo* di topologia in (2)(i) (che valgono per la topologia standard di  $\mathbb{R}^n$ ) sono di carattere tecnico e assicurano, rispettivamente, l'unicità delle soluzioni di problemi basati su equazioni differenziali su  $M$  (necessaria dal punto di vista fisico quando queste equazioni descrivono l'evoluzione di sistemi fisici) e la fattibilità della teoria dell'integrazione su  $M$ . La richiesta in (2)(ii) corrisponde invece al requisito intuitivo che  $M$  "sia continuo come"  $\mathbb{R}^n$  nell'intorno di ogni punto. Classici controesempi mostrano che la proprietà di Hausdorff di  $\mathbb{R}^n$  non è trasportata su  $M$  dagli omeomorfismi locali dati e pertanto deve essere imposta separatamente.

(4) Sia  $M$  spazio topologico di Hausdorff a base numerabile. Una collezione di carte locali  $\mathcal{A}$  su  $M$  che soddisfi (i) e (ii) in (1) ma non necessariamente (iii), e che soddisfi (ii) in (2), è detto **atlante** su  $M$  di **dimensione  $n$**  e **classe  $C^k$** . Si dimostra facilmente che per ogni atlante  $\mathcal{A}$  su  $M$  esiste un unico atlante massimale che lo include. Si osservi che due atlanti su  $M$  tali che ogni carta di uno sia compatibile con ogni carta dell'altro, inducono la stessa struttura differenziabile su  $M$ . Quindi per assegnare una struttura differenziabile è sufficiente assegnare un atlante non massimale, uno dei possibili che la individua. L'unica struttura differenziabile associata nel modo detto ad un fissato atlante si dice essere **indotta** dall'atlante.

(5) Si deve comunque notare che possono esistere più strutture differenziabili inequivalenti sul-

la stesso spazio topologico di Hausdorff a base numerabile<sup>1</sup>. Ciò accade in dimensione  $\geq 4$ . Pertanto, per assegnare una varietà differenziabile  $N$  di dimensione  $n \geq 4$  non è sufficiente specificare il solo insieme  $N$ , anche se è stata specificata la topologia appropriata. Fanno eccezione i casi in cui  $N$  è un sottoinsieme di una varietà di dimensione maggiore  $M$  assegnata, di cui  $N$  è sottovarietà embedded, come specificato sotto.

(6) Si può provare che se  $1 \leq k < \infty$ , si possono eliminare alcune carte dalla struttura differenziabile (un numero infinito di carte!), in modo tale che l'insieme risultante sia ancora un atlante con  $k = \infty$ . Si possono considerare varietà *analitiche* (in simboli si scrive  $C^\omega$ ), in cui tutte le funzioni  $\phi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \phi^{-1}$  sono assunte essere funzioni analitiche reali.

#### A.4.1 Varietà prodotto

Date due varietà differenziabili  $M$  ed  $N$ , di dimensione  $m$  ed  $n$  rispettivamente, ed entrambe di classe  $C^k$ , si può costruire una terza varietà differenziabile di classe  $C^k$  e dimensione  $m + n$  sull'insieme di punti  $M \times N$  dotato della topologia prodotto. (Tale spazio topologico è quindi ancora di Hausdorff ed a base numerabile.) Tale varietà è detta *varietà prodotto* di  $M$  e  $N$  e si indica semplicemente con  $M \times N$ . La struttura differenziabile di  $M \times N$ , detta *struttura differenziabile prodotto*, è quella che si ottiene come segue. Se  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  sono due carte locali su  $M$  ed  $N$  rispettivamente, è immediato verificare che

$$U \times V \ni (p, q) \mapsto (\phi(p), \psi(q)) =: \phi \oplus \psi(p, q) \in \mathbb{R}^{m+n} \quad (\text{A.3})$$

è un omeomorfismo locale. Inoltre, se  $(U', \phi')$  e  $(V', \psi')$  sono altre due carte locali su  $M$  ed  $N$  rispettivamente,  $k$ -compatibili con le rispettive precedenti, le carte  $(U \times V, \phi \oplus \psi)$  e  $(U' \times V', \phi' \oplus \psi')$  risultano essere banalmente  $k$ -compatibili. Infine, al variare delle carte  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  nelle strutture differenziabili di  $M$  e  $N$ , le carte  $(U \times V, \phi \oplus \psi)$  definiscono un atlante su  $M \times N$ . La struttura differenziabile da esso generata è, per definizione, la struttura differenziabile prodotto.

**Definizione A.2.** Date due varietà differenziabili  $M$  ed  $N$ , di dimensione  $m$  ed  $n$  rispettivamente, ed entrambe di classe  $C^k$ , la **varietà prodotto**  $M \times N$  è la varietà sull'insieme  $M \times N$ , dotato della topologia prodotto, e con struttura differenziabile indotta dalle carte locali  $(U \times V, \phi \oplus \psi)$  definite in (A.3), quando  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  variano nelle strutture differenziabili di  $M$  e  $N$ .  $\diamond$

#### A.4.2 Funzioni differenziabili

Dato che una varietà differenziabile, localmente è del tutto indistinguibile da  $\mathbb{R}^n$ , la struttura di varietà differenziabile permette di dare senso alla nozione di *funzione differenziabile* definita

---

<sup>1</sup>Tecnicamente parlando strutture, differenziabili non diffeomorfe. Si rimanda ai corsi di geometria differenziale per approfondimenti.

su un insieme che non sia un  $\mathbb{R}^n$  oppure un suo sottoinsieme, ma che abbia la struttura di varietà differenziabile. L'idea è banalmente quella di ridursi, localmente, alla definizione standard in  $\mathbb{R}^n$  di funzione differenziabile, usando la struttura di carte locali che ricoprono ogni varietà differenziabile. Se  $M$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ , diremo che  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile con continuità fino all'ordine  $p \leq k$ , oppure più brevemente, che  $f$  è di *classe*  $C^p$ , se le funzioni  $f \circ \phi^{-1}$  sono di classe  $C^p$  come funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  per ogni carta locale  $(U, \phi)$  su  $M$ . Tenendo conto che  $\mathbb{R}$  è una varietà differenziabile, possiamo dare la seguente definizione del tutto generale che include il caso appena considerato (se  $N = \mathbb{R}$  con struttura differenziabile standard).

**Definizione A.3.** Siano  $M, N$  varietà differenziabili di dimensione  $m, n$  e classe  $C^p$  e  $C^q$  ( $p, q \geq 1$ ). Una funzione continua  $f : M \rightarrow N$  è di **classe**  $C^k$  ( $0 \leq k \leq p, q$  eventualmente  $k = \infty$ ) se  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è di classe  $C^k$ , come funzione da  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$ , per ogni scelta delle carte locali  $(U, \phi), (V, \psi)$ , rispettivamente in  $N$  e  $M$ .

La classe delle funzioni differenziabili di classe  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$  da  $M$  ad  $N$  è indicata con  $C^p(M; N)$ ; se  $N = \mathbb{R}$  si scrive semplicemente  $C^k(M)$ .

Un  **$k$ -diffeomorfismo**  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà  $M, N$  è una funzione di classe  $C^k$ , biettiva, con inversa di classe  $C^k$ . Se  $M$  ed  $N$  sono connesse da un  $k$ -diffeomorfismo  $f$  si dicono varietà  **$k$ -diffeomorfe** (tramite  $f$ ).  $\diamond$

### Osservazioni A.2.

(1) Si noti che abbiamo ammesso il caso di funzioni differenziabili di classe  $C^0$ , che, come deve essere chiaro, in realtà corrisponde a funzioni solamente continue ed a omeomorfismi nel caso di 0-diffeomorfismi. Ovviamente ogni  $k$ -diffeomorfismo è anche un omeomorfismo per cui, per esempio, non ci possono essere diffeomorfismi tra  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{R}^2$  (oppure ogni suo sottoinsieme non vuoto e aperto), essendo il primo compatto ed il secondo no. Questo fatto prova, come menzionato precedentemente, che non possono esistere carte globali su  $\mathbb{S}^2$ .

(2) Si dimostra facilmente che, affinché  $f : M \rightarrow N$  sia  $C^p$ , è sufficiente che  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  siano funzioni  $C^k$  al variare delle carte locali  $(U, \phi), (V, \psi)$  in due atlanti, rispettivamente su  $M$  ed  $N$ , senza dover controllare la validità di tale condizione per *tutte* le possibili carte locali delle due varietà.

(3) Se  $f : M \rightarrow N$  è una funzione differenziabile (di classe  $C^k$ ) e sono assegnate carte locali  $(U, \phi), (V, \psi)$ , rispettivamente in  $N$  e  $M$ , la funzione  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  è detta **rappresentazione in coordinate** di  $f$ .

(4) Una funzione  $f : M \times N \rightarrow L$ , con  $M, L, N$  varietà differenziabili, è detta essere **congiuntamente di classe**  $C^k$  se è di classe  $C^k$  usando la struttura di varietà prodotto nel dominio.

### A.4.3 Sottovarietà embedded

Un altro utile concetto è quello di *sottovarietà embedded*.  $\mathbb{R}^n$  è una sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^m$  con  $m > n$ . In coordinate canoniche  $x^1, \dots, x^m$  di  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^n$  si identifica con il sottoinsieme

individuato dalle condizioni  $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$  e le prime  $n$  coordinate di  $\mathbb{R}^m$ ,  $x^1, \dots, x^n$ , sono identificate con le coordinate standard di  $\mathbb{R}^n$ . L'idea è quella di generalizzare, in senso locale, questa situazione usando coordinate locali e considerando varietà  $N$  ed  $M$  in luogo di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ .

**Definizione A.4.** Sia data una varietà differenziabile  $M$ , di dimensione  $m > n$  e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Una **sottovarietà embedded di  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$** ,  $N$ , è una varietà differenziabile (di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ ) costituita come segue.

(a)  $N$  è un sottoinsieme di  $M$  dotato della topologia ereditata da  $M$ .

(b) La struttura differenziabile di  $N$  è quella generata da un atlante  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  in cui:

(i)  $U_i = V_i \cap N$  e  $\phi_i = \psi|_{V_i \cap N}$  per una opportuna carta locale  $(V_i, \phi_i)$  su  $M$ ;

(ii) nelle coordinate  $x^1, \dots, x^m$  associate a  $(V_i, \phi_i)$ , l'insieme  $V_i \cap N$  è individuato dalla richiesta  $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$  e le rimanenti coordinate  $x^1, \dots, x^n$  sono coordinate locali associate a  $\phi_i$ .  $\diamond$

**Osservazioni A.3.**

(1) La topologia di  $N$  è ancora, per costruzione, di Hausdorff ed a base numerabile.

(2) La struttura di sottovarietà embedded su  $N$ , se può essere assegnata, è univocamente individuata dalla struttura di varietà differenziabile di  $M$  come segue dall'esercizio 4 sotto.

**Esercizi A.1.**

1. Mostrare che  $\mathbb{S}^2$  nell'esempio (2) di esempi 1.1 è una sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2.

2. L'insieme  $N$  di  $\mathbb{R}^2$  ottenuto unendo la circonferenza di raggio unitario centrata in  $(0, 1)$  con l'asse  $x^1$  può essere dotato della struttura di sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^2$ ? Può essere dotata della struttura di varietà differenziabile di dimensione 1?

3. Considerare la superficie conica  $C$  in  $\mathbb{R}^3$  di equazione  $0 \leq x^3 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ . Si dimostra che  $C$  non può essere dotata della struttura di sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2, ma che può essere dotata della struttura di varietà differenziabile di dimensione 2. Cosa succede se si considera  $C^* := C \setminus \{(0, 0, 0)\}$  in luogo di  $C$ ?

4. Provare che se  $M$  è una varietà differenziabile e  $N \subset M$ , con topologia ereditata da  $M$ , ammette due distinti atlanti  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  e  $\{(U'_j, \phi'_j)\}_{j \in J}$  che soddisfano (b) della definizione A.4 allora le carte dei due atlanti sono tra di loro compatibili.

5. Siano  $U \cap V \neq \emptyset$  con  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  carte locali su  $M$ , tali che:  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è biettiva, di classe  $C^k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ), con determinante della matrice jacobiana non nullo su  $\psi(U \cap V)$ . Provare che  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è anch'essa  $C^k$  e quindi le due carte locali sono  $k$ -compatibili.

Per concludere citiamo, senza provarlo (vedi per es. [doCarmo92, Westenholtz78]), un importante teorema che permette di stabilire quando un sottoinsieme di una varietà differenziabile può essere dotato della struttura di sottovarietà embedded. La dimostrazione del teorema è una diretta conseguenza del teorema del Dini [GiustiII].

**Teorema A.4. (Teorema dei valori regolari.)** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $m$  e classe  $C^k$ . Si consideri l'insieme  $N$  determinato da  $c(< m)$  costanti,  $v_j$ , e da  $c$  funzioni di classe  $C^k$ ,  $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$N := \{p \in M \mid f_j(p) = v_j, \quad j = 1, \dots, c\}.$$

Se, nell'intorno di ogni punto  $p \in N$ , esiste una carta locale  $(U, \phi)$  di  $M$  tale che la matrice jacobiana di coefficienti  $\partial(f_j \circ \phi^{-1})/\partial x^i|_{\phi(p)}$  (con  $j = 1, \dots, c$  e  $i = 1, \dots, m$ ) abbia rango  $c$ , allora l'insieme  $N$  può essere dotato della struttura di sottovarietà differenziabile embedded di  $M$  di dimensione  $n := m - c$  e classe  $C^k$ .

Se in particolare, la matrice quadrata  $c \times c$  di elementi

$$\frac{\partial f_j \circ \phi^{-1}}{\partial x^k}, \quad j = 1, \dots, c \text{ e } k = m - c + 1, m - c + 2, \dots, m$$

è non singolare in  $\phi(p)$  con  $p \in N$ , le prime  $n$  coordinate  $x^1, \dots, x^n$  definiscono un sistema di coordinate della struttura differenziabile di  $N$  in un intorno di  $p$  in  $N$ .  $\diamond$

**Osservazioni A.4.** La seconda parte del teorema dei valori regolari può essere enunciata rispetto ad una qualsiasi scelta di  $c$  coordinate rispetto alle quali la corrispondente matrice quadrata  $c \times c$  è non singolare. Le rimanenti  $n$  coordinate definiscono, localmente un sistema di coordinate ammissibili su  $N$ . La prova di tale fatto è ovvia tenendo conto del fatto che, se  $\phi : M \ni p \mapsto (x^1(p), x^2(p), \dots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$  è un sistema di coordinate locali su  $M$ , lo è anche ogni permutazione delle coordinate, per es.  $\phi : M \ni p \mapsto (x^2(p), x^1(p), \dots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ .

**Definizione A.5.** Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^k$  sulla varietà  $M$  di classe  $C^k$ .  $f$  è detta **non singolare** in  $p \in M$  se esiste una carta locale  $(U, \phi)$ , con  $U \ni p$ , tale che la matrice riga jacobiana  $\partial(f \circ \phi^{-1})/\partial x^i|_{\phi(p)}$  sia non nulla (cioè abbia rango 1).  $\diamond$

Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^k$  ovunque non singolare sulla varietà  $M$  di classe  $C^k$  e dimensione  $m$ , per il teorema dei valori regolari gli insiemi:

$$\Sigma_t := \{p \in M \mid f(p) = t\},$$

sono sottovarietà embedded di classe  $C^k$  e dimensione  $m - 1$ . Per costruzione  $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$  se  $t \neq t'$ . Infine  $\cup_{t \in f(M)} \Sigma_t = M$ . In tale situazione si dice che  $M$  è una **varietà fogliata** e che le sue **foglie** sono le sottovarietà  $\Sigma_t$  con  $t \in f(M)$ .

### Esempi A.1.

**1.** L'esercizio A.1.1 si risolve immediatamente applicando il teorema A.4. La sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  ha equazione  $f(x^1, x^2, x^3) = 0$  dove  $f(x^1, x^2, x^3) := \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$ .  $f$  è differenziabile, la matrice rettangolare di coefficienti  $\partial f / \partial x^i$  vale  $(2x^1, 2x^2, 2x^3)$  e non si annulla su  $\mathbb{S}^2$  (dove vale  $(2, 2, 2)$ ). Di conseguenza il suo rango è 1.

**2.** Il teorema dei valori regolari non può essere direttamente applicato nell'esercizio A.1.3 nel

caso di  $C$  in quanto la funzione  $f(x^1, x^2, x^3) := x^3 - \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$  non è differenziabile in  $(0, 0, 0)$ , cioè nel vertice del cono. Se si usa la funzione  $g(x^1, x^2, x^3) := (x^3)^2 - ((x^1)^2 + (x^2)^2)$  il teorema non può ancora essere applicato perché il rango della matrice riga di elementi  $\partial g / \partial x^i$  è nullo nell'origine.

**3.** Indichiamo con  $x, y, z$  le coordinate standard di  $\mathbb{R}^3$  e consideriamo una superficie  $S$  che possa vedersi come l'immagine di  $z = g(x, y)$ , con  $(x, y) \in D$  insieme aperto del piano  $z = 0$  e con  $f$  di classe  $C^1$ . Questa superficie è una sottovarietà embedded di dimensione 2 e classe  $C^1$  in  $D \times \mathbb{R}$  dotato della struttura di varietà differenziabile standard. Inoltre il sistema di coordinate  $x, y$  appartiene alla struttura differenziabile della sottovarietà. Eccone la prova. Possiamo dotare  $D \times \mathbb{R}$  del sistema di coordinate  $y^1 = x^1, y^2 := x^2, y^3 := z - g(x, y)$ : questa trasformazione di coordinate è infatti invertibile, differenziabile con inversa differenziabile come si prova immediatamente, per cui le coordinate  $y^1, y^2, y^3$  appartengono alla struttura differenziabile di  $D \times \mathbb{R}$  (e definiscono una carta locale della struttura differenziabile di  $\mathbb{R}^3$ ).  $S$  è determinata da  $y^3 = 0$  ed è quindi una sottovarietà embedded direttamente dalla definizione.

Alternativamente, si può usare il teorema dei valori regolari, considerando la funzione  $f(x, y, z) := z - g(x, y)$  con  $(x, y, z) \in D \times \mathbb{R}$ , che determina  $S$  con la condizione  $f(x, y, z) = 0$ : in coordinate cartesiane la matrice jacobiana di  $f$  è il vettore riga  $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, 1) \neq 0$ .

**4.** Studiando le superfici in  $\mathbb{R}^3$  (o equivalentemente in  $\mathbb{E}^3$ ), riferendosi a coordinate cartesiane ortonormali  $\mathbf{x} := (x, y, z)$ , si è soliti definire una **superficie regolare** come l'immagine  $S$  di un'applicazione di classe (almeno)  $C^1$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  con  $(u, v) \in D$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^2$ , in modo tale che

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } (u, v) \in D. \quad (\text{A.4})$$

In effetti una superficie regolare definita in questo modo può non essere una sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2 (e classe  $C^1$ ). Tuttavia, se  $S \subset \mathbb{R}^3$  è una sottovarietà bidimensionale embedded di dimensione 2 e classe (almeno)  $C^1$ , allora  $S$  è unione di superfici regolari.

Dimostriamo queste affermazioni. Per dimostrare la prima è sufficiente considerare il cilindro  $S$  retto in  $\mathbb{R}^3$  che ha come base una *rosa a 4 petali*  $x = \cos(2\theta) \cos \theta, y = \cos(2\theta) \sin \theta$ . L'equazione di  $S$  è dunque  $x = \cos(2u) \cos u, y = \cos(2u) \sin u, z = v$ , per  $(u, v) \in (\pi/4, 9\pi/4) \times \mathbb{R}$ . Il calcolo diretto prova che la condizione (A.4) è verificata nel dominio considerato. Tuttavia, la curva che individua  $S$  nel piano  $z = 0$ , cioè la rose a 4 petali suddetta, si interseca più volte nell'origine. La topologia indotta da  $\mathbb{R}^3$  su  $S$  è tale che ogni punto sull'asse  $z$  non abbia mai un intorno su  $S$  che sia omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Per quanto riguarda la seconda affermazione, supponiamo che  $S \subset \mathbb{R}^3$  sia una sottovarietà embedded di dimensione 2 e classe  $C^1$ . Se  $p \in S$ , c'è un intorno aperto  $U \ni p$  coperto da coordinate  $y^1, y^2, y^3$  della struttura differenziabile  $C^1$  di  $\mathbb{R}^3$ , tale che  $S \cap U$  è descritto da  $y^1 = 0$ .  $u = y^2, v = y^3$  sono coordinate locali su  $S$ . Il fatto che le coordinate  $y^1, y^2, y^3$  siano compatibili con le coordinate cartesiane standard di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ , implica che la matrice jacobiana di elementi  $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$  abbia determinante non nullo. Questo equivale a dire che i tre vettori  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  siano ovunque linearmente indipendenti. Questo sarebbe impossibile se fosse

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^2} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^3} = \mathbf{0},$$



per cui deve valere ovunque:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0.$$

### Esercizi A.2.

1. Provare l'affermazione in (2) in osservazioni A.1:

*Nell'ipotesi  $U \cap V \neq \emptyset$ , la  $k$ -compatibilità delle carte locali  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  implica che la matrice jacobiana di  $\phi \circ \psi^{-1}$ , essendo invertibile, abbia determinante ovunque non nullo.*

2. Provare che, se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa il requisito di non singolarità in  $p \in M$  rispetto alla carta locale  $(U, \phi)$ , allora soddisfa tale requisito rispetto ad ogni altra carta locale definita in un intorno di  $p$ .

3. Mostrare che, se per assegnate funzioni  $f_j$  e costanti  $c_j$  sono soddisfatte le ipotesi del teorema dei valori regolari per il punto  $p$  rispetto alla carta locale  $(U, \phi)$ , allora le ipotesi sono valide rispetto ad ogni altra carta locale definita in un intorno di  $p$ .

### A.4.4 Spazio tangente e cotangente. Campi vettoriali covarianti e controvarianti

Consideriamo la varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Consideriamo ogni fissato spazio  $C^k(M)$ , come uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$  rispetto alle combinazioni lineari di funzioni definite come, se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $f, g \in C^k(M)$ :

$$(af + bg)(p) := af(p) + bg(p), \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Fissato un punto  $p \in M$ , una **derivazione** in  $p$ , è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $L_p : C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$  che gode della *proprietà di Leibniz*:

$$L_p(fg) = f(p)L_p(g) + g(p)L_p(f), \quad \text{per ogni } f, g \in C^k(M). \quad (\text{A.5})$$

Evidentemente una combinazione lineare di derivazioni in  $p$ ,  $aL_p + bL'_p$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) dove

$$(aL_p + bL'_p)(f) := aL_p(f) + bL'_p(f), \quad \text{per ogni } f, g \in C^k(M),$$

è ancora una derivazione. Pertanto le derivazioni in  $p$  formano uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ , che indichiamo con  $\mathcal{D}_p^k$ . Ogni carta locale  $(U, \phi)$  con  $U \in p$  definisce automaticamente  $n$  derivazioni in  $p$  come segue. Se  $x^1, \dots, x^n$  sono le coordinate associate a  $\phi$ , definiamo la derivazione rispetto alla coordinata  $k$ -esima:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p : f \mapsto \left. \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^k} \right|_{\phi(p)}, \quad \text{per ogni } f, g \in C^1(M). \quad (\text{A.6})$$

Le  $n$  derivazioni in  $p$ ,  $\left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p$ , sono *linearmente indipendenti*: se  $0$  indica la derivazione nulla e  $c^1, c^2, \dots, c^n \in \mathbb{R}$  sono tali che:

$$\sum_{k=1}^n c^k \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p = 0,$$

allora scegliendo una funzione differenziabile che coincide con la funzione coordinata  $x^l$  in un intorno aperto di  $p$  (la cui chiusura è inclusa in  $U$ ) e si annulla fuori di esso, la richiesta

$$\sum_{k=1}^n c^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p f = 0 ,$$

implica che  $c^l = 0$ . Dato che possiamo scegliere  $l$  arbitrariamente, concludiamo che ogni coefficiente  $c^r$  è nullo per  $r = 1, 2, \dots, n$ . In definitiva le  $n$  derivazioni  $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$  formano una base per un sottospazio di  $\mathcal{D}_p^k$  di dimensione  $n$  (si può in realtà provare che, nel caso di  $k = \infty$ , questo sottospazio coincide con  $\mathcal{D}_p^\infty$  stesso). Cambiando carta locale ed usando  $(V, \psi)$  con  $V \ni p$  e con coordinate  $y^1, \dots, y^n$ , le nuove derivazioni rispetto alle nuove coordinate sono legate alle vecchi dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Big|_{\psi(p)} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p . \quad (\text{A.7})$$

La dimostrazione di questo fatto è immediata dalle definizioni date. Dato che la matrice jacobiana di coefficienti  $\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Big|_{\psi(p)}$  è biettiva per definizione di carte locali, concludiamo che il sottospazio di  $\mathcal{D}_p^k$  generato dalle derivazioni  $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$  coincide con quello generato dalle derivazioni  $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ . Tale sottospazio è quindi un oggetto *intrinseco*.

**Definizione A.6. (Spazio tangente).** Data una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), si consideri un punto  $p \in M$ .

Il sottospazio vettoriale delle derivazioni in  $p \in M$  generato dalle  $n$  derivazioni  $\frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ , riferite ad un qualsiasi sistema di coordinate locali  $(U, \phi)$  con  $U \ni p$ , è detto **spazio tangente in  $p$  ad  $M$**  e si indica con  $T_p M$ . Gli elementi dello spazio tangente in  $p$  si dicono **vettori tangenti in  $p$  ad  $M$**  o **vettori controvarianti in  $p$** .

◇

Ricordiamo che se  $V$  è uno spazio vettoriale sul campo  $\mathbb{R}$ , lo spazio  $V^*$  delle funzioni lineari da  $V$  in  $\mathbb{R}$  è detto **spazio duale** di  $V$ . Se la dimensione di  $V$  è finita, è tale anche quella di  $V^*$  e le due dimensioni coincidono. In particolare, se  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base per  $V$ , la **base duale** in  $V^*$  è la base di  $V^*$ ,  $\{e^{*j}\}_{j=1, \dots, n}$ , completamente individuata dal requisito di linearità e dalle richieste:

$$e^{*j}(e_i) = \delta_i^j , \quad \text{per } i, j = 1, \dots, n .$$

Se  $f \in V^*$  e  $v \in V$ , si usa la notazione:

$$\langle v, f \rangle := f(v) .$$

**Definizione A.7. (Spazio cotangente).** Data una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), si consideri un punto  $p \in M$ .

Lo spazio duale di  $T_p M$  è detto **spazio cotangente in  $p$  ad  $M$**  e si indica con  $T_p^* M$ . Gli elementi dello spazio cotangente in  $p$  si dicono **vettori cotangenti in  $p$  a  $M$**  o **vettori covarianti in  $p$**  o **1-forme in  $p$** . Per ogni base di elementi  $\left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p$  in  $T_p M$ , gli  $n$  elementi della base duale in  $T_p^* M$  vengono indicati con  $dx^i|_p$ . Per definizione:

$$\left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \right|_p, dx^i|_p \right\rangle = \delta_k^i .$$

◇

Possiamo ora dare la nozione di campo vettoriale differenziabile sulla varietà  $M$ .

**Definizione A.8.** Se  $M$  è una varietà differenziabile di classe  $C^k$  e dimensione  $n$ , un **campo vettoriale di classe  $C^r$**  o **campo vettoriale controvariante** di classe  $C^r$ , con  $r = 0, 1, \dots, k$  è un'assegnazione di un vettore  $v(p) \in T_p M$  per ogni  $p \in M$ , in modo tale che, per ogni carta locale  $(U, \phi)$  con coordinate  $x^1, \dots, x^n$ , per cui

$$v(q) = \sum_{i=1}^n v^i(x_q^1, \dots, x_q^n) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q ,$$

le  $n$  funzioni  $v^i = v^i(x^1, \dots, x^n)$  sono di classe  $C^r$  su  $\phi(U)$ . un **campo covettoriale di classe  $C^r$**  o **campo vettoriale covariante** di classe  $C^r$  con  $r = 0, 1, \dots, k$  è un'assegnazione di un covettore  $\omega(p) \in T_p^* M$  per ogni  $p \in M$ , in modo tale che, per ogni carta locale  $(U, \phi)$  con coordinate  $x^1, \dots, x^n$ , per cui

$$\omega(q) = \sum_{i=1}^n v_i(x_q^1, \dots, x_q^n) dx^i|_q ,$$

le  $n$  funzioni  $\omega_i = \omega_i(x^1, \dots, x^n)$  sono di classe  $C^r$  su  $\phi(U)$ . ◇

**Osservazioni A.5.**

(1) Dimostreremo più avanti che la nozione data di vettore tangente, nel caso di spazi affini e quindi nel caso di  $\mathbb{R}^n$  in particolare, coincide con la nozione standard.

(2) Sia  $v \in T_p M$  e si considerino due carte locali  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \ni p$  e con coordinate, rispettivamente,  $x^1, \dots, x^n$  e  $x'^1, \dots, x'^n$ . In tal caso deve valere:

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_{j=1}^n v'^j \left. \frac{\partial}{\partial x'^j} \right|_p .$$

Pertanto

$$\sum_i v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_{j,i=1}^n v'^j \left. \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right|_{\psi(p)} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p ,$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n \left( v^i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \Big|_{\psi(p)} v'^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0 .$$

Dato che le derivazioni  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$  sono linearmente indipendenti, concludiamo che vale la legge di trasformazioni delle componenti di uno stesso vettore in  $T_p M$ , al variare delle coordinate,

$$v^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \Big|_{\psi(p)} v'^j , \quad (\text{A.8})$$

Con la stessa procedura si ottiene l'analogia formula per i vettori covarianti

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \Big|_{\psi(p)} \omega'_j , \quad (\text{A.9})$$

quando

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i \Big|_p = \sum_{j=1}^n \omega'_j dx'^j \Big|_p .$$

Vale la seguente proposizione di dimostrazione ovvia, ma molto importante dal punto di vista delle applicazioni.

**Proposizione A.2.** *Se  $M$  è una varietà differenziabile di classe  $C^k$  e dimensione  $n$ , assegnare un campo vettoriale controvariante  $X$  di classe  $C^r$  oppure un campo vettoriale controvariante  $\omega$  di classe  $C^r$  è completamente equivalente all'assegnazione di  $n$ -ple di funzioni di classe  $C^r$ ,  $\{X_{(r)}^i\}_{i=1,\dots,n}$  oppure, rispettivamente,  $\{\omega_{(r)j}\}_{j=1,\dots,n}$  – una  $n$ -pla per ogni carta locale  $(U_{(r)}, \phi_{(r)})$  di un fissato (arbitrariamente) atlante di  $M$  – in modo tale che, cambiando carte nell'atlante, valgano le relazioni:*

$$X_{(r)}^i (\phi_{(r)}(p)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_{(r)}^i}{\partial x_{(r')}^j} \Big|_{\phi_{(r')}(p)} X_{(r')}^j (\phi_{(r')}(p)) , \quad (\text{A.10})$$

oppure, rispettivamente,

$$\omega_{(r')i} (\phi_{(r')}(p)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_{(r')}^j}{\partial x_{(r)}^i} \Big|_{\phi_{(r)}(p)} \omega_{(r)j} (\phi_{(r)}(p)) , \quad (\text{A.11})$$

per ogni punto  $p \in M$ .  $\diamond$

#### A.4.5 Differenziali, curve e vettori tangenti.

Consideriamo un campo scalare  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^r$  sulla varietà  $M$  di classe  $C^k$  e dimensione  $n$ . Supponiamo esplicitamente che  $k \geq r > 1$ . Se assegnamo su un atlante e per ogni carta dell'atlante le  $n$  funzioni  $\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\}$  si verifica subito che sono rispettate le condizioni della proposizione A.2, di conseguenza abbiamo definito un campo vettoriale covariante.

**Definizione A.9.** Consideriamo un campo scalare  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^r$  sulla varietà  $M$  di classe  $C^k$  e dimensione  $n$  e valga  $k \geq r > 1$ . Il **differenziale** di  $f$ ,  $df$  è il campo vettoriale covariante di classe  $C^{r-1}$  individuato, in ogni carta locale  $(U, \psi)$  da:

$$df|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_{\psi(p)} dx^i|_p.$$

◇.

Consideriamo una curva di classe  $C^r$  nella varietà  $M$  di classe  $C^k$ , cioè un'applicazione di classe  $C^r$  ( $r = 0, 1, \dots, k$ ),  $\gamma : I \rightarrow M$ , dove  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto pensato come sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}$ . Supponiamo esplicitamente che  $r > 1$ . Se  $p \in \gamma(I)$ , possiamo definire il *vettore tangente* a  $\gamma$  in  $p$  come, se  $\gamma(t_p) = p$ :

$$\dot{\gamma}(p) := \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t_p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

in una qualsiasi carta locale definita nell'intorno di  $p$ . La definizione in realtà *non* dipende dalla carta scelta. Infatti, se definissimo

$$\dot{\gamma}'(p) := \sum_{j=1}^n \frac{dx'^j}{dt} \Big|_{t_p} \frac{\partial}{\partial x'^j} \Big|_p,$$

in riferimento ad un secondo sistema di coordinate definite nell'intorno di  $p$ , attraverso la (A.8) otterremmo subito che:

$$\dot{\gamma}(p) = \dot{\gamma}'(p).$$

Possiamo allora dare la seguente definizione.

**Definizione A.10.** Una **curva di classe**  $C^r$ ,  $r = 0, 1, \dots, k$  nella varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ , è un'applicazione di classe  $C^r$ ,  $\gamma : I \rightarrow M$ , dove  $I \subset \mathbb{R}$  è un intervallo aperto (pensato come sottovarietà differenziabile embedded di  $\mathbb{R}$ ). Se  $r > 1$ , il **vettore tangente** a  $\gamma$  in  $p = \gamma(t_p)$  per qualche  $t \in I$ , è il vettore  $\dot{\gamma}(p) \in T_p M$  definito da

$$\dot{\gamma}(p) := \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t_p} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \tag{A.12}$$

in una qualsiasi carta locale definita nell'intorno di  $p$ . ◇.

## A.5 Ancora sugli spazi affini ed euclidei

In questa sezione torniamo a considerare gli spazi affini, per provare che essi ammettono una struttura naturale di varietà differenziabile.

### A.5.1 Spazi affini ed euclidei come varietà differenziabili.

Ogni spazio affine  $\mathbb{A}^n$  ammette una struttura naturale di varietà differenziabile (di classe  $C^\infty$ ) dalla classe di sistemi di coordinate globali naturali, tra di loro compatibili dei *sistemi di coordinate cartesiane* come definiti nella definizione 1.2. Ricordiamo che un tale sistema di coordinate si costruisce come segue. Si fissa un punto  $O \in \mathbb{A}^n$ , detto *origine* delle coordinate, ed una base  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  dello spazio delle traslazioni  $V$ , detta *sistema di assi* delle coordinate. Variando  $P \in \mathbb{A}^n$  le componenti,  $((P - O)^1, \dots, (P - O)^n)$ , di ogni vettore  $P - O$  rispetto alla base scelta definiscono una funzione biettiva  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che permette di identificare i punti di  $\mathbb{A}^n$  con i punti di  $\mathbb{R}^n$ . Questa corrispondenza tra punti,  $P$ , e  $n$ -ple,  $((P - O)^1, \dots, (P - O)^n)$ , è biettiva. È iniettiva per la richiesta (i) nella definizione 1.1 ed è suriettiva perché il dominio di  $(P, O) \mapsto P - O \in V$  coincide, per definizione, con tutto  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$  ed ora  $O$  è tenuto fisso.

La topologia euclidea di  $\mathbb{R}^n$  induce tramite  $f$  una topologia su  $\mathbb{A}^n$  (definendo gli aperti di  $\mathbb{A}^n$  come le controimmagini degli aperti di  $\mathbb{R}^n$ ) che lo rende spazio topologico omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  e quindi di Hausdorff a base numerabile. Si verifica facilmente che la topologia definita in tal modo non dipende dalla scelta di  $O$  e nemmeno dalla scelta della base in  $V$ . Ulteriormente la funzione  $f$  definisce da sola un atlante  $C^\infty$  su  $\mathbb{A}^n$  e dota tale spazio di una struttura differenziabile generata da tale atlante. In base agli esercizi 1.2.1 e 2 si ha che, passando ad un altro sistema di coordinate cartesiane,  $(\mathbb{A}^n, g)$ , le funzioni  $f \circ g^{-1}$  e  $g \circ f^{-1}$  sono funzioni lineari non omogenee e quindi infinitamente differenziabili. Concludiamo che tutte le carte globali individuate da sistemi di coordinate cartesiane sono a due a due compatibili e che inducono, di conseguenza, la stessa struttura differenziabile di classe  $C^\infty$ . Possiamo dire che tale struttura differenziabile è generata dalla sola struttura di spazio affine senza scelte arbitrarie, in questo senso è *naturale*. Considerando uno spazio affine  $\mathbb{A}^n$  come una varietà differenziabile una domanda che sorge spontanea è quale relazione intercorra tra lo spazio tangente ad ogni punto  $T_P \mathbb{A}^n$ ,  $P \in \mathbb{A}^n$  e lo spazio delle traslazioni  $V$ . Si ha il seguente teorema.

**Teorema A.5.** *Sia  $\mathbb{A}^n$  uno spazio affine con spazio delle traslazioni  $V$ . Si fissi  $P \in \mathbb{A}^n$  e si consideri  $T_P \mathbb{A}^n$ . Vale quanto segue.*

(a) *Se  $(\mathbb{A}^n, f)$  è un sistema di coordinate cartesiane di origine  $O$  e con assi  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in V$ , indicate con  $x^1, \dots, x^n$  le funzioni coordinate della carta globale detta, l'applicazione:*

$$\chi_P : V \ni \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P \in T_P \mathbb{A}^n, \quad (\text{A.13})$$

*è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

(b) *Se  $\chi'_P$  è un analogo isomorfismo ottenuto partendo da un'altro sistema di cartesiane, vale*

$$\chi_P = \chi'_P,$$

e in questo senso l'isomorfismo  $\chi_P$  è naturale.

(c) Fissato  $P \in \mathbb{A}^n$ , l'unica applicazione  $\chi_P^*: T_P^* \mathbb{A}^n \rightarrow V^*$  che soddisfa la richiesta:

$$\langle \mathbf{v}, \chi_P^* \omega_P \rangle = \langle \chi_P \mathbf{v}, \omega_P \rangle \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in V \text{ e } \omega_P \in T_P^* \mathbb{A}^n,$$

è un isomorfismo (anch'esso naturale) che identifica  $T_P^* \mathbb{A}^n$  con  $V^*$ .

**Dimostrazione.** (a) Dato che sia  $V$  che  $T_P \mathbb{A}$  hanno dimensione finita  $n$ , l'applicazione lineare  $\chi_P$  definita in (A.13) tramite l'identificazione delle componenti di un vettore rispetto a due basi nei rispettivi spazi, è un isomorfismo. (b) Per l'esercizio 1.2.1 Se  $(\mathbb{A}^n, f)$  è un sistema di coordinate cartesiane con coordinate  $x^1, \dots, x^n$  e  $(\mathbb{A}^n, g)$  un altro sistema di coordinate cartesiane, con coordinate  $x'^1, \dots, x'^n$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ , in modo che valga

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j_i \mathbf{e}'_j, \quad (\text{A.14})$$

allora la funzione  $g \circ f^{-1}$  è espressa, in coordinate, dalle relazioni:

$$x'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i (x^i + b^i), \quad (\text{A.15})$$

dove  $(O - O') = \sum_i b^i \mathbf{e}_i$ . Definiamo allora:

$$\chi'_P : V \ni \sum_{j=1}^n v'^j \mathbf{e}'_j \mapsto \sum_{i=j}^n v'^j \frac{\partial}{\partial x'^j} \Big|_P \in T_P \mathbb{A}^n, \quad (\text{A.16})$$

Come conseguenza di (A.15) si ha che.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P = \sum_j B^j_i \frac{\partial}{\partial x'^j} \Big|_P. \quad (\text{A.17})$$

Da (A.14) e (A.17) notiamo che la matrice di passaggio tra le basi  $\{\mathbf{e}'_j\}$  e  $\{\mathbf{e}_i\}$  nei primi membri di (A.13) e (A.16) è la stessa che si ha tra le basi  $\{\frac{\partial}{\partial x'^j} \Big|_P\}$  e  $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_P\}$  nei secondi membri. Questo comporta immediatamente che  $\chi_P = \chi'_P$ .

(c) La richiesta che definisce  $\chi_P^*$  si può riscrivere:

$$(\chi_P^* \omega_P)(\mathbf{v}) = \omega_P(\chi_P(\mathbf{v})) \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in V \text{ e } \omega_P \in T_P^* \mathbb{A}^n,$$

dalla quale risulta evidente che  $\chi_P^*$  è ben definita e lineare. Ulteriormente è iniettiva  $\chi_P^*$  (e quindi suriettiva dato che il dominio ed il codominio hanno la stessa dimensione), perchè se fosse  $\chi_P^* \omega_P = 0$  applicazione nulla, sarebbe anche  $\omega_P(\chi_P(\mathbf{v})) = 0$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$  e dunque, dato che  $\chi_P$  è suriettiva,  $\omega_P = 0$ . Concludiamo che  $\chi_P^*$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.  $\square$

### Osservazioni A.6.

(1) L'identificazione dovuta a  $\chi_P$  identifica vettori dello spazio  $V$  con vettori dello spazio tangente  $T_P\mathbb{A}^n$ . I primi non sono associati in alcun punto di  $\mathbb{A}^n$  e, nella letteratura geometrica tradizionale, sono chiamati *vettori liberi*, mentre i secondi sono associati al punto  $P \in \mathbb{A}^n$  e, nella letteratura geometrica tradizionale, sono chiamati *vettori applicati*. Questa distinzione ha senso solo negli spazi affini. Nelle varietà differenziabili generiche esistono solo i vettori applicati.

(2) In base al teorema provato, se  $(\mathbb{A}^n, f)$  è un sistema di coordinate cartesiane di origine  $O$  e con assi  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in V$ , indicate con  $x^1, \dots, x^n$  le funzioni coordinate della carta globale detta sussiste l'identificazione canonica (dovuta all'esistenza dell'isomorfismo  $\chi_P$ ):

$$\mathbf{e}_i \equiv \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_P. \quad (\text{A.18})$$

In particolare, il vettore tangente ad una curva  $P = P(t)$  parametrizzata in coordinate cartesiane come  $x^i = x^i(t)$ , che in geometria differenziale è dato da

$$\mathbf{t}(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{P(t)},$$

è riscrivibile come:

$$\mathbf{t}(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \mathbf{e}_i.$$

In realtà quando si usa la prima notazione, si pensa in vettore tangente come vettore applicato, quando si usa la seconda lo si pensa come vettore libero.

Il teorema provato vale ovviamente anche per gli spazi euclidei  $\mathbb{E}^n$  e, in quel caso, ogni sistema di coordinate cartesiane ortonormali è ancora, da solo, un atlante per la struttura differenziabile naturale di  $\mathbb{E}^n$ .

L'esistenza del prodotto scalare nello spazio delle traslazioni ha un'importante conseguenza. Esiste un'identificazione – cioè un *isomorfismo*<sup>2</sup> *naturale* o *canonico* di spazi vettoriali –  $\chi$ , che identifica lo spazio delle traslazioni  $V$  con il suo spazio duale  $V^*$ . Se, per comodità, indichiamo con  $(|) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  il prodotto scalare su  $V$ , l'applicazione

$$\chi : V \ni \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}| \cdot) \in V^*$$

---

<sup>2</sup>In termini intuitivi un isomorfismo tra due strutture algebriche si dice *naturale* o, equivalentemente, *canonico*, quando può essere definito usando unicamente la definizione di struttura algebrica considerata senza fare ulteriori scelte particolari. Per esempio, dati due spazi vettoriali della stessa dimensione, esistono infiniti isomorfismi che li identificano, ottenuti scegliendo ed identificando gli elementi di due basi nei rispettivi spazi. Questi isomorfismi *non* sono pertanto naturali dato che non è sufficiente la struttura di spazio vettoriale per definirli, è ulteriormente necessaria una scelta di basi. Viceversa per essere definito l'isomorfismo del quale discutiamo tra uno spazio vettoriale ed il suo duale, quando lo spazio vettoriale è la struttura algebrica “spazio vettoriale con prodotto scalare”, non necessita di alcuna precisazione ulteriore oltre alla definizione della struttura algebrica stessa e la definizione di spazio duale. Stessa cosa dicasi per gli isomorfismi  $\chi_P$  e  $\chi_P^*$  introdotti sopra nel teorema A.5, che usano la sola struttura di spazio affine e varietà differenziabile. Una sistemazione non intuitiva di queste nozioni viene data dalla *teoria delle categorie* della quale non occupiamo.



è infatti ben definita (cioè  $(\mathbf{v}|\cdot)$  è davvero un elemento di  $V^*$  per la linearità nell'argomento di destra del prodotto scalare). Inoltre tale applicazione è evidentemente lineare, per la linearità nell'argomento di sinistra del prodotto scalare, e si può provare facilmente che è iniettiva. Infatti, se fosse  $(\mathbf{v}|\cdot) = 0$ , dove 0, indica l'applicazione lineare banale, allora varrebbe  $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0$  e quindi  $\mathbf{v} = 0$ . Dato che  $V$  e  $V^*$  hanno la stessa dimensione  $n$ , si conclude che l'applicazione  $V \ni \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}|\cdot) \in V^*$  è un isomorfismo di spazi vettoriali. Si osservi che il discorso fatto prescinde completamente dall'ipotesi che  $V$  sia lo spazio delle traslazioni di  $\mathbb{E}^n$  e potrebbe essere un generico spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Tornando al caso degli spazi euclidei e considerando la struttura di varietà differenziabile di  $\mathbb{E}^n$ , concludiamo facilmente che per ogni  $P \in \mathbb{E}^n$  gli spazi  $T_P\mathbb{E}^n$  e  $T_P^*\mathbb{E}^n$  sono canonicamente isomorfi come conseguenza di quanto appena detto e per l'esistenza degli isomorfismi  $\chi_P$  e  $\chi_P^*$  del teorema A.5: dato che  $\chi_P^{*-1} \circ \chi \circ \chi_P^{-1} : T_P\mathbb{E}^n \rightarrow T_P^*\mathbb{E}^n$  è un isomorfismo di spazi vettoriali per costruzione.

**Osservazioni A.7.** È importante osservare che in realtà, data una qualunque varietà differenziabile  $M$ , risulta dai ragionamenti precedenti che  $V = T_pM$  e  $V^* = T_p^*M$  risultano essere canonicamente identificati ogni qualvolta sia assegnato un prodotto scalare  $(\cdot|\cdot)_p$  in  $p$ .

## Appendice B

# Argomenti più avanzati di geometria differenziale

Richiamiamo di seguito alcune nozioni più avanzate di geometria differenziale: la nozione di *pushforward*, *pullback*, *derivata di Lie*, *sottovarietà* e *spazio fibrato* che hanno diverse applicazioni utili in fisica, specialmente nella meccanica analitica lagrangiana ed hamiltoniana. Passeremo poi ai rudimenti di teoria dell'integrazione di forme su varietà.

### B.1 Differenziazione su varietà e nozioni connesse

#### B.1.1 Pushforward e pullback

Siano  $M$  ed  $N$  varietà differenziabili (almeno di classe  $C^1$ ), di dimensione  $m$  e  $n$  rispettivamente, e  $f : N \rightarrow M$  una funzione differenziabile (almeno di classe  $C^1$ ). Per un punto  $p \in N$  consideriamo carte locali  $(U, \phi)$  in  $N$  e  $(V, \psi)$  in  $M$  rispettivamente attorno a  $p$  e  $f(p)$ . Indichiamo con  $(y^1, \dots, y^n)$  le coordinate definite in tal modo in  $U$  e con  $(x^1, \dots, x^m)$  le coordinate definite in tal modo in  $V$ . Definiamo ancora  $f^k(y^1, \dots, y^n) = x^k(f \circ \phi^{-1})$  per  $k = 1, \dots, m$ . Si definiscono allora:

(i) il **pushforward**  $df_p : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ , data in coordinate da:

$$df_p : T_p N \ni \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \mapsto \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} u^i \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p, \quad (\text{B.1})$$

e

(ii) il **pullback**  $f_p^* : T_{f(p)}^* M \rightarrow T_p^* N$ , data in coordinate da:

$$f_p^* : T_{f(p)}^* M \ni \sum_{j=1}^m \omega_j dx^j \Big|_{f(p)} \mapsto \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial y^i} \Big|_{\phi(p)} \omega_j \right) dy^i \Big|_p. \quad (\text{B.2})$$

Si verifica immediatamente che le definizioni *non dipendono dalle coordinate usate attorno a  $p$  e  $f(p)$* . Il pushforward è anche indicato con  $f_{p*} : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ .

È possibile verificare subito che  $df_p$  e  $f_p^*$  hanno la seguente equivalente definizione intrinseca, ma implicita:

$$(df_p X)(g)|_{f(p)} = X(g \circ f)|_p \quad \text{per ogni } g : N \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^\infty$$

e

$$\langle Y, f_p^* \omega \rangle = \langle df_p Y, \omega \rangle \quad \text{per ogni } Y \in T_p M \text{ e } \omega \in T_{f(p)}^* N.$$

### B.1.2 Derivata di Lie di campi vettoriali

Passiamo ad introdurre la nozione di *derivata di Lie*. Sia  $X$  un campo vettoriale di classe  $C^1$  sulla varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^2$  e dimensione  $n$ . possiamo considerare il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali  $\phi^{(X)}$  (vedi la sezione 4.5.3) da esso generato. Se facciamo agire  $\phi^{(X)}$  su  $Y(q)$  al variare di  $q$  in un intorno di qualche punto fissato, e per  $t$  abbastanza piccolo, almeno localmente avremo un secondo campo vettoriale differenziabile funzione del punto  $p$ :

$$Y'_t(p) := (d\phi_{-t}^{(X)})_q Y(q) \quad \text{dove } p = \phi_{-t}^{(X)}(q).$$

La scelta di  $-t$  invece che  $t$  è del tutto convenzionale e corrisponde a dire che in realtà stiamo facendo agire il gruppo generato da  $-X$  invece che quello generato da  $X$ , essendo  $\phi_{-t}^{(X)} = \phi_t^{(-X)}$ . Ora consideriamo il campo  $p \mapsto Y'_t(p)$  come oggetto sul quale fissare l'attenzione. Si noti che esso dipende parametricamente da  $t$  che varia nell'intorno dell'origine. Tenendo fisso il punto  $p$  (non  $q$ !) nel quale valutiamo il campo trasformato, vogliamo andare a studiare il tasso di variazione di  $Y'_t(p)$  al variare di  $t$ , valutato per  $t = 0$ . Vogliamo cioè calcolare:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y'_t(p) - Y'_0(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((d\phi_{-t}^{(X)})_q Y(q) - Y(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((d\phi_{-t}^{(X)})_{\phi_t^{(X)}(p)} Y(\phi_t^{(X)}(p)) - Y(p)).$$

(Dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $q = \phi_t^{(X)}(p)$ .) L'ultimo limite si può anche scrivere come una derivata:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t}^{(X)})_{\phi_t^{(X)}(p)} Y(\phi_t^{(X)}(p)).$$

La **derivata di Lie** del campo  $Y$  in  $p$  rispetto al campo  $X$  è definita come il vettore di  $T_p M$ :

$$\mathcal{L}_X|_p Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t}^{(X)})_{\phi_t^{(X)}(p)} Y(\phi_t^{(X)}(p)). \quad (\text{B.3})$$

Il significato di  $\mathcal{L}_X|_p Y$  quindi dovrebbe essere chiaro: essa valuta il tasso di variazione (per  $t = 0$ ) di un campo vettoriale  $Y$  in un punto fissato  $p$ , quando sul campo vettoriale agisce il gruppo di diffeomorfismi locali generato dal campo vettoriale  $-X$ . Il segno  $-$  è del tutto convenzionale e alcuni autori fanno la scelta opposta.

In coordinate locali attorno a  $p$ , il gruppo ad un parametro  $\phi_t^{(X)}$  trasforma  $(x^1, \dots, x^n)$  in  $(x_t^1, \dots, x_t^n)$ , pertanto, in coordinate:

$$(\mathcal{L}_X|_p Y)^i := \left. \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_t^i}{\partial x^j} \right|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} Y^j((x_t^1(p), \dots, x_t^n(p))) .$$

Il calcolo esplicito fornisce allora:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X|_p Y)^i &:= \left. \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_t^i}{\partial x^j} \right|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} Y^j((x_t^1(p), \dots, x_t^n(p))) + \sum_{j=1}^n \delta_j^i \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y^j((x_t^1(p), \dots, x_t^n(p))) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( -\frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j + X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \right) \Big|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} , \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x_{-t}^i(x^1(p), \dots, x^n(p)) = -X^i(x^1(p), \dots, x^n(p)) .$$

In definitiva abbiamo trovato che:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = -\mathcal{L}_Y X , \quad (\text{B.4})$$

dove il **commutatore** o **parentesi di Lie**  $[X, Y]$  dei campi vettoriali  $X$  e  $Y$  di classe  $C^2$  è definito come il campo vettoriale di classe  $C^1$  che in coordinate locali si esprime come:

$$[X, Y](p) = \sum_{j=1}^n \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \Big|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p , \quad (\text{B.5})$$

che è lo stesso che scrivere, come abbiamo già fatto:

$$(\mathcal{L}_X|_p Y)^i = \sum_{j=1}^n \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \right) \Big|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} . \quad (\text{B.6})$$

Intrinsecamente  $[X, Y]$  è l'unico campo vettoriale, visto come operatore differenziale, che soddisfa:

$$[Y, X](f) = Y(X(f)) - X(Y(f)) \quad \text{per ogni funzione } f \in C^1(M).$$

Per computo diretto si possono verificare le seguenti proprietà del commutatore visto come funzione che associa un campo vettoriale  $[X, Y]$  di classe  $C^{k-1}$  a coppie di campi vettoriali  $X$  e  $Y$  di classe  $C^k$  sulla varietà di classe  $C^r$ ,  $r \geq k$ . Se  $X, Y, Z$  sono campi vettoriali di classe  $C^k$  sulla varietà di classe  $C^r$ ,  $r \geq k$ :

(i) **antisimmetria:**  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,

(ii)  **$\mathbb{R}$ -bilinearità**:  $[aX + bZ, Y] = a[X, Y] + b[Z, Y]$  e  $[Y, aX + bZ] = a[Y, X] + b[Y, Z]$  per ogni coppia  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

(iii) **proprietà di Jacobi**:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Per la proprietà di Jacobi si è assunto che i tre campi coinvolti siano di classe  $C^2$  e lo 0 a secondo membro indica il campo vettoriale che è ovunque nullo su  $M$ . Vale infine, se  $\cdot$  indica il prodotto punto per punto:

(iv)  $[X, f \cdot Y] = f \cdot [X, Y] + X(f) \cdot Y$  per ogni funzione  $f \in C^1(M)$ .

Il commutatore di campi vettoriali ha proprietà tali da dotare  $C^\infty(M)$  di una struttura matematica ben nota.

**Definizione B.1.** Un'algebra di Lie (reale) è uno spazio vettoriale reale  $V$  equipaggiato di un'applicazione, detta **commutatore di Lie**,

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \ni (x, y) \mapsto [x, y] \in V$$

che goda delle seguenti tre proprietà:

(i) antisimmetria:  $[x, y] = -[y, x]$ ,

(ii)  $\mathbb{R}$ -bilinearità:  $[ax + bz, y] = a[x, y] + b[z, y]$  e  $[y, ax + bz] = a[y, x] + b[y, z]$  per ogni coppia  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

(iii) proprietà di Jacobi:  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

Se  $(V, [\cdot, \cdot])$  e  $(V', [\cdot, \cdot]')$  sono due algebre di Lie (reali), un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V'$  è detta **omomorfismo di algebre di Lie** se gode dell'ulteriore proprietà:

$$[f(x), f(y)]' = f([x, y]), \quad \text{per } x, y \in V.$$

Un **isomorfismo di algebre di Lie** è un omomorfismo biiettivo di algebre di Lie.  $\diamond$ .

È chiaro che lo spazio vettoriale  $V(M)$  dei campi vettoriali di classe  $C^\infty$  su  $M$  (con struttura di spazio vettoriale solita indotta dalla legge di composizione, se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $X, Y \in V(M)$ :  $(aX + bY)(p) = aX(p) + bY(p)$  per ogni  $p \in M$ ) acquista la struttura di algebra di Lie reale quando è pensato dotato del commutatore di campi vettoriali. La richiesta di lavorare con campi di classe  $C^\infty$  è dovuta al semplice fatto che l'azione del commutatore di campi vettoriali su campi di classe  $C^k$ , in generale abbassa a  $k - 1$  l'ordine di differenziabilità. Pertanto, affinché il commutatore  $[X, Y]$  di campi vettoriali di classe  $C^k$  sia ancora un campo di classe  $C^k$ , si deve richiedere di lavorare con  $k = \infty$ .

## B.2 Immersione di spazi tangenti per sottovarietà embedded

Se  $N \subset M$  è una sottovarietà differenziabile embedded della varietà differenziabile  $M$  (entrambe di classe  $C^k$  per qualche  $k > 0$ ) e  $n < m$  indicano rispettivamente le dimensioni di  $N$  ed  $M$ , i punti  $p \in N$  sono contemporaneamente punti di  $M$  attraverso la funzione  $\iota$  che identifica  $N$

con un sottoinsieme di  $M$ . La stessa cosa vale per i vettori di  $T_p N$  che possono essere visti, in modo naturale, come vettori in  $T_p M$  usando il pushforward  $d\iota_p$  come ora mostriamo in dettaglio. Scegliamo una carta locale attorno a  $p$ ,  $(U, \phi)$  in  $N$  ed una analoga carta locale  $(V, \psi)$  attorno a  $p$  in  $M$ . Supponiamo che  $\phi : U \ni q \mapsto (y^1(q), \dots, y^n(q))$  mentre  $\psi : V \ni q \mapsto (x^1(q), \dots, x^m(q))$ . La funzione identità  $\iota : N \rightarrow M$  che identifica  $N$  come varietà con  $N$  come sottoinsieme di  $M$  è differenziabile e

$$\psi \circ \iota \circ \phi^{-1} : (y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^m(y^1, \dots, y^n)) .$$

Possiamo allora passare al pushforward  $d\iota_p : T_p N \rightarrow T_{f(p)} M$ , che come detto precedentemente, nelle coordinate dette è individuato da:

$$d\iota_p : \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \mapsto \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Big|_p v^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p , \quad (\text{B.7})$$

Sappiamo che l'applicazione  $d\iota_p$  non dipende dalla scelta delle carte locali attorno a  $p$ ,  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$ : se fossimo partiti da altre carte locali avremmo ottenuto la stessa funzione  $d\iota_p$ . In virtù di tale fatto proviamo che  $d\iota_p$  è iniettiva.

Scegliendo coordinate in  $M$  adattate ad  $N$ , cioè una carta  $(V, \psi)$  con  $\psi : V \ni q \mapsto (x^1(q), \dots, x^m(q))$  in modo tale che  $N \cap U$  corrisponda ai punti di coordinate  $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$ , le prime  $n$  coordinate  $y^1 = x^1, \dots, y^n = x^n$  definiscono una carta locale su  $N$ . Questo è vero per la definizione stessa di sottovarietà embedded. Con questa scelta di coordinate locali in  $N$  e  $M$ , l'espressione esplicita di  $d\iota_p$  è banale

$$d\iota_p : \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \mapsto \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p .$$

È evidente in questa rappresentazione che l'applicazione  $d\iota_p$  è iniettiva. Pertanto l'applicazione  $d\iota_p$  identifica  $T_p N$  con un sottospazio di  $T_p M$ .

Per ogni scelta di carte locali attorno a  $p$ , in  $N$  ed  $M$  rispettivamente, i vettori di base  $\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \in T_p N$  si identificano quindi, tramite  $d\iota_p$ , con vettori di  $T_p M$ . In questo senso un po' impropriamente si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p = \sum_{k=1}^m \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p . \quad (\text{B.8})$$

### B.3 Fibrato tangente e cotangente, varietà fibrato e sezioni

Gli esempi più semplici di varietà fibrato sono il *fibrato tangente* ed il *fibrato cotangente* associati alla varietà differenziabile  $M$ . Prima di dare la definizione generale definiamo questi due oggetti. Consideriamo la varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$  con  $k \geq 2$  e consideriamo l'insieme ad essa associato:

$$TM := \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\} .$$

È possibile dotare tale insieme di una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione  $2n$  e classe  $k - 1$ ; la varietà differenziabile ottenuta in questo modo (che si indica ancora con  $TM$ ) si chiama **(varietà) fibrato tangente** di  $M$ . La struttura di varietà differenziabile è l'unica che ammette come atlante il seguente insieme di carte locali indotte dalla struttura differenziabile di  $M$ . Per ogni una carta locale della struttura differenziabile  $\mathcal{A}_M$  di  $M$ ,  $(U, \phi)$ , con  $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ , definiamo

$$TU := \{(p, v) \in TM \mid p \in U\}$$

e definiamo l'applicazione iniettiva

$$T\psi : TU \ni (p, v) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{dove } v = \sum_k v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p.$$

Dotiamo infine  $TM$  della topologia generata dalle controimmagini degli insiemi aperti di  $\mathbb{R}^{2n}$  secondo le funzioni  $T\psi$ . Si osservi che tale topologia rende  $TM$  spazio di Hausdorff, a base numerabile, localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$  (omeomorfismi locali sono proprio le funzioni  $T\psi$ ). È facile verificare che l'insieme delle coppie  $T\mathcal{A}_M := \{(TU, T\psi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}_M\}$  è un atlante su  $TM$  di classe  $C^{k-1}$ . Spieghiamo l'origine del  $k - 1$ . Se  $(TU, T\psi)$  e  $(TV, T\phi)$  sono carte locali nell'atlante detto e  $T\psi : (p, v) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$  mentre  $T\phi : (p, v) \mapsto (y^1, \dots, y^n, \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^n)$ , su  $TU \cap TV$  (ammesso che non sia vuoto) valgono relazioni di forma (con ovvie notazioni):

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \dot{x}^j. \quad (\text{B.10})$$

La presenza della matrice jacobiana nella seconda equazione abbassa di 1 la classe di differenziabilità di  $TM$  rispetto a  $M$ .

La struttura differenziabile  $\mathcal{A}_{TM}$  generata dall'atlante  $T\mathcal{A}_M$  rende  $TM$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e classe  $C^{k-1}$  detta **(varietà) fibrato tangente** di  $M$ .

La funzione *suriettiva*  $\Pi : TM \ni (p, v) \mapsto p \in M$  risulta essere di classe  $C^{k-1}$  e si chiama **proiezione canonica**. Si osservi che se  $(U, \psi)$  è una carta locale su  $M$ , risulta che  $TU = \Pi^{-1}(U)$ . La varietà  $M$  si dice **base** del fibrato tangente. Per  $p \in M$ , lo spazio tangente  $T_p M = \Pi^{-1}(p)$ , che risulta essere una sottovarietà embedded di  $TM$ , si dice **fibra** di  $TM$  nel punto  $p \in M$ .

Il **fibrato cotangente**  $T^*M$  viene definito in modo del tutto analogo assegnando una struttura naturale di varietà differenziabile di dimensione  $2n$  e classe  $C^{k-1}$  sull'insieme:

$$T^*M := \{(p, \omega_p) \mid p \in M, \omega_p \in T_p^*M\}.$$

Per ogni una carta locale della struttura differenziabile  $\mathcal{A}_M$  di  $M$ ,  $(U, \phi)$ , con  $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ , definiamo

$$T^*U := \{(p, \omega_p) \in T^*M \mid p \in U\}$$

e definiamo l'applicazione iniettiva

$$T^*\psi : T^*U \ni (p, \omega_p) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), (\omega_p)_1, \dots, (\omega_p)_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{dove } \omega_p = \sum_k (\omega_p)_k dx^k|_p.$$

L'atlante su  $T^*M$  contenente tutte le carte  $(T^*U, T^*\psi)$  con  $(U, \psi) \in \mathcal{A}_M$ , definisce la struttura di varietà differenziabile di dimensione  $2n$  e classe  $C^{k-1}$  su  $T^*M$ . Consideriamo la coppia di carte locali  $(T^*U, T^*\psi)$  e  $(T^*V, T^*\phi)$  su  $T^*M$  dove  $T^*\psi : (p, v) \mapsto (x^1, \dots, x^n, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  e dove  $T^*\phi : (p, v) \mapsto (y^1, \dots, y^n, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ . Su  $T^*U \cap T^*V$  (ammesso che non sia vuoto) valgono relazioni di forma (con ovvie notazioni):

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad (\text{B.11})$$

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \tilde{x}_j. \quad (\text{B.12})$$

La funzione *suriettiva*  $\Pi : T^*M \ni (p, v) \mapsto p \in M$  risulta essere di classe  $C^{k-1}$  e si chiama **proiezione canonica**. Si osservi che se  $(U, \psi)$  è una carta locale su  $M$ , risulta che  $T^*U = \Pi^{-1}(U)$ . La varietà  $M$  si dice **base** del fibrato cotangente. Per  $p \in M$ , lo spazio cotangente  $T_p^*M = \Pi^{-1}(p)$ , che risulta essere una sottovarietà embedded di  $T^*M$ , si dice **fibra** di  $T^*M$  nel punto  $p \in M$ .

**Osservazioni B.1.** Riferiamoci a  $TM$  anche se quanto diremo vale banalmente anche per  $T^*M$ . Prima di tutto notiamo che tutte le fibre  $T_pM$  sono diffeomorfe tra di loro essendo tutti spazi vettoriali della stessa dimensione e dato che gli isomorfismi di spazi vettoriali sono diffeomorfismi rispetto alla struttura differenziale delle fibre indotta da quella di  $TM$ . Tuttavia ci sono infiniti diffeomorfismi per ogni coppia  $T_pM, T_qM$ : nessuno di questi diffeomorfismi è più naturale degli altri. Quindi le fibre sono tutte diffeomorfe ma in modo non canonico e sono di conseguenza diffeomorfe in modo non canonico a  $\mathbb{R}^n$  che indicheremo con  $F$  e penseremo come la “fibra astratta”. Se fissiamo  $p \in M$ , c'è un intorno  $U$  di  $p$  e un diffeomorfismo  $f_U : U \times F \rightarrow \Pi^{-1}(U)$  che soddisfa  $\Pi(f_U(q, v)) = q$  per ogni  $q \in U$  e  $v \in F$ . L'intorno  $U$  può essere scelto come il dominio della carta locale  $(U, \psi)$  di  $M$  ed il diffeomorfismo  $f_U$  come la funzione  $(T\psi)^{-1}$  definita precedentemente. Abbiamo provato che  $TM$  è *localmente diffeomorfo rispetto alla base*  $M$ , a  $M \times F$ .

La definizione di *varietà fibrata* o *fibrato* si ottiene astraendo dalle precedenti costruzioni e tenendo conto dell'osservazione fatta sopra.

**Definizione B.2. (Varietà fibrata e sezioni).** Una **varietà fibrata**  $E$  (detta anche semplicemente **(spazio) fibrato**) è individuata da:

- (i) una varietà differenziabile di dimensione  $n$ , indicata ancora con  $E$ ,
- (ii) una seconda varietà differenziabile di dimensione  $m < n$ ,  $M$  detta **base**,
- (iii) un'applicazione differenziabile suriettiva  $\Pi : E \rightarrow M$  detta **proiezione canonica**,
- (iv) una terza varietà differenziabile  $F$  detta **fibra standard**.

Infine,  $E$  deve essere **diffeomorfo, localmente rispetto alla base**, a  $M \times F$  nel senso che segue:



per ogni  $p \in M$  deve esistere un suo intorno aperto  $U$  e un diffeomorfismo  $f_U : U \times F \rightarrow \Pi^{-1}(U)$  con  $\Pi(f_U(x, y)) = x$  per ogni  $x \in U$  e  $y \in F$ .

Una **sezione locale** di  $E$  è un'applicazione differenziabile  $s : M_0 \rightarrow E$  con  $\Pi(s(x)) = x$  per ogni  $x \in M_0$  dove  $M_0 \subset M$  è un aperto. Una sezione locale è detta **sezione globale**, o semplicemente **sezione** di  $E$ , se  $M_0 = M$ .

Un sistema di coordinate locali  $(U, \psi)$  su  $E$ , dove:

$$\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^m(p), x^{m+1}(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$$

si dice **adattato alle fibre**, se  $(\Pi(U), \phi')$ , con

$$\phi' : \Pi(p) \mapsto (x^1(p), \dots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$$

è un sistema di coordinate locali sulla base  $M$ .

Una varietà fibrata  $E$  con base  $M$ , fibra  $F$  e proiezione canonica  $\Pi$  si dice **trivializzabile** se è diffeomorfa allo spazio  $M \times F$ , più precisamente: se esiste un diffeomorfismo  $f : M \times F \rightarrow E$  tale che  $\Pi(f(x, y)) = x$  per ogni coppia  $(x, y) \in M \times F$ .  $\diamond$

**N.B.** Nella definizione data si suppone che gli ordini di differenziabilità delle funzioni e delle varietà coinvolte siano assegnati in modo coerente.

### Osservazioni B.2.

(1) La proiezione canonica  $\Pi$  soddisfa la condizione di regolarità che  $d\Pi : T_p E \rightarrow T_{\Pi(p)} M$  è suriettiva, cioè ha rango massimo. La prova è immediata differenziando nella variabile  $x$  i due membri della richiesta  $\Pi(f_U(x, y)) = x$  in coordinate e notando che in termini di applicazioni lineari, dove  $J$  è la matrice delle derivate parziali di  $f_U$  rispetto alle coordinate di  $x$  si ha:  $d\Pi J = I$ . Di conseguenza  $d\Pi$  è suriettiva ammettendo un'inversa destra. Il teorema dei valori regolari assicura allora che ogni fibra  $F_x := \Pi^{-1}(\{x\})$  sia una sottovarietà embedded di  $E$  di dimensione  $n - m$ .

(2) Il diffeomorfismo locale  $f_U : U \times F \rightarrow \Pi^{-1}(U)$  trasforma sottovarietà del dominio in sottovarietà dell'immagine diffeomorficamente. Pertanto, per ogni fissato  $x \in U$ , la sottovarietà  $F$  del dominio è trasformata diffeomorficamente in  $F_U(x, F) = F_x$  (l'ultima identità discende subito da  $\Pi(f(x, y)) = x$ ). In altre parole  $F \ni y \mapsto F_U(x, F) \in F_x$  è un diffeomorfismo a sua volta e dunque tutte le fibre di un fibrato sono diffeomorfe alla fibra canonica.

(3) Si può dimostrare che ogni varietà fibrata con base  $\mathbb{R}$  è trivializzabile, anche se non c'è un modo canonico di vederla come un prodotto cartesiano in generale. Di conseguenza lo spaziotempo, lo spaziotempo delle configurazioni, lo spaziotempo degli atti di moto e lo spaziotempo delle fasi, visti come varietà fibrate sull'asse del tempo assoluto come base, sono varietà trivializzabili. Tuttavia non c'è un unico modo di vederle come prodotti cartesiani. Questo, dal punto di vista fisico, corrisponde all'impossibilità di scegliere un sistema di riferimento in modo canonico una volta per tutte.

## B.4 Teoria delle forme e dell'integrazione su varietà differenziabili

Passiamo a studiare i primi rudimenti della teoria dell'integrazione su varietà differenziabili. Gli oggetti che saranno integrati sono noti come *forme differenziali* che andiamo a definire nella prossima sezione.

### B.4.1 $p$ -forme e forme differenziali

Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  finita, indicheremo con  $\Lambda^p(V)$  lo spazio vettoriale delle applicazioni multilineari completamente antisimmetriche  $f : V^p \rightarrow \mathbb{R}$  dove, d'ora in poi,  $V^p := V \times \cdots \times V$ ,  $p$  volte. In altre parole  $f$  è separatamente lineare in ciascuno dei suoi argomenti:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \alpha \mathbf{v}_k + \beta \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_p) \\ &= \alpha f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_p) + \beta f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_p), \end{aligned}$$

comunque scegliamo  $\mathbf{v}_r, \mathbf{v}'_k \in V$  per  $r = 1, \dots, p$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e soddisfa la proprietà:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{h-1}, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_{h+1}, \dots, \mathbf{v}_p) \\ &= -f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{h-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{h+1}, \dots, \mathbf{v}_p), \end{aligned}$$

comunque scegliamo  $h, k = 1, \dots, p$  e  $\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_k \in V$ . Diremo  $\Lambda^p(V)$  **spazio delle  $p$ -forme** su  $V$  e, appunto, gli elementi di tale spazio saranno indicati con il nome di  **$p$ -forme** e  $p$  sarà detto **ordine** della  $p$ -forma. La struttura di spazio vettoriale di  $\Lambda^p(V)$  è quella naturale indotta dalla somma e dal prodotto per scalare di funzioni. Indicheremo infine con  $\Lambda(V)$  l'unione di tutti gli spazi  $\Lambda^p(V)$  con  $p = 0, 1, \dots$ , assumendo che  $\Lambda^0(V) := \{0\}$ ,  $\Lambda^1(V) := V^*$ ,  $\Lambda^p(V) = \{0\}$  se  $p > n$ , in cui 0 indica l'applicazione nulla sul corrispondente dominio (per  $p = 0$  indica il vettore nullo dello spazio vettoriale banale). La richiesta  $\Lambda^p(V) = \{0\}$  se  $p > n$  è in realtà una scelta obbligata, dato che si dimostra facilmente che non ci sono funzionali multilineari antisimmetrici con  $p$  argomenti quando  $p$  supera la dimensione di  $V$  se si esclude la funzione nulla.

Vogliamo ora introdurre in  $\Lambda(V)$  un'operazione di composizione delle  $p$ -forme che si indica con  $\wedge$  ed è detta *prodotto esterno*. Ricordiamo che l'insieme delle applicazioni biettive  $\sigma : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$  dotato dell'operazione data dalla legge di composizione di funzioni, ha la struttura di gruppo e si dice **gruppo delle permutazioni di  $N$  oggetti** e le funzioni in  $\mathcal{P}(N)$  sono dette **permutazioni di ordine  $N$** . Indicheremo tale gruppo con  $\mathcal{P}(N)$ . Se  $f \in \Lambda^p(V)$  e  $g \in \Lambda^q(V)$ , definiamo l'applicazione multilineare  $f \wedge g : V^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}$  individuata dalle richieste:

$$(f \wedge g)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{p+q}) := \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(p+q)} \eta_\sigma f(\mathbf{v}_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma^{-1}(p)}) g(\mathbf{v}_{\sigma^{-1}(p+1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma^{-1}(p+q)}), \quad (\text{B.13})$$

comunque fissiamo  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+q} \in V$  (assumendo che  $f \wedge g = 0$  se  $f \in \Lambda^0(V)$  o  $g \in \Lambda^0(V)$ ). Sopra  $\eta_\sigma = \pm 1$  è il **segno** o la **parità** della permutazione  $\sigma$ . Per definizione  $\eta_\sigma$  vale  $+1$  se  $\sigma$  può essere scritta come composizione di un numero pari di permutazioni che scambiano due oggetti, oppure è  $-1$  se  $\sigma$  può essere scritta come composizione di un numero dispari di permutazioni che scambiano solo due oggetti<sup>1</sup>. Si può provare il seguente importante teorema.

**Teorema B.1.** *Se  $V$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  finita, l'applicazione, detta **prodotto esterno**, che associa ad una coppia di  $p$ -forme,  $f \in \Lambda(V)$ ,  $g \in \Lambda(V)$  un'applicazione multilineare  $f \wedge g$  come precisato in (B.13) è chiusa in  $\Lambda(V)$ . Più precisamente  $f \wedge g \in \Lambda^{p+q}(V)$ . Ulteriormente sono verificate le seguenti proprietà:*

**associatività:**  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$  per ogni  $f, g, h \in \Lambda(V)$ ;

**antisimmetria:**  $g \wedge f = (-1)^{rs} f \wedge g$  se  $f \in \Lambda^r(V)$ ,  $g \in \Lambda^s(V)$ ,

**linearità a destra:**  $(\alpha f + \beta g) \wedge h = \alpha(f \wedge h) + \beta(g \wedge h)$  per ogni  $f, g, h \in \Lambda(V)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Il prodotto esterno gode infine della proprietà che se  $\{\mathbf{e}^{*k}\}_{k=1, \dots, n} \subset V^*$  è la base duale della base  $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1, \dots, n} \subset V$ , allora la classe di elementi:

$$\mathbf{e}^{*k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{*k_p} \quad \text{dove } 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n,$$

è una base per  $\Lambda^p(V)$  e quindi, se  $f \in \Lambda^p(V)$ :

$$f = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n} f_{k_1 \dots k_p} \mathbf{e}^{*k_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{*k_p} \quad (\text{B.14})$$

dove

$$f_{k_1 \dots k_p} := p! f(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}). \quad (\text{B.15})$$

### Osservazioni B.3.

(1) Si deve osservare che l'antisimmetria insieme alla linearità a destra implicano immediatamente la validità della linearità a sinistra.

(2) La dimensione di  $\Lambda^p(V)$ , in base all'ultimo enunciato del teorema, è  $\binom{n}{p}$ .

(3) Il simbolo  $\wedge$  coincide con quello che abbiamo usato per denotare il prodotto vettoriale di vettori in spazi vettoriali di dimensione 3 dotati di prodotto scalare. Questo fatto non è casuale e, in effetti, le due nozioni sono imparentate nel senso che spieghiamo brevemente. Diciamo solo che, prima di tutto l'esistenza di un prodotto scalare identifica  $V^*$  con  $V$  – a causa dell'esistenza

<sup>1</sup>In altre parole  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$  e  $\eta = (-1)^k$ , dove ogni  $\sigma_k$  è la funzione identità su un corrispondente sottoinsieme di  $\{1, 2, \dots, N\}$  contenente  $N-2$  elementi. La decomposizione di  $\sigma$  in permutazioni  $\sigma_k$  che scambiano solo due oggetti sussiste sempre, non è unica, ma il segno della permutazione lo è.

dell'isomorfismo naturale  $\chi : V \rightarrow V^*$  discusso alla fine della sezione A.5 – e pertanto si può definire l'operazione di prodotto esterno tra vettori di  $V$  e non solo di  $V^*$ , pensando i vettori di  $V$  come elementi di  $V^*$ . Inoltre si può provare che, sempre sfruttando l'isomorfismo  $\chi$ , gli spazi  $\Lambda^p(V)$  con  $p = k$  e  $p = n - k$  che hanno la stessa dimensione, risultano essere naturalmente isomorfi. Nel caso di  $n = 3$  questo significa in particolare che esiste un isomorfismo naturale tra lo spazio delle 2-forme, generate dai prodotti  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  e  $V$  stesso. Questo isomorfismo individua il prodotto vettoriale.

Introduciamo ora il **prodotto interno** tra vettori e  $p$ -forme. Se  $X \in V$  si definisce un'applicazione lineare:

$$X \lrcorner : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^{p-1}(V) \quad \text{con } p \geq 1,$$

detta **prodotto interno**, come l'unica estensione lineare della seguente richiesta, per ogni scelta delle 1-forme  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p \in \Lambda^1(V) = V^*$ :

$$\begin{aligned} X \lrcorner \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_p &:= \langle X, \theta_1 \rangle \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_p + (-1) \langle X, \theta_2 \rangle \theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \dots \wedge \theta_p \\ &+ \dots + (-1)^{q+1} \langle X, \theta_q \rangle \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{q-1} \wedge \theta_{q+1} \wedge \dots \wedge \theta_p + \dots + (-1)^{p+1} \langle X, \theta_p \rangle \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{p-1}. \end{aligned}$$

La definizione data, usando la linearità di  $X \lrcorner$  permette di calcolare  $X \lrcorner \omega$  per una qualsiasi  $\omega \in \Lambda^p(V)$ , dato che si può sempre decomporre  $\omega$  come una combinazione lineare di prodotti  $\wedge$  di 1-forme e quindi usare la definizione data sopra.

Passiamo ora a considerare una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  (e ordine  $k \geq 1$ ). Una  $p$ -**forma differenziale**  $\omega$  e classe  $C^{k'}$  con  $k' \leq k$ , è, per definizione, l'assegnazione di un  $p$ -forma  $\omega_q$  per ogni punto  $q \in M$ , in modo tale che, in ogni sistema di coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  nell'intorno di  $q \in M$  per cui quindi:

$$\omega_q = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n} (\omega_q)_{k_1 k_2 \dots k_p} dx^{k_1}|_q \wedge \dots \wedge dx^{k_p}|_q$$

le funzioni  $q \mapsto (\omega_q)_{k_1 k_2 \dots k_p}$  risultino essere in  $C^{k'}$ . Data una  $p$ -forma differenziale (di classe  $C^{k'}$  con  $k' \geq 1$ ), si definisce il suo **differenziale** o la sua **derivata esteriore**,  $d\omega$ , come la  $(p+1)$ -forma differenziale (di classe di differenziabilità  $k' - 1$ ) individuata, in ogni sistema di coordinate locali, dalla richiesta:

$$(d\omega)_q = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n} \sum_{k^0=1}^n \frac{\partial (\omega_q)_{k_1 k_2 \dots k_p}}{\partial x^{k^0}} dx^{k^0}|_q \wedge dx^{k_1}|_q \wedge \dots \wedge dx^{k_p}|_q. \quad (\text{B.16})$$

Si verifica che la definizione è ben posta (cioè non dipende dalle coordinate locali usate), inoltre valgono le seguenti proprietà dell'operatore di differenziazione esteriore  $d$ .

**Teorema B.2.** *L'operatore di differenziazione esteriore  $d$ , definito sulle forme differenziali sulla varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ , con  $k \geq 2$ , gode delle seguenti proprietà.*

$$dd\omega = 0 \quad (\text{B.17})$$

*per ogni forma differenziale  $\omega$  di qualunque ordine  $p$  e classe di differenziabilità almeno 2.*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 \quad (\text{B.18})$$

*per ogni coppia di forme differenziali  $\omega_1$  di ordine  $p$  e  $\omega_2$  di ordine  $q$ .*

Una forma differenziale  $\omega$  che soddisfa  $\omega = d\omega'$ , per qualche altra forma differenziale  $\omega'$ , è detta essere **esatta**. Se una forma differenziale  $\omega$  soddisfa la richiesta  $d\omega = 0$ , si dice che è **chiusa**. Per il teorema precedente le forme differenziali esatte sono anche chiuse, ma non vale il viceversa. Tuttavia vale l'importante risultato dovuto a Poincaré che afferma che localmente tutte le forme differenziali chiuse sono anche esatte. Ricordiamo che un insieme  $U$  di  $\mathbb{R}^n$  è detto essere **stellato** rispetto a  $p \in U$  quando il segmento che congiunge  $p$  ad ogni altro punto di  $U$  è completamente incluso in  $U$ .

**Teorema B.3. (Lemma di Poincaré.)** *Si supponga che la  $p$ -forma differenziale  $\omega$  di classe almeno  $C^1$  definita su  $M$  almeno di classe  $C^2$ , sia chiusa, cioè:*

$$d\omega = 0.$$

*Allora, per ogni carta locale  $(U, \psi)$  per cui  $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$  è un insieme aperto connesso e stellato rispetto a qualche suo punto, esiste una forma differenziale  $\omega'$  definita su  $U$ , per cui:*

$$\omega|_U = d\omega'.$$

#### Osservazioni B.4.

(1) Chiaramente il teorema enunciato prova che ogni forma chiusa di classe almeno  $C^1$  è esatta in un intorno sufficientemente piccolo di ogni fissato punto della varietà su cui è definita. Questo segue immediatamente dal fatto che le palle aperte di  $\mathbb{R}^n$  sono insiemi stellati rispetto al loro centro.

(2) Nel caso di 1-forme, il teorema di Poincaré, ri-enunciato in termini di campi vettoriali su domini di  $\mathbb{R}^n$ , prova che un campo vettoriale  $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n V^i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  di classe  $C^2$  definito su un insieme aperto stellato  $U \subset \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  indica la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ) è il gradiente di una funzione  $f \in C^2(U)$  se valgono le **condizioni di irrotazionalità** su  $U$ :

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^j} = \frac{\partial V^j}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{B.19})$$

Nel caso di  $n = 3$ , la proposizione si riduce al noto fatto che un campo vettoriale (di classe  $C^1$ ) definito su un aperto stellato è conservativo (cioè è il gradiente di un campo scalare), se il suo

rotore è ovunque nullo sull'aperto detto. Si osservi che viceversa ogni campo vettoriale di classe  $C^1$  dato dal gradiente di una funzione deve soddisfare (B.19) sul suo dominio (supposto aperto ma non necessariamente stellato) come conseguenza del fatto che le 1-forme esatte sono chiuse.

(3) L'ipotesi riguardante il fatto che  $U$  sia stellato nel lemma di Poincaré, a parità delle rimanenti ipotesi, può essere indebolita richiedendo solamente che l'aperto connesso  $U$  (non necessariamente dominio di una carta locale) sia **contraibile** rispetto ad un punto  $x_0 \in U$ . In altre parole, deve esistere un'applicazione  $F : U \times [0, 1] \rightarrow U$  che sia congiuntamente continua nelle due variabili e tale che  $F(0, x) = x$  per ogni  $x \in U$  ma  $F(1, x) = x_0$  per ogni  $x \in U$ . In termini intuitivi, deve essere possibile contrarre con continuità  $U$  fino a farlo diventare il punto  $x_0$ , come per esempio accade se  $U \subset \mathbb{R}^n$  è una palla aperta di raggio finito e  $x_0$  il suo centro.

(4) Nel caso in cui  $\omega$  nella tesi del lemma di Poincaré sia una 1-forma, l'ipotesi riguardante il fatto che  $U$  sia stellato, a parità delle rimanenti ipotesi, può essere indebolita ancora di più, richiedendo solo che l'aperto connesso  $U$  (non necessariamente dominio di una carta locale) sia semplicemente connesso. L'osservazione (2) si può quindi estendere in questa situazione arrivando a provare il teorema 5.4 in particolare.

(5) Nel caso in cui  $U$  sia semplicemente connesso e  $\omega$  sia una 1-forma ( $C^1$ ) chiusa e definita su  $U$ , come ben noto dai corsi elementari di analisi, si può sempre scrivere  $\omega = df$  dove, per un fissato punto  $p_0 \in U$ :

$$f(p) = \int_{\gamma_{p_0 p}} \omega := \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega^i(x(t)) \frac{dx^i}{dt} dt .$$

e l'integrale di linea è calcolato lungo un qualsiasi cammino  $C^1$ ,  $\gamma_{p_0 p} : [0, 1] \rightarrow U$  che congiunge  $p_0$  a  $p$  rimanendo in  $U$  espresso in coordinate locali su  $U$  da  $x^i = x^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Se  $f : M \rightarrow N$  è una funzione differenziabile, di classe  $C^1$  almeno, essa induce un'azione naturale di **pullback sulle  $k$ -forme differenziali** definita come segue. Sia  $\omega$  è una  $n$ -forma differenziale su  $N$ , allora  $(f^*\omega)_p := f_p^*\omega \in \Lambda^n(T_p M)$  al variare di  $p \in M$  definisce una  $n$ -forma differenziale su  $M$ , indicata con  $f^*\omega$ , quando:

$$f_p^*\omega := (\omega \circ f)_p \quad \text{se } \omega \text{ è di ordine } 0; \quad (\text{B.20})$$

e

$$(f^*\omega)(X_1, \dots, X_n) = \omega(df_p X_1, \dots, df_p X_n) \quad \text{se } X_1, \dots, X_n \in T_p M \text{ e } \omega \text{ è di ordine } n. \quad (\text{B.21})$$

Con la definizione data segue subito che vale l'utile identità, se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme differenziali arbitrarie, nel primo caso dello stesso ordine, e  $a, b \in \mathbb{R}$ , con ovvie notazioni:

$$f^*(a\omega_1 + b\omega_2) = af^*\omega_1 + bf^*\omega_2, \quad (\text{B.22})$$

e

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2). \quad (\text{B.23})$$

Infine, in relazione all'operatore  $d$  vale anche, se  $\omega$  è una generica  $p$ -forma almeno di classe  $C^1$  definita su  $N$ :

$$df^*\omega = f^*d\omega, \quad (\text{B.24})$$

### B.4.2 Derivata di Lie di $p$ -forme

Come ultimo argomento consideriamo la derivata di Lie di forme differenziali. L'estensione della nozione di derivata di Lie rispetto ad un campo vettoriale  $X$  (di classe  $C^1$  almeno in tutto il seguito) sulla varietà differenziabile  $M$  si ha con le seguenti richieste. (Nel seguito le forme differenziali sono almeno di classe  $C^1$  se non è specificato altrimenti.)

(a) Se  $\omega$  è una  $p$ -forma differenziale, allora  $\mathcal{L}_X \omega$  è ancora una  $p$ -forma differenziale (di classe  $C^0$  almeno). Inoltre se  $X$  e  $\omega$  sono nulli fuori dall'aperto  $U \subset M$  allora  $\mathcal{L}_X \omega$  è nullo fuori dallo stesso aperto.

(b) Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme differenziali e  $a, b \in \mathbb{R}$  allora:

$$\mathcal{L}_X (a\omega_1 + b\omega_2) = a\mathcal{L}_X \omega_1 + b\mathcal{L}_X \omega_2 .$$

(c) La derivata di Lie di una 0-forma (cioè un campo scalare  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ), coincide con l'azione di  $X$  su  $f$ :

$$\mathcal{L}_X f := X(f) .$$

(d) La derivata di Lie è una derivazione rispetto all'operazione di calcolo del pairing. In altre parole, se  $\theta$  è una 1-forma e  $Y$  un campo vettoriale allora:

$$\mathcal{L}_X \langle Y, \theta \rangle = \langle \mathcal{L}_X Y, \theta \rangle + \langle Y, \mathcal{L}_X \theta \rangle .$$

(e) La derivata di Lie è una derivazione: se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme differenziali allora

$$\mathcal{L}_X (\omega_1 \wedge \omega_2) = (\mathcal{L}_X \omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X \omega_2 .$$

(f) Se  $f$  è una 0-forma (di classe  $C^2$  almeno) allora

$$\mathcal{L}_X df = dX(f) .$$

È facile verificare che le richieste poste individuano completamente l'azione della derivata di Lie su ogni forma differenziale di ordine arbitrario. Inoltre tale derivata di Lie può essere calcolata con una procedura di limite esattamente come per il caso vettoriale:

$$\mathcal{L}_X|_p \omega := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_t^{(X)*})_{\phi_t^{(X)}(p)} \omega(\phi_t^{(X)}(p)) . \quad (\text{B.25})$$

Il significato della derivata di Lie  $\mathcal{L}_X|_p \omega$ , quindi è analogo a quello che abbiamo già visto per i campi vettoriali: essa valuta il tasso di variazione (per  $t = 0$ ) di una forma differenziale  $\omega$  in un punto fissato  $p$ , quando sulla forma agisce il gruppo di diffeomorfismi locali generato dal campo vettoriale  $X$ . Il segno davanti a  $X$  è ora positivo in  $\phi_t^{(X)*}$  invece che negativo come accadeva per la derivata di Lie dei campi vettoriali, in cui appariva  $d\phi_t^{(X)}$  nell'analogia forma. La ragione è legata al fatto che  $\phi^{(X)}$  agisce sulle 1-forme tramite il pullback e non il differenziale

con un'inversione dell'ordine degli argomenti: se  $f : M \rightarrow N$  è una funzione differenziabile, allora  $df_r : T_r M \rightarrow T_{f(r)} N$  mentre  $f_{f(r)}^* : T_{f(r)}^* N \rightarrow T_r^* M$ . Si noti che cambiando convenzione per i campi vettoriali, se si vuole mantenere la richiesta è necessario cambiare anche il segno della derivata di Lie delle forme.

In particolare, per una 1-forma  $\theta$ , in coordinate locali :

$$(\mathcal{L}_X|_p \theta)_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \theta_j + X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} \right) \Big|_{(x^1(p), \dots, x^n(p))} . \quad (\text{B.26})$$

Se  $\omega$  è una  $p$ -forma (di classe almeno  $C^1$ ) si può provare la seguente identità che connette la derivata di Lie al prodotto interno:

$$\mathcal{L}_X \omega = d(X \lrcorner \omega) + X \lrcorner d\omega . \quad (\text{B.27})$$

### B.4.3 Integrale di forme di ordine massimo

Cominciamo a discutere la questione lavorando in carte locali. Consideriamo pertanto una carta locale  $(U, \psi)$ , con  $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$  di una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  che assumeremo di classe  $C^\infty$ . Tutte le forme differenziali che considereremo saranno almeno di classe  $C^0$ . Tenendo conto della (B.14), una  $n$ -forma differenziale  $\omega$  su  $M$ , su  $U$ , cioè una forma differenziale di ordine massimo possibile, può essere scritta come:

$$\omega|_U = \alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n ,$$

dove  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione biunivocamente individuata da  $\omega|_U$  quando è assegnata la carta locale  $(U, \psi)$ . Se consideriamo un altro sistema di coordinate locali  $(V, \phi)$ , con  $\phi : V \ni p \mapsto (y^1(p), \dots, y^n(p))$  e supponiamo che  $U \cap V \neq \emptyset$ . Avremo allora che:

$$\omega|_V = \beta dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n ,$$

e ci si può chiedere come le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  siano correlate su  $U \cap V$ . Abbiamo, su  $U \cap V$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}} dy^{j_n} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \frac{\partial x^1}{\partial y^{j_1}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial y^{j_n}} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(n)} \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma(n)}} \eta_\sigma dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n , \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che  $dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_n} = 0$  se gli indici si ripetono, mentre se non si ripetono allora devono prendere valori dati da una permutazione  $\sigma$  di  $1, 2, \dots, n$  e vale infine, ripermutando le forme del prodotto  $dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_n}$ :

$$dy^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma(n)} = \eta_\sigma dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n ,$$



dove  $\eta_\sigma \in \{-1, 1\}$  è il segno della permutazione  $\sigma$ . Come noto dalla teoria dei determinanti:

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{P}(n)} \eta_\sigma \frac{\partial x^1}{\partial y^{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial y^{\sigma(n)}} = \det \left[ \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right]_{i,j=1,\dots,n}.$$

La conclusione è che:

$$\omega = \alpha dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \alpha \det \left[ \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right]_{i,j=1,\dots,n} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

Concludiamo che, se  $(U, \psi)$ , con  $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$  e  $(V, \phi)$ , con  $\phi : V \ni p \mapsto (y^1(p), \dots, y^n(p))$  e sono carte locali con  $U \cap V \neq \emptyset$  e la forma differenziale di grado massimo  $\omega$  si scrive su  $U$  e  $V$  rispettivamente:

$$\omega|_U = \alpha dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \omega|_V = \beta dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$$

allora, se  $p \in U \cap V$ :

$$\beta(p) = (\det J)(p) \alpha(p), \quad J(p) := \left[ \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right]_{i,j=1,\dots,n} \bigg|_{(y^1(p), \dots, y^n(p))}. \quad (\text{B.28})$$

Questa legge di trasformazione ricorda la legge di trasformazione di un integrale in più variabili, quando cambiamo sistema di coordinate e questa analogia permette di dare senso alla nozione di integrale di una forma differenziale di ordine massimo.

### Osservazioni B.5.

(1) Si noti che essendo  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  una funzione almeno  $C^1$  con inversa almeno  $C^1$ , la matrice jacobiana di tale funzione deve avere determinante non nullo. Pertanto  $\det J \neq 0$ , dove  $J$  è la matrice jacobiana di  $\psi \circ \phi^{-1}$ . Se  $U \cap V$  è quindi  $(\phi(U \cap V))$  è un insieme connesso, dato che  $\det J$  è una funzione continua e dunque trasforma insiemi connessi in insiemi connessi, deve trasformare  $\phi(U \cap V)$  in un sottoinsieme connesso di  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . Di conseguenza, se  $U \cap V$  è connesso, il segno di  $J$  è costantemente positivo oppure costantemente negativo su  $\phi(U \cap V)$ .

(2) Il segno del determinante della matrice jacobiana della trasformazione inversa  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è lo stesso di  $\det J$ , dato che il prodotto dei due determinanti deve essere il determinante della matrice identità che vale 1.

Consideriamo un insieme aperto  $W \subset \overline{W} \subset U \cap V$  con  $\overline{W}$  compatto. Osserviamo che  $W$  è un insieme di Borel in  $M$  e allora lo è  $\psi(W)$  in  $\mathbb{R}^n$ , dato che  $\psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow U$  (dove l'immagine  $U$  e dominio  $\psi(U)$  sono insiemi aperti) è continua e quindi misurabile secondo Borel. Di conseguenza possiamo applicare la teoria della misura di Lebesgue su  $\psi(W)$ . Si osservi ancora che, essendo  $\psi$  un omeomorfismo, vale  $\overline{\psi(W)} = \psi(\overline{W})$  che è compatto e pertanto ha misura di Lebesgue finita. Supponiamo ora che  $(\det J)(p) > 0$  per  $p \in W$ . Se teniamo conto della formula di cambiamento

di variabile nell'integrazione, abbiamo allora l'identità (notare che le funzioni integrande sono continue nelle nostre ipotesi per cui sono assolutamente integrabili sui compatti e quindi gli integrali esistono finiti)

$$\begin{aligned} \int_{\phi(W)} \beta \circ \phi^{-1} dy^1 \cdots dy^n &= \int_{\phi(W)} \alpha \circ \phi^{-1} (\det J) dy^1 \cdots dy^n \\ &= \int_{\phi(W)} \alpha \circ \phi^{-1} |\det J| dy^1 \cdots dy^n = \int_{\psi(W)} \alpha \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1} dx^1 \cdots dx^n. \end{aligned}$$

Cioè:

$$\int_{\phi(W)} \beta \circ \phi^{-1} dy^1 \cdots dy^n = \int_{\psi(W)} \alpha \circ \psi^{-1} dx^1 \cdots dx^n.$$

Tutto ciò suggerisce di definire, se  $\omega$  di ordine massimo è almeno  $C^0$  e *purchè si lavori con sistemi di coordinate locali tali che, cambiando sistema di coordinate, il determinante della matrice jacobiana della trasformazione sia positivo*:

$$\int_W \omega := \int_{\psi(W)} \alpha \circ \psi^{-1} dx^1 \cdots dx^n. \quad (\text{B.29})$$

per ogni  $W$  aperto la cui chiusura è compatta ed è inclusa nel dominio di una carta locale sulla quale sono definite le coordinate usate a secondo membro. Il secondo membro, infatti, non dipende dalla carta locale  $(U, \psi)$  che include  $\overline{W}$  nel dominio  $U$ .

Abbiamo ora due problemi. Il primo è quello di gestire in modo coerente la richiesta che il determinante della matrice jacobiana tra diversi sistemi di coordinate sia sempre positivo, il secondo è quello di dare una procedura per “incollare” gli integrali eseguiti su vari domini dotati di coordinate locali, al fine di definire l'integrazione di una forma differenziale di ordine massimo su un insieme generico che non sia ricopribile con un'unica carta locale. Cominciamo con la prima questione dando una definizione corrispondente.

**Definizione B.3.** Se  $M$  è una varietà differenziabile di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , un **atlante orientato** di  $M$ , se esiste, è un atlante (di classe  $C^k$ )  $\mathcal{O} = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  tale che, se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  allora la matrice jacobiana di  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  su  $\psi_j(U_i \cap U_j)$  ha determinante ovunque positivo.

Un'**orientazione** è un atlante orientato  $\mathcal{O} = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  *massimale*, cioè un atlante orientato tale che ogni carta locale (di classe  $C^k$ )  $(V, \phi)$  di  $M$  per la quale determinante della matrice jacobiana di  $\phi \circ \psi_j^{-1}$  su  $\psi_j(V \cap U_j)$  è ovunque positivo per ogni  $j \in I$  tale che  $V \cap U_j \neq \emptyset$ , allora  $(V, \phi) \in \mathcal{O}$ .

$M$  si dice **orientabile** se ammette un atlante orientato.

Una **varietà differenziabile orientata** è una coppia  $(M, \mathcal{O})$ , dove  $M$  è una varietà differenziabile orientabile e  $\mathcal{O}$  una sua orientazione. In tal caso, una carta locale  $(U, \psi)$  su  $M$  si dice **orientata** se appartiene a  $\mathcal{O}$ .

Se  $M$  e  $M'$  sono due varietà differenziabili della stessa dimensione orientate con orientamenti  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$  rispettivamente, un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M'$  è detto **preservare l'orientamento**

quando  $\psi' \circ f : f^{-1}(U') \rightarrow \mathbb{R}^n$  definisce una carta locale in  $\mathcal{O}$  per ogni carta locale  $(U', \psi') \in \mathcal{O}'$ .  $\diamond$

Non è difficile provare la proposizione seguente.

**Proposizione B.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$  che sia anche orientabile. Allora vale quanto segue.*

- (a) *Se  $M$  è connessa allora esistono due sole orientazioni possibili.*
- (b) *Ogni atlante orientato è un sottoinsieme di un'unica orientazione.*

Esistono varietà differenziabili non orientabili, l'esempio più elementare è la varietà differenziabile di dimensione 2 nota come **nastro di Möbius** ottenuto prendendo in  $\mathbb{R}^2$  il quadrato  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1, 1), y \in (-1, 1)\}$  e quindi aggiungendo il bordo dato dai punti  $(1, y)$  con  $y \in (-1, 1)$  insieme ad un sistema di coordinate locali che identifichi il punto  $(-1, y)$  con il punto  $(1, -y)$  se  $y \in (-1, 1)$ .

D'ora in poi ci riferiremo, per quanto riguarda l'integrazione di forme differenziali di ordine massimo, a varietà differenziabili orientate e considereremo solo carte locali che appartengono all'orientazione. In tal modo non avremo problemi di segno del determinante della matrice jacobiana cambiando sistema di coordinate.

Passiamo ora alla questione dell'incollamento dei pezzi ricordando alcune nozioni legate alla *paracompattezza*. Dato un insieme  $X$  un **ricoprimento** dell'insieme  $Y \subset X$  è una classe di sottoinsiemi  $\{U_i\}_{i \in I}$ ,  $U_i \subset X$ , tali che  $\bigcup_{i \in I} U_i \supset Y$ . Se  $\{V_j\}_{j \in J}$  è un secondo ricoprimento di  $Y$ , esso è detto **raffinamento** di  $\{U_i\}_{i \in I}$ , se per ogni  $j \in J$  esiste  $i(j) \in I$  tale che  $V_j \subset U_{i(j)}$ .

**Definizione B.4.** Se  $X$  è uno spazio topologico, un ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $Y \subset X$  è detto **localmente finito**, se per ogni  $y \in Y$  esiste un aperto  $V_y \supset y$  tale che  $U_i \cap V_y \neq \emptyset$  solo per un numero *finito* di elementi  $i \in I$ .  $\diamond$

**Definizione B.5.** Uno spazio topologico  $X$  è detto **paracompatto** se ogni ricoprimento di  $X$  costituito da insiemi aperti ammette un raffinamento, costituito da insiemi aperti, che sia localmente finito.  $\diamond$

Vale il risultato fondamentale seguente.

**Proposizione B.2.** *Sia  $M$  uno spazio topologico connesso che sia anche:*

- (i) *di Hausdorff,*
  - (ii) *localmente omeomorfo ad  $\mathbb{R}^n$  (cioè per ogni  $p \in M$  esiste un aperto  $U \subset M$  con  $p \in U$  e una funzione  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $n$  indipendente da  $p$ , tale che  $\phi(U)$  sia un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  un omeomorfismo).*
- $M$  è paracompatto se e solo se ammette una base numerabile per la sua topologia.*

*In particolare, ogni varietà differenziabile connessa è paracompatta.*

**Osservazioni B.6.** Dal teorema segue in particolare che ogni ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  di aperti localmente finito di una varietà differenziabile connessa (assumendo Hausdorff e la numerabilità della topologia) è al più numerabile. Infatti, ogni punto  $p \in M$  ammette un intorno aperto  $V_p$  che interseca un numero finito di  $U_i$ . Ovviamente  $\{V_p\}_{p \in M}$  è un ricoprimento di aperti di  $M$ . Dato che la topologia di  $M$  è numerabile, possiamo estrarre un sottoricoprimento numerabile  $\{V_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ora,  $V_{p_1}$  avrà intersezione non vuota con gli elementi  $\{U_j\}_{j \in I_1}$  dove  $I_1$  è finito,  $V_{p_2}$  avrà intersezione non vuota con gli elementi  $\{U_j\}_{j \in I_2}$  dove  $I_2$  è finito e via di seguito. Ogni  $U_i$  di  $\{U_i\}_{i \in I}$  deve intersecare almeno un elemento di  $\{V_{p_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dato che tale classe ricopre tutta  $M$ . Di conseguenza  $I \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  deve essere al più numerabile.

L'ultimo ingrediente è la nozione di *partizione dell'unità* ed un teorema corrispondente. Ricordiamo che se  $M$  è uno spazio topologico e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  il **supporto** di  $f$ , indicato con  $\text{supp}(f)$ , è la chiusura dell'insieme  $\{p \in M \mid f_i(p) \neq 0\}$ .

**Definizione B.6.** Se  $M$  è una varietà differenziabile di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\mathcal{O} := \{U_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento di aperti di  $M$  localmente finito, una **partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{O}$**  è una classe di funzioni  $\{f_i\}_{i \in I}$  con  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^k$  tali che:

- (i)  $\text{supp}(f_i)$  è compatto e soddisfa  $\text{supp}(f_i) \subset U_i$  per ogni  $i \in I$ ,
- (ii)  $f_i(p) \geq 0$  per ogni  $p \in M$  e  $i \in I$ ,
- (iii) per ogni  $p \in M$  vale (tenendo conto che per la locale finitezza di  $\mathcal{O}$ , solo un numero finito di indici fornisce un contributo non nullo alla somma in un intorno di  $p$ ):

$$\sum_{i \in I} f_i(p) = 1.$$

◇

Il teorema conclusivo è il seguente.

**Teorema B.4.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $\mathcal{O} := \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento di aperti di  $M$  localmente finito e tale che  $\overline{U_i}$  sia compatto per ogni  $i \in I$ . Allora esiste una partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{O}$ .*

Consideriamo una varietà differenziabile  $M$  di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ , connessa, orientata, con orientazione  $\mathcal{O}$ . Ogni punto  $p \in M$  ammette una carta locale  $(U, \psi)$  con  $U \ni p$  e  $(U, \psi)$  orientata. Possiamo restringere  $U$  in modo tale da rimanere in  $\mathcal{O}$  e avere che  $\overline{U}$  sia compatto e completamente coperto da una carta locale. Pertanto esiste un atlante costituito da carte locali orientate con domini a chiusura compatta. La paracompattatezza di  $M$  assicura che si possa raffinare tale atlante in modo da garantire la locale finitezza. Possiamo dotare ogni aperto del ricoprimento finale di coordinate ereditate da quelle del ricoprimento iniziale. Ulteriormente i domini delle carte del ricoprimento finale sono a chiusura compatta, dato che ciascuna chiusura

è inclusa in un compatto. In conclusione, su  $M$  esiste un ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  che è localmente finito, costituito da insiemi aperti a chiusura compatta e tale che ciascuna chiusura  $\overline{U_i}$  è inclusa nel dominio di una carta locale orientata. Si osservi che, per l'osservazione B.6,  $I$  è al più numerabile. Diremo **ricoprimento standard** di  $M$  un simile ricoprimento.

In base al teorema precedente possiamo dotare ogni ricoprimento standard di una partizione dell'unità ad esso subordinata.

Siamo in condizioni di poter dare la definizione di integrale di una forma di ordine massimo.

**Definizione B.7.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ , di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ , connessa, orientata. Sia  $N \subset M$ , eventualmente  $N = M$ , un sottoinsieme di Borel.

Una  $n$ -forma di classe  $C^h$  con  $h \geq 0$  è detta integrabile su  $N$  se, per ogni partizione dell'unità  $\{f_i\}_{i \in I}$  subordinata ad un ricoprimento standard  $\{U_i\}_{i \in I}$ , vale che la serie

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} f_i \chi_N \omega$$

dove  $\chi_N(x) = 1$  se  $x \in N$  e  $\chi(x) = 0$  altrimenti e gli integrali a secondo membro sono quelli definiti in (B.29) converge assolutamente.

In tal caso si definisce (dove l'ordine con cui si somma non conta, dato che la serie converge assolutamente) l'**integrale di  $\omega$  su  $N$**  come il numero reale:

$$\int_N \omega := \sum_{i \in I} \int_{U_i} f_i \chi_N \omega. \quad (\text{B.30})$$

Una forma differenziabile di ordine massimo  $\mu$ , di classe  $C^h$  con  $h \geq 0$ , tale che in ogni carta locale orientata  $(U, \phi)$ , con  $\phi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$ , assume la forma

$$\mu = \alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad \text{valendo } \alpha(p) \geq 0 \text{ se } p \in U$$

è detta **forma di volume** su  $M$ .

Quello che si deve ora provare è che la definizione data non dipende dalla partizione dell'unità scelta.

**Proposizione B.3.** *In riferimento alla definizione precedente, se  $\omega$  è integrabile su  $N$  allora risulta*

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} f_i \chi_N \omega = \sum_{j \in J} \int_{U_j} g_j \chi_N \omega$$

*comunque scegliamo le partizioni dell'unità  $\{f_i\}_{i \in I}$  e  $\{g_j\}_{j \in J}$  subordinate a corrispondenti ricoprimenti standard. Di conseguenza la definizione (B.30) è ben posta.*

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $\{U_i\}_{i \in I}$  e  $\{V_j\}_{j \in J}$  i ricoprimenti standard relativi  $\{f_i\}_{i \in I}$  e  $\{g_j\}_{j \in J}$  rispettivamente. È immediato provare che  $\{U_i \cap V_j\}_{(i,j) \in I \times J}$  è ancora un ricoprimento

standard e  $\{f_i \cdot g_j\}_{(i,j) \in I \times J}$  è una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento. Di conseguenza la serie

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \int_{U_i \cap V_j} f_i g_j \chi_N \omega$$

converge assolutamente e può dunque essere calcolata eseguendo le somme in successione:

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} \int_{U_i \cap V_j} f_i g_j \chi_N \omega \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \int_{U_i \cap V_j} f_i g_j \chi_N \omega = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} \int_{V_j \cap U_i} f_i g_j \chi_N \omega \right). \quad (\text{B.31})$$

Si osservi che, dato che le  $g_j$  sono comunque definite su tutta  $M$  e si annullano fuori dal corrispondente  $V_j$ , per ogni  $i \in I$  fissato, si può scrivere

$$\sum_{j \in J} \int_{U_i \cap V_j} f_i g_j \chi_N \omega = \sum_{j \in J} \int_{U_i} f_i g_j \chi_{N \cap U_i} \omega.$$

Ogni integrale della serie a secondo membro corrisponde ad un integrale su  $\mathbb{R}^n$  (più precisamente sull'immagine di  $U_i$  in  $\mathbb{R}^n$  secondo la carta locale definita su un intorno aperto di  $\overline{U_i}$ ). Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue usato per la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$  prova immediatamente che:

$$\sum_{j \in J} \int_{U_i} f_i g_j \chi_{N \cap U_i} \omega = \int_{U_i} f_i \left( \sum_{j \in J} g_j \right) \chi_{N \cap U_i} \omega = \int_{U_i} f_i \chi_{N \cap U_i} \omega.$$

Procedendo nello stesso modo per gli integrali della serie

$$\sum_{i \in I} \int_{V_j \cap U_i} f_i g_j \chi_N \omega$$

la (B.31) diventa:

$$\sum_{i \in I} \int_{U_i} f_i \chi_N \omega = \sum_{j \in J} \int_{U_i} g_j \chi_N \omega$$

che è quanto volevamo provare.  $\square$

**Osservazioni B.7.** Se l'insieme di Borel  $N$  (o  $M$  stessa) è compatto oppure  $\omega$  (di ordine massimo e di classe  $C^h$  con  $h \geq 0$ ) si annulla fuori da un compatto  $K$ , allora  $\omega$  è sicuramente integrabile su  $N$ . Assumiamo che  $N$  sia compatto. Fissiamo una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento standard come in (B.29). Se  $p \in N$  esiste un intorno aperto  $O_p$  di  $p$  che interseca un numero finito di supporti delle funzioni  $f_i$  della partizione. Dato che  $N$  è compatto possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di  $N$  fatto da intorni  $O_p$ . Ne consegue che solo un numero finito di supporti di funzioni  $f_i$  interseca  $N$ . Pertanto solo un numero finito di termini della serie (B.29) sarà non nullo. Ciascuno di tali termini è finito, dato che  $\omega$  è limitata su ciascun

$U_i$  essendo continua sul compatto  $\overline{U_i}$  che, essendo compatto ha misura di Lebesgue finita in  $\mathbb{R}^n$ . Se ne conclude che la serie (B.29) converge sempre assolutamente (essendo una somma finita) comunque scegliamo la partizione dell'unità associata ad un ricoprimento standard arbitrario. Possiamo enunciare un'utile proposizione la cui prova elementare è lasciata per esercizio al lettore.

**Proposizione B.4.** *Siano  $M$  e  $M'$  varietà differenziabili di dimensione  $n$ , classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ , connesse e orientate, sia  $N \subset M'$  un insieme di Borel,  $f : M \rightarrow M'$  un diffeomorfismo che conserva l'orientazione e  $\omega$  una  $n$ -forma differenziabile di classe  $C^h$ ,  $h \geq 0$  su  $M'$ . Allora  $\omega$  è integrabile su  $f(N)$  se e solo se  $f^*\omega$  è integrabile su  $N$ . In tal caso vale:*

$$\int_{f(N)} \omega = \int_N f^*\omega. \quad (\text{B.32})$$

◇

Abbiamo un immediato corollario applicando la nozione di derivata di Lie di una  $n$ -forma differenziale.

**Proposizione B.5.** *Nelle stesse ipotesi della proposizione precedente con  $M' = M$ , se  $\varphi^{(Z)}$  è il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali che conservano l'orientazione generato dal campo vettoriale  $Z$ , purchè i due membri siano ben definiti, vale l'identità:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{\varphi_t^{(Z)}(N)} \omega = \int_N \mathcal{L}_Z \omega. \quad (\text{B.33})$$

Abbiamo fin'ora visto come definire l'integrale di una forma differenziale di ordine massimo su una varietà differenziabile o un suo sottoinsieme. Possiamo infine considerare ora il caso di una sottovarietà embedded  $N$ , di dimensione  $n$  di una varietà differenziabile di dimensione  $m > n$ . Prima di tutto osserviamo che se  $M$  e  $N$  sono orientabili, la seconda eredita un'orientazione dalla prima, semplicemente descrivendo localmente quest'ultima come il luogo dei punti in cui si annullano  $m - n$  coordinate di una carta locale di  $M$ , lavorando con carte locali orientate di  $M$ . Si ottiene in tal modo un atlante di  $N$  che ne individua un'orientazione.

**Definizione B.8.** Consideriamo una sottovarietà embedded  $N$ , di dimensione  $n$  e classe  $k \geq 1$ , di una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $m > n$ , dello stesso ordine di differenziabilità  $k$ , orientata. Supponiamo che  $N$  sia orientata con l'orientazione indotta da quella di  $M$  e consideriamo una forma differenziale  $\omega$  su  $M$  di ordine  $n$  e classe  $C^h$ ,  $h \geq 1$ . Assumendo che il secondo membro esista, l'**integrale di  $\omega$  su  $E \subset N$**  sottoinsieme di Borel è:

$$\int_E \omega := \int_E \iota^* \omega, \quad (\text{B.34})$$

dove  $\iota : N \rightarrow M$  è la mappa di immersione  $\iota : N \ni p \mapsto p \in M$  e il secondo membro è definito secondo la Definizione B.30. ◇

#### B.4.4 Varietà con bordo e teorema di Stokes-Poincaré

Vogliamo definire la nozione di *varietà con bordo*. Consideriamo il semispazio chiuso:

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0\} \quad (\text{B.35})$$

Il piano di dimensione  $n - 1$  di equazione  $x^1 = 0$  si dice **bordo** di  $\mathbb{H}^n$  e si indica con  $\partial\mathbb{H}^n$ . Consideriamo poi un sottoinsieme  $U \subset \mathbb{H}^n$  che sia aperto nella topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $f$  definita su  $U$  si dice **di classe**  $C^k$  quando esiste un aperto  $V$  con  $V \supset U$  e una funzione  $F$  definita su  $V$  e di classe  $C^k$ , tali che  $F|_U = f$ . Possiamo ora dare la definizione generale tenendo conto di quanto appena detto.

**Definizione B.9.** Una varietà differenziabile  $M$ , di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ , **con bordo**  $\partial M$ , è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile dotato di una famiglia di **carte locali**  $\mathcal{A} := \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  che per definizione soddisfano le seguenti richieste:

- (i)  $U_i \subset M$  è un aperto per ogni  $i \in I$  e  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ ;
- (ii)  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^n$ , per ogni  $i \in I$  è un omeomorfismo quando si restringe il codominio a  $\psi_i(U_i)$ ;
- (iii) per ogni scelta di  $i, j \in I$ , se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , le funzioni

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$$

sono di classe  $C^k$  (nel senso precisato sopra);

- (iv) la classe  $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  è massimale rispetto alle richieste (i)-(ii).

Un punto  $p \in M$  è detto **di bordo**, se esiste una carta locale  $(U, \psi) \in \mathcal{A}$  per cui  $\psi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ .  $\partial M$  è l'insieme dei punti di bordo di  $M$ . L'**interno** di  $M$  è l'insieme  $M^\circ := M \setminus \partial M$ .  $\diamond$

Se  $M$  è una varietà con bordo di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ , allora risulta subito che  $\partial M$  è una varietà (senza bordo) di dimensione  $n - 1$  e classe  $C^k$ , la cui struttura differenziabile è indotta da quella di  $M$ . Nello stesso modo  $M^\circ$  è una varietà (senza bordo) di dimensione  $n - 1$  e classe  $C^k$ , la cui struttura differenziabile è indotta da quella di  $M$ .

Per le varietà con bordo si possono definire in modo ovvio le nozioni di spazio tangente, spazio cotangente e orientazione. Se  $M$  è orientata,  $\partial M$  e  $M^\circ$  ricevono in modo naturale un'orientazione da quella di  $M$ .

#### Esempi B.1.

1. Una palla chiusa  $B \subset \mathbb{R}^n$  è una varietà con bordo il cui bordo coincide con la frontiera  $\partial B = \mathcal{F}B$ .

2. Più in generale, sia  $A \subset M$  è un aperto nella varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ . Se, per ogni  $p \in \mathcal{F}(A)$  esiste un intorno aperto  $U \ni p$  e una funzione  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^k$  tale che  $dg_p \neq 0$  e  $A \cap U = \{p \in U \mid g(p) > 0\}$ , allora  $A$  è una varietà con bordo di classe  $C^k$  e dimensione  $n - 1$  e risulta  $\partial A = \mathcal{F}(A)$ .



Siamo in grado di enunciare il teorema di Stokes-Poincaré.

**Teorema B.5.** (di Stokes-Poincaré) *Sia  $M$  una varietà di dimensione  $n$  e classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  con bordo, orientata che sia anche compatta. Se  $\omega$  è una  $n-1$  forma su  $M$  di classe  $C^k$ , allora:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (\text{B.36})$$

dove l'orientazione su  $\partial M$  è quella indotta da  $M$ .

*Nel caso in cui  $M$  sia compatta e non abbia bordo oppure  $M$  non abbia bordo, non sia compatta ma  $\omega$  abbia supporto compatto, l'identità precedente vale con il secondo membro nullo.*

### Osservazioni B.8.

(1) Il teorema si applica in particolare quando la varietà con bordo sulla quale si integra si ottiene da una più grande varietà senza bordo di classe almeno  $C^1$  e dimensione  $n$ , restringendosi alla chiusura di un aperto  $A$ , secondo la procedura descritta in (2) negli esempi B.1. In questo caso il teorema risulta essere valido anche quando  $A$  non è propriamente una sottovarietà di classe  $C^1$  e dimensione  $n-1$ , ma è l'unione di simili varietà che si intersecano su sottovarietà di dimensione  $n-2$  o inferiore, che appartengono ancora alla frontiera di  $A$ . Si pensi ad un cubo in  $\mathbb{R}^3$ : le sottovarietà di dimensione  $3-2=1$  sono gli spigoli. Il tutto funziona purché  $\omega$  sia sufficientemente regolare (e ciò accade per esempio se  $\omega$  è la restrizione di una forma  $C^1$  definita nella varietà ambiente).

(2) I teoremi di Stokes classico, della divergenza di Gauss e di Gauss-Green, ma anche il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale possono vedersi sono un sottocaso del precedente.

Nel calcolo degli integrali di  $n$ -forme su  $n$ -sottovarietà, specialmente applicando il teorema di Stokes-Poincaré, è spesso utile la seguente proposizione.

**Proposizione B.6.** *Sia  $N \subset M$  una sottovarietà differenziabile embedded di dimensione  $n < \dim(M)$  della varietà differenziabile  $M$  e entrambe le varietà siano almeno di classe  $C^1$ . Se  $\omega$  è una  $n$ -forma differenziabile tale che  $Z \lrcorner \omega = 0$  per  $Z \in T_p N \subset T_p M$  con  $Z \neq 0$ , allora  $(i^* \omega)_p = 0$ , dove  $i: N \ni x \mapsto x \in M$  è la mappa di inclusione canonica.*

**Dimostrazione.** Consideriamo un sistema di coordinate locali  $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m$  su  $M$  definite nell'intorno di  $p \in N \subset M$ , per cui  $x^1, \dots, x^n$  individuano coordinate su  $N$ , nell'intorno di  $p$ , quando  $x^{n+1} = x^{n+2} = \dots = x^m = 0$ . Inoltre scegliamo le coordinate dette in modo che  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p = Z$  (e questo è sempre possibile se  $Z \neq 0$ ). In queste coordinate, dato che  $i^* \omega$  è di ordine massimo su  $N$ , esisterà una funzione a valori reali, che indichiamo con  $\alpha$ , per la quale:

$$\omega = i^* \omega = \alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

La condizione  $Z \lrcorner \omega = 0$  in coordinate  $x^1, \dots, x^m$  si scrive:

$$Z \lrcorner \alpha(p) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \Big|_p = 0;$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p \lrcorner \alpha(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p = 0;$$

e cioè:

$$\alpha(p) dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p = 0 .$$

Dato che  $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \neq 0$ , dobbiamo concludere che  $\alpha(p) = 0$ , che implica immediatamente la tesi:

$$(i^* \omega)_p = \alpha(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_p = 0 .$$

□

## Appendice C

# Soluzioni e/o suggerimenti per risolvere gli esercizi proposti.

### C.1 Esercizi del Capitolo 1.

#### Esercizi 1.1

1.1.1. *Soluzione.* Sia  $\mathbf{u} \in V$ . Per (i) in definizione 1.1 deve esistere  $R \in \mathbb{A}^n$  tale che  $R - P = \mathbf{u}$ . Usando (ii),  $\mathbf{u} + (P - P) = (R - P) + (P - P) = R - P = \mathbf{u}$ . Per l'unicità dell'elemento neutro additivo  $\mathbf{0}$  in  $V$ , deve essere  $P - P = \mathbf{0}$ .

1.1.2. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione 1.1 si ha:  $((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - Q = [((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - (Q + \mathbf{u})] + [(Q + \mathbf{u}) - Q]$ . Per definizione il primo ed il secondo addendo a secondo membro sono rispettivamente:  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Abbiamo ottenuto che  $((Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v}) - Q = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Per definizione si ha allora che:  $(Q + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = Q + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ .

1.1.3. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione 1.1 si ha che:  $P - Q + Q - P = P - P = \mathbf{0}$  da cui la tesi.

1.1.4. *Soluzione.* Usando (ii) in definizione 1.1 si ha:

$$(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = [(P + \mathbf{u}) - P] + [P - (Q + \mathbf{u})] = [(P + \mathbf{u}) - P] + [P - Q] + [Q - (Q + \mathbf{u})] .$$

Applicando la definizione di  $P + \mathbf{u}$  e  $Q + \mathbf{u}$  nell'ultimo membro, tenendo conto dell'esercizio precedente, troviamo:

$$(P + \mathbf{u}) - (Q + \mathbf{u}) = \mathbf{u} + [P - Q] - \mathbf{u} = P - Q .$$

#### Esercizi 1.2

1.2.1. *Soluzione.* Per costruzione

$$\mathbf{e}_i = \sum_j B^j_i \mathbf{e}'_j ,$$

dove la matrice  $B$  di elementi  $B^j_i$  è non singolare. Se  $\mathbf{v} \in V$  ed esso si decompone sulle due basi dette come  $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i = \sum_j v'^j \mathbf{e}'_j$ , esplicitando  $\mathbf{e}_i$  in funzione degli  $\mathbf{e}'_j$  si ricava:

$$\sum_{i,j} v^i B^j_i \mathbf{e}'_j = \sum_j v'^j \mathbf{e}'_j .$$

Da cui

$$\sum_j \left( v'^j - \sum_{i=1}^n B^j_i v^i \right) \mathbf{e}'_j = 0 .$$

Sfruttando l'indipendenza lineare dei vettori  $\mathbf{e}'_j$  si hanno infine le *relazioni di trasformazione* delle componenti di  $\mathbf{v}$  tra le due basi considerate:

$$v'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i v^i . \quad (\text{C.1})$$

Da queste relazioni possiamo facilmente ricavare la legge di trasformazione tra i due differenti sistemi di coordinate cartesiane  $f$  e  $g$ . Consideriamo ora un punto  $P \in \mathbb{A}^n$ , possiamo scrivere, in virtù delle proprietà degli spazi affini:

$$P - O' = (P - O) + (O - O') \quad (\text{C.2})$$

Le componenti di  $P - O$ ,  $x^1, \dots, x^n$ , sulla base  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$  sono le coordinate di  $P$  nella carta globale  $(\mathbb{A}^n, f)$ , mentre quelle di  $P - O'$ ,  $x'^1, \dots, x'^n$ , nella base  $\{\mathbf{e}'_j\}_{j=1, \dots, n}$  sono le coordinate di  $P$  nell'altra carta globale  $(\mathbb{A}^n, g)$ . In base alla (C.1) si ha immediatamente da (C.2):

$$(P - O')'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i (P - O)^i = \sum_{i=1}^n B^j_i (P - O)^i + \sum_{i=1}^n B^j_i (O - O')^i ,$$

da cui

$$x'^j = \sum_{i=1}^n B^j_i (x^i + b^i),$$

dove  $(O - O') = \sum_i b^i \mathbf{e}_i$ .

**1.2.2. Soluzione.**  $f \circ g^{-1}$  non è altro che la relazione che esprime le coordinate  $x^1, \dots, x^n$  in funzione delle coordinate  $x'^1, \dots, x'^n$ . Essa si ottiene invertendo la funzione (1.4). Vale, per definizione di matrice inversa,  $\sum_j (B^{-1})^k_j B^j_i = \delta^k_i$  dove  $\delta^k_i$  è il solito *delta di Kroneker* definito da  $\delta^k_i = 0$  se  $k \neq i$  e  $\delta^k_k = 1$ . Moltiplicando entrambi i membri di (1.4) per  $(B^{-1})^k_j$  e sommando su  $j$  si ottiene:

$$\sum_j (B^{-1})^k_j x'^j = \sum_{i,j} (B^{-1})^k_j B^j_i (x^i + b^i) = \sum_{i,j} \delta^k_i (x^i + b^i) = x^k + b^k ,$$

da cui segue immediatamente (1.5).

**1.2.3.** Siano  $O_1 \in \mathbb{A}^n$  e  $O_2 \in \mathbb{A}^m$  due origini per sistemi di coordinate cartesiane e  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset V_1$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\} \subset V_2$  basi negli spazi delle traslazioni. Indichiamo con  $x_1^1, \dots, x_1^n$  e  $x_2^1, \dots, x_2^m$  le coordinate cartesiane rispettivamente associate in  $\mathbb{A}^n$  e  $\mathbb{A}^m$ . Se  $x_1^1, \dots, x_1^n$  sono le coordinate di  $P \in \mathbb{A}^n$ , vale  $P - O_1 = \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j$  e quindi:

$$\psi(P) = \psi \left( O_1 + \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j \right) = \left[ \psi \left( O_1 + \sum_j x_1^j \mathbf{e}_j \right) - \psi(O_1) \right] + \psi(O_1).$$

La funzione in parentesi quadre è una funzione lineare  $d\psi(\sum_j x_1^j \mathbf{e}_j)$  per ipotesi, per cui:

$$\psi(P) = \sum_j x_1^j d\psi(\mathbf{e}_j) + \psi(O_1).$$

Quindi

$$\psi(P) - O_2 = \sum_j x_1^j d\psi(\mathbf{e}_j) + (\psi(O_1) - O_2) = \sum_j x_1^j L(\mathbf{e}_j) + \mathbf{c},$$

dove  $\mathbf{c} := \psi(O) - O_2 \in V_2$ . Possiamo decomporre tutti vettori che compaiono sopra sulla base  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \subset V_2$ :

$$\sum_i (\psi(P) - O_2)^i \mathbf{f}_i = \sum_j x_1^j \sum_i L^i(\mathbf{e}_j) \mathbf{f}_i + \sum_i c^i \mathbf{f}_i.$$

Per definizione  $x_2^i := (\psi(P) - O_2)^i$  e, posto  $L^i_j := d\psi^i(\mathbf{e}_j)$ , l'identità di sopra si riscrive:

$$\sum_i \left[ x_2^i - \left( \sum_j L^i_j x_1^j + c^i \right) \right] \mathbf{f}_i = 0.$$

L'indipendenza lineare dei vettori  $\mathbf{f}_i$  prova la validità della (1.6). Il fatto che una trasformazione  $\psi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$  sia affine se è della forma (1.6) quando rappresentata in coordinate cartesiane è di immediata verifica diretta.

**1.2.4.** Vale:

$$\psi(P(t)) = \psi(P(t)) - \psi(P) + \psi(P) = \psi(P + t\mathbf{u}) - \psi(P) + \psi(P) = d\psi(t\mathbf{u}) + \psi(P) = \psi(P) + td\psi(\mathbf{u}).$$

### Esercizi 1.3

**1.3.1.** *Traccia di soluzione.* Sia  $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  è la norma associata al prodotto scalare. Dalle proprietà di simmetria e linearità del prodotto scalare segue che:

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \pm 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$$

da cui

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

Dato che  $d(O, O + \mathbf{w}) := \|\mathbf{w}\|$  la tesi segue immediatamente.

**1.3.2. Soluzione.** Ovviamente la conservazione del prodotto scalare implica quella delle distanze, per cui dobbiamo provare solo che la conservazione delle distanze implica la conservazione del prodotto scalare. Dalle proprietà del prodotto scalare (reale simmetrico) vale

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})_1 = \frac{1}{2}[(\mathbf{u} + \mathbf{v}|\mathbf{u} + \mathbf{v})_1 - (\mathbf{u} - \mathbf{v}|\mathbf{u} - \mathbf{v})_1],$$

per cui il prodotto scalare tra due vettori  $P - Q$  e  $P' - Q$ , definendo  $R \in \mathbb{E}_1^3$  t.c.  $R - Q = (P - Q) + (P' - Q)$ , vale

$$(P - Q|P' - Q)_1 = \frac{1}{2}[(R - Q|R - Q)_1 - (P - P'|P - P')_1] = \frac{1}{2}[d_1(R, Q)^2 - d_1(P, P')^2].$$

Dato che  $\phi$  è affine:

$$\phi(R) - \phi(Q) = d\psi(R - Q) = d\psi(P - Q) + d\psi(P' - Q) = (\phi(P) - \phi(Q)) + (\phi(P') - \phi(Q)).$$

Come conseguenza del fatto che  $\phi$  conserva le distanze, si ha che

$$(P - Q|P' - Q)_1 = \frac{1}{2}[d_1(R, Q)^2 - d_1(P, P')^2] = \frac{1}{2}[d_2(\phi(R), \phi(Q))^2 - d_2(\phi(P), \phi(P'))^2]$$

L'ultimo membro è proprio  $(\phi(P) - \phi(Q)|\phi(P') - \phi(Q))_2$ .

**1.3.3. Soluzione.** Se  $\phi$  è espressa in coordinate dalla (1.13), allora, nelle basi ortonormali associate a tali distanze, la rappresentazione matriciale della trasformazione lineare  $d\phi$  è semplicemente data dalla matrice  $R$  di coefficienti  $R^i_j$ . Essendo tale matrice ortogonale, la conservazione dei prodotti scalari segue immediatamente. Dall'esercizio precedente segue che  $\phi$  conserva le distanze. Supponiamo viceversa che  $\phi$  sia affine e conservi le distanze, quindi conserverà i prodotti scalari per l'esercizio precedente. In coordinate cartesiane ortonormali la trasformazione affine  $\phi$  (esercizio 1.2.3) sarà rappresentata da:

$$x_2^i = \sum_{j=1}^n R^i_j x_1^j + b^i,$$

da cui, la trasformazione lineare  $d\phi : V_1 \rightarrow V_2$  si esprime come, nelle stesse basi usate per definire le coordinate cartesiane:

$$w_2^i = \sum_{j=1}^n R^i_j w_1^j$$

dove  $\mathbf{w}_2 = d\phi(\mathbf{w}_1)$  con  $\mathbf{w}_1 \in V_1$  e  $\mathbf{w}_2 \in V_2$ . Tenendo conto che le basi usate sono ortonormali, la conservazione dei prodotti scalari si esprime con la relazione

$$\sum_{i=1}^n v_2^i u_2^i = \sum_{j=1}^n v_1^j u_1^j.$$

Usando la rappresentazione di  $d\phi$  data sopra, si ottengono le condizioni:

$$\sum_{i=1}^n v_1^k R^i{}_k R^i{}_j u_1^j = \sum_{j=1}^n v_1^j u_1^j$$

ossia

$$\sum_{i,j,k=1}^n v_1^k (R^i{}_k R^i{}_j - \delta_{kj}) u_1^j = 0.$$

Scegliendo tutti i coefficienti  $v_1^k$  e  $u_1^j$  nulli eccetto una coppia di essi, e facendo variare tali coppie in tutti i modi possibili, si trovano le relazioni, valide per ogni scelta di  $k$  e  $j$ :

$$\sum_{i=1}^n R^i{}_k R^i{}_j = \delta_{kj}$$

che in forma matriciale si riscrivono

$$R^t R = I.$$

Si osservi che questa relazione equivale a  $RR^t = I$  ( $R^t R = I$  significa che  $R^t$  è un'inversa sinistra di  $R$ , ma, dato che la matrice  $R$  è quadrata, l'inversa sinistra coincide con l'inversa destra ed è unica, per cui vale anche  $RR^t = I$ . Il fatto che  $RR^t = I$  implichi  $R^t R = I$  si prova analogamente). Quindi  $R$  è una matrice ortogonale  $n \times n$  reale.

**1.3.4. Soluzione.** Proviamo (i), (ii) e (iii). Se  $\phi : \mathbb{E}_1^n \rightarrow \mathbb{E}_2^n$  conserva le distanze allora è affine per il teorema 1.1, allora si esprime come (1.13) in coordinate cartesiane ortonormali. Dato che la trasformazioni lineari non omogenee sono  $C^\infty$ ,  $\phi$  è di classe  $C^\infty$ . Dato che le matrici ortogonali sono invertibili, l'inversa di (1.13) si scrive subito come:

$$x_1^j = \sum_{i=1}^n (R^{-1})^j{}_i x_2^i + c^j, \quad \text{con } c^j = \sum_{i=1}^n (R^{-1})^j{}_i b^i.$$

Dato che la matrice inversa di una matrice ortogonale è ancora ortogonale, per l'esercizio precedente, la trasformazione inversa di  $\phi$  è ancora una trasformazione affine che conserva le distanze, in particolare è ancora  $C^\infty$  e quindi  $\phi$  è un diffeomorfismo. La composizione di due isometrie affini, in coordinate cartesiane ortonormali  $x_2^i = \sum_{j=1}^n R^i{}_j x_1^j + b^i$  e  $x_3^i = \sum_{j=1}^n R'^i{}_j x_2^j + b'^i$  produce banalmente la trasformazione:

$$x_3^i = \sum_{j=1}^n (R' R)^i{}_j x_1^j + \left( \sum_{j=1}^n R'^i{}_j b^j + b'^i \right)$$

Dato che le matrici ortogonali formano un gruppo  $R' R$  è ortogonale e pertanto la trasformazione di sopra è ancora un'isometria per l'esercizio 1.3.3.

La prova di (iv) è immediata tenendo conto che, dall'esercizio 1.3.3, la rappresentazione matriciale di  $d\phi$  è una matrice ortogonale quando ci si riferisce alla coppia di basi che danno luogo alle coordinate cartesiane ortonormali in cui si rappresenta  $\phi$ .

**1.3.5. Soluzione.** Per l'esercizio precedente l'insieme delle isometrie affini da  $\mathbb{E}^n$  a  $\mathbb{E}^n$  è chiuso rispetto alla composizione ed all'inversa, inoltre la trasformazione identica è banalmente un'isometria. Di conseguenza, rispetto alla composizione di funzioni (che è associativa) l'insieme delle isometrie affini su un fissato spazio euclideo è un gruppo. Essendo le trasformazioni affini degli isomorfismi, tale gruppo è sottogruppo rispetto al gruppo degli isomorfismi di  $\mathbb{E}^n$  in se stesso.

**1.3.6. Soluzione.** Se  $f$  è un'isometria affine allora è banalmente un'isometria. Per dimostrare che se  $f$  è isometria allora è un'isometria affine, è sufficiente dimostrare che  $f$  è una trasformazione affine. Abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare.

**Lemma.** Sia  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ , con  $V_1$  e  $V_2$  spazi vettoriali di dimensione finita  $n$ , dotati di prodotti scalari (reali simmetrici)  $(\cdot|\cdot)_1$  e  $(\cdot|\cdot)_2$  rispettivamente, che generano le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$  rispettivamente.  $\phi$  è lineare e conserva il prodotto scalare se e solo se valgono le due condizioni insieme:

- (i)  $\phi(0_1) = 0_2$ , essendo  $0_i$  il vettore nullo di  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ ;
- (ii)  $\|\phi(\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{u})\|_2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_1$  per ogni coppia  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1$ .

*Dimostrazione.* È chiaro che se  $\phi$  è lineare e conserva il prodotto scalare, allora le condizioni (i) e (ii) sono verificate. Proviamo che se valgono (i) e (ii) allora  $\phi$  conserva il prodotto scalare. Per ogni  $\mathbf{w} \in V_1$

$$\|\phi(\mathbf{w})\|_2 = \|\phi(\mathbf{w}) - 0_2\|_2 = \|\phi(\mathbf{w}) - \phi(0_1)\|_2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{0}\|_1 = \|\mathbf{w}\|_1.$$

D'altra parte  $\|\phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{v})\|_2^2 = \|u - v\|_1^2$  si esplicita come:

$$\|\phi(\mathbf{u})\|_2^2 + \|\phi(\mathbf{v})\|_2^2 + 2(\phi(\mathbf{u})|\phi(\mathbf{v}))_2 = \|\mathbf{u}\|_1^2 + \|\mathbf{v}\|_1^2 + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v})_2$$

e pertanto, usando  $\|\phi(\mathbf{w})\|_2 = \|\mathbf{w}\|_1$ , segue che  $(\phi(\mathbf{u})|\phi(\mathbf{v}))_2 = (\mathbf{u}|\mathbf{v})_2$ , che è quanto volevamo provare. Per concludere, dimostriamo che  $\phi$  è lineare. Sia  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$  base ortonormale in  $V_1$ . Per la conservazione del prodotto scalare  $\{\phi(\mathbf{e}_i)\}_{i=1,\dots,n}$  è una base ortonormale in  $V_2$ . Quindi, per ogni  $\mathbf{v} \in V_1$ , decomponendo  $\phi(\mathbf{v})$  sulla base  $\{\phi(\mathbf{e}_i)\}_{i=1,\dots,n}$  ed infine usando nuovamente la conservazione del prodotto scalare:

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n (\phi(\mathbf{e}_i)|\phi(\mathbf{v}))\phi(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i|\mathbf{v})\phi(\mathbf{e}_i).$$

La linearità in  $\mathbf{v}$  dei prodotti scalari  $(\mathbf{e}_i|\mathbf{v})$  implica immediatamente che  $\phi$  è lineare.  $\square$

Torniamo alla dimostrazione che ogni isometria è una trasformazione affine. Fissiamo  $O \in \mathbb{E}_1^n$ . Ogni vettore  $\mathbf{v} \in V_1$  si potrà scrivere, biunivocamente, come  $\mathbf{v} = P_{\mathbf{v}} - O$  per  $P_{\mathbf{v}} \in \mathbb{E}_1^n$ . In particolare  $\mathbf{0}_1 = O - O$ . Definiamo  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tale che  $\phi(\mathbf{v}) := f(P_{\mathbf{v}}) - f(O)$ . In questo modo  $\phi(\mathbf{0}_1) = f(O) - f(O) = \mathbf{0}_2$ , inoltre

$$\|\phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{v})\|_2^2 = \|(f(P_{\mathbf{u}}) - f(O)) - (f(P_{\mathbf{v}}) - f(O))\|_2^2 = \|f(P_{\mathbf{u}}) - f(P_{\mathbf{v}})\|_2^2,$$



ma l'ultimo membro uguaglia:

$$d_2(f(P_{\mathbf{u}}), f(P_{\mathbf{v}}))^2 = d_1(P_{\mathbf{u}} - P_{\mathbf{v}})^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1^2.$$

Sono dunque verificate (i) e (ii) del lemma. Applicando il lemma, concludiamo che  $\phi$  è lineare (e conserva i prodotti scalari). Infine per la definizione di  $\phi$  e la sua linearità :

$$f(P_{\mathbf{v}}) - f(P_{\mathbf{u}}) = f(P_{\mathbf{v}}) - f(O) - (f(P_{\mathbf{u}}) - f(O)) = \phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \phi(P_{\mathbf{u}} - P_{\mathbf{v}}).$$

Dato che  $P_{\mathbf{w}}$  spazia in tutto  $\mathbb{E}_1^n$  al variare di  $\mathbf{w} \in V_1$ , l'identità di sopra si riscrive:

$$f(P) - f(Q) = \phi(P - Q), \text{ per ogni coppia } P, Q \in \mathbb{E}^n,$$

dove  $\phi$  è una funzione lineare. Questa identità implica che  $f$  sia invariante per traslazioni e sia una trasformazione affine con  $df = \phi$ .

## C.2 Esercizi del Capitolo 2.

### Esercizi 2.1

**2.1.1. Soluzione.** Nella situazione in esame, per dimostrare che  $\sigma_{\mathcal{J}} : \mathbb{V}^4 \ni p \mapsto (T, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$  definisce una carta compatibile con la struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , per l'esercizio A.1.5, è sufficiente esibire, nell'intorno di ogni punto di  $\mathbb{V}^4$ , una carta locale della struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , con coordinate locali  $y^1, y^2, y^3, y^4$  tale che la matrice jacobiana della trasformazione  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, y^4)$  abbia determinante ovunque non nullo. Consideriamo  $p \in \mathbb{V}^4$  e  $\Sigma_t \ni p$ . Dato che  $\Sigma_t$  è sottovarietà embedded di  $\mathbb{V}^4$ , c'è una carta locale  $(U, \phi)$  con  $\mathbb{V}^4 \supset U \ni p$  e  $\phi : q \mapsto (z^0(q), z^1(q), z^2(q), z^3(q))$  e tale che  $U \cap \Sigma_t$  è determinato dalla condizione  $z^0 = 0$ . Infine  $\phi|_{U \cap \Sigma_t} : q \mapsto (z^1(q), z^2(q), z^3(q))$  definisce una carta locale su  $U \cap \Sigma_t$ . In coordinate  $z^i$  la funzione tempo assoluto  $T$  deve soddisfare  $\partial T / \partial z^0 \neq 0$  (in quanto  $\partial T / \partial z^i = 0$  se  $i = 1, 2, 3$  per costruzione e  $T$  è non singolare). Il determinante della matrice jacobiana, valutato in  $p$ , della trasformazione  $T = T(z^1, z^2, z^3)$ ,  $z^i = z^i$  (per  $i = 1, 2, 3$ ), vale proprio  $\partial T / \partial z^0 \neq 0$ . Per il teorema 1.2, restringendo il dominio  $U$  attorno a  $p$  ad un più piccolo intorno  $U'$ , la funzione  $(z^0, z^1, z^2, z^3) \mapsto (T(z^1, z^2, z^3), z^1, z^2, z^3)$  è differenziabile biettiva con inversa differenziabile. In definitiva, per ogni  $p \in \mathbb{V}^4$ , c'è una carta locale  $(U', \psi)$  della struttura differenziabile di  $\mathbb{V}^4$ , con  $\mathbb{V}^4 \supset U' \ni p$  e tale che  $\psi : q \mapsto (y^0(q), y^1(q), y^2(q), y^3(q))$  con  $(y^0(q), y^1(q), y^2(q), y^3(q)) = (T(q), z^1(q), z^2(q), z^3(q))$ . Ovviamente  $\Sigma_t \cap U'$  è determinato dalla condizione  $y^0 = t$  e  $y^1, y^2, y^3$  sono coordinate locali su  $\Sigma_t$ . Le coordinate  $x^1, x^2, x^3$  sono coordinate globali su  $\Sigma_t$  compatibili con la sua struttura differenziabile in quanto sono definite tramite  $\Pi_{\mathcal{J}}|_{\Sigma_t} : \Sigma_t \rightarrow E_{\mathcal{J}}^3$  che è un diffeomorfismo essendo un'isometria tra spazi euclidei. La matrice jacobiana della trasformazione  $x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , deve quindi avere determinante  $J$  non nullo. Per computo diretto, si verifica che il determinante della matrice jacobiana della trasformazione  $T = y^0, x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , ha ancora determinante  $J \neq 0$ . Questo è quanto volevamo provare.

**2.1.2. Soluzione.** Fissiamo un evento  $p \in \mathbb{V}^4$  e consideriamone le coordinate secondo  $\sigma_{\mathcal{J}}$  e  $\sigma_{\mathcal{J}'}$ . La prima coordinata  $t(p)$  in  $(t(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p))$  corrisponde al valore di  $T(p)$ . Cambiando riferimento,  $t'(p)$  deve coincidere con  $T(p)$  a meno di una costante additiva  $c$  arbitraria nella definizione del tempo assoluto  $T$ . Questo dimostra l'equazione (2.2). Consideriamo poi un evento  $p \in \Sigma_t$ . Le coordinate  $(x'^1(p), x'^2(p), x'^3(p))$  sono connesse alle coordinate  $(x^1(p), x^2(p), x^3(p))$  dalla trasformazione  $\Pi_{\mathcal{J}'} \downarrow_{\Sigma_t} \circ (\Pi_{\mathcal{J}} \downarrow_{\Sigma_t})^{-1}$  che è una isometria in quanto composizione di isometrie (vedi l'esercizio 1.3.4) per la definizione 2.3. Possiamo applicare l'esercizio 1.3.3 ottenendo proprio (2.2). La differenziabilità delle funzioni  $R^i_j(t)$  e  $c^j(t)$  è conseguenza immediata della condizione (ii) in definizione 2.3 scegliendo opportunamente il punto  $P$  che compare in tale condizione: per esempio, scegliendo  $P \in \mathbb{E}^3_{\mathcal{J}}$  nell'origine delle coordinate cartesiane non primate, segue subito da (2.2) che le funzioni  $c^j(t)$  sono differenziabili, descrivendo nelle coordinate primate la linea di universo di  $P$ .

**2.1.3. Soluzione.** (i) Rappresentiamo lo spaziotempo come  $\mathbb{R}^4$  tramite le coordinate  $t, x^1, x^2, x^3$ . Consideriamo quindi la classe di curve etichettate con le terne di numeri  $(x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^3$  e parametrizzate nel parametro  $t' \in \mathbb{R}$  tramite le equazioni:

$$x^j(t') = \sum_{i=1}^3 (R(t' - c)^{-1})^j_i (x^i - c^i(t' - c)), \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{C.3})$$

Si verifica immediatamente che la classe di queste linee di universo soddisfa la definizione di riferimento 2.3 e, per costruzione,  $t', x'^1, x'^2, x'^3$  sono coordinate cartesiane ortonormali solidali con tale riferimento  $\mathcal{J}'$ . Per costruzione (2.2) sono le trasformazioni tra le coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{J}$  e quelle solidali con  $\mathcal{J}'$  definito sopra.

(ii) È evidente che se le trasformazioni (2.2) sono trasformazioni di coordinate interne allo stesso riferimento  $\mathcal{J}$ , essendo  $\Pi_{\mathcal{J}}$  la stessa nei due casi, non può comparire la dipendenza temporale nelle formule (2.2). Se viceversa risulta che le funzioni che appaiono in (2.2) non dipendono dal tempo, ciò significa che le linee di universo dei punti in quiete con (C.3) sono le stesse linee di universo dei punti in quiete con  $\mathcal{J}$  etichettate con le terne  $(x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^3$  e con una eventuale scelta diversa per l'origine del tempo, per cui  $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ .

## Esercizi 2.2

**2.2.1. Soluzione.** Per prima cosa esprimiamo i versori delle coordinate polari in funzione di quelli delle coordinate cartesiane e viceversa. Vale

$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y, \quad (\text{C.5})$$

con inversa

$$\mathbf{e}_x = \cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi, \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \phi \mathbf{e}_\phi. \quad (\text{C.7})$$

Scelta un'origine  $O$ , avremo che, per definizione di  $\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y = r(t) \mathbf{e}_r(t), \quad (\text{C.8})$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza dal tempo di  $\mathbf{e}_r$  tenendo conto che  $r$  e  $\phi$  dipendono dal tempo quando il punto si muove. La derivata temporale di  $P(t) - O$  si deve eseguire tenendo conto di tale dipendenza. Nel seguito indicheremo come di consuetudine (risalente a Newton), la derivata temporale con un punto sopra la variabile derivata. Abbiamo che

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{r}(t) \mathbf{e}_r(t) + r(t) \dot{\mathbf{e}}_r(t) . \quad (\text{C.9})$$

Assumendo la dipendenza temporale di  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\phi$  in (C.4)-(C.5) e derivando in  $t$  e quindi usando (C.6)-(C.7), si ottiene

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi , \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\phi = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r , \quad (\text{C.11})$$

e quindi, per esempio,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{e}}_r &= \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r , \\ \ddot{\mathbf{e}}_\phi &= -\dot{\phi}^2 \mathbf{e}_\phi - \ddot{\phi} \mathbf{e}_r . \end{aligned}$$

Inserendo (C.10)-(C.11) in (C.9) si trova

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi .$$

Derivando nel tempo ed usando (C.10)-(C.11), si trova l'espressione per l'accelerazione

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi .$$

2.2.2. *Soluzione.* Si procede come per l'esercizio precedente. Abbiamo che

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z = r(t) \mathbf{e}_r(t) . \quad (\text{C.12})$$

Inoltre

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z , \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z , \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y . \quad (\text{C.15})$$

Si osservi che la terna è ortonormale, per cui dati due versori il terzo si ottiene con il prodotto vettoriale dei primi due facendo attenzione al segno. Al fine invertire la trasformazione di sopra, si vede subito da un disegno che

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta .$$

Risulta comodo introdurre il versore radiale uscente nel piano  $z = 0$ :

$$\mathbf{n} := \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta .$$

Per ricavare  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  si procede usando le stesse formule che per le coordinate polari piane e rimpiazzando  $\mathbf{e}_r$  con  $n$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos \phi \, n - \sin \phi \, \mathbf{e}_\varphi , \\ \mathbf{e}_y &= \sin \phi \, n + \cos \phi \, \mathbf{e}_\varphi .\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo:

$$\mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \, \mathbf{e}_r - \cos \theta \cos \phi \, \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \, \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \phi \, \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \, \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \, \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{e}_z = \cos \theta \, \mathbf{e}_r - \sin \theta \, \mathbf{e}_\theta . \quad (\text{C.18})$$

Lo stesso risultato si ottiene notando che entrambe le terne sono ortonormali e pertanto sono connesse da una trasformazione ortogonale. Questo significa che la matrice che rappresenta (C.16)-(C.18) è la trasposta della matrice che rappresenta (C.13)-(C.15).

Derivando rispetto a  $t$  le (C.13)-(C.15) e quindi usando (C.16)-(C.18) nel risultato, si ottiene dopo un laborioso calcolo:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \, \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \, \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{C.19})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \, \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{C.20})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\phi} \sin \theta \, \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{e}_\theta . \quad (\text{C.21})$$

Derivando in  $t$  (C.12) ed usando (C.19) si ottiene infine

$$\mathbf{v} = \dot{r} \, \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \, \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \, \mathbf{e}_\varphi .$$

Il calcolo dell'accelerazione produce, derivando l'espressione della velocità ed usando (C.19)-(C.21):

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi .$$

**2.2.3. Traccia di soluzione.** In realtà l'esercizio è essenzialmente già stato risolto come esercizio 2.2.1, visto che l'asse  $z$  non introduce nessuna difficoltà essendo  $\mathbf{e}_z$  indipendente da  $t$  e valendo:

$$\mathbf{x}(t) = P(t) - O = x(t) \, \mathbf{e}_x + y(t) \, \mathbf{e}_y + z(t) \, \mathbf{e}_z = r(t) \, \mathbf{e}_r(t) + z(t) \, \mathbf{e}_z .$$

**2.2.4.** La spiegazione si basa sul fatto che, in coordinate cartesiane ortonormali, la connessione di Levi-Civita ha coefficienti di connessione nulli per cui la (2.11) fornisce automaticamente l'accelerazione. Si conclude che l'accelerazione del punto materiale altro non è che la derivata covariante seconda lungo la traiettoria del moto:

$$\mathbf{a} = \nabla_{\dot{P}} \dot{P} .$$

L'espressione, in coordinate del tutto arbitrarie, dell'identità di sopra è proprio la (2.11). Ovviamente, quindi, il risultato vale non solo in coordinate cilindriche o sferiche, ma in coordinate

curvilinee arbitrarie.

## Esercizi 2.2

**2.3.1. Soluzione.** Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali in cui  $\Pi$  risulti essere il piano  $z = 0$ . In tal caso le equazioni della curva sono date da, per ipotesi,  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = 0$ . Di conseguenza,  $\mathbf{t}(s) = dx/ds \mathbf{e}_x + dy/ds \mathbf{e}_y$ . Per ipotesi  $\mathbf{n}$  esiste ( $\Gamma$  non è riparametrizzabile come un segmento di retta in ogni sottointervallo di  $(a, b)$ ) e, per costruzione,  $\mathbf{n}$  appartiene ancora al piano  $\Pi$  essendo scritto come combinazione lineare di  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$ . Di conseguenza  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \mathbf{e}_z$  che è perpendicolare a  $\Pi$  ed è costante.

**2.3.2. Soluzione.** Sia  $P = P(s)$  la curva con  $s \in (a, b) \ni c$ . Consideriamo la funzione di  $s$ ,  $f(s) := \mathbf{b} \cdot (P(s) - P(c))$ . Essendo  $\mathbf{b}$  costante in  $s$ , la derivata di essa vale  $f'(s) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}(s) = 0$ . Quindi la funzione è costante. In realtà è sempre nulla essendo  $f(c) = 0$ . Concludiamo che  $\mathbf{b} \cdot (P(s) - P(c)) = 0$  per ogni  $s \in (a, b)$ , ma l'insieme  $\{P \in \mathbb{E}^3 \mid \mathbf{b} \cdot (P - P(c)) = 0\}$  è l'equazione del piano passante per  $P(c)$  e normale a  $\mathbf{b} \neq 0$ . Concludiamo che  $\Gamma$  appartiene a tale piano.

**2.3.3. Soluzione.** Prima di tutto notiamo che le ultime identità in ciascuna delle tre equazioni si ottengono subito usando la definizione di vettore di Darboux ed eseguendo i prodotti vettoriali e ricordando che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale destrorsa. Concentriamoci allora sulle prime identità delle tre equazioni. La (2.27) è la definizione di versore  $\mathbf{n}$  e non deve essere provata. Proviamo (2.25). Dato che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale, varrà

$$d\mathbf{n}/ds = (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Calcoliamo le componenti separatamente.

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{t} = d/ds(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{n} \cdot d\mathbf{t}/ds = 0 - \rho^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = -\rho^{-1}.$$

Per la componente su  $\mathbf{n}$  si ha:

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{n} = (1/2)d/ds(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = (1/2)d/ds(1) = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{b}$  si ha:

$$d\mathbf{n}/ds \cdot \mathbf{b} = d\mathbf{n}/ds \cdot (\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}) =: -\tau^{-1} \text{ per definizione.}$$

Mettendo insieme si ottiene (2.25). Passiamo alla (2.26). Dato che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è una base ortonormale, varrà

$$d\mathbf{b}/ds = (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Calcoliamo le componenti separatamente.

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t} = d/ds(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{b} \cdot d\mathbf{t}/ds = 0 - \rho^{-1}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{b}$  si ha:

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{b} = (1/2)d/ds(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = (1/2)d/ds(1) = 0.$$

Per la componente su  $\mathbf{n}$  si ha:

$$d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{n} = 0 - \mathbf{b} \cdot d\mathbf{n}/ds = -\mathbf{b} \cdot (-\mathbf{t}/\rho - \mathbf{b}/\tau) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})/\tau = 1/\tau.$$

Mettendo insieme si ottiene (2.26).

## Esercizi 2.4

**2.4.1. Soluzione.** Esprimiamo i versori della base di  $\mathcal{S}$  in funzione di quelli della base di  $\hat{\mathcal{S}}$ . Per costruzione  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \cos \theta$ ,  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \sin \theta \sin \phi$  e  $\mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \cos \psi$ , quindi

$$\mathbf{e}_3 = \sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Passiamo a  $\mathbf{e}_1$ . Prima di tutto decomponiamolo sulla base  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{N}'$  dove  $\mathbf{N}' := \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{N}$ . Per costruzione  $\mathbf{e}_1 = \cos \phi \mathbf{N} + \sin \phi \mathbf{N}'$  e pertanto, essendo  $\mathbf{N} = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2$ , vale

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2) + \sin \phi \mathbf{e}_3 \wedge (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2)$$

Ossia:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2) + \sin \phi (\sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3) \wedge (\cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2),$$

che, calcolato esplicitamente fornisce:

$$\mathbf{e}_1 = (\cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3.$$

L'espressione di  $\mathbf{e}_2$  si ottiene come prodotto vettoriale  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  e produce

$$\mathbf{e}_2 = -(\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_1 + (-\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3$$

**2.4.2. Traccia di soluzione.** Dato che le matrici di trasformazione sono ortogonali, è sufficiente prendere la matrice trasposta dalla matrice di trasformazione dell'esercizio precedente.

**2.4.3. Traccia di soluzione.** Usando la legge di decomposizione di  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}$ , si ottiene come somma di 3 vettori  $\boldsymbol{\omega}$ . Sia  $\mathcal{S}_2$  il sistema di riferimento con terna solidale data da  $\hat{\mathbf{e}}_3, \mathbf{N}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_3 \wedge \mathbf{N}$  e  $\mathcal{S}_3$  quello con terna solidale data da  $\mathbf{e}_3, \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{N}$ . Abbiamo allora che:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_3} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_3}|_{\mathcal{S}_2} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_2}|_{\mathcal{S}},$$

ossia, per definizione di angoli di Eulero:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} = \dot{\phi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{N} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{e}}_3,$$

dove  $\mathbf{N} = \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2$ . Esprimendo i versori  $\hat{\mathbf{e}}_i$  in funzione dei versori  $\mathbf{e}_k$  usando le formule dell'esercizio precedente, si ricava subito la formula finale per  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}$ .

## Esercizi 2.5

**2.5.1. Soluzione.** Fissiamo un riferimento  $\mathcal{J}_D$  in quiete con  $D$  ed un riferimento  $\mathcal{J}_{D'}$  in quiete con  $D'$ . Per costruzione:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_D}|_{\mathcal{J}} = \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_{D'}}|_{\mathcal{J}} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z$ . Se  $P \in D$  e  $P' \in D'$  sono punti, rispettivamente, solidali con i due dischi abbiamo allora che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{J}} + \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_D} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_D}|_{\mathcal{J}} \wedge (P - O) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P - O).$$

Nello stesso modo si trova:

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}_{D'}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_{D'}}|_{\mathcal{J}} \wedge (P' - O') = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O').$$

La condizione di rotolamento  $\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}'}$ , dove  $Q$  è il punto di contatto tra i due dischi, si scrive allora

$$\frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e}_x = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (-r) \mathbf{e}_x.$$

In altre parole:

$$R \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_y = -r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_y,$$

e quindi

$$R \frac{d\Theta}{dt} = -r \frac{d\theta}{dt}.$$

Questa equazione differenziale può essere integrata in

$$R\Theta(t) = r\theta(t) + c,$$

dove la costante  $c$  si può individuare valutando i due angoli al tempo iniziale (oppure ad un qualsiasi tempo).

**2.5.2. Soluzione.** Fissiamo un riferimento  $\mathcal{J}_D$  in quiete con  $D$  ed un riferimento  $\mathcal{J}_{D'}$  in quiete con  $D'$ . Per costruzione:  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_D}|_{\mathcal{J}} = \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z$  e  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_{D'}}|_{\mathcal{J}} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z$ . Se  $P \in D$  e  $P' \in D'$  sono punti, rispettivamente, solidali con i due dischi abbiamo allora che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_O|_{\mathcal{J}} + \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_D} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_D}|_{\mathcal{J}} \wedge (P - O) = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P - O).$$

Nello stesso modo si trova:

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}_{D'}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}_{D'}}|_{\mathcal{J}} \wedge (P' - O') = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (O' - O) + \mathbf{0} + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O');$$

ossia

$$\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (O' - O) + \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (P' - O').$$

Abbiamo usato il fatto che  $O'$  ruota attorno ad  $O$  nel piano  $z = 0$  ed è individuato dall'angolo polare  $\phi$ . La condizione di rotolamento  $\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}'}$ , dove  $Q$  è il punto di contatto tra i due dischi, si scrive allora, se  $\mathbf{e}$  è il versore di  $Q - O$ ,

$$\frac{d\Theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_z \wedge (R + r) \mathbf{e} - \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_z \wedge r \mathbf{e}.$$

In altre parole:

$$\left( R \frac{d\Theta}{dt} - (R+r) \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0} ,$$

e quindi, dato che  $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ , la relazione di sopra equivale a:

$$R \frac{d\Theta}{dt} - (R+r) \frac{d\phi}{dt} + r \frac{d\theta}{dt} = 0 .$$

Questa equazione differenziale può essere integrata in

$$R\Theta(t) - (R+r)\phi(t) + r\theta(t) = c ,$$

dove la costante  $c$  si può individuare valutando i tre angoli al tempo iniziale (oppure ad un qualsiasi tempo).

### C.3 Esercizi del Capitolo 3.

#### Esercizi 3.1

**3.1.1. Traccia di soluzione.** Comporre le trasformazioni di Galileo associate a  $(c_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, R_2)$  e  $(c_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, R_1)$ , nell'ordine detto, e ricavare gli analoghi coefficienti per la trasformazione di Galileo ottenuta.

**3.1.2. Traccia di soluzione.** Bisogna verificare che la legge di composizione detta sia associativa e che  $(0, \vec{0}, \vec{0}, I)$

$$(c, \vec{c}, \vec{v}, R)^{-1} = (-c, -R^{-1}(\vec{c} + c\vec{v}), -R^{-1}\vec{v}, R^{-1}) .$$

siano l'elemento neutro ed inverso rispetto a tale legge di composizione.

**3.1.3. Traccia di soluzione.** Si identifichino i vettori  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$  con i vettori di  $\mathbb{R}^5$  della forma  $(1, t, \vec{x})$ . Si associ quindi a ciascun elemento  $G := (c, \vec{c}, \vec{v}, R)$  del gruppo di Galileo la matrice

$$\Omega_G := \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & \vec{0} \\ \hline c & 1 & \vec{0} \\ \hline \vec{c} & \vec{v} & R \end{array} \right] .$$

Si verifichi che l'azione di  $\Omega_G$  sul vettore (pensato come vettore colonna)  $(1, t, \vec{x})$ ,  $\Omega_G$  produca l'azione nota del elemento  $G$  del gruppo di Galileo su  $t$  e  $\vec{x}$ , lasciando immutato il primo numero 1. Si verifichi che la corrispondenza  $G \mapsto \Omega_G$  sia iniettiva. Si verifichi  $\Omega_G$  sia non singolare e che la legge di composizione di elementi  $G, G'$  del gruppo di Galileo corrisponda al prodotto matriciale delle matrici  $\Omega_G, \Omega_{G'}$  rispettivamente associate e che l'elemento neutro del gruppo di Galileo sia associato alla matrice identità.

#### Esercizi 3.2



**3.2.1. Soluzione.** Siano  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  assi in quiete con la terra uscenti dal punto  $O$ , sia  $\hat{O}$  solidale con il sedile e si supponga che gli assi solidali con il sedile  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z$  siano uscenti da  $\hat{O}$ . Gli assi  $\mathbf{e}_z, \hat{\mathbf{e}}_z$  si suppongono entrambi verticali e la ruota si assume trovarsi nel piano  $y = \hat{y} = 0$ . Si osservi che, per costruzione gli assi  $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z$  rimangono paralleli agli assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  durante il moto del sedile. Pertanto  $\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mathcal{J}}|\mathcal{J}} = 0$ . Tuttavia  $\hat{\mathcal{J}}$  non è inerziale. Supponiamo che sia  $\alpha \neq 0$  la velocità angolare (costante) della ruota, posizionando  $O$  al centro della grande ruota, la trasformazione di coordinate vale (assumiamo  $\hat{t} = t$ ):  $x = R \cos(\alpha t) + \hat{x}, y = \hat{y}, z = R \sin(\alpha t) + \hat{z}$ . Questa trasformazione non appartiene al gruppo di Galileo per cui  $\hat{\mathcal{J}}$  non può essere inerziale se lo è  $\mathcal{J}$ .

### Esercizi 3.3

**3.3.1. Traccia di soluzione.** Il secondo principio della dinamica per il sistema  $P, Q$  si scrive

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q$$

Parametrizzando  $\Gamma$  con l'ascissa curvilinea, determinando  $P$  con l'ascissa  $s_P$  e  $Q$  con l'ascissa  $s_Q$ , ed usando le formule dell'esempio 1 in esempi 2.1, le equazioni di sopra si riscrivono:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_P = & -mg \mathbf{e}_z - \kappa \left( \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_x - \kappa \left( \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_y \\ & - \kappa \frac{s_P - s_Q}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z + \phi_P \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_Q = & -mg \mathbf{e}_z - \kappa \left( \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_x - \kappa \left( \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right) \mathbf{e}_y \\ & - \kappa \frac{s_Q - s_P}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z + \phi_Q. \end{aligned}$$

A questo punto, usando le formule dell'esempio 1 in esempi 2.1, proiettando entrambe le equazioni lungo i vettori tangenti a  $\Gamma$  in  $P$  e  $Q$ , rispettivamente  $\mathbf{t}_P$  e  $\mathbf{t}_Q$ , e tenendo conto di (2.18) si trova il sistema di equazioni pure di movimento ( $\phi_P$  e  $\phi_Q$  sono normali a  $\Gamma$  per ipotesi e quindi non appaiono):

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s_P}{dt^2} = & -\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \left[ \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ & - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \left[ \sin \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) - \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (s_P - s_Q) \end{aligned}$$

e

$$m \frac{d^2 s_Q}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) \left[ \cos \left( \frac{s_Q}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left( \frac{s_P}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$-\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s_Q}{\sqrt{2}}\right) \left[ \sin\left(\frac{s_Q}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{s_P}{\sqrt{2}}\right) \right] - \frac{\kappa}{\sqrt{2}}(s_Q - s_P)$$

**3.3.2. Traccia di soluzione.** Si calcoli la derivata temporale del secondo membro di  $E$  e si tenga conto dell'equazione (3.50). Il significato di  $E$  è quello dell'energia meccanica del punto materiale nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}'$ .

## C.4 Esercizi del Capitolo 4.

### Esercizi 4.1

**4.1.1. Suggestimento.** È sufficiente provare l'asserto per  $k = \pm 1$  e poi iterare la dimostrazione  $k$  volte. Si applichi il teorema di esistenza ed unicità in forma globale usando il fatto che ( $k = 1$ )

$$\left. \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right|_{t=s-T} = \left. \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \right|_{t=s}$$

e che  $\mathbf{f}$  è periodica in  $t$  di periodo  $T$ .

**4.1.2. Traccia di Soluzione.** Basta usare l'esercizio precedente per  $k = 1$ , notando che la funzione  $\mathbf{f}$ , essendo costante in  $t$  è periodica di qualsiasi periodo  $T$  in tale variabile.

**4.1.3. Soluzione.** Ignoriamo già dal principio il moto nella direzione  $z$ , che è di quiete a causa del vincolo. La reazione vincolare del piano vale quindi  $mg \mathbf{e}_z$ . Il problema si riduce ad un problema bidimensionale con equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y. \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema del secondo ordine in forma normale. Riducendolo al prim'ordine si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x, \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= v_x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= v_y. \end{aligned} \tag{C.22}$$

È chiaro che il secondo membro è una funzione di classe  $C^1$  e pertanto possiamo applicare i teoremi di esistenza ed unicità. Tornando alla forma del secondo ordine del sistema, notiamo che le due equazioni sono disaccoppiate, per cui le possiamo risolvere separatamente. Pensiamo

dapprima le soluzioni  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  come soluzioni complesse, alla fine ci ridurremo al caso reale. Il polinomio caratteristico di entrambe è:  $\chi^2 - \frac{\kappa}{m} = 0$ . Le soluzioni sono:

$$b_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \text{se } \kappa > 0,$$

oppure

$$b_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{-\kappa}{m}}, \quad \text{se } \kappa < 0.$$

Nel caso  $\kappa > 0$ , la legge oraria è dunque del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}, \quad (\text{C.23})$$

$$y(t) = d_1 e^{\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + d_2 e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}, \quad (\text{C.24})$$

dove  $c_1, c_2, d_1, d_2$  sono costanti arbitrarie in  $\mathbb{R}$ . Esse vengono fissate una volta assegnate condizioni iniziali.

Nel caso  $\kappa < 0$  la discussione è leggermente più complessa. Lavorando in  $\mathbb{C}$ , le soluzioni sarebbero:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}, \\ y(t) &= d_1 e^{i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t} + d_2 e^{-i\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t}. \end{aligned}$$

In generale, queste soluzioni non sono accettabili, in quanto  $x$  e  $y$  risultano essere complessi. Ricordiamo le formule di Eulero:  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ . Da ciò si ha che le soluzioni di sopra si possono riscrivere come:

$$x(t) = (c_1 + c_2) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + i(c_1 - c_2) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right), \quad (\text{C.25})$$

$$y(t) = (d_1 + d_2) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + i(d_1 - d_2) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right). \quad (\text{C.26})$$

Tutte le soluzioni reali si ottengono facendo variare le costanti  $(c_1 + c_2), (d_1 + d_2)$  in  $\mathbb{R}$  e le costanti  $(c_1 - c_2), (d_1 - d_2)$  in  $i\mathbb{R}$  (insieme degli immaginari). In definitiva, la soluzione generale ha la forma:

$$x(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right), \quad (\text{C.27})$$

$$y(t) = B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) + B_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right). \quad (\text{C.28})$$

con  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ .

Per concludere ricaviamo la legge oraria, nel caso  $\kappa < 0$ , con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  e

$\mathbf{v}(0) = v(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ . La prima condizione, inserita in (C.27)-(C.28), fornisce:  $0 = A_1$  e  $0 = B_1$ . Derivando (C.27)-(C.28), tenendo conto di quanto appena ottenuto, si ha:

$$v_x(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} A_2, \quad (\text{C.29})$$

$$v_y(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} B_2. \quad (\text{C.30})$$

Dovendo essere  $\mathbf{v}(0) = v(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ , ricaviamo che  $v_x(0) = v$  e  $v_y(0) = -v$ , per cui  $A_2 = v\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$  e  $B_2 = -v\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$ . La legge oraria richiesta è dunque:

$$\mathbf{x}(t) = v\sqrt{\frac{m}{\kappa}} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}t\right) (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y), \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

**4.1.4. Soluzione.** Procedendo come per l'esercizio precedente, si ha il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= m^{-1}\kappa x - m^{-1}\beta \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= m^{-1}\kappa y + m^{-1}\beta \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

È chiaro che siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Le equazioni, a differenza dell'esercizio precedente non sono disaccoppiate. Conviene procedere nel modo seguente. Definiamo la variabile complessa  $z = x + iy$  e riscriviamo le equazioni di sopra come:

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= m^{-1}\kappa z + m^{-1}\beta i \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2iy}{dt^2} &= m^{-1}\kappa iy + m^{-1}\beta i \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro otteniamo una sola equazione complessa che contiene entrambe le equazioni reali:

$$\frac{d^2z}{dt^2} - i \frac{\beta}{m} \frac{dz}{dt} - \frac{\kappa}{m} z = 0. \quad (\text{C.31})$$

*Dobbiamo ricordare, alla fine, che le soluzioni in  $x$  e  $y$  si otterranno prendendo la parte reale ed immaginaria della soluzione  $z$ .*

Il polinomio caratteristico è:

$$\chi^2 - i \frac{\beta}{m} \chi - \frac{\kappa}{m} = 0,$$

ed ha soluzioni:

$$b_{\pm} = i \frac{\beta}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}.$$

Esaminiamo subito il caso di soluzioni coincidenti, cioè  $\frac{4\kappa}{m} = \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso, la soluzione generale ha la forma, con  $a, b \in \mathbb{C}$  costanti arbitrarie:

$$z(t) = (a + bt)e^{i \frac{\beta}{2m} t}.$$

Usando la formula di Eulero si ha ancora che:

$$z(t) = (a + bt) \left( \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) + i \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \right).$$

Decomponendo  $a = A + iB$  e  $b = C + iD$  con  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ , e prendendo la parte reale ed immaginaria otteniamo le espressioni per la soluzione generale reale:

$$x(t) = (A + Ct) \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) - (B + Dt) \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right)$$

e

$$y(t) = (B + Dt) \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) + (A + Ct) \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right).$$

Nel caso  $\frac{4\kappa}{m} \neq \frac{\beta^2}{m^2}$ , la soluzione generale, in  $\mathbb{C}$ , dell'equazione (C.31) è data quindi da:

$$z(t) = e^{i \frac{\beta}{2m} t} \left( C_+ e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + C_- e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right),$$

per  $C_{\pm} \in \mathbb{C}$  scelte arbitrariamente. Possiamo scrivere la stessa soluzione come

$$z(t) = \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( C_+ e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + C_- e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right) + i \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( C_+ e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + C_- e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right).$$

Ci sono due casi da considerare.

(i) *Caso*  $\frac{4\kappa}{m} > \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso le funzioni esponenziali scritte sopra sono tutte reali. Decomponendo  $C_+ = a + ib$  e  $C_- = c + id$  in parte reale ed immaginaria, in modo da avere solo costanti reali, si trova immediatamente:

$$x(t) = \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( a e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + c e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right) - \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( b e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + d e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right),$$

$$y(t) = \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( b e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + d e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right) + \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( a e^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} + c e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\kappa}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}} t} \right),$$

dove le costanti  $a, b, c, d$  sono fissate arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ .

(i) *Caso*  $\frac{4\kappa}{m} < \frac{\beta^2}{m^2}$ . In questo caso gli esponenti delle funzioni sono immaginari:

$$z(t) = \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( C_+ e^{i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t} + C_- e^{-i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t} \right) + i \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \left( C_+ e^{i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t} + C_- e^{-i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t} \right).$$

Usando la formula di Eulero e decomponendo nuovamente  $C_+ = a + ib$  e  $C_- = c + id$  in parte reale ed immaginaria, in modo da avere solo costanti reali, si ottiene infine, prendendo la parte reale di  $z$ , l'espressione esplicita della componente  $x$  della soluzione:

$$x(t) = (a + c) \cos \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \cos \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t \right) + (c - a) \sin \left( \frac{\beta}{2m} t \right) \sin \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4\kappa}{m}} t \right)$$

$$+(-b+d)\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right)-(b+d)\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

Prendendo invece la parte immaginaria di  $z$  si ha:

$$y(t) = (d+b)\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + (d-b)\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ + (a-c)\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + (a+c)\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

Cambiando nuovamente nome alle costanti reali abbiamo alla fine, nelle costanti reali  $A, B, C, D$ :

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + B\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ + C\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + D\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right),$$

e

$$y(t) = -D\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + C\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) \\ - B\cos\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right) + A\sin\left(\frac{\beta}{2m}t\right)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{m^2}-\frac{4\kappa}{m}}t\right).$$

**4.1.5. Suggestimento.** Procedere come nell'esercizio 3, dato che le due equazioni differenziali per la componente  $x$  e la componente  $y$  risultano disaccoppiate.

## C.5 Esercizi del Capitolo 5.

### Esercizi 5.1

**5.1.1. Soluzione.** Dalla definizione di  $\Gamma_O|_{\mathcal{J}}$  ed usando le relazioni (2.67) (per  $O'$  in quiete in  $\mathcal{J}'$ ) si ha:

$$\Gamma_O|_{\mathcal{J}}(t) = \Gamma_O|_{\mathcal{J}'}(t) + \sum_{k=1}^n m_k(P_k(t) - O(t)) \wedge (\omega_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{J}}(t) \wedge (P_k(t) - O'(t))) \\ + \sum_{k=1}^n m_k(P_k(t) - O(t)) \wedge \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{J}}(t).$$

Dato che il punto  $O'$  in quiete con  $\mathcal{S}'$  può essere scelto arbitrariamente, lo scegliamo tale che, all'istante  $t$  coincida con  $O(t)$  (ne dobbiamo scegliere uno diverso ad ogni istante, ma questo non è proibito). In questo modo otteniamo

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}(t) = \mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}'}(t) + \sum_{k=1}^n m_k (P_k(t) - O(t)) \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'}|_{\mathcal{S}}(t) \wedge (P_k(t) - O(t))) .$$

**5.1.2. Soluzione.** Dalla definizione di  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = \sum_{k=1}^n m_k (P_k - O') \wedge \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} + \sum_{k=1}^n m_k (O' - O) \wedge \mathbf{v}_{P_k}|_{\mathcal{S}} = \mathbf{\Gamma}_{O'}|_{\mathcal{S}} + (O - O') \wedge \mathbf{P}|_{\mathcal{S}} ,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato (5.1).

## Esercizi 5.2

**5.2.1. Soluzione.** Lavoriamo in coordinate polari sferiche centrate in  $O$ . Consideriamo una curva regolare chiusa contenuta in  $\Omega$ ,  $\Gamma : r = r(s), \theta = \theta(s), \varphi = \varphi(s)$  con  $s \in [0, 1]$ . In tal caso  $\mathbf{x}(s) = r(s) \mathbf{e}_r(s)$ , per cui:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dr}{ds} \mathbf{e}_r(s) + r(s) \frac{d\theta}{ds} \mathbf{e}_\theta(s) + r(s) \sin(\theta(s)) \frac{d\phi}{ds} \mathbf{e}_\varphi(s) .$$

Tenendo conto che  $\mathbf{e}_r(s)$  è sempre perpendicolare a  $\mathbf{e}_\theta(s)$  e  $\mathbf{e}_\varphi(s)$  per costruzione, si ha immediatamente che, se  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 F(r(s)) \mathbf{e}_r \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds = \int_0^1 F(r(s)) \frac{dr}{ds} ds = \int_{r(0)}^{r(1)} \mathbf{F}(r) dr = 0 ,$$

dato che, per ipotesi,  $r(0) = r(1)$ . L'arbitrarietà della curva chiusa  $\Gamma$  ed (a) del teorema 5.4 implicano che  $\mathbf{F}$  è conservativa.

**5.2.2. Soluzione.** Per prima cosa notiamo che il momento angolare  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = (P - O) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  soddisfa, sul moto:  $d\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}}/dt = (P - O) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , dato che  $\mathbf{F}$  è parallela a  $P - O$  per ipotesi. Quindi il momento angolare si conserva nel tempo. Se  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = 0$  significa che, in coordinate cartesiane solidali con  $\mathcal{S}$  e centrate in  $O$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , deve essere

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lambda(t) \mathbf{x}(t) ,$$

dove  $\lambda(t)$  è una funzione continua, e quindi integrabile, eccetto al più per i tempi in cui  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ . Passando in componenti, quest'equazione differenziale si integra immediatamente producendo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} \mathbf{x}(0) .$$

Il moto avviene dunque lungo una direzione fissata inizialmente e quindi in un piano, che è sicuramente perpendicolare al momento angolare essendo quest'ultimo il vettore nullo. Nel caso  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \neq 0$ , la condizione:

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} = (P(t) - O) \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)$$

dice, in particolare, che  $P(t) - O$  è sempre perpendicolare al vettore costante non nullo  $\Gamma_O|_{\mathcal{J}}$  e quindi  $P(t)$  appartiene al piano passante per  $O$  e perpendicolare a tale vettore.

### Esercizi 5.3

5.3.1. *Soluzione.* (i) Nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , il secondo principio della dinamica si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = -mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \phi .$$

Esprimendo l'accelerazione  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}}$  in funzione di  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'}$  tramite le (2.69), tenendo conto che la velocità angolare è costante, otteniamo che il secondo principio della dinamica, nel riferimento  $\mathcal{J}'$ , si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + 2m\omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + m\omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)) = -mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \phi ,$$

ossia:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = -2m\omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} - m\omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)) - mg \mathbf{e}_z - k(P - H) + \phi .$$

Poniamo  $\mathbf{x} := P - O = x\mathbf{e}_x$ . In tal caso:  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = \dot{x}\mathbf{e}_x$ , dove il punto indica la derivata temporale, e  $P - H = x\mathbf{e}_x - h\mathbf{e}_z$ . Tenendo infine conto che il vincolo è liscio, per cui  $\phi = \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$ , l'equazione di sopra si riscrive come:

$$m\ddot{x} \mathbf{e}_x = (m\omega^2 - \kappa)x \mathbf{e}_x + (\phi^y - 2m\omega\dot{x}) \mathbf{e}_y + (\kappa h + \phi^z - mg) \mathbf{e}_z , \quad (\text{C.32})$$

da cui ricaviamo: l'equazione pura di movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) x , \quad (\text{C.33})$$

e due equazioni che determinano la reazione vincolare una volta noto il moto

$$\phi^y(t) = 2m\omega \frac{dx}{dt} , \quad (\text{C.34})$$

$$\phi^z = mg - \kappa h . \quad (\text{C.35})$$

La forma della soluzione generale dell'equazione lineare e omogenea a coefficienti costanti (C.33), dipende dal valore del rapporto  $m\omega^2/\kappa$ . Abbiamo 3 casi.

(1)  $m\omega^2/\kappa < 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono immaginarie pure e pertanto:

$$x(t) = A \sin \left( \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t \right) ,$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(2)  $m\omega^2/\kappa = 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono coincidenti e valgono 0. Pertanto:

$$x(t) = Ae^{0t} + Bte^{0t} = A + Bt ,$$



con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(3)  $m\omega^2/\kappa > 1$ . In tal caso le soluzioni del polinomio caratteristico sono reali e pertanto:

$$x(t) = A \exp\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\kappa}{m}} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\kappa}{m}} t\right),$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie.

(ii) Consideriamo il caso (1). La condizione iniziale  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'}(0) = \mathbf{0}$  fornisce immediatamente  $A = 0$ . Imponendo  $P(0) - O = x_0 \mathbf{e}_x$  con  $x_0 > 0$  si trova allora che:  $B = x_0$ . Pertanto, il moto con queste condizioni iniziali è

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t\right), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

La reazione vincolare al variare del tempo, usando (C.34)-(C.35), risulta essere

$$\phi = -2m\omega x_0 \sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m} - \omega^2} t\right) \mathbf{e}_y + (mg - \kappa h) \mathbf{e}_z.$$

(iii) e (iv) La seconda equazione cardinale fornisce nel caso in esame

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{S}} [(P(t) - O) \wedge m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)] = (P(t) - O) \wedge (-mg \mathbf{e}_z - \kappa(P(t) - H) + \phi(t)),$$

cioè

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{S}} [(P(t) - O) \wedge m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}(t)] = x(t) \mathbf{e}_x(t) \wedge (-mg \mathbf{e}_z - \kappa x(t) \mathbf{e}_x(t) + h\kappa \mathbf{e}_z + \phi^y(t) \mathbf{e}_y(t) + \phi^z \mathbf{e}_z).$$

La componente del secondo membro lungo l'asse  $z$  è, usando (C.34):

$$x(t)\phi^y(t) = 2m\omega x(t) \frac{dx}{dt} = m\omega \frac{d}{dt} x(t)^2.$$

Concludiamo che il momento angolare l'ungo l'asse  $z$  non si conserva eccetto nel caso in cui il moto non soddisfi  $x(t)^2 = c$  con  $c$  costante, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , cioè  $x(t) = \pm c$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Questo significa, dato che i moti sono funzioni continue, che gli unici moti ammissibili sono  $x(t) = x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Nel caso (1):  $m\omega^2/\kappa < 1$ , questo è possibile solo se  $A = B = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = 0$  e  $dx/dt(0) = 0$ .

Nel caso (2):  $m\omega^2/\kappa = 1$ , questo è possibile solo se  $A = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = x_0$  arbitrario e  $dx/dt(0) = 0$ .

Nel caso (3):  $m\omega^2/\kappa > 1$ , questo è possibile solo se  $A = B = 0$ . Pertanto deve essere in tal caso  $x(0) = 0$  e  $dx/dt(0) = 0$ .

**5.3.2. Soluzione.** (i) Consideriamo in teorema delle forze vive nel riferimento  $\mathcal{S}'$ . Esso si esprime come

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} \cdot \mathbf{F},$$

dove  $\mathbf{F}$  include tutte le forze vere e inerziali che sono viste agire su  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}'$   $\mathbf{F}$  è quindi pari al secondo membro di (C.32). In termini espliciti si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x \cdot ((m\omega^2 - \kappa)x \mathbf{e}_x + (\phi^y - 2m\omega\dot{x}) \mathbf{e}_y + (\kappa h + \phi^z - mg) \mathbf{e}_z) .$$

Notare che, in particolare, la forza di Coriolis ( $2m\omega\dot{x} \mathbf{e}_y$ ) e la reazione vincolare non dissipano potenza, dando contributo nullo al secondo membro dell'equazione di bilancio scritta sopra. In definitiva si ha:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = (m\omega^2 - \kappa) \frac{dx(t)}{dt} x(t) .$$

che può scriversi come:

$$\frac{d\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \kappa \frac{x^2}{2} - m\omega^2 \frac{x^2}{2} \right) .$$

In definitiva, sui moti è conservata la quantità :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}'} := \mathcal{T}|_{\mathcal{S}'} + \kappa \frac{x^2}{2} - m\omega^2 \frac{x^2}{2} .$$

Il secondo addendo a secondo membro è l'ordinaria energia potenziale della molla, mentre l'ultimo termine è un'energia potenziale attribuibile alla forza centrifuga, infatti:

$$-\nabla \left( -m\omega^2 \frac{x^2}{2} \right) = (m\omega^2)x \mathbf{e}_x = -m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (P(t) - O))$$

è proprio la forza centrifuga che appare in  $\mathcal{S}'$ .

(ii) Esaminiamo la situazione energetica nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}$  agiscono la forza della molla, la reazione vincolare e la forza di gravità. Le forze conservative sono quelle della molla e quella di gravità. L'energia potenziale gravitazionale  $mgz$  è però costante a causa del vincolo a cui è sottoposto il punto materiale. In definitiva, il teorema di bilancio dell'energia meccanica, definita come  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = (1/2)m\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + (1/2)\kappa(P - H)^2 + mgz$ , dice che deve essere:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}}{dt} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot (\phi^y \mathbf{e}_y(t) + \phi^z \mathbf{e}_z) ,$$

dove  $\phi^y(t) = 2m\omega\dot{x}(t)$  per la (C.34), mentre  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot \phi^z \mathbf{e}_z = 0$  dato che il moto avviene nel piano  $z = 0$ . Sappiamo anche che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (P(t) - O) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x(t) + \omega \mathbf{e}_z \wedge x(t) \mathbf{e}_x(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x(t) + \omega x(t) \mathbf{e}_y(t) .$$

In definitiva:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}}{dt} = (\dot{x}(t) \mathbf{e}_x(t) + \omega x(t) \mathbf{e}_y(t)) \cdot 2m\omega\dot{x}(t) \mathbf{e}_y(t) = m\omega^2 \frac{dx(t)^2}{dt} .$$

Otteniamo la stessa situazione già discussa nel precedente esercizio:  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  si conserva solo sui moti che soddisfano  $x(t) = \text{costante}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Le condizioni iniziali che forniscono tali moti sono state studiate nel precedente esercizio.

**5.3.3. Soluzione.** Lavoriamo in coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  adattate alla superficie cilindrica in modo ovvio. Ricordiamo che allora

$$P - O = z(P) \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r(P), \quad \mathbf{v}_P = \dot{z}(P) \mathbf{e}_z + R \dot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P),$$

$$\mathbf{a}_P = -R \dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + R \ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Il secondo principio della dinamica, per il punto  $P$ , è scritto come:

$$-MR \dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + MR \ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + M \ddot{z} \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) - \gamma(P - O) + \phi^r(P) \mathbf{e}_r(P),$$

che possiamo riscrivere

$$-MR \dot{\varphi}^2(P) \mathbf{e}_r(P) + MR \ddot{\varphi}(P) \mathbf{e}_\varphi(P) + M \ddot{z}(P) \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - (\kappa + \gamma)(P - O) + \kappa(Q - O) + \phi^r(P) \mathbf{e}_r(P). \quad (\text{C.36})$$

Per il punto  $Q$  avremo similmente:

$$-mR \dot{\varphi}^2(Q) \mathbf{e}_r(Q) + mR \ddot{\varphi}(Q) \mathbf{e}_\varphi(Q) + m \ddot{z}(Q) \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - (\kappa + \gamma)(Q - O) + \kappa(P - O) + \phi^r(Q) \mathbf{e}_r(Q). \quad (\text{C.37})$$

Per aver tutto nella base associata alle coordinate cilindriche, teniamo conto che vale:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Pertanto banalmente  $P - O = z(P) \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r(P)$ , mentre

$$\begin{aligned} Q - O &= z(Q) \mathbf{e}_z + R \mathbf{e}_r(Q) = z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos \varphi(Q) \mathbf{e}_x + R \sin \varphi(Q) \mathbf{e}_y = \\ &= z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos \varphi(Q) (\cos \varphi(P) \mathbf{e}_r(P) - \sin \varphi(P) \mathbf{e}_\varphi(P)) + R \sin \varphi(Q) (\sin \varphi(P) \mathbf{e}_r(P) + \cos \varphi(P) \mathbf{e}_\varphi(P)). \end{aligned}$$

Cioé :

$$\begin{aligned} Q - O &= z(Q) \mathbf{e}_z + R (\cos \varphi(Q) \cos \varphi(P) + \sin \varphi(Q) \sin \varphi(P)) \mathbf{e}_r(P) \\ &\quad + R (\sin \varphi(Q) \cos \varphi(P) - \cos \varphi(Q) \sin \varphi(P)) \mathbf{e}_\varphi(P), \end{aligned}$$

ossia:

$$Q - O = z(Q) \mathbf{e}_z + R \cos(\varphi(Q) - \varphi(P)) \mathbf{e}_r(P) + R \sin(\varphi(Q) - \varphi(P)) \mathbf{e}_\varphi(P)$$

Inserendo in (C.36), raccogliendo i singoli fattori dei tre versori  $\mathbf{e}_r(P)$ ,  $\mathbf{e}_\varphi(P)$ ,  $\mathbf{e}_z$  otteniamo le 3 equazioni, cambiando leggermente le notazioni:

$$MR \ddot{\varphi}_P = \kappa R \sin(\varphi_Q - \varphi_P), \quad (\text{C.38})$$

$$M \ddot{z}_P = -Mg - (\kappa + \gamma)z_P + \kappa z_Q, \quad (\text{C.39})$$

$$MR \dot{\varphi}_P^2 = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - \phi_P^r. \quad (\text{C.40})$$

Nello stesso modo, si ottengono (C.37) le equazioni per  $Q$ :

$$mR\ddot{\varphi}_Q = -\kappa R \sin(\varphi_Q - \varphi_P) , \quad (\text{C.41})$$

$$m\ddot{z}_Q = -Mg - (\kappa + \gamma)z_Q + \kappa z_P , \quad (\text{C.42})$$

$$mR\dot{\varphi}_Q^2 = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - \phi_Q^r . \quad (\text{C.43})$$

Abbiamo allora il sistema delle equazioni pure di movimento

$$\ddot{\varphi}_P = \frac{\kappa}{M} \sin(\varphi_Q - \varphi_P) , \quad (\text{C.44})$$

$$\ddot{\varphi}_Q = -\frac{\kappa}{m} \sin(\varphi_Q - \varphi_P) , \quad (\text{C.45})$$

$$\ddot{z}_P = -g - \frac{(\kappa + \gamma)}{M} z_P + \frac{\kappa}{M} z_Q , \quad (\text{C.46})$$

$$\ddot{z}_Q = -g - \frac{(\kappa + \gamma)}{m} z_Q + \frac{\kappa}{m} z_P , \quad (\text{C.47})$$

e le equazioni che determinano le reazioni vincolari su ogni moto:

$$\phi_P^r = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - MR\dot{\varphi}_P^2 . \quad (\text{C.48})$$

$$\phi_Q^r = (\gamma + \kappa)R - \kappa R \cos(\varphi_Q - \varphi_P) - mR\dot{\varphi}_Q^2 . \quad (\text{C.49})$$

Quindi se a  $t = 0$ ,  $\varphi_P = 0$ ,  $\varphi_Q = \pi/2$  e  $\dot{\varphi}_P = \dot{\varphi}_Q = 0$ , indipendentemente dai valori di  $z_P$  e  $z_Q$  le reazioni vincolari valgono  $\phi_P = (\gamma + \kappa)R \mathbf{e}_x$  e  $\phi_Q = (\gamma + \kappa)R \mathbf{e}_y$ .

Per concludere proviamo che la quantità  $M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q$  si conserva sui moti. La prova si può ottenere direttamente dalle equazioni (C.44) e (C.45), moltiplicando ambo i membri delle prima equazione per  $M$ , quelli della seconda per  $m$  e sommando membro a membro le identità ottenute in tal modo. In tal caso si ricava che  $M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q$  ha derivata temporale nulla sulle soluzioni delle equazioni del moto, ed è pertanto una costante del moto. Una via alternativa è quella di notare che  $MR\dot{\varphi}_P + mR\dot{\varphi}_Q$  altro non è che la componente lungo l'asse  $z$  del momento angolare totale del sistema rispetto al polo  $O$  e che, d'altra parte, il momento totale delle forze esterne applicate sul sistema non ha componenti lungo l'asse  $z$ . Di conseguenza, la seconda equazione cardinale assicura la conservazione di  $R(M\dot{\varphi}_P + m\dot{\varphi}_Q)$ .

## C.6 Esercizi del Capitolo 6.

### Esercizi 6.1

**6.1.1. Suggestimento.** Scegliere una terna di assi solidale con il sistema complessivo (quadrato, asta, punto  $P$ ) con origine  $O$ , un asse che prolunga il segmento  $C - O$  ed un un asse, con versore  $\mathbf{n}$ , perpendicolare al piano del quadrato (il terzo asse completa la base a terna ortonormale destrorsa). Il vettore  $\omega_S|_{\mathcal{S}}$  del sistema rigido è allora  $\dot{\theta}\mathbf{n}$  rispetto a tale asse. Le equazioni del moto si ottengono dalla seconda equazione cardinale riferita al polo  $O$ . Osservare che la terna solidale precedentemente indicata è una terna principale d'inerzia per il sistema rigido

dato dall'unione del quadrato e dell'asta. Il contributo al tensore d'inerzia oppure al momento angolare totale, dovuto al punto  $P$ , si calcola direttamente. L'equazione del moto deve avere quindi la forma (lasciamo al lettore di precisare il significato di  $I$ ,  $A$  e  $B$ )

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + m \|P - O\|^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = A \sin \theta + B \sin(\theta + \beta)$$

dove  $\beta$  è l'angolo tra  $P - O$  e  $C - O$ . Un integrale primo è ovviamente l'energia meccanica totale del sistema.

**6.1.2.** Il sistema presenta due gradi di libertà che indichiamo con  $s$  e  $\varphi$ . La prima coordinata è la distanza con segno sulla guida percorsa dal punto geometrico di contatto  $C$  tra la guida ed il disco e valutata a partire dalla configurazione al tempo iniziale, il verso positivo lo sceglieremo convenzionalmente nella direzione di abbassamento delle quota. L'angolo  $\varphi$  è l'angolo formato da un fissato raggio del disco e la retta passante per il punto di contatto  $C$  tra disco e guida e normale alla guida. Il verso di  $\varphi$  lo fissiamo in modo tale che cresca quando  $s$  cresce. Il valore di  $\varphi$  è nullo quando  $s = 0$  nella configurazione iniziale. Il vincolo di rotolamento impone, al solito, che  $s = R\varphi$ . Durante il rotolamento i gradi di libertà si ridurranno ad uno solo. Tuttavia non sappiamo, a priori, quando si ha rotolamento per cui è necessario lavorare con due gradi di libertà. La prima equazione cardinale della dinamica ha la forma (il tutto riferito al sistema inerziale  $\mathcal{I}$  nel quale la guida è in quiete e con asse  $\mathbf{e}_z$  verticale)

$$mg \mathbf{e}_z + \phi_C = m \mathbf{a}_G \quad \text{cioè} \quad mg \sin \alpha + \phi^t = m \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad mg \cos \alpha + \phi^n = 0. \quad (\text{C.50})$$

dove abbiamo decomposto  $\phi_C$  nelle sue componenti normale alla guida  $\phi^n$  e tangente alla guida  $\phi^t$  e  $G$  indica il centro di massa del disco, che coincide con il suo centro geometrico. La seconda equazione cardinale, riferita a  $G$  prende la forma:

$$\mathbf{M}_G = I_G \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge I_G(\boldsymbol{\omega}) + m(G - C) \wedge \mathbf{a}_G \quad \text{cioè} \quad mgR \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (\text{C.51})$$

A questo punto consideriamo le possibili situazioni fisiche. (1) Nel caso in cui vale il puro rotolamento deve accadere che  $s = R d\varphi/dt$ . In questo modo la (C.51) fornisce l'equazione pura di movimento:

$$\frac{3}{2} \frac{d^2 s}{dt^2} = g \sin \alpha \quad \text{cioè} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad (\text{C.52})$$

mentre le (C.50) individuano le componenti  $\phi^t$  e  $\phi^n$  della reazione vincolare nel punto  $C$ :

$$\varphi^t = \frac{1}{3} mg \sin \alpha, \quad \varphi^n = -mg \cos \alpha.$$

Di conseguenza, dato il coefficiente d'attrito statico  $\mu$ , il puro rotolamento è possibile se e solo se risulta essere soddisfatta la disuguaglianza  $|\varphi^t| \leq \mu |\varphi^n|$ , che significa:

$$\frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \quad \text{cioè} \quad \tan \alpha \leq 3\mu. \quad (\text{C.53})$$

Sotto tale ipotesi la soluzione della (C.52) fornisce il moto del sistema.

(2) Se la condizione (C.53) è violata, il punto di contatto  $C$  striscia sulla guida (cioè non ha velocità nulla rispetto alla guida). In questo caso, la caratterizzazione costitutiva (dove  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla guida e diretto nel senso di  $s$  crescente):

$$\phi^t \mathbf{t} = -f|\phi^n| \frac{\mathbf{v}_p}{\|\mathbf{v}_p\|}, \quad (\text{C.54})$$

insieme all'ultima equazione in (C.50), consente di esprimere le componenti della reazione vincolare nella forma:

$$\varphi^n = -mg \cos \alpha, \quad \varphi^t = -f|-mg \cos \alpha| = -fmg \cos \alpha, \quad (\text{C.55})$$

dove si è tenuto conto del fatto che, in ogni caso, vale  $ds/dt > 0$ . La penultima equazione in (C.50) insieme alla (C.51) forniscono le equazioni pure di movimento:

$$g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad 2fg \cos \alpha = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (\text{C.56})$$

L'integrazione di queste equazioni fornisce la soluzione del problema del moto se  $\tan \alpha > 3\mu$ .

## C.7 Esercizi del Capitolo 7.

### Esercizi 7.1

7.1.1. *Soluzione.* Le equazioni differenziali che determinano il moto sono

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{2\kappa}{m} x^2, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{2\kappa}{m} y^2, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{4\kappa}{m} z^3. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Consideriamo la soluzione massimale con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$  dove  $z_0 > 0$ . Sappiamo che tale soluzione esiste ed è unica in quanto ricadiamo nelle ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Le prime due equazioni scritte sopra ammettono come unica soluzione, rispettivamente,  $x(t) = 0$  e  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . La (C.57) non è integrabile in forma esplicita. Tuttavia si possono ottenere informazioni, sufficienti per dimostrare quanto voluto, usando un opportuno integrale primo. Moltiplicando per  $dz/dt$  ambo membri di (C.57) e raccogliendo a primo membro, con qualche banale passaggio si ottiene:

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{dz(t)}{dt} \right)^2 - 2\frac{\kappa}{m} z(t)^4 \right] = 0.$$

Di conseguenza

$$2\frac{\kappa}{m}z_0^4 = \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2 - 2\frac{\kappa}{m}z(t)^4$$

da cui:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \pm \sqrt{2\frac{\kappa}{m} [z(t)^4 - z_0^4]}.$$

Quest'equazione può essere integrata<sup>1</sup> in:

$$t(z) = \pm \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{2\frac{\kappa}{m} [\zeta^4 - z_0^4]}}. \quad (\text{C.58})$$

Fissato il segno, dato che l'integrando è strettamente positivo, la funzione può essere invertita ottenendo due funzioni monotone:  $z = z_{\pm}(t)$ .  $z_+$  è definita per  $t \geq 0$ , mentre  $z_-$  è definita per  $t < 0$  e  $z$  corre, in entrambi i casi, in  $[z_0, +\infty)$ . La soluzione massimale, che sappiamo esistere ed essere unica, deve coincidere, a tratti, con le funzioni  $z_{\pm}$ . Essa dunque è definita come:  $z := z_-(t)$  se  $t < 0$  e  $z = z_+(t)$  se  $t \geq 0$ . Non è completa in quanto l'integrale a secondo membro in (C.58) converge a qualche valore  $\omega \in \mathbb{R}$  per  $z \rightarrow +\infty$ , e qualche valore  $\alpha \in \mathbb{R}$  per  $z \rightarrow -\infty$ . Questo è dovuto al fatto che, per  $z \rightarrow \pm\infty$ :

$$\frac{1}{\sqrt{z^4 - z_0^4}} = O(z^{-2}).$$

Consideriamo una palla aperta  $B_{\epsilon}$  in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  centrata nell'origine,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , e di raggio  $\epsilon > 0$ . Non è possibile trovare alcun intorno aperto  $U$  dell'origine di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  tale che, tutte le condizioni iniziali  $V$  producano soluzioni massimali con orbite contenute in  $B_{\epsilon}$ . Possiamo infatti scegliere come condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, z_0)$  e  $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$  dove  $z_0 > 0$  è sufficientemente piccolo da ricadere in  $V$ . La soluzione massimale associata fuoriesce da  $B_{\epsilon}$  in un tempo finito, dato che la componente  $z(t)$  della soluzione è crescente e ammette limite  $+\infty$  per  $t \rightarrow \omega$ . La stessa cosa accade considerando l'andamento a  $t \rightarrow \alpha$ :  $z(t) \rightarrow -\infty$ . Concludiamo che la configurazione di equilibrio data dall'origine di  $\mathbb{R}^3$  non è stabile nel passato e nel futuro.

## C.8 Esercizi del Capitolo 8.

### Esercizi 8.1

---

<sup>1</sup>Si osservi che l'integrale converge per  $z \rightarrow z_0$  in quanto:

$$\frac{1}{\sqrt{z^4 - z_0^4}} = \frac{1}{\sqrt{z - z_0} \sqrt{(z - z_0)(z^2 + z_0^2)}}$$

e la singolarità è dovuta solo al primo fattore al secondo membro che è integrabile.

8.1.1. *Soluzione.* Notiamo preventivamente che il sistema  $\mathcal{S}$  è inerziale per cui dobbiamo considerare solo forze vere, inoltre i vincoli sono olonomi ed ideali: possiamo applicare il formalismo lagrangiano.

(a). Usando le coordinate libere  $\phi_P$  e  $\phi_Q$ , le posizione dei punti  $P$  e  $Q$  sono determinate, nel riferimento  $\mathcal{S}$ , dai vettori posizione:

$$\mathbf{x}_P = R \cos \phi_P \mathbf{e}_x + R \sin \phi_P \mathbf{e}_y + R \phi_P \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.59})$$

$$\mathbf{x}_Q = R \cos \phi_Q \mathbf{e}_x + R \sin \phi_Q \mathbf{e}_y + R \phi_Q \mathbf{e}_z. \quad (\text{C.60})$$

Da cui ricaviamo le velocità (rispetto a  $\mathcal{S}$ ):

$$\mathbf{v}_P = \dot{\phi}_P (-R \sin \phi_P \mathbf{e}_x + R \cos \phi_P \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z), \quad (\text{C.61})$$

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\phi}_Q (-R \sin \phi_Q \mathbf{e}_x + R \cos \phi_Q \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z). \quad (\text{C.62})$$

Dalle due ultime formule possiamo scrivere l'energia cinetica  $\mathcal{T} = \frac{m}{2} \mathbf{v}_P^2 + \frac{m}{2} \mathbf{v}_Q^2$  riferita a  $\mathcal{S}$ , in funzione delle coordinate libere  $\phi_P, \phi_Q$  e delle associate coordinate puntate  $\dot{\phi}_P, \dot{\phi}_Q$ :

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \dot{\phi}_P^2 (\sin^2 \phi_P + \cos^2 \phi_P + 1) + \frac{mR^2}{2} \dot{\phi}_Q^2 (\sin^2 \phi_Q + \cos^2 \phi_Q + 1).$$

Con ovvie semplificazioni si trova:

$$\mathcal{T} = mR^2 (\dot{\phi}_P^2 + \dot{\phi}_Q^2).$$

Consideriamo inizialmente il caso  $\gamma = 0$ . In questo caso tutte le forze attive sono conservative e di conseguenza il sistema ammette lagrangiana,  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{U} = \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  è la somma delle energie potenziale di ogni forza conservativa agente sul sistema. In pratica abbiamo un contributo a  $\mathcal{U}$  dovuto all'energia potenziale gravitazionale:

$$mgz_P + mgz_Q = mgR(\phi_P + \phi_Q)$$

ed un contributo dovuto all'energia potenziale della molla tra  $P$  e  $Q$ :

$$\frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 = \frac{\kappa R^2}{2} [(\cos \phi_P - \cos \phi_Q) \mathbf{e}_x + (\sin \phi_P - \sin \phi_Q) \mathbf{e}_y + (\phi_P - \phi_Q) \mathbf{e}_z]^2.$$

Quest'ultimo contributo, eseguendo i quadrati, si semplifica in:

$$\frac{\kappa R^2}{2} [2(1 - \cos \phi_P \cos \phi_Q - \sin \phi_P \sin \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)^2] = \frac{\kappa R^2}{2} [2(1 - \cos(\phi_P - \phi_Q)) + (\phi_P - \phi_Q)^2].$$

In definitiva:

$$\mathcal{U} = mgR(\phi_P + \phi_Q) + \kappa R^2 \left[ 1 - \cos(\phi_P - \phi_Q) + \frac{(\phi_P - \phi_Q)^2}{2} \right].$$



La lagrangiana del sistema, nel caso  $\gamma = 0$ , è data dunque da:

$$\mathcal{L} = mR^2 (\dot{\phi}_P^2 + \dot{\phi}_Q^2) - mgR(\phi_P + \phi_Q) - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos(\phi_P - \phi_Q) + \frac{(\phi_P - \phi_Q)^2}{2} \right]. \quad (\text{C.63})$$

Nel caso  $\gamma = 0$ , la parte non banale del sistema di equazioni differenziali di E-L prende la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q.$$

La parte banale del sistema di equazioni è, ovviamente, quella che sancisce che, sul moto, le variabili puntate sono le derivate temporali di quelle non puntate. Nel caso in esame si trova allora il sistema in forma definitiva (del secondo ordine):

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_P}{dt^2} = -mgR - \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)], \quad (\text{C.64})$$

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_Q}{dt^2} = -mgR + \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)]. \quad (\text{C.65})$$

Passiamo al caso in cui sia presente la forza viscosa agente sul solo punto  $P$ . Tale forza non ammette potenziale non essendo posizionale e quindi nemmeno conservativa. Pertanto dobbiamo usare la formulazione delle equazioni di E-L in cui appaiono esplicitamente le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q.$$

Tuttavia, tra le forze agenti sui due punti, solo la forza viscosa non ammette potenziale, per cui possiamo semplificare le equazioni di sopra come, usando la stessa lagrangiana di prima:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k^{(visc)}, \quad \text{dove } q^1 = \phi_P \text{ e } q^2 = \phi_Q, \quad (\text{C.66})$$

dove  $\mathcal{Q}_k^{(visc)}$  sono le componenti lagrangiane della sola forza viscosa. Le forze conservative sono state inglobate a primo membro nel termine  $-\mathcal{U}$  presente nella lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Nelle nostre ipotesi abbiamo che

$$\mathcal{Q}_k^{(visc)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q^k} \cdot \mathbf{F}_i^{(visc)} = \frac{\partial \mathbf{x}_R}{\partial q^k} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P).$$

In definitiva usando (C.59) e (C.59), otteniamo che nel calcolo delle componenti lagrangiane della forza viscosa, solo la componente con  $k = 1$  (cioè relativa a  $\phi_P$ ) è non nulla. Essa è data da:

$$\mathcal{Q}_1^{(visc)} = -\gamma \left[ \frac{\partial}{\partial \phi_P} (R \cos \phi_P \mathbf{e}_x + R \sin \phi_P \mathbf{e}_y + R \phi_P \mathbf{e}_z) \right] \cdot \dot{\phi}_P (-R \sin \phi_P \mathbf{e}_x + R \cos \phi_P \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z).$$

Con qualche calcolo si ha l'espressione finale:

$$\mathcal{Q}_1^{(visc)} = -2\gamma R^2 \dot{\phi}_P .$$

In questo caso le equazioni di E-L diventano quindi, esplicitando (C.66):

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_P}{dt^2} = mgR - \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)] - 2\gamma R^2 \frac{d\phi_P}{dt} , \quad (C.67)$$

$$2mR^2 \frac{d^2 \phi_Q}{dt^2} = mgR + \kappa R^2 [\sin(\phi_P - \phi_Q) + (\phi_P - \phi_Q)] . \quad (C.68)$$

(b). Il cambiamento di variabili  $\theta = \phi_P - \phi_Q$ ,  $\tau = \phi_P + \phi_Q$  è biiettivo e bidifferenziabile. Le formule inverse sono:  $\phi_P = (\theta + \tau)/2$  e  $\phi_Q = (\tau - \theta)/2$  da cui è evidente che, variando la coordinata  $\tau$  e tenendo fissa la coordinata  $\theta$ , si produce una rotazione rigida del sistema di punti di un angolo  $\tau/2$  composta con una traslazione lungo l'asse  $z$  di  $R\tau/2$ .

Dalle leggi di trasformazione di coordinate scritte sopra si ha che:  $\dot{\phi}_P = (\dot{\theta} + \dot{\tau})/2$  e  $\dot{\phi}_Q = (\dot{\tau} - \dot{\theta})/2$ . Sostituendo tutto nell'espressione (C.63) troviamo infine l'espressione della lagrangiana in funzione delle nuove variabili:

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} ((\dot{\theta} + \dot{\tau})^2 + (\dot{\tau} - \dot{\theta})^2) + mgR\tau - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos \theta + \frac{\theta^2}{2} \right] ,$$

ossia

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\tau}^2) + mgR\tau - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos \theta + \frac{\theta^2}{2} \right] .$$

Nel caso  $g = 0$  la lagrangiana si riduce a:

$$\mathcal{L}(\theta, \tau, \dot{\theta}, \dot{\tau}) = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\tau}^2) - \kappa R^2 \left[ 1 - \cos \theta + \frac{\theta^2}{2} \right] .$$

In questo caso l'equazione di E-L per la coordinata  $\tau$ , visto che  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\tau$  risulta essere:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} \right) = 0 .$$

In altre parole, la grandezza:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = mR^2 \frac{d\tau}{dt} ,$$

si conserva nel tempo sul moto (cioè sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange).

Tornando alle coordinate libere  $\phi_P$  e  $\phi_Q$  la grandezza  $L_z$  assume forma:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tau}} = mR^2 \left( \frac{d\phi_P}{dt} + \frac{d\phi_Q}{dt} \right) .$$

Consideriamo ora il momento angolare del sistema di punti nel riferimento  $\mathcal{I}$  rispetto al polo  $O$ :

$$\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{I}} = (P - O) \wedge m\mathbf{v}_P + (Q - O) \wedge m\mathbf{v}_Q .$$

Il calcolo esplicito, usando (C.59), (C.60), (C.61) e (C.62), fornisce immediatamente che

$$\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\Gamma}_O|_{\mathcal{J}} = mR^2 \left( \frac{d\phi_P}{dt} + \frac{d\phi_Q}{dt} \right) .$$

Concludiamo, di conseguenza, che la grandezza conservata  $I$  non è altro che la componente lungo l'asse  $z$  momento angolare del sistema di punti nel riferimento  $\mathcal{J}$  rispetto al polo  $O$ .

**8.1.2. Soluzione.** Notiamo preventivamente che il sistema  $\mathcal{J}$  è inerziale per cui dobbiamo considerare solo forze vere, inoltre i vincoli sono olonomi ed ideali: possiamo applicare il formalismo lagrangiano.

(a) Determiniamo la lagrangiana del sistema, che indicheremo con  $\mathcal{L}$  sottointendendo il riferimento  $\mathcal{J}$ . Dato che tutte le forze attive sono conservative la lagrangiana avrà forma  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{T}$  è l'energia cinetica riferita ad  $\mathcal{J}$ , mentre  $\mathcal{U}$  è l'energia potenziale totale riferita allo stesso sistema di riferimento. Valutiamo per prima l'energia cinetica. Scriviamo a tal fine la posizione e la velocità dei due punti in funzione delle coordinate libere  $r_1, \varphi_1$  e  $r_2, \varphi_2$  e delle associate coordinate puntate. Tenendo conto che, data l'equazione del cono, la quota  $z_1$  di  $P_1$  coincide con il raggio  $r_1$  che ha lo stesso punto in coordinate polari piane nel piano  $z = 0$ , si ha banalmente che

$$P_1 - O = r_1(\cos \varphi_1 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) .$$

e similmente:

$$P_2 - O = r_2(\cos \varphi_2 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) .$$

Ora lavoriamo solo con il punto  $P_1$ . Assumendo che le coordinate libere  $r_1, \varphi_1$  dipendano dal tempo, derivando nel tempo e sostituendo con le variabili puntate le derivate temporali delle coordinate libere, si ha:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1(\cos \varphi_1 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) + r_1 \dot{\varphi}_1(-\sin \varphi_1 \mathbf{e}_x + \cos \varphi_1 \mathbf{e}_y) ,$$

da cui, quadrando e tenendo conto dell'identità  $\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1$  troviamo:

$$\mathbf{v}_1^2 = 2\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Analogamente deve essere:

$$\mathbf{v}_2^2 = 2\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 .$$

Mettendo tutto insieme, l'energia cinetica si scrive:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) . \quad (\text{C.69})$$

L'energia potenziale è data dalla somma delle energie potenziali gravitazionali  $mgz_1 + mgz_2$  più dall'energia potenziale della molla:  $\kappa(P_1 - R_2)^2/2$ . In particolare, dall'espressione trovata sopra per  $P_1 - O$  e  $P_2 - O$  si ha:

$$(P_1 - P_2)^2 = (r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 ,$$

da cui, sviluppando i quadrati e tenendo conto dell'identità :  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  si ricava:

$$(P_1 - P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

In definitiva:

$$\mathcal{U}(P_1, P_2) = mg(r_1 + r_2) + \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{C.70})$$

da cui, tenendo conto di (C.69):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) - mg(r_1 + r_2) - \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) . \quad (\text{C.71})$$

Con questa lagrangiana le equazioni del moto di Eulero-Lagrange risultano essere

$$2m \frac{d^2 r_1}{dt^2} = mr_1 \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 - mg - k(r_1 - r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{C.72})$$

$$2m \frac{d^2 r_2}{dt^2} = mr_2 \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2 - mg - k(r_2 - r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) , \quad (\text{C.73})$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r_1^2 \frac{d\varphi_1}{dt} \right) = -\kappa r_1 r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (\text{C.74})$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r_2^2 \frac{d\varphi_2}{dt} \right) = -\kappa r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) . \quad (\text{C.75})$$

(b) Vale  $\Phi := (\varphi_1 - \varphi_2)/2$  e  $\Theta = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  da cui  $\varphi_1 = \Phi + \Theta$ ,  $\varphi_2 = \Theta - \Phi$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\Phi} + \dot{\Theta}$ ,  $\dot{\varphi}_2 = \dot{\Theta} - \dot{\Phi}$ . La lagrangiana (C.71) espressa nelle nuove variabili assume pertanto la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m}{2} [2(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + (r_1^2 + r_2^2) (\dot{\Phi}^2 + \dot{\Theta}^2) + 2(r_1^2 - r_2^2) \dot{\Phi} \dot{\Theta}] \\ & - mg(r_1 + r_2) - \frac{\kappa}{2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos 2\Phi) . \end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $\Theta$  e pertanto la grandezza  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Theta}$  si conserva sui moti del sistema in virtù delle equazioni di Eulero-Lagrange. Tornando nelle coordinate iniziali:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{m}{2} 2 [(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) \dot{\Theta} + (\dot{r}_1^2 - \dot{r}_2^2) \dot{\Phi}] = \frac{m}{2} [(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + (\dot{r}_1^2 - \dot{r}_2^2)(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)] .$$

Sviluppando l'espressione si ha infine, sul moto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = mr_1^2 \frac{d\varphi_1}{dt} + mr_2^2 \frac{d\varphi_2}{dt} .$$

Con banali passaggi di calcolo vettoriale, esprimendo  $P_i - O$  e le velocità  $\mathbf{v}_i$  in funzione delle coordinate libere, come determinato all'inizio dell'esercizio, si verifica facilmente che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{J}} ,$$

dove:

$$\mathbf{\Gamma}_0|_{\mathcal{J}} = (P_1 - 0) \wedge m\mathbf{v}_1 + (P_2 - 0) \wedge m\mathbf{v}_2$$

è il momento angolare totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{J}$  rispetto al polo  $O$ .

**8.1.3. Soluzione.** (a) Usiamo come coordinata libera la componente  $x$  del vettore  $P - O$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ . Dato che nel riferimento inerziale non compaiono forze non conservative (esclusa ovviamente la reazione vincolare  $\phi$ ), è conveniente usare la lagrangiana rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} - \mathcal{U}|_{\hat{\mathcal{J}}}$ . Ricaviamo l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_P^2|_{\hat{\mathcal{J}}}$  espressa in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ . La velocità nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$  è data banalmente dalla derivata nel tempo di:

$$P - O = x(t) \mathbf{e}_x + \sinh x(t) \mathbf{e}_z ,$$

tenendo conto che i versori  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_z$  sono fissi in tale riferimento. Abbiamo allora che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z .$$

La velocità nel riferimento  $\hat{\mathcal{J}}$  si ottiene allora come

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\hat{\mathcal{J}}} \wedge (P - O) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z) .$$

Svolgendo il calcolo otteniamo:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z . \quad (\text{C.76})$$

Otteniamo di conseguenza che:

$$\mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \frac{m}{2} \Omega^2 x^2 . \quad (\text{C.77})$$

Abbiamo due contributi all'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\hat{\mathcal{J}}}$ . Uno è dovuto alla forza di gravità:  $mgz$  e l'altro è dovuto alla forza della molla:  $(\kappa/2)x^2$ . In definitiva:

$$\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) - mg \sinh x - \frac{1}{2}(\kappa - m\Omega^2)x^2 . \quad (\text{C.78})$$

Con questa lagrangiana abbiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + \cosh^2 x) , \quad \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial x} = m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x .$$

Per cui, le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono:

$$\frac{d}{dt} m \left( \frac{dx}{dt} (1 + \cosh^2 x) \right) = m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x$$

che forniscono:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} (1 + \cosh^2 x) + 2m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x = m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x + (m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x .$$

La forma finale delle equazioni di Eulero-Lagrange è pertanto:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(m\Omega^2 - \kappa)x - mg \cosh x - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x} \quad (\text{C.79})$$

(b) Direttamente dalla definizione di  $\mathcal{H}$  abbiamo che:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{d\dot{x}}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}.$$

Usando le equazioni di Eulero-Lagrange possiamo riscrivere l'identità di sopra come:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{d\dot{x}}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}.$$

Aggiungendo e togliendo  $\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}/\partial t$  si ottiene infine:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \frac{d\dot{x}}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial t}.$$

D'altra parte, dato che  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}(t, x, \dot{x})$  deve anche essere:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} = \frac{d\dot{x}}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}}{\partial t}.$$

Inserendo questa identità nell'espressione trovata sopra otteniamo infine che, su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange vale l'identità notevole:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, x(t), \dot{x}(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

Dato che, nel caso in esame da (C.78) è evidente che  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}$  non dipende esplicitamente dal tempo, si ha

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t, x(t), \dot{x}(t)) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$

e pertanto su ogni soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $\mathcal{H}$  è una costante. Passiamo a stabilire il significato fisico di  $\mathcal{H}$ , che calcolato esplicitamente da (C.78) fornisce subito:

$$\mathcal{H}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + mg \sinh x + \frac{1}{2} (\kappa - m\Omega^2) x^2. \quad (\text{C.80})$$

Vogliamo dimostrare, per verifica diretta che  $\mathcal{H}$  è l'energia meccanica totale valutata nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ . Nel riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$  non si conserva l'energia meccanica: per mantenere il sistema in rotazione bisogna fornire lavoro dall'esterno. Tale lavoro è dissipato dalla reazione vincolare  $\phi$ . Si osservi infatti che la reazione vincolare  $\phi$  in generale compie lavoro nel riferimento  $\hat{\mathcal{J}}$  dato che essa è normale alla curva, ma la direzione della curva non è quella della velocità del punto materiale, visto che la curva stessa è in movimento in  $\hat{\mathcal{J}}$ . Valutiamo la

situazione nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ , tenendo conto della presenza delle due forze inerziali di Coriolis  $-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  e quella centrifuga  $-m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}} \wedge (P - O))$  (le altre forze inerziali sono assenti dato che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}}$  è costante nel tempo). Nel riferimento non inerziale, la forza  $\phi$  non compie lavoro in quanto, per costruzione, è sempre perpendicolare alla velocità del punto materiale  $P$  in quel riferimento. Le altre forze agenti sono quella di gravità che è conservativa, quella della molla che è conservativa, quella di Coriolis che non compie lavoro (dato che per definizione è perpendicolare alla velocità), infine c'è ancora la forza centrifuga che, come vedremo è conservativa. L'energia meccanica totale nel sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ , data dalla somma dell'energia cinetica e delle tre forme di energia potenziale suddette è quindi una costante del moto. Mostriamo che coincide con  $\mathcal{H}$ . Scriviamo l'equazione del moto in forma Newtoniana nel riferimento  $\mathcal{J}$ . Se  $\mathbf{x} = P - O = x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z$  e quindi  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \cosh x \mathbf{e}_z$ , abbiamo che:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\mathcal{J}} \mathbf{x} = -mg \mathbf{e}_z - \kappa x \mathbf{e}_x - m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dx}{dt} \cosh x \mathbf{e}_z \right) - m\Omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z)) + \phi.$$

Sviluppando entrambi i membri troviamo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x \mathbf{e}_x + \sinh x \mathbf{e}_z) = -mg \mathbf{e}_z - \kappa x \mathbf{e}_x + m\Omega^2 x \mathbf{e}_x - m\Omega \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_y + \phi. \quad (\text{C.81})$$

Le due ultime forze non compiono lavoro essendo perpendicolari alla velocità (che è sempre diretta lungo  $\mathbf{e}_x$ ). La forza centrifuga si ottiene derivando in  $x$  e cambiando segno all'energia potenziale centrifuga  $-\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$ , che corrisponde a quella di una molla con costante elastica negativa. In base al teorema di conservazione dell'energia meccanica, si deve conservare nel tempo, su ogni moto, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale totale. L'energia cinetica in  $\mathcal{J}$  vale

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + \cosh^2 x),$$

pertanto l'integrale primo suddetto ha la forma:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + \cosh^2 x) + mg \sinh x + \frac{1}{2} (\kappa - m\Omega^2) x^2.$$

Questa è, su ogni moto, proprio l'espressione trovata per  $\mathcal{H}$  (C.80).

(c) Direttamente da (C.81) abbiamo che:

$$\phi^x = m \frac{d^2 x}{dt^2} + (\kappa - m\Omega^2) x.$$

Usando (C.79) per esplicitare  $m d^2 x / dt^2$  in funzione di  $x$  e della sua derivata prima nel tempo, si trova su ogni moto:

$$\phi^x(x, \dot{x}) = (\kappa - m\Omega^2) x + \frac{(m\Omega^2 - \kappa) x - mg \cosh x - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x}$$

cioè, in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\phi^x(x, \dot{x}) = \frac{(\kappa - m\Omega^2)x \cosh^2 x - mg \cosh x - m\dot{x}^2 \sinh x \cosh x}{1 + \cosh^2 x}. \quad (\text{C.82})$$

(d) Dato che  $\mathcal{H}$  si conserva nel tempo, per il moto con condizioni iniziali  $x(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) = v > 0$  deve essere:

$$\mathcal{H}(0, v) = \mathcal{H}(x(t), \dot{x}(t)), \quad \text{per ogni } t.$$

Di conseguenza, direttamente da (C.80) troviamo che deve essere

$$mv^2 = \frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 (1 + \cosh^2 x(t)) + mg \sinh x(t) + \frac{1}{2} (\kappa - m\Omega^2) x(t)^2,$$

da cui:

$$m\dot{x}(t)^2 = \frac{2mv^2 - 2mg \sinh x(t) + (m\Omega^2 - \kappa)x(t)^2}{1 + \cosh^2 x(t)}.$$

Sostituendo in (C.82) si ricava l'espressione richiesta dal quesito:

$$\begin{aligned} \phi^x(x(t)) &= \frac{(\kappa - m\Omega^2)x(t) \cosh^2 x(t) - mg \cosh x(t)}{1 + \cosh^2 x(t)} \\ &+ \frac{2mg \sinh x(t) - 2mv^2 + (\kappa - m\Omega^2)x(t)^2}{(1 + \cosh^2 x(t))^2} \sinh x(t) \cosh x(t) \end{aligned}$$

8.1.4. *Soluzione.* (a) La Lagrangiana riferita al riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$ , tenendo conto che tutte le forze attive sono conservative, ha la forma generale, con ovvie notazioni:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_P^2 + \mathbf{v}_Q^2) - \mathcal{U}. \quad (\text{C.83})$$

Le velocità  $\mathbf{v}_P$  e  $\mathbf{v}_Q$  sono riferite al sistema  $\hat{\mathcal{J}}$ . Dobbiamo scrivere tutte le grandezze che appaiono nella lagrangiana di sopra in funzione di  $\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}$ . Cominciamo con il notare che  $Q - O = Q - P + P - O$  e ancora

$$P - O = L(\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_z), \quad Q - P = L(\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_z). \quad (\text{C.84})$$

Di conseguenza

$$Q - O = L[(\cos \phi + \cos \psi) \mathbf{e}_x + (\sin \phi + \sin \psi) \mathbf{e}_z]. \quad (\text{C.85})$$

Queste espressioni permettono di esplicitare l'espressione di

$$\mathcal{U} = mg(z_P + z_Q) + \frac{k}{2} (Q - O)^2$$

in funzione degli angoli, ottenendo:

$$\mathcal{U}(\phi, \psi) = mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + \frac{kL^2}{2} ((\cos \phi + \cos \psi)^2 + (\sin \phi + \sin \psi)^2),$$



da cui:

$$\mathcal{U}(\phi, \psi) = mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)) . \quad (\text{C.86})$$

Le espressioni calcolate sopra per  $P-O$  e  $Q-O$  permettono anche di calcolare le velocità di  $P$  e  $Q$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  in funzione di  $\phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}$ . Le velocità nel riferimento  $\hat{\mathcal{S}}$  si ottengono usando le solite leggi di trasformazione cinematica, tenendo conto del moto relativo dei due riferimenti. Assumendo che gli angoli varino su un moto del sistema e derivando nel tempo  $P-O$  e  $Q-O$  in (C.84) e (C.85), tenendo conto che i versori sono costanti nel tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$  otteniamo:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = L(-\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_x + \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_z) , \quad (\text{C.87})$$

$$\mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} = -L(\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{e}_x + L(\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{e}_z . \quad (\text{C.88})$$

La velocità di  $P$  e  $Q$  in  $\hat{\mathcal{S}}$  si ottengono dalle formule:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\hat{\mathcal{S}}} \wedge (P-O) = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P-O) , \quad \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (Q-O) .$$

Il calcolo esplicito, facendo uso di (C.84), (C.85), (C.87) e (C.88), produce facilmente:

$$\mathbf{v}_P = -\dot{\phi}L \sin \phi \mathbf{e}_x + \Omega L \cos \phi \mathbf{e}_y + L\dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_z , \quad (\text{C.89})$$

$$\mathbf{v}_Q = -L(\dot{\phi} \sin \phi + \dot{\psi} \sin \psi) \mathbf{e}_x + \Omega L(\cos \phi + \cos \psi) \mathbf{e}_y + L(\dot{\phi} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \psi) \mathbf{e}_z . \quad (\text{C.90})$$

Sostituendo queste espressioni per le velocità nel secondo membro di (C.83) ed usando anche l'espressione (C.86) per l'energia potenziale, troviamo l'espressione finale della lagrangiana  $\mathcal{L}$  in funzione delle coordinate scelte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\phi - \psi)) + \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos \phi + \cos \psi)^2 + \cos^2 \phi] \\ & - mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) - kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)) . \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere di conseguenza:

$$\begin{aligned} 2mL^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} + mL^2 \cos(\phi - \psi) \frac{d^2\psi}{dt^2} = & -mL^2 \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin(\phi - \psi) - mL^2\Omega^2(2 \cos \phi + \cos \psi) \sin \phi \\ & + kL^2 \sin(\phi - \psi) - 2mgL \cos \phi , \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

insieme a

$$\begin{aligned} mL^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + mL^2 \cos(\psi - \phi) \frac{d^2\phi}{dt^2} = & -mL^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin(\psi - \phi) - mL^2\Omega^2(\cos \psi + \cos \phi) \sin \psi \\ & + kL^2 \sin(\psi - \phi) - mgL \cos \psi . \end{aligned} \quad (\text{C.93})$$

(b) Le equazioni di Eulero Lagrange scritte sopra *non* sono in forma normale: a primo membro compare una combinazione lineare delle derivate di ordine massimo e non le derivate di ordine

massimo separatamente su ogni riga. Il sistema di equazioni scritto sopra può essere trascritto come:

$$mL^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\phi - \psi) \\ \cos(\phi - \psi) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mL^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin(\phi - \psi) - ML^2\Omega^2(2\cos\phi + \cos\psi)\sin\phi + kL^2\sin(\phi - \psi) - 2mgL\cos\phi \\ -mL^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sin(\psi - \phi) - ML^2\Omega^2(\cos\psi + \cos\phi)\sin\psi + kL^2\sin(\psi - \phi) - mgL\cos\psi \end{bmatrix}$$

Se la matrice quadrata a primo membro risulta invertibile, il sistema si può scrivere in forma normale moltiplicando ambo i membri per la matrice inversa. Il determinante della matrice detta è (a parte il fattore  $mL^2$ ),  $2 - \cos^2(\phi - \psi)$  che è sempre strettamente positivo e pertanto la matrice può essere invertita. Il calcolo con la regola di Cramer fornisce:

$$\begin{bmatrix} 2 & \cos(\phi - \psi) \\ \cos(\phi - \psi) & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (2 - \cos^2(\phi - \psi))^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\phi - \psi) \\ -\cos(\phi - \psi) & 2 \end{bmatrix}$$

Il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange si riscrive in forma normale come:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2\phi}{dt^2} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{mL^2(2 - \cos^2(\phi - \psi))} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\phi - \psi) \\ -\cos(\phi - \psi) & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -mL^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin(\phi - \psi) - mL^2\Omega^2(2\cos\phi + \cos\psi)\sin\phi + kL^2\sin(\phi - \psi) - 2mgL\cos\phi \\ -mL^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sin(\psi - \phi) - mL^2\Omega^2(\cos\psi + \cos\phi)\sin\psi + kL^2\sin(\psi - \phi) - mgL\cos\psi \end{bmatrix}$$

(c) Dato che la lagrangiana (C.91) non dipende esplicitamente dal tempo, di conseguenza, per il teorema 10.3 si conserva l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \mathcal{L}.$$

Il calcolo esplicito fornisce immediatamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\phi - \psi)) - \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos\phi + \cos\psi)^2 + \cos^2\phi] \\ + mgL(2\sin\phi + \sin\psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)). \end{aligned} \quad (\text{C.94})$$

Il significato fisico si  $\mathcal{H}$  è quello dell'energia meccanica del sistema fisico nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ . Infatti, dalle (C.87)-(C.88) si ricava immediatamente che l'energia cinetica del sistema dei due punti nel riferimento  $\mathcal{S}$  è:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(\phi - \psi)).$$

Nel riferimento  $\mathcal{S}$  agiscono sul sistema fisico le reazioni vincolari che non compiono complessivamente lavoro per l'idealità dei vincoli, le forze conservative di gravità e della molla che producono un'energia potenziale complessiva:

$$+mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)) ,$$

le forze di Coriolis che non compiono lavoro in quanto perpendicolari ai vettori velocità, le forze centrifughe che sono perpendicolari ed uscenti dall'asse  $z$  ed hanno modulo pari a  $m\Omega^2 d_P$  e  $m\Omega^2 d_Q$  rispettivamente, dove  $d_P$  e  $d_Q$  sono le distanze dei punti indicati dall'asse  $z$ . Queste forze hanno la stessa struttura di forze di molle repulsive di costante  $-m\Omega^2$  fissate all'asse  $z$  a punti  $P'$  e  $Q'$  che stanno sempre alla stessa quota del rispettivo altro estremo della molla  $P$  e  $Q$ . Le due forze centrifughe sono dunque forze conservative con energia potenziale totale pari a:

$$-\frac{m\Omega^2}{2} (d_P^2 + d_Q^2) = -\frac{mL^2\Omega^2}{2} [\cos^2 \phi + (\cos \phi + \cos \psi)^2] .$$

Sommando tutti i contributi, l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{S}$  vale:

$$\begin{aligned} E|_{\mathcal{S}} = & \frac{mL^2}{2} (2\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos(\phi - \psi)) - \frac{mL^2\Omega^2}{2} [(\cos \phi + \cos \psi)^2 + \cos^2 \phi] \\ & + mgL(2 \sin \phi + \sin \psi) + kL^2(1 + \cos(\phi - \psi)) . \end{aligned}$$

Pertanto essa coincide con  $\mathcal{H}$  sui moti del sistema.

(d) Direttamente dal sistema di equazioni (C.92)-(C.93) si vede che le 4 curve costanti  $(\phi(t), \psi(t)) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2)$  soddisfano le equazioni del moto e le condizioni iniziali dette. Dato che le equazioni sono scrivibili in forma normale, con secondo membro di classe  $C^\infty$  vale il teorema di unicità delle soluzioni, quindi quelle trovate sono le uniche soluzioni con le condizioni iniziali imposte per ipotesi.

## C.9 Esercizi del Capitolo 11.

### Esercizi 11.1

11.1.1. *Soluzione.* (a) Per prima cosa notiamo che, direttamente dell'equazione di  $\mathbb{T}^2$  pensando  $P$  come il punto materiale e  $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$ , abbiamo che:

$$\mathbf{x} = P - O = (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_x + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_y + r \sin \phi \mathbf{e}_z$$

e quindi:

$$\mathbf{v}_P = (R + r \cos \theta) \dot{\phi} (-\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y) + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z - r \dot{\theta} \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y) .$$

Ovvero:

$$\mathbf{v}_P = - \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \sin \phi + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \right] \mathbf{e}_x + \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi \right] \mathbf{e}_y + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

Eseguendo il quadrato del secondo membro e moltiplicando il risultato per  $m/2$  troviamo l'energia cinetica in  $\mathcal{J}$  che vale esplicitamente:

$$\mathcal{J} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 .$$

L'energia potenziale della molla è :

$$\frac{k}{2}(P - O)^2 = \frac{k}{2}r^2 \sin^2 \theta + \frac{k}{2}(R + r \cos \theta)^2 = \frac{k}{2}(R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta) .$$

Possiamo ridefinire l'energia potenziale omettendo la costante additiva senza perdere informazioni:

$$\mathcal{U}(\theta, \phi) := krR \cos \theta$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la forza viscosa sarà descritta tramite le componenti lagrangiane:

$$\mathcal{Q}_\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi} ,$$

e

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma r^2 \dot{\theta} .$$

Introdotta la lagrangiana parziale (che non tiene conto della forza viscosa!):

$$\mathcal{L} := \mathcal{J} - \mathcal{U} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 - krR \cos \theta \quad (\text{C.95})$$

le due equazioni di Eulero-Lagrange non banali possono scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \mathcal{Q}_\phi , \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \mathcal{Q}_\theta , \end{aligned}$$

che si riscrivono, esplicitamente:

$$m \frac{d}{dt} \left( (R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\gamma(R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} , \quad (\text{C.96})$$

$$mr^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mr(R + r \cos \theta) \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \sin \theta - \gamma r^2 \frac{d\theta}{dt} + krR \sin \theta . \quad (\text{C.97})$$

(b) Nel caso in cui  $\gamma = 0$ , la lagrangiana completa del sistema è data in (C.95). Si vede che tale lagrangiana ammette la coordinata  $\phi$  come coordinata ciclica. In tal caso il momento coniugato associato è un integrale primo. Quindi abbiamo l'integrale primo:

$$p_\phi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m(R + r \cos \theta)^2 \frac{d\phi}{dt} .$$

Dimostriamo che questa è la componente  $z$  del momento angolare rispetto al polo  $O$  in  $\mathcal{I}$ . Da

$$\mathbf{x} = P - O = (R + r \cos \theta) \cos \phi \mathbf{e}_x + (R + r \cos \theta) \sin \phi \mathbf{e}_y + r \sin \phi \mathbf{e}_z$$

e

$$\mathbf{v}_P = - \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \sin \phi + r \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \right] \mathbf{e}_x + \left[ (R + r \cos \theta) \dot{\phi} \cos \phi - r \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi \right] \mathbf{e}_y + r \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

abbiamo facilmente che:

$$\Gamma_O|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_z = m \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{e}_z = m(xv_{Py} - yv_{Px}) = m(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi},$$

cioè su ogni moto:

$$p_\phi = \Gamma_O|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_z = m(R + r \cos \theta)^2 \dot{\phi}. \quad (\text{C.98})$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica totale, siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi dato che nelle coordinate usate (che sono adattate a  $\mathcal{I}$ ), la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto essa si conserva e coincide con l'hamiltoniana del sistema. Vale

$$\mathcal{H}(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m(R + r \cos \theta)^2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 + krR \cos \theta. \quad (\text{C.99})$$

(c) Dobbiamo scrivere la legge che connette le coordinate  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$  in funzione delle coordinate  $\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}$ , invertire questa trasformazione ed esplicitare l'hamiltoniana in (C.99) in funzione di  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$ . Sappiamo che  $p_\phi$  è dato in (C.98) mentre:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}.$$

quindi:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} p_\theta, \quad (\text{C.100})$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{m(R + r \cos \theta)^2} p_\phi. \quad (\text{C.101})$$

Nelle variabili  $\phi, \theta, p_\phi, p_\theta$ , l'hamiltoniana (C.99) si riscrive:

$$\mathcal{H}(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta) = \frac{p_\phi^2}{2m(R + r \cos \theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + krR \cos \theta.$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (\text{C.102})$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) = \frac{p_\phi}{m(R + r \cos \theta)^2}, \quad (\text{C.103})$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = -\frac{p_\phi^2 r \sin \theta}{m(R + r \cos \theta)^3} + krR \sin \theta, \quad (\text{C.104})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{mr^2}. \quad (\text{C.105})$$

(d) Consideriamo le equazioni di Eulero-Lagrange (C.96)- (C.97). Se inseriamo nella seconda equazione le condizioni iniziali il secondo membro si annulla. Si osservi allora che la funzione  $\theta(t) = 0$  costantemente per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa sia le condizioni iniziali in  $\theta$  che la seconda equazione qualunque sia la soluzione dell'altra equazione. Dato che il sistema di equazioni è in forma normale con secondo membro regolare quella trovata è parte dell'unica soluzione. Con questa funzione  $\theta = \theta(t)$ , la prima equazione si riscrive:

$$m \frac{d}{dt} \left( (R+r)^2 \frac{d\phi}{dt} \right) = -\gamma(R+r)^2 \frac{d\phi}{dt},$$

ossia:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$\chi^2 + \frac{\gamma}{m} \chi = 0,$$

con soluzioni  $\chi = 0, -\gamma/m$ . La soluzione generale dell'equazione dunque è :

$$\phi(t) = A + B e^{-\gamma t/m}.$$

Le condizioni iniziali dicono che:  $\phi(0) = A + B = 0$  da cui  $A = -B$ , e ancora  $v = d/dt|_{t=0} \phi(t) = -\gamma B e^{-\gamma t/m}/m|_{t=0}$  da cui:  $B = -mv/\gamma$ . La soluzione (massimale) del problema, cioè il moto del sistema individuato dalle condizioni iniziali dette, è dunque:

$$\theta(t) = 0, \quad \phi(t) = \frac{mv}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/m}), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

**11.1.2. Soluzione.** (a) Useremo la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}}$  relativa al riferimento inerziale  $\hat{\mathcal{J}}$ . Dobbiamo per prima cosa esprimere la velocità dei due punti rispetto al riferimento  $\hat{\mathcal{J}}$  usando le coordinate libere  $x, \theta, s$ . Usiamo un sistema di coordinate polari piane  $(r, \theta)$  nel piano perpendicolare a  $\mathbf{e}_x$  e passante per  $O + x \mathbf{e}_x$ . Allora

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

Si tenga conto che  $P - O = x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z$  mentre  $Q - O = x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r$ . Vale:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{C.106})$$

Di conseguenza:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z,$$

mentre:

$$\mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r) = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x \mathbf{e}_y + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (r \cos \theta \mathbf{e}_y + r \sin \theta \mathbf{e}_z)$$

$$= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x \mathbf{e}_y - \Omega r \cos \theta \mathbf{e}_x = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega x (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) - \Omega r \cos \theta \mathbf{e}_x .$$

Abbiamo trovato che:

$$\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \Omega x \mathbf{e}_y + \dot{x} \sinh x \mathbf{e}_z , \quad (\text{C.107})$$

$$\mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}} = (\dot{x} - \Omega r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{r} + \Omega x \cos \theta) \mathbf{e}_r + (r \dot{\theta} - \Omega x \sin \theta) \mathbf{e}_\theta . \quad (\text{C.108})$$

Entrambe le velocità sono ora espresse rispetto a due terne ortonormali (diverse) di versori. L'energia cinetica in  $\mathcal{T}_{\hat{\mathcal{J}}}$  vale allora, tenendo conto che  $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} &= \frac{m}{2} \left( |\mathbf{v}_P|_{\hat{\mathcal{J}}}^2 + |\mathbf{v}_Q|_{\hat{\mathcal{J}}}^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + \Omega^2 x^2 + \dot{x}^2 \sinh^2 x + (\dot{x} - \Omega r \cos \theta)^2 + (\dot{r} + \Omega x \cos \theta)^2 + (r \dot{\theta} - \Omega x \sin \theta)^2 \right) . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|_{\hat{\mathcal{J}}} &= \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{m}{2} \left( 2\Omega^2 x^2 + \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta \right) \\ &\quad - m\Omega \dot{\theta} r x \sin \theta + m(\dot{r} x - \dot{x} r) \Omega \cos \theta . \end{aligned}$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale più quella della molla. Usando  $P - Q = P - O - (Q - O) = x \mathbf{e}_x + \cosh x \mathbf{e}_z - (x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r) = \cosh x \mathbf{e}_z - r \mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \sin \theta$ , troviamo:

$$\mathcal{U} = mg(z_P + z_Q) + \frac{k}{2} (P - Q)^2 = mg(\cosh x + r \sin \theta) + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) .$$

La lagrangiana in  $\hat{\mathcal{J}}$  ha quindi forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\hat{\mathcal{J}}} &= \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{m}{2} \left( 2\Omega^2 x^2 + \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta \right) \\ &\quad - m\Omega \dot{\theta} r x \sin \theta + m(\dot{r} x - \dot{x} r) \Omega \cos \theta - mg(\cosh x + r \sin \theta) - \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) . \end{aligned}$$

Le tre equazioni di E-L risultano allora essere, in riferimento alle coordinate  $x, r, \theta$  nell'ordine scritto:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( (1 + \cosh^2 x) \frac{dx}{dt} - r \Omega \cos \theta \right) &= m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \sinh x \cosh x + 2m\Omega^2 x - m\Omega \frac{d\theta}{dt} r \sin \theta + m \frac{dr}{dt} \Omega \cos \theta \\ &\quad - mg \sinh x - k \cosh x \sinh x + kr \sinh x \sin \theta , \\ m \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} + x \Omega \cos \theta \right) &= mr \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m\Omega^2 r \cos^2 \theta - m\Omega \frac{d\theta}{dt} x \sin \theta - m \frac{dx}{dt} \Omega \cos \theta - mg \sin \theta \\ &\quad - kr - k \cosh x \sin \theta , \\ m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} - \Omega r x \sin \theta \right) &= -m\Omega^2 r^2 \cos \theta \sin \theta - m \frac{d\theta}{dt} \Omega r x \cos \theta - m \left( \frac{dr}{dt} x - \frac{dx}{dt} r \right) \Omega \sin \theta \end{aligned}$$

$$-mgr \cos \theta + kr \cosh x \cos \theta .$$

(b) La forma esplicita dell'hamiltoniana associata alla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  riferita a coordinate  $x, r, \theta$  è:

$$\mathcal{H} = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{x}} + \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L} ,$$

ossia, esplicitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{m\Omega^2}{2} (x^2 + (x^2 + r^2 \cos^2 \theta)) + mg (\cosh x + r \sin \theta) \\ & + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x - 2r \cosh x \sin \theta) . \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

Dato che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  non dipende esplicitamente dal tempo, il teorema di Jacobi assicura che  $\mathcal{H}$  si conservi sulle soluzioni delle equazioni di E-L. Il significato di

$$\frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 (1 + \cosh^2 x) + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

è quello di energia cinetica nel riferimento  $\mathcal{J}$  come si ricava direttamente dalle (C.106). Il terzo ed il quarto addendo a secondo membro in (C.109) rappresentano l'energia potenziale della gravità e della molla come abbiamo calcolato precedentemente. Il secondo addendo

$$- \frac{m\Omega^2}{2} (x^2 + (x^2 + r^2 \cos^2 \theta))$$

si può invece scrivere come  $-\frac{m\Omega^2}{2} d_P^2 - \frac{m\Omega^2}{2} d_Q^2$ .  $d_P = |x_P|$  è la distanza di  $P$  dall'asse  $z$  e  $d_Q$  è la distanza tra  $Q$  e l'asse  $z$ .  $d_Q$  è la lunghezza della proiezione nel piano  $z = 0$  del vettore  $Q - O = x \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_r = x \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y + r \sin \theta \mathbf{e}_z$ ; pertanto il quadrato di  $d_Q$  è  $x^2 + r^2 \cos^2 \theta$ . Come sappiamo

$$- \frac{m\Omega^2}{2} d_P^2 - \frac{m\Omega^2}{2} d_Q^2$$

è l'energia potenziale della forza centrifuga. La forza di Coriolis non compie lavoro nel riferimento  $\mathcal{J}$  perché è perpendicolare alla velocità. Le reazioni vincolari non compiono lavoro complessivo essendo i vincoli ideali ed indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{J}$ . In definitiva il secondo memebro dell'espressione trovata sopra per  $\mathcal{H}$  è proprio l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{J}$ .

(c) Abbiamo esplicitamente:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + \cosh^2 x) - mr\Omega \cos \theta , \quad (\text{C.110})$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} + mx\Omega \cos \theta , \quad (\text{C.111})$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} - m\Omega xr \sin \theta . \quad (\text{C.112})$$



Le formule inverse risultano essere:

$$\dot{x} = \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{m(1 + \cosh^2 x)}, \quad (\text{C.113})$$

$$\dot{r} = \frac{p_r - mx\Omega \cos \theta}{m}, \quad (\text{C.114})$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{mr^2}. \quad (\text{C.115})$$

Sostituendo in (C.109) si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{(p_x + mr\Omega \cos \theta)^2}{2m(1 + \cosh^2 x)} + \frac{(p_r - mx\Omega \cos \theta)^2}{2m} + \frac{(p_\theta + m\Omega xr \sin \theta)^2}{2mr^2} - \frac{m\Omega^2}{2} (2x^2 + r^2 \cos^2 \theta) \\ & + mg (\cosh x + r \sin \theta) + \frac{k}{2} (r^2 + \cosh^2 x + 2r \cosh x \sin \theta). \end{aligned} \quad (\text{C.116})$$

Le equazioni di Hamilton della forma:  $\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}$  forniscono immediatamente le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{m(1 + \cosh^2 x)}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{p_r - mx\Omega \cos \theta}{m}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{mr^2}. \end{aligned}$$

Le rimanenti equazioni di Hamilton:  $\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}$  sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{(p_x + mr\Omega \cos \theta)^2}{m(1 + \cosh^2 x)^2} \sinh x \cosh x + \Omega \cos \theta (p_r - mx\Omega \cos \theta) - \Omega r \sin \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r^2} \\ &\quad + 2m\Omega^2 x - mg \sinh x - k \cosh x \sinh x + kr \sinh x \sin \theta, \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{(p_\theta + m\Omega xr \sin \theta)^2}{mr^3} - \Omega \cos \theta \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{(1 + \cosh^2 x)} - \Omega x \sin \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r^2} \\ &\quad + m\Omega^2 r \cos^2 \theta - mg \sin \theta - kr - k \cosh x \sin \theta, \\ \frac{dp_\theta}{dt} &= - \left( x(p_r - mx\Omega \cos \theta) - r \frac{p_x + mr\Omega \cos \theta}{1 + \cosh^2 x} \right) \Omega \sin \theta - \Omega x \cos \theta \frac{p_\theta + m\Omega xr \sin \theta}{r} \\ &\quad - m\Omega^2 r^2 \cos \theta \sin \theta - mgr \cos \theta + kr \cosh x \cos \theta. \end{aligned}$$

## C.10 Esercizi dell'Appendice A.

### Esercizi A.1

A.1.1. *Traccia di soluzione.* Per costruire l'atlante  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  su  $\mathbb{S}^2$ , considerare sistemi di coordinate polari sferiche con asse polare  $z$  disposto in varie direzioni e usando, in luogo della coordinata radiale  $r$ , la nuova coordinata  $r' := r - 1$ .

A.1.2. *Traccia di soluzione.* La risposta ad entrambe le domande è negativa:  $N$  non è localmente omeomorfa a  $\mathbb{R}^1$  (cosa succede attorno al punto  $(0, 0)$ ?).

A.1.3. *Traccia di soluzione.* Il vertice del cono  $(0, 0, 0)$  non ammette, nel suo intorno, sistemi di coordinate del tipo di quelli nella condizione (ii) della definizione A.4. Tuttavia una struttura differenziabile per  $C$  si ottiene dalla carta globale che proietta i punti di  $C$  sul piano  $x^3 = 0$  e associa alle proiezioni le loro coordinate  $(x^1, x^2)$ . Eliminando il vertice del cono,  $C^*$  risulta avere struttura di sovarietà embedded in  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2 ed una carta globale si ottiene proprio dalla proiezione sulla base del cono, come detto sopra.

A.1.4. *Traccia di soluzione.* Usare il fatto che le carte locali dei due atlanti sono restrizioni di carte locali di  $M$  tra di loro compatibili.

A.1.5. *Soluzione.* Nelle ipotesi fatte, per il teorema 1.2, per ogni punto  $p$  nell'aperto  $\phi(U \cap V)$ , c'è un intorno aperto  $O \subset \phi(U \cap V)$  di  $p$  che è trasformato in un aperto  $O' \subset \psi(U \cap V)$  da  $\psi \circ \phi^{-1}$ . Inoltre, su  $O'$ , l'inversa di  $(\psi \circ \phi^{-1})|_{O'}$ ,  $g$  è ben definita e di classe  $C^k$ . Dato che l'unica l'inversa di  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  per ipotesi è  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ ,  $g$  deve coincidere con la restrizione di quest'ultima a  $O'$ . Dato che, al variare di  $p$ , gli intorni  $O'$  ricoprono  $\psi(U \cap V)$ , concludiamo che la restrizione di  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  ad un'intorno ( $O'$ ) di ogni suo punto nel dominio  $\psi(U \cap V)$  è di classe  $C^k$ . Ma allora  $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$  è di classe  $C^k$ .

### Esercizi A.2

A.2.1. Si considerino le coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  della carta  $(U, \phi)$  e le coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  della carta  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ . L'identità

$$id_{\phi(U \cap V)} = (\phi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}),$$

usando le coordinate ed essendo  $\psi \circ \phi^{-1}$  scrivibile come  $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$  scrivibile come  $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ , si riscrive:

$$x^i = x^i(y^1(x^1, \dots, x^2), \dots, y^n(x^1, \dots, x^2)) \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (C.117)$$

Ammettendo che entrambe le funzioni  $\psi \circ \phi^{-1}$  e  $\phi \circ \psi^{-1}$  siano differenziabili (almeno  $C^1$ ) come segue dalla richiesta di compatibilità delle due carte, ed applicando la regola di derivazione di funzioni composte in (C.117), si ha, derivando rispetto a  $x^k$ :

$$\delta_k^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}.$$

Quest'equazione dice che il prodotto delle due matrici jacobiane quadrate che appaiono a secondo membro è la matrice identica. Quindi entrambe le matrici quadrate sono invertibili ed, in particolare, hanno determinante non nullo.

**A.2.2. Soluzione.** Passando dalle coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  della carta  $(U, \phi)$  attorno a  $p$  alle coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  della carta  $(V, \psi)$  attorno a  $p$  in cui il requisito di non singolarità è soddisfatto, vale:

$$\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)} \frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial y^j} \Big|_{\psi^{-1}(p)} .$$

Dato che la matrice di coefficienti  $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)}$  è non singolare per l'esercizio precedente, se il vettore riga di componenti  $\frac{\partial f \circ \psi^{-1}}{\partial y^j} \Big|_{\psi^{-1}(p)}$  è non nullo, deve essere non nullo anche quello di coefficienti  $\frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i} \Big|_{\phi^{-1}(p)}$ .

**A.2.3. Traccia di soluzione.** Si generalizzi il ragionamento che ha portato alla soluzione dell'esercizio precedente.

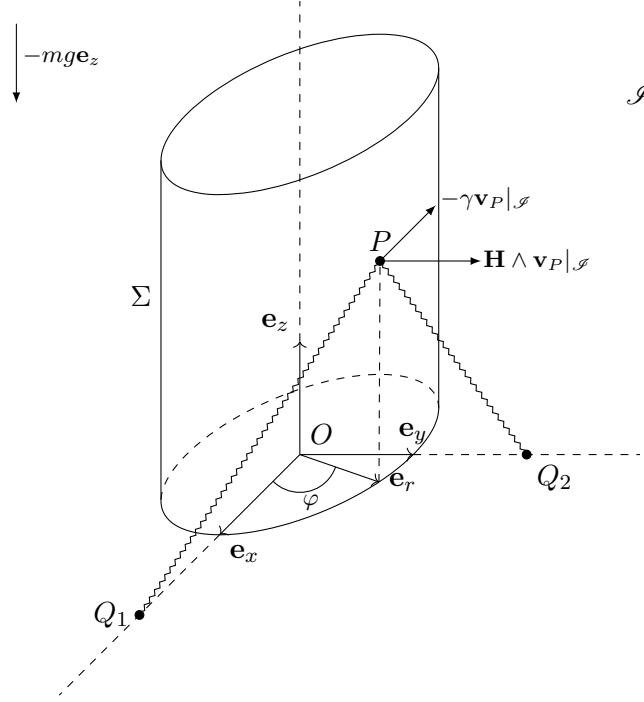
## Appendice D

### Alcuni esercizi d'esame svolti.

I seguenti esercizi sono simili agli scritti assegnati negli esami dei corsi di Meccanica Analitica e Fisica Matematica I (docente Valter Moretti), alcuni di essi sono stati effettivamente assegnati in prove scritte. Il tempo a disposizione che viene solitamente dato per risolvere ciascuno di essi è di *3 ore*.

### ESERCIZIO 1

Nel sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  si fissino coordinate  $x, y, z$  solidali definenti un sistema di coordinate cartesiane ortonormali di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Nello spazio di quiete di  $\mathcal{I}$ , si consideri la superficie cilindrica  $\Sigma$  definita da  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$ . Un punto materiale  $P$



di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come superficie *liscia*, ed è sottoposto alle seguenti ulteriori forze in aggiunta alla reazione vincolare  $\phi$ :

- (i) forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ ;
- (ii) una forza di forma  $\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$ , dove  $\mathbf{H} = H \mathbf{e}_r$  con  $H \geq 0$  ed essendo  $\mathbf{e}_r$  il versore radiale rispetto al sistema di coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  associato alle coordinate  $x, y, z$  in modo standard;
- (iii) La forza dovuta a due molle di costante elastica  $\kappa$  e lunghezza nulla a riposo, una con un estremo (quello non attaccato a  $P$ ) fissato in  $Q_1 = O + 2R \mathbf{e}_x$  e l'altra con un estremo (quello non attaccato a  $P$ ) fissato a  $Q_2 = O + 2R \mathbf{e}_y$ ;
- (iv) Una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$ .

Si risponda ai questi seguenti in riferimento al sistema di coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$ .

- (1). Si determinino le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare al variare del tempo quando è assegnato un moto del sistema.
- (2). Si scriva l'espressione dell'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{I}}$  del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  e si

dimostri che è conservata su ogni moto del sistema se  $\gamma = 0$ . Si provi che, se  $\gamma \neq 0$ , vale invece:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}}{dt} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

su ogni moto del sistema.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio del punto materiale  $P$  e se ne studi la stabilità usando il teorema di Liapunov ed il punto (2).

(4). Mostrare che se  $H = 0$  e  $\gamma = 0$  allora si ha anche l'integrale primo:

$$\Lambda(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi + \cos \varphi) .$$

Usando tale risultato, esprimere la componente della reazione vincolare  $\phi$  rispetto a  $\mathbf{e}_r$  come una funzione di  $\varphi$  sul moto di condizioni iniziali  $\dot{\varphi}(0) = 0$  e  $\varphi(0) = \pi/2$ .

**Soluzione.**

(1) L'equazione del moto del punto  $P$  è

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \phi - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q_1) - \kappa(P - Q_2) + \mathbf{H} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} - \gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} . \quad (\text{D.1})$$

Scriviamo questa equazione in coordinate cilindriche. Teniamo conto delle relazioni:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y , \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y , \quad (\text{D.3})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (\text{D.4})$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \quad (\text{D.7})$$

per cui, tendo conto che è  $P - O = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$ , si ha:

$$P - Q_1 = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_r + 2R \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi ,$$

e

$$P - Q_2 = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \sin \varphi \mathbf{e}_r - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi .$$

Infine

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z , \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z .$$

Mettendo tutto insieme e tenendo conto che  $\phi = \phi \mathbf{e}_r$  per il fatto che il vincolo è liscio, l'equazione (D.1) si scrive

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = \phi \mathbf{e}_r - mg \mathbf{e}_z - \gamma \left( R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \right) + H \left( R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_z - \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_\varphi \right) - \kappa (2R \mathbf{e}_r + 2z \mathbf{e}_z - 2R(\cos \varphi + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + 2R(\sin \varphi - \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi) .$$

Raccogliendo i fattori complessivi dei tre versori abbiamo le tre equazioni:

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\gamma R \frac{d\varphi}{dt} - H \frac{dz}{dt} - \kappa 2R(\sin \varphi - \cos \varphi) , \quad (\text{D.8})$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \gamma \frac{dz}{dt} + HR \frac{d\varphi}{dt} - \kappa 2z , \quad (\text{D.9})$$

$$\phi = -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2R\kappa (1 - \cos \varphi - \sin \varphi) . \quad (\text{D.10})$$

Il sistema (D.8)-(D.9) è evidentemente riscrivibile in forma normale ed il secondo membro è di classe  $C^\infty$ . Pertanto esso determina il moto del sistema una volta assegnate condizioni iniziali in  $\varphi$  e  $z$  (i valori di tali coordinate e delle loro derivate prime al tempo 0). Tale sistema costituisce il sistema delle equazioni pure di movimento. La reazione vincolare viene determinata, una volta determinato un moto, dall'equazione (D.10).

(2) Le forze conservative che agiscono sul sistema sono quelle dovute alla due molle e quella dovuta alla forza di gravità. Di conseguenza

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(P) = mgz + \frac{\kappa}{2}(P - Q_1)^2 + \frac{\kappa}{2}(P - Q_2)^2 .$$

Usando le espressioni precedentemente trovate per  $P - Q_1$  e  $P - Q_2$  si trova esplicitamente che:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(\varphi, z) = mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi + 5 \right) . \quad (\text{D.11})$$

Possiamo omettere la costante 5 dentro la parentesi tonda, dato che l'energia potenziale è definibile a meno di costanti. Pertanto, l'energia meccanica totale è

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) .$$

Passiamo a provare la conservazione dell'energia. Moltiplicando (D.8) per  $Rd\varphi/dt$  e (D.9) per  $dz/dt$  e sommando membro a membro il risultato, otteniamo l'identità, valida su ogni moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[ mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) \right] - \gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right) .$$

Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz + 2\kappa R^2 \left( \frac{z^2}{2R^2} - \sin \varphi - \cos \varphi \right) \right] = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right),$$

cioé :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$

In altre parole, l'energia meccanica si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ .

**(3)** Passiamo a determinare le configurazioni di equilibrio. Prima di tutto scriviamo il sistema delle equazioni pure di movimento come sistema del prim'ordine:

$$mR \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\gamma R \dot{\varphi} - H \dot{z} - \kappa 2R (\sin \varphi - \cos \varphi), \quad (\text{D.12})$$

$$m \frac{d\dot{z}}{dt} = -mg - \gamma \dot{z} + H R \dot{\varphi} - \kappa 2z, \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (\text{D.15})$$

Le configurazioni di equilibrio  $(\phi_0, z_0)$  del sistema del *secondo ordine* (D.8)-(D.9), sono per definizione individuate dalla richiesta che:

$$(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$$

sia un punto singolare del problema del *prim'ordine* (D.12)-(D.13), (D.14)-(D.15), cioè che il secondo membro di (D.12)-(D.13), (D.14)-(D.15) sia nullo nel punto  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$ . Imponendo ciò, si trovano le equazioni

$$\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 = 0, \quad (\text{D.16})$$

$$mg + 2\kappa z = 0, \quad (\text{D.17})$$

che produce come soluzioni le configurazioni di equilibrio:  $(\pi/4, -mg/2\kappa)$  e  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$ . Passiamo a studiarne la stabilità. La funzione di Liapunov da considerare è l'energia meccanica.

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \mathcal{U}(\varphi, z).$$

Sappiamo che

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{S}} \leq 0$$

valendo:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = -\gamma \left( R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right)$$



In altre parole:

$$\mathcal{E}(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z}) \leq 0.$$

Nei punti singolari in cui in cui essa ha un minimo stretto si ha equilibrio stabile nel futuro. In effetti  $\mathcal{E}$ , per costruzione, almeno nella parte concernente le variabili puntate ha un minimo stretto in  $\dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$ . Andiamo a controllare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  nelle configurazioni di equilibrio (nelle quali il gradiente di  $\mathcal{U}$  si annulla). Se gli autovalori sono tutti positivi si ha un minimo stretto per  $\mathcal{U}$  che corrisponde ad un minimo stretto di  $\mathcal{E}$  in  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$ . In tal caso il punto singolare  $(\phi_0, z_0, \dot{\phi}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0)$  ovvero, equivalentemente la configurazione di equilibrio  $(\phi_0, z_0)$ , è stabile nel futuro. La matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  vale:

$$H(\varphi, z) = \text{diag} ( 2\kappa R^2(\sin \varphi + \cos \varphi), \quad 2\kappa ).$$

Di conseguenza:

$$H(\pi/4, -mg/2\kappa) = \text{diag} ( 2\kappa R^2\sqrt{2}, \quad 2\kappa ),$$

e questo significa che la configurazione  $(-mg/2\kappa, \pi/4)$  è stabile nel futuro. Notiamo ulteriormente che se  $\gamma = 0$  allora l'energia meccanica si conserva sui moti del sistema:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = 0.$$

In tal caso vale anche:

$$\mathcal{E}(\phi, z, \dot{\phi}, \dot{z}) = 0.$$

In questo caso il teorema di Liapunov prova che vale anche la stabilità nel passato se si ha un minimo stretto di  $\mathcal{E}$ . Concludiamo che, se  $\gamma = 0$ , la configurazione di equilibrio  $(\pi/4, -mg/2\kappa)$  è stabile nel passato e nel futuro. Passiamo a studiare l'altra configurazione. In questo caso si ha un autovalore negativo ed uno positivo:

$$H(5\pi/4, -mg/2\kappa) = \text{diag} ( -2\kappa R^2\sqrt{2}, \quad 2\kappa ).$$

Dal teorema di Liapunov non possiamo concludere nulla. Possiamo dire qualcosa nel caso in cui  $H = 0$  e  $\gamma = 0$ . In questo caso il punto materiale è sottoposto a sole forze conservative, se escludiamo la reazione vincolare. Le equazioni del moto diventano:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{U}(\varphi, z), \quad (\text{D.18})$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{U}(\varphi, z). \quad (\text{D.19})$$

Tenendo conto dell'osservazione 7.9, possiamo applicare la proposizione 7.8 (pensando  $M := mR^2$  come la massa di un punto e  $m$  quella dell'altro, per una coppia di punti che vivono in spazi unidimensionali). Dato che l'hessiana di  $\mathcal{U}$  ha un autovalore negativo nella configurazione di equilibrio  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$  concludiamo che la configurazione di equilibrio  $(5\pi/4, -mg/2\kappa)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(4) Nel caso  $H = 0$  e  $\gamma = 0$ , moltiplicando ambo i membri di (D.8) per  $Rd\varphi/dt$  si arriva immediatamente all'equazione, valida sui moti del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi + \cos \varphi) \right] = 0 ,$$

che equivale alla conservazione di  $\Lambda$ . Dato che  $\Lambda$  si conserva sul moto, abbiamo che

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(t)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t)) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(0)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(0) + \cos \varphi(0)) .$$

In particolare, sulla soluzione determinata dalle condizioni  $\dot{\varphi}(0) = 0$  e  $\varphi(0) = \pi/2$ , vale

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}(t)^2 - 2\kappa R^2 (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t)) = -2\kappa R^2 ,$$

da cui:

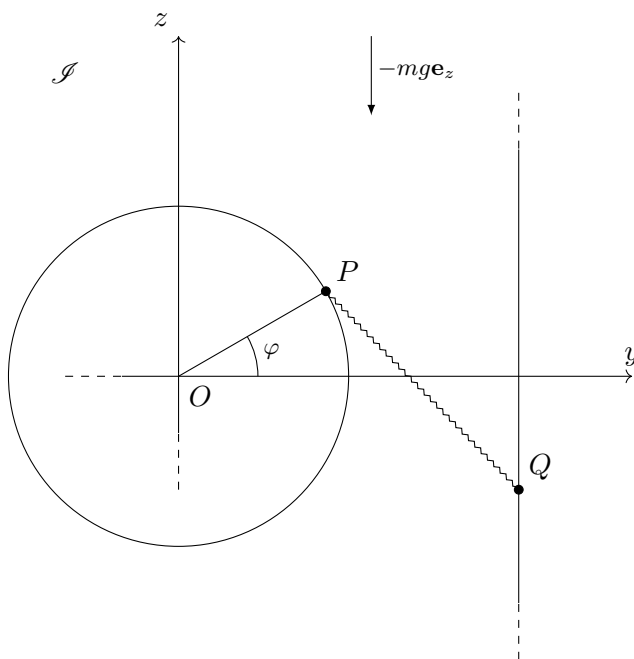
$$\dot{\varphi}(t)^2 = \frac{4\kappa}{m} (\sin \varphi(t) + \cos \varphi(t) - 1) .$$

Inserendo nell'equazione (D.10) troviamo la relazione cercata:

$$\phi = 6\kappa R (1 - \sin \varphi - \cos \varphi) .$$

## ESERCIZIO 2

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $z^2 + y^2 = R^2$ ,  $x = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartene-



nere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g \geq 0$ ). Infine i punti sono connessi l'un l'altro da una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Si risolvano i seguenti quesiti.

- (1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari. Si determini la posizione del punto  $P$  tramite l'angolo  $\varphi$  che  $P - O$  descrive rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Si determini la posizione del punto  $Q$  tramite la sua coordinata  $z$ .
- (2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema.
- (3). Si scrivano le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità nella situazione  $g = 0$  (conservando la richiesta  $\kappa > 0$ ).

**Soluzione.**

- (1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|\mathcal{I}$  in quanto

lavoriamo solo con un riferimento)

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P, \quad (\text{D.20})$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q. \quad (\text{D.21})$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \varphi$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\varphi$  individua  $P-O$  rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_y + \sin \varphi \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.23})$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{e}_z = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{D.25})$$

Di conseguenza:

$$P - Q = (R \cos \varphi - 2R) \mathbf{e}_y + (R \sin \varphi - z) \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.26})$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = (R \cos \varphi - 2R)(\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + (R \sin \varphi - z)(\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

ossia:

$$P - Q = (R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi) \mathbf{e}_r + (2R \sin \varphi - z \cos \varphi) \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{D.27})$$

Tenendo conto del fatto che

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z,$$

l'equazione (D.21) usando (D.26), può decomporci, sulla base  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + \kappa(R \sin \varphi - z), \\ 0 &= \kappa(R \cos \varphi - 2R) + \phi_Q^y, \\ 0 &= \phi_Q^x. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r,$$

con una analoga procedura, usando l'equazione (D.27), l'equazione del moto (D.20) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_x$ :

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -mg \cos \varphi - \kappa(2R \sin \varphi - z \cos \varphi) , \\ -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi) + \phi_P^r , \\ 0 &= \phi_P^x . \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cos \varphi - \kappa(2R \sin \varphi - z \cos \varphi) , \quad (\text{D.28})$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + \kappa(R \sin \varphi - z) , \quad (\text{D.29})$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \sin \varphi + \kappa(R - 2R \cos \varphi - z \sin \varphi) , \\ \phi_P^x &= 0 , \\ \phi_Q^y &= -\kappa(R \cos \varphi - 2R) , \\ \phi_Q^x &= 0 . \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 + mgR \sin \varphi + mgz .$$

Usando (D.26) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi) + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (\text{D.30})$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi) + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (\text{D.31})$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (D.28) per  $Rd\varphi/dt$  e ambo membri di (D.29) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\kappa z^2}{2} + \kappa R(2R \cos \varphi - z \sin \varphi) - mgR \sin \varphi - mgz \right),$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (D.28) e (D.29):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

**(3).** Le configurazioni  $(\varphi_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (D.28)-(D.29) si ottengono, ragionando come per l'esercizio precedente, imponendo che per  $(\varphi, z) = (\varphi_0, z_0)$  i secondi membri di (D.28) e (D.29) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\varphi/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \kappa R \sin \varphi_0 &= \kappa z_0 + mg, \\ (\kappa z_0 - mg) \cos \varphi_0 &= 2(\kappa z_0 + mg). \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $g = 0$  e  $\kappa > 0$ , il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} R \sin \varphi_0 &= z_0, \\ z_0 \cos \varphi_0 &= 2z_0. \end{aligned}$$

Evidentemente le uniche soluzioni possibili sono  $z_0 = 0$  e  $\varphi_0$  tale che  $\sin \varphi_0 = 0$ . Quindi abbiamo due configurazioni di equilibrio  $(\phi_0, z_0)$ :  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ . Passiamo allo studio della stabilità di esse. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che, essendo conservata vale  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ . Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (D.31), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt$ ,  $dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro e anche nel passato valendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  e non solo  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ . Viceversa se la matrice hessiana dell'energia potenziale in una delle due configurazioni ha un autovalore negativo, applicando la proposizione 7.8 (tenendo conto dell'osservazione 7.9) notando che le equazioni pure di movimento si possono riscrivere come:

$$\begin{aligned} mR^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -\frac{\mathcal{U}(\varphi, z)}{\partial \varphi}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\mathcal{U}(\varphi, z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile nel passato e nel futuro. Il calcolo della matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  con  $g = 0$ :

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R(2R \cos \varphi + z \sin \varphi),$$

fornisce direttamente

$$H(\varphi_0, z_0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \cos \varphi_0 \\ -R \cos \varphi_0 & 2R^2 \cos \varphi_0 + z_0 R \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H(0, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \\ -R & 2R^2 \end{bmatrix}.$$

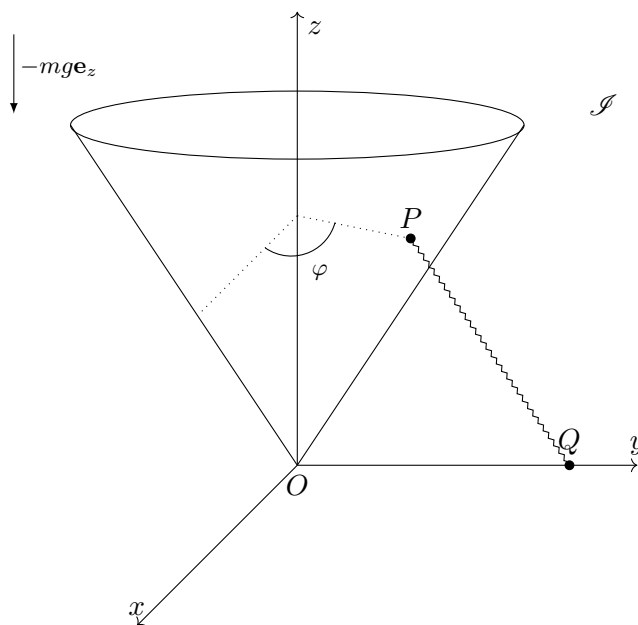
Avendo questa matrice traccia  $\kappa(1 + 2R^2)$  e determinante  $\kappa^2 R^2$  positivi, concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono strettamente positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è un minimo stretto dell'energia potenziale.  $\varphi_0 = 0, z_0 = 0$  è quindi una configurazione di equilibrio stabile nel futuro e nel passato. Considerando l'altra configurazione si trova invece:

$$H(\pi, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & R \\ R & -2R^2 \end{bmatrix}.$$

Dato che il determinante della matrice è negativo (pari a  $-3\kappa^4 R^2$ ) e che esso deve coincidere con il prodotto degli autovalori della matrice considerata, uno degli autovalori deve essere negativo (e l'altro positivo). Conseguentemente la configurazione di equilibrio  $\varphi_0 = \pi, z_0 = 0$  è instabile nel passato e nel futuro.

### ESERCIZIO 3

Si consideri la porzione di cono  $S$  di equazioni  $0 < z = \sqrt{x^2 + y^2}$  riferita a coordinate cartesiane ortonormali  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  con origine  $O$ , nello spazio di quiete di un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Un



punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi su  $S$  pensato come superficie liscia.  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza di una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e di lunghezza nulla a riposo, connessa a  $P$  ed al punto fisso  $Q = (0, h, 0)$  dove  $h > 0$ .

Si descriva la posizione del punto  $P$  su  $S$  tramite le coordinate:  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , angolo polare della proiezione di  $P$  sul piano  $z = 0$  (riferito a sono coordinate polari standard riferite agli assi  $x, y$ ) e coordinata  $\zeta := \|P - O\| \in (0, +\infty)$ . Si indichino con  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_\zeta$  i versori (tra di loro ortonormali) associati a tali coordinate e con  $\mathbf{n} := \mathbf{e}_\varphi \wedge \mathbf{e}_\zeta$  il versore normale in ogni punto alla superficie del cono.

Si risolvano i seguenti quesiti.

- (1). Si scrivano le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$ .
- (2). Si scriva la forma esplicita dell'energia meccanica totale  $\mathcal{E}$  del punto  $P$  nelle coordinate suddette e si provi che è conservata nel tempo sui moti del sistema.
- (3). Si determinino le configurazioni di equilibrio in funzione dei valori assunti dai parametri  $m, \kappa, g$  e se ne discuta la stabilità. Infine si calcoli la reazione vincolare  $\phi$  nelle eventuali configurazioni di equilibrio stabile.



Per facilitare lo svolgimento dell'esercizio precisiamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.32})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}, \quad (\text{D.33})$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{D.34})$$

**Soluzione.**

(1). L'equazione del moto del punto  $P$  è data da (omettiamo in tutto il seguito  $P|_{\mathcal{S}}$  visto che lavoriamo in un fissato riferimento inerziale e per un unico punto materiale):

$$m\mathbf{a} = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi. \quad (\text{D.35})$$

Vogliamo esprimere questa equazione nella base  $\mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{n}$ .

Se  $P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , vale la relazione  $\zeta := \sqrt{(x^2 + y^2) + z(x, y)^2}$  e quindi:

$$\zeta = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{D.36})$$

ed inoltre:

$$x = \sqrt{2} \zeta \cos \varphi, \quad (\text{D.37})$$

$$y = \sqrt{2} \zeta \sin \varphi, \quad (\text{D.38})$$

$$z = \sqrt{2} \zeta \quad (\text{D.39})$$

I versori  $\mathbf{e}_\zeta$  e  $\mathbf{e}_\varphi$  tangenti alle curve coordinate  $\zeta$  e  $\varphi$  (diretti nella direzione in cui crescono tali coordinate), ed il loro prodotto vettore  $\mathbf{n} := \mathbf{e}_\zeta \wedge \mathbf{e}_\varphi$  normale a  $S$ , sono scrivibili rispetto alla base cartesiana come:

$$\mathbf{e}_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.40})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.41})$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.42})$$

Queste relazioni si invertono (prendendo la trasposta della matrice di trasformazione) in

$$\mathbf{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{e}_\zeta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \mathbf{n}, \quad (\text{D.43})$$

$$\mathbf{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{e}_\zeta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n}, \quad (\text{D.44})$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}. \quad (\text{D.45})$$

Tornando alla (D.35) come conseguenza delle relazioni trovate abbiamo che:

$$-mg \mathbf{e}_z = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n} \quad (\text{D.46})$$

e, essendo  $-\kappa(P - Q) = -\kappa(\zeta \mathbf{e}_\zeta - h \mathbf{e}_y)$ , vale anche:

$$-\kappa(P - Q) = -\kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_\zeta + \kappa h \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n}. \quad (\text{D.47})$$

Passiamo ora ad esprimere l'accelerazione usando le coordinate  $\zeta, \varphi$  ed i versori ad essi associati. Assumiamo quindi che  $\zeta = \zeta(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  descrivano l'evoluzione del punto  $P(t)$  su  $S$ . La posizione di  $P(t)$  è individuata dal vettore posizione:  $P(t) - O = \zeta(t) \mathbf{e}_\zeta(t)$ . La derivata nel tempo di esso definisce la velocità del punto nel riferimento  $\mathcal{J}$  in cui il cono  $C$  è immobile. Bisogna tenere conto del fatto che  $\mathbf{e}_\zeta$  varia nel tempo. Indicando con il punto la derivata temporale si ha:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \zeta(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t).$$

La derivata temporale dei versori si ottiene derivando il secondo membro di (D.40)-(D.42) (assumendo  $\zeta = \zeta(t)$ ,  $\phi = \varphi(t)$ ) e quindi usando (D.43)-(D.45) nel risultato. Il calcolo fornisce:

$$\dot{\mathbf{e}}_\zeta = \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.48})$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta + \dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n}, \quad (\text{D.49})$$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\varphi} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.50})$$

come già scritto nel suggerimento dato alla fine del testo dell'esercizio.

Da queste relazioni si ha l'espressione esplicita della velocità di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}$ :

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi(t). \quad (\text{D.51})$$

Abbiamo espresso la velocità sulla base associata alla superficie su cui il punto è vincolato. Derivando (D.51) nel tempo

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\zeta}(t) \mathbf{e}_\zeta(t) + \dot{\zeta}(t) \dot{\mathbf{e}}_\zeta(t) + \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi(t) + \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\varphi(t) + \dot{\varphi}(t) \zeta(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\mathbf{e}}_\varphi(t),$$

e procedendo come sopra (usando le espressioni ottenute per le derivate dei versori), si ottiene infine l'espressione dell'accelerazione rispetto a  $\mathcal{J}$ , decomposta in parte normale e parte tangente alla superficie conica:

$$\mathbf{a}(t) = \left( \ddot{\zeta}(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t) \right) \mathbf{e}_\zeta(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) + 2 \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \right) \mathbf{e}_\varphi(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t)}{2} \mathbf{n}(t). \quad (\text{D.52})$$

L'equazione (D.35) si riscrive pertanto usando (D.52), (D.46), (D.47) e tendo conto del fatto che  $\phi = \phi \mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} & m \left( \ddot{\zeta}(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t) \right) \mathbf{e}_\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} m \left( \ddot{\varphi}(t) \zeta(t) + 2 \dot{\varphi}(t) \dot{\zeta}(t) \right) \mathbf{e}_\varphi + m \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \zeta(t)}{2} \mathbf{n} \\ &= \phi \mathbf{n} - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_\zeta - mg \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n} - \kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_\zeta + \kappa h \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \mathbf{n} . \end{aligned}$$

Raccogliendo le varie componenti abbiamo le equazioni, corrispondenti agli assi  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_\zeta$  rispettivamente:

$$m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \zeta(t) - mg \frac{\sqrt{2}}{2} - \kappa \left( \zeta - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi(t) \right) , \quad (\text{D.53})$$

$$m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -2m \zeta(t)^{-1} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\zeta}{dt} + \zeta(t)^{-1} \kappa h \sqrt{2} \cos \varphi(t) \quad (\text{D.54})$$

che costituiscono le equazioni pure di movimento, dato che sono banalmente riscrivibili in forma normale e il secondo membro è di classe  $C^\infty$  (*notare che la singolarità per  $\zeta = 0$  è fuori dal dominio delle coordinate*). Si ha infine, in corrispondenza dell'asse  $\mathbf{n}$ , l'equazione che determina la reazione vincolare quando è assegnato un moto del sistema:

$$\phi(t) = m \frac{\zeta(t)}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \frac{\sqrt{2}}{2} + \kappa h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi(t) . \quad (\text{D.55})$$

(2). Le forze, eccetto quella dovuta al vincolo, sono tutte conservative. Tenendo conto di (D.51), l'energia meccanica totale del sistema si può scrivere:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \mathcal{U} ,$$

dove l'energia potenziale vale:

$$\mathcal{U} := mgz + \frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 .$$

Usando anche  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \zeta$  e (D.47) si trova che (omettendo la costante additiva  $\kappa h^2/4$ ):

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \zeta + \frac{\kappa}{2} \left( \zeta^2 - \sqrt{2} h \zeta \sin \varphi \right) . \quad (\text{D.56})$$

L'energia meccanica è conservata, dato che l'unica forza non conservativa,  $\phi$ , ha potenza nulla valendo  $\phi \cdot \mathbf{v} = 0$ , in quanto:  $\phi$  è normale alla superficie  $S$  mentre  $\mathbf{v}$  è tangente a tale superficie. Alternativamente si può procedere partendo dalle equazioni pure di movimento (D.53) e (D.54), moltiplicando la prima per  $d\zeta/dt$  e la seconda per  $(\zeta^2/2)d\varphi/dt$  e quindi sommando membro a membro le identità ottenute in questo modo. Con qualche passaggio si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} \dot{\zeta}^2 + \frac{m}{4} \dot{\varphi}^2 \zeta(t)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} mg \zeta + \frac{\kappa}{2} \left( \zeta^2 - \sqrt{2} h \zeta \sin \varphi \right) \right] = 0 .$$

**(3).** Le configurazioni di equilibrio  $(\phi_0, \zeta_0)$  si ottengono dalle equazioni pure di movimento (D.53) e (D.54) imponendo che per  $(\varphi, \zeta) = (\phi_0, \zeta_0)$  si annullino i secondi membri di (D.53) e (D.54), quando si richiede anche che  $d\phi/dt = 0$  e  $d\zeta/dt = 0$ . In tal modo si perviene alle equazioni:

$$mg \frac{\sqrt{2}}{2} + \kappa \left( \zeta_0 - h \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi_0 \right) = 0, \quad (\text{D.57})$$

$$\cos \varphi_0 = 0. \quad (\text{D.58})$$

Ci sono quindi, a priori, due configurazioni di equilibrio:

$$\left( \pi/2, \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa) \right) \quad \text{e} \quad \left( -\pi/2, \frac{\sqrt{2}}{2}(-h - mg/\kappa) \right)$$

In realtà, *dato che deve essere*  $\zeta_0 > 0$ , la configurazione corrispondente a  $\phi_0 = -\pi/2$  e  $\zeta_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(h + mg/\kappa)$  non è accettabile in quanto  $h > 0$  per ipotesi per cui  $\zeta_0 < 0$ . La configurazione  $\phi_0 = \pi/2$  e  $\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa)$  ha senso solo se  $h > mg/\kappa$ . Studiamo la stabilità di questa configurazione. Possiamo usare  $\mathcal{E}$  come candidata funzione di Liapunov: essa soddisfa  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ , essendo conservata sui moti del sistema, ed ha un minimo stretto nella parte dell'energia cinetica in corrispondenza di  $d\phi/dt = 0$  e  $d\zeta/dt = 0$ . In questa situazione e come già visto negli altri esercizi, in base al teorema di Liapunov, si ha equilibrio stabile nel passato e nel futuro se l'energia potenziale ha matrice hessiana con autovalori tutti positivi.

La matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  vale

$$H(\varphi, \zeta) = \kappa \begin{bmatrix} \zeta \frac{\sqrt{2}}{2} h \sin \varphi & -\frac{\sqrt{2}}{2} h \cos \varphi \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} h \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Se  $\zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(h - mg/\kappa) > 0$ , troviamo in particolare:

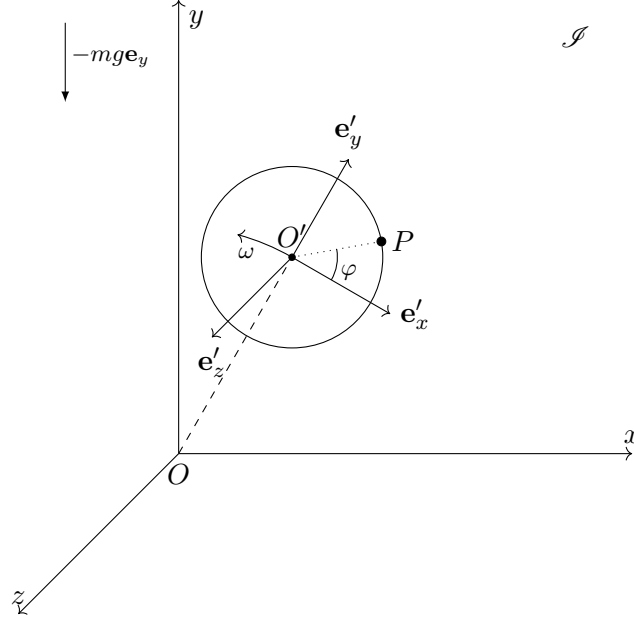
$$H(\pi/2, \zeta_0) = \kappa \begin{bmatrix} \zeta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} h & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha entrambi gli autovalori positivi e pertanto l'equilibrio è stabile nel passato e nel futuro. In questa configurazione di equilibrio, la (D.55) fornisce:

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} (mg + \kappa h) \mathbf{n} = \frac{1}{2} (mg + \kappa h) (-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).$$

#### ESERCIZIO 4

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . L'asse  $\mathbf{e}_y$  è verticale in direzione opposta



all'accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$  (con  $g \geq 0$ ). Un punto geometrico  $O'$ , distante  $R > 0$  da  $O$ , ruota nel piano  $xy$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ , essendo  $\omega > 0$  costante nel tempo. Sia  $\mathcal{I}'$  un nuovo sistema di riferimento (non inerziale) che ammette un sistema di coordinate cartesiane destrorse ortonormali  $x', y', z'$  solidali con  $\mathcal{I}'$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  con  $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}'_y$  dato dal versore di  $O' - O$ . Si supponga che  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ .

Nel piano  $x'y'$ , in quiete con  $\mathcal{I}'$ , si trova una circonferenza  $\Gamma$  di centro  $O'$  e raggio  $r > 0$  con  $r < R$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$ , sottoposto alla forza di gravità è vincolato a muoversi su  $\Gamma$  pensata come vincolo *liscio*. Si indichi con  $\phi$  la reazione vincolare agente su  $P$  dovuta al vincolo.

(1). Si determini l'equazione pura di movimento del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}'$ , usando come coordinata del punto l'angolo  $\varphi$  che  $P - O'$  individua rispetto a  $\mathbf{e}'_x$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}'_z$ .

(2). Si ricavi il valore della reazione vincolare  $\phi$  al tempo  $t = 0$  quando valgono le condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Esprimere tale reazione vincolare rispetto agli assi del riferimento  $\mathcal{I}$ .

(3). Assumendo  $g = 0$ , si dimostri che la grandezza

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - m \omega^2 R r \sin \varphi$$

è conservata nel tempo su ogni moto di  $P$ . *Facoltativo*: si spieghi quale sia il significato fisico di  $\mathcal{E}$ .

(4). Assumendo  $g = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}'$  e se ne discuta la stabilità.

### Soluzione.

(1). Convien scrivere l'equazione del moto inizialmente in  $\mathcal{S}$  e poi passare a  $\mathcal{S}'$  esprimendo le varie quantità cinematiche  $P$  riferite a  $\mathcal{S}$  in funzione delle analoghe in  $\mathcal{S}'$ .

Nel riferimento  $\mathcal{S}$ , le equazioni del moto sono semplicemente:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}} = -mg\mathbf{e}_y + \boldsymbol{\phi}. \quad (\text{D.59})$$

Esprimiamo  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}}$  in funzione dell'accelerazione in  $\mathcal{S}'$ , tenendo conto che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}}$  è costante nel tempo, ma  $O'$  è in movimento rispetto a  $\mathcal{S}$ :

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}'} + \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{S}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (P - O')).$$

L'accelerazione di  $O'$  rispetto a  $\mathcal{S}$  si determina come una pura accelerazione centripeta:

$$\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}'|_{\mathcal{S}}} \wedge (O' - O)) = -\omega^2(O' - O) = -\omega^2 R \mathbf{e}'_y.$$

Posto  $P(t) - O' = \mathbf{x}'(t) = x'(t)\mathbf{e}'_x + y'(t)\mathbf{e}'_y$  abbiamo dunque che:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}} = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} - \omega^2 R \mathbf{e}'_y + 2\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt} + \omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}').$$

Tenendo infine conto che:

$$\mathbf{e}_y = (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}'_x) \mathbf{e}'_x + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}'_y) \mathbf{e}'_y = \sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y,$$

si ricava:

$$-mg\mathbf{e}_y = -mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y).$$

Mettendo tutto insieme abbiamo che (D.59) si riscrive, usando le quantità cinematiche di  $\mathcal{S}'$ :

$$m \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = \boldsymbol{\phi} - mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}'_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}'_y) + m\omega^2 R \mathbf{e}'_y - 2m\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt} - m\omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}'). \quad (\text{D.60})$$

L'equazione pura di movimento si ottiene passando a lavorare in coordinate naturali adattate al vincolo. In questo caso conviene usare coordinate polari piane  $r, \varphi$  centrate in  $O'$ , in modo che  $\boldsymbol{\phi}$  appaia solo nell'equazione ottenuta proiettando su  $\mathbf{e}_r$ , mentre non appaia nell'equazione che si ottiene proiettando su  $\mathbf{e}_\varphi$ . Quest'ultima sarà l'equazione pura di movimento. Al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}'_x + \sin \varphi \mathbf{e}'_y, \quad (\text{D.61})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}'_x + \cos \varphi \mathbf{e}'_y, \quad (\text{D.62})$$

che si invertono, prendendo la trasposta della matrice associata alla trasformazione lineare sopra scritta, in

$$\mathbf{e}'_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi , \quad (\text{D.63})$$

$$\mathbf{e}'_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi . \quad (\text{D.64})$$

Ulteriormente, essendo  $\mathbf{x}'(t) = r \mathbf{e}_r(t)$  (con  $r$  costante) si ha che:

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi(t) ,$$

e ancora:

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi(t) - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r(t) ,$$

Sostituendo queste identità in (D.60), facendo anche uso di (D.63) e (D.64), notando infine che

$$\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r ,$$

si ottiene l'equazione, equivalente a (D.60):

$$\begin{aligned} mr \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mr \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r &= \phi \mathbf{e}_r - mg (\cos(\omega t) \sin \varphi + \sin(\omega t) \cos \varphi) \mathbf{e}_r \\ &- mg (\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi) \mathbf{e}_\varphi + m\omega^2 R (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) + 2m\omega r \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_r \\ &+ m\omega^2 r \mathbf{e}_r . \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori complessivi di  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_r$  otteniamo rispettivamente le equazioni:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{r} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega^2 R}{r} \cos \varphi , \quad (\text{D.65})$$

$$\phi = -mr \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg \sin(\omega t + \varphi) - m\omega^2 R \sin \varphi - 2m\omega r \frac{d\varphi}{dt} - m\omega^2 r . \quad (\text{D.66})$$

La (D.65) è un'equazione differenziale del prim'ordine in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , pertanto determina il moto del sistema (nella coordinate *locale*  $\varphi$ ) unicamente, quando sono assegnate condizioni iniziali. Questa è l'equazione pura di movimento. La seconda equazione individua il valore della reazione vincolare una volta noto il moto del sistema.

(2). Direttamente dall'equazione (D.66) troviamo:

$$\phi(0) = m [g - \omega^2(R + r)] \mathbf{e}_r .$$

Nelle nostre ipotesi, a  $t = 0$ ,  $O'$  si trova in  $R \mathbf{e}_y$ , mentre  $\mathbf{e}_r$  per  $\varphi = \pi/2$  coincide con  $\mathbf{e}'_y$ . Ma per ipotesi  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  a  $t = 0$  e pertanto, all'istante considerato:

$$\phi(0) = m [g - \omega^2(R + r)] \mathbf{e}_y .$$

(3) Nel caso  $g = 0$ , riscriviamo l'equazione (D.65) come:

$$mr^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m\omega^2 Rr \cos \varphi = 0 .$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per  $\frac{d\varphi}{dt}$  si trova:

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - m\omega^2 Rr \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = 0 .$$

che può essere riscritta:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} mr^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi(t) \right] = 0 .$$

Cioé, su ogni moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} \left( \phi(t), \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 .$$

Passiamo al significato fisico di  $\mathcal{E}$ . Esaminando l'equazione (D.60) nel caso  $g = 0$ , si vede che le forze viste agire in  $\mathcal{S}'$ , eccettuata la reazione vincolare  $\phi$  che è girostatica, sono: un'altra forza girostatica  $-2m\omega \mathbf{e}'_z \wedge \frac{d\mathbf{x}'}{dt}$  e due forze conservative:

$$\omega^2 R \mathbf{e}'_y ,$$

(pensabile come una forza di gravità effettiva nella direzione  $y'$ ) e

$$-m\omega^2 \mathbf{e}'_z \wedge (\mathbf{e}'_z \wedge \mathbf{x}') = m\omega^2 \mathbf{x}'$$

(pensabile come dovuta ad una molla *repulsiva* di costante elastica  $-m\omega^2$  attaccata in  $O'$  di lunghezza nulla a riposo). L'energia potenziale totale è:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}'}(x', y') = -\omega^2 R y' - \frac{m\omega^2}{2} (x'^2 + y'^2) .$$

Dato che il moto avviene sulla circonferenza  $x'^2 + y'^2 = r^2$ , sui moti del sistema il secondo addendo rimane costante (la forza ad esso associata non compie pertanto lavoro). In definitiva, sui moti del sistema vincolato, l'energia potenziale è solamente, eliminando una costante additiva inessenziale:

$$-\omega^2 R y' = -m\omega^2 Rr \sin \varphi .$$

Pertanto, tenendo conto che l'energia cinetica di  $P$  in  $\mathcal{S}'$ , tenendo conto del vincolo, è proprio:

$$\frac{1}{2} mr^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

concludiamo che

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi$$



rappresenta l'energia meccanica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}'$  tenendo conto del vincolo.

(4). Le configurazioni di equilibrio si ottengono dall'equazione pura di movimento (cfr (D.65) con  $g = 0$ ),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\omega^2 R}{r} \cos \varphi, \quad (\text{D.67})$$

cercando i punti  $\varphi_0$  tali che annullano il secondo membro nelle ipotesi, qui irrilevante, che  $d\varphi/dt = 0$ . Le configurazioni di equilibrio sono quindi gli angoli  $\varphi_0$  che soddisfano:  $\cos \varphi_0 = 0$ :  $\varphi_0 = 0, \pi$ . Per studiarne la stabilità usiamo  $\mathcal{E}$  come funzione di Liapunov. Possiamo scrivere

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \mathcal{U}(\varphi)$$

dove:

$$\mathcal{U}(\varphi) := -m\omega^2 Rr \sin \varphi.$$

Si osservi che, come ci si aspetta, le configurazioni di equilibrio risultano essere i punti di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ . Dato che  $\mathcal{E} = 0$ , dato che  $\mathcal{E}$  si conserva sui moti del sistema e dato che la parte di  $\mathcal{E}$  contenente  $\dot{\varphi}$  ha un minimo stretto in corrispondenza di  $\dot{\varphi} = 0$ , per avere stabilità nel passato e nel futuro è sufficiente che  $\mathcal{U}$  abbia un minimo stretto in corrispondenza della configurazione di equilibrio considerata. Studiamo quindi la matrice hessiana di  $\mathcal{V}$  che si riduce ad un numero:

$$H(\varphi_0) = \frac{d^2}{d\varphi^2} \mathcal{U}|_{\varphi_0} = m\omega^2 Rr \sin \varphi_0.$$

In tal modo troviamo:

$$H(\pi/2) = m\omega^2 Rr.$$

Concludiamo che la configurazione di equilibrio  $\varphi_0 = \pi/2$  è stabile nel passato e nel futuro. Si tenga ora conto che le equazioni pure di movimento possono essere riscritte come:

$$mr^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d\mathcal{U}}{d\varphi},$$

pensabile come equazione del moto per un punto materiale in una dimensione, sottoposto ad una forza conservative e dotato di massa  $M = mr^2$ . Tenendo allora conto dell'osservazione 7.9 ed applicando la proposizione 7.8 concludiamo che se la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  ha un autovalore negativo in corrispondenza di una configurazione di equilibrio, allora si ha instabilità nel passato e nel futuro. Essendo:

$$H(-\pi/2) = -m\omega^2 Rr,$$

concludiamo che  $\varphi_0 = -\pi/2$  è instabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 5

Si consideri un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  ed un sistema di coordinate cartesiane ortonormali solidale ad esso, di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  con asse  $y$  verticale. Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato al cilindro di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 0$ . Supponendo la superficie del cilindro *liscia* si assuma che sul punto materiale agisca, oltre alla reazione vincolare:

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_y$  e

(ii) la forza di una molla di costante elastica  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, attaccata a  $P$  ed al punto  $Q = (2R, 0, 0)$  fisso in  $\mathcal{I}$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando coordinate cilindriche standard  $r, \varphi, z$  adattate al cilindro (ovviamente  $r = R$  costantemente per il punto  $P$ ).

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\phi$  quando è assegnato un moto del sistema.

(2). Si scriva esplicitamente la forma dell'energia meccanica del punto  $P$  e si provi che è conservata sui moti del sistema.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso:

$$\frac{2\kappa R}{mg} = 1 .$$

In questo caso si calcoli la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare in ogni configurazione di equilibrio stabile.

(4). *FACOLTATIVO*. Si dimostri che sul moto si conserva l'integrale primo:

$$\Lambda = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi .$$

Si usi infine questo integrale primo per esprimere la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione della sola variabile  $\varphi$ , sul moto determinato dalle condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$  e  $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ .

**NOTA.** Per il calcolo dell'accelerazione in coordinate cilindriche ricordiamo le identità :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi , \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r .$$

**Soluzione.**

(1) Omettendo  $P|_{\mathcal{I}}$  per semplicità, dato che c'è un unico punto in movimento ed un unico riferimento, il secondo principio della dinamica fornisce:

$$m\mathbf{a} = \phi - mg \mathbf{e}_y - \kappa(P - Q) .$$

Esprimiamo questa equazione rispetto alla base  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  in coordinate cilindriche. Teniamo conto delle relazioni:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.68})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.69})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.70})$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.71})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.72})$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.73})$$

da cui:

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

Tenendo conto che è  $P - O = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$  troviamo che:

$$\mathbf{v} = R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.74})$$

e quindi:

$$\mathbf{a} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.75})$$

Il primo membro dell'equazione del moto si scrive dunque:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z.$$

Riguardo al secondo membro si ha:  $\phi = \phi \mathbf{e}_r$  in quanto il vincolo è liscio per ipotesi. Inoltre

$$-mg \mathbf{e}_y = -mg \sin \varphi \mathbf{e}_r - mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Infine, essendo:

$$P - Q = (P - O) - (Q - O) = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \mathbf{e}_x = R \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z - 2R \cos \varphi \mathbf{e}_r + 2R \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

troviamo:

$$-\kappa(P - Q) = \kappa R(2 \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_r - 2R\kappa \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa z \mathbf{e}_z.$$

Mettendo tutto insieme le equazioni del moto risultano essere:

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r + m \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z &= \phi \mathbf{e}_r - mg \sin \varphi \mathbf{e}_r - mg \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ &+ \kappa R(2 \cos \varphi - 1) \mathbf{e}_r - 2R\kappa \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi - \kappa z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Raccogliendo i fattori dei vari versori separatamente otteniamo: il sistema, che costituisce le equazioni pure di movimento essendo scrivibile in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ :

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \cos \varphi - 2\kappa R \sin \varphi , \quad (\text{D.76})$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\kappa z , \quad (\text{D.77})$$

insieme all'equazione che determina la reazione vincolare:

$$\phi = mg \sin \varphi - \kappa R(2 \cos \varphi - 1) - mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 . \quad (\text{D.78})$$

(2). L'energia meccanica si conserva sicuramente in quanto l'unica forza non conservativa è  $\phi$  che è normale al cilindro mentre la velocità di  $P$  è tangente al cilindro. In tal caso la potenza dissipata da  $\phi$  è nulla e, dal teorema di bilancio dell'energia meccanica, abbiamo la conservazione sui moti dell'energia meccanica. L'energia meccanica ha la forma, usando (D.74):

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \mathcal{U}(\varphi, z) ,$$

dove l'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e di quella della molla, usando l'espressione precedentemente ottenuta per  $P - O$  e  $y = R \cos \varphi$ , si trova:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) = mgy + \frac{\kappa}{2}(P - Q)^2 = mgR \sin \varphi + \frac{\kappa z^2}{2} - 2\kappa R^2 \cos \varphi + \frac{5\kappa R^2}{2} .$$

Nel seguito ometteremo l'inessenziale costante additiva finale nell'espressione di  $\mathcal{U}$ . In definitiva abbiamo trovato che:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi . \quad (\text{D.79})$$

(3). Le configurazioni di equilibrio  $(\varphi_0, z_0)$  si ottengono imponendo che esse annullino il secondo membro delle equazioni pure di movimento quando le derivate temporali di  $\varphi$  e  $z$  sono nulle in tali secondi membri (questa condizione non ha alcun effetto nel caso in esame visto che le derivate di tali variabili non appaiono nei secondi membri delle equazioni pure di movimento). Imponendo tali condizioni, si ottengono le equazioni che determinano tutte le configurazioni di equilibrio:

$$mg \cos \varphi_0 + 2\kappa R \sin \varphi_0 = 0 , \quad (\text{D.80})$$

$$z_0 = 0 . \quad (\text{D.81})$$

Passiamo a studiare la stabilità usando il teorema di Lipunov con  $\mathcal{E}$  come funzione di Liapunov. Nel caso  $2\kappa R/(mg) = 1$ , le soluzioni sono:  $(\varphi_0, z_0) = (-\pi/4, 0)$  e  $(\varphi_0, z_0) = (3\pi/4, 0)$ . La matrice hessiana dell'energia potenziale  $\mathcal{U}(\varphi, z)$  vale

$$H(\varphi, z) = \text{diag}(-mgR \sin \varphi + 2\kappa R^2 \cos \varphi , \kappa) .$$

Pertanto troviamo:

$$H(-\pi/2, 0) = \text{diag} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}(mgR + 2\kappa R^2), \kappa \right) .$$

Gli autovalori in questo caso sono entrambi positivi e pertanto, essendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  ed avendo  $\mathcal{E}$  un minimo stretto nel punto singolare individuato dalla configurazione di equilibrio suddetta, si ha equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

Direttamente da (D.78) troviamo che nella configurazione di equilibrio stabile  $(\varphi_0, z_0) = (-\pi/2, 0)$ :

$$\phi = -mg \frac{\sqrt{2}}{2} - \kappa R(\sqrt{2} - 1) .$$

Passiamo all'altra configurazione di equilibrio. Similmente a prima troviamo:

$$H(3\pi/2, 0) = \text{diag} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}(mgR + 2\kappa R^2), \kappa \right) .$$

In questo caso un autovalore della matrice hessiana è negativo. Essendo il sistema in esame conservativo (escludendo la reazione vincolare), possiamo concludere che l'equilibrio è instabile nel passato e nel futuro.

(4). Moltiplicando i due membri di (D.76) per  $Rd\varphi/dt$  e portando a primo membro il secondo membro ottenuto in questo modo, l'identità che si ottiene alla fine risulta essere:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = 0 .$$

Dato che  $\Lambda$  è conservato nel tempo, sulla soluzione considerata il valore di  $\Lambda$  sarà quello valutato al tempo iniziale. Dall'espressione di  $\Lambda$ , tenuto conto delle condizioni iniziali troviamo:

$$\frac{m}{2}R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgR \sin \varphi - 2\kappa R^2 \cos \varphi = -2\kappa R^2 .$$

Di conseguenza:

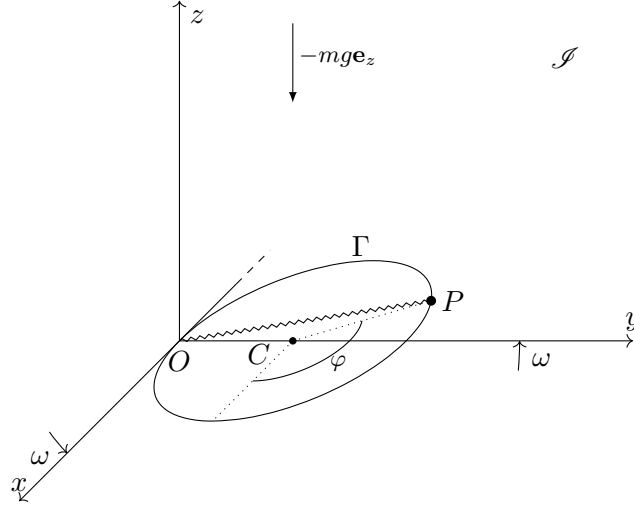
$$mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -4\kappa R + 2mg \sin \varphi - 4\kappa R \cos \varphi .$$

Inserendo in (D.78) troviamo l'espressione richiesta:

$$\phi(\varphi) = -mg \sin \varphi + 2\kappa R \cos \varphi + 5\kappa R .$$

## ESERCIZIO 6

Sia  $\mathcal{I}_0$  un sistema di riferimento *inerziale* ed  $\mathcal{I}$  un altro riferimento che ruota senza traslare (rispetto a  $\mathcal{I}_0$ ) attorno al punto  $O$  in quiete in  $\mathcal{I}_0$ . Si consideri un sistema di coordinate



cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$  e si supponga che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}_0} = \omega \mathbf{e}_z$  con  $\omega > 0$  costante. Una circonferenza  $\Gamma$  di raggio  $R > 0$ , tangente all'asse  $x$  in  $O$ , è in quiete in  $\mathcal{I}$  nel semipiano  $z = 0, y \geq 0$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  vincolato a  $\Gamma$ , supposta liscia, è sottoposto alle seguenti forze in aggiunta alla reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$ :

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z, g \geq 0$ ,

(ii) la forza di una molla ideale di costante  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, fissata ad  $O$ .

Si risolvano i seguenti quesiti descrivendo  $P$  in coordinate cilindriche  $r, \varphi, z$  dove:  $r = 0$  individua il centro della circonferenza  $C$  e  $\varphi$  è valutato rispetto all'asse parallelo a  $x$  passante per  $C$ .

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  sui moti del sistema.

(2). Si dimostri che sui moti si conserva l'integrale primo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + (R^2\kappa - m\omega^2R^2) \sin \varphi.$$

Si provi che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$  e si spieghi perché  $\mathcal{E}$  si conserva usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

(3). Si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Se ne discuta la stabilità a seconda che  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $m\omega^2/\kappa = 1$  e  $m\omega^2/\kappa < 1$ .

(4). Si esprima la componente lungo  $\mathbf{e}_r$  della reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  in funzione della sola variabile

$\varphi$ , sul moto determinato dalle condizioni iniziali  $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega > 0$ .

**NOTE.** (1) Per il calcolo dell'accelerazione in coordinate cilindriche ricordiamo le identità :

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.$$

inoltre:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$$

(2) Per discutere l'instabilità nel caso  $g = 0$  e  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  può essere utile notare che l'equazione pura di movimento di  $P$  è interpretabile come quella di un punto materiale sulla retta reale, di massa  $M = mR$  e posizione  $\varphi \in \mathbb{R}$ , soggetto ad una sola forza conservativa di energia potenziale

$$\mathcal{U}(\varphi) := (R^2\kappa - m\omega^2 R^2) \sin \varphi.$$

**Soluzione.**

(1). Nel seguito:  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}'|\mathcal{J}}$ . L'equazione del moto di  $P$  nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  ha la forma:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}_0} = \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - O).$$

Teniamo conto del fatto che, essendo il moto puramente traslatorio e con velocità angolare costante, vale la relazione tra le accelerazioni di  $P$  valutate nei due riferimenti (ometteremo sottointendendolo l'indice  $P$  nelle accelerazioni e velocità d'ora in poi):

$$\mathbf{a}|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{a}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{J}}.$$

Pertanto l'equazione del moto del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}$  risulta essere:

$$m\mathbf{a}|_{\mathcal{J}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - O). \quad (\text{D.82})$$

Dobbiamo ora decomporre questa equazione sulla terna  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  associata alle coordinate cilindriche. L'equazione che otterremo lungo  $\mathbf{e}_\varphi$  non conterrà componenti della reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi} = \phi^z \mathbf{e}_z + \phi^r \mathbf{e}_r$  a causa dell'ipotesi di vincolo liscio. Tale equazione sarà, al solito, l'equazione pura di movimento. Le rimanenti due equazioni determineranno le reazioni vincolari una volta noto il moto del sistema.

Dobbiamo esprimere ogni grandezza vettoriale sulla base detta. Notiamo che, se  $C$  è il centro di  $\Gamma$ :

$$P - O = P - C + C - O = R \mathbf{e}_r + R \mathbf{e}_y = R \mathbf{e}_r + R(\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

da cui:

$$P - O = R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{D.83})$$

In coordinate cilindriche e tenendo conto che  $r = R$  e  $z = 0$  costantemente, abbiamo le relazioni, se  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  denotano rispettivamente la velocità e l'accelerazione di  $P$  rispetto a  $\mathcal{J}$ :

$$\mathbf{v} = R\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{a} = R\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r, \quad (\text{D.84})$$

Queste formule si ottengono facilmente notando che la velocità e l'accelerazione di  $P$  in  $\mathcal{I}$  sono le derivate temporali prima e seconda rispettivamente, rispetto a  $\mathcal{I}$ , di  $P - C = R \mathbf{e}_r$ . Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z$  formano una base destrorsa nel calcolarne i prodotti vettoriali, usando (D.83) e (D.84) in (D.82), giungiamo all'equazione:

$$\begin{aligned} mR\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - mR\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r &= m\omega^2 R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r + m\omega^2 R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi + 2m\omega R\dot{\varphi} \mathbf{e}_r \\ &+ \phi^z \mathbf{e}_z + \phi^r \mathbf{e}_r - mg \mathbf{e}_z - \kappa R(1 + \sin \varphi) \mathbf{e}_r - \kappa R \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi . \end{aligned}$$

Proiettando su  $\mathbf{e}_\varphi$  otteniamo l'equazione:

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi , \quad (\text{D.85})$$

che è immediatamente esprimibile in forma normale, con secondo membro di classe  $C^\infty$ , e pertanto determina il moto del punto  $P$  per assegnate condizioni iniziali. Questa è dunque l'equazione pura di movimento. Le proiezioni su  $\mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}_r$  individuano le equazioni che forniscono la reazione vincolare quando è dato un moto del sistema:

$$\phi^z = -mg , \quad (\text{D.86})$$

$$\phi^r = -mR\dot{\varphi}^2 + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R\dot{\varphi} . \quad (\text{D.87})$$

(2). Moltiplicando per  $R\dot{\varphi}$  entrambi i membri dell'equazione (D.85) e raccogliendo a primo membro il risultato, si ha:

$$mR\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - R^2(m\omega^2 - \kappa)\dot{\varphi} \cos \varphi = 0$$

che può essere riscritta come

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 + (R^2 \kappa - m\omega^2 R^2) \sin \varphi \right) = 0 .$$

Questo prova che  $\mathcal{E}$  si conserva sui moti del sistema. Consideriamo ora l'equazione (D.82) e studiamo le forze a secondo membro dal punto di vista del teorema di conservazione dell'energia. Sul punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  agiscono le forze conservative della molla, con energia potenziale

$$\mathcal{U}_\kappa(P) = \frac{1}{2} \kappa (P - O)^2 = \frac{1}{2} \kappa R^2 (1 + \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} \kappa R^2 \cos^2 \varphi = \kappa R^2 \sin \varphi + \text{costante} ,$$

e della gravità, la cui energia potenziale è sempre costante (e può essere presa nulla) essendo la quota di  $P$  sempre costante:

$$\mathcal{U}_g(P) = 0 .$$

Consideriamo poi le due forze inerziali. Quella centrifuga è :

$$-m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)) = m\omega^2 (P - O) ,$$



ed è conservativa (notare che  $\omega$  è costante e la forza ha la struttura di quella di una molla repulsiva di costante elastica  $-m\omega^2$ ) con energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{cent}(P) = -\frac{1}{2}m\omega^2(P - O)^2 = -m\omega^2 R^2 \sin \varphi + \text{costante} .$$

La forza di di Coriolis:

$$-2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{S}} ,$$

non compie lavoro essendo sempre normale alla velocità . Infine, l'ultima forza in gioco che appare nel secondo membro di (D.82), la reazione vincolare  $\phi$ , non compie lavoro essendo normale alla velocità . In definitiva, dal teorema di conservazione dell'energia meccanica, si conserva l'energia meccanica ottenuta sommando l'energia cinetica

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$$

all'energia potenziale totale data dalla somma delle tre energie potenziali sopra individuate. A meno, eventualmente, della solita costante additiva, l'energia totale meccanica coincide dunque con  $\mathcal{E}$ .

(3). Riscriviamo l'equazione pura di movimento come sistema del prim'ordine:

$$mR\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi , \quad (\text{D.88})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} , \quad (\text{D.89})$$

le configurazioni di equilibrio  $\varphi_0$  sono individuate dal fatto che l'unica soluzione del sistema di sopra, corrispondente alla condizione iniziale ( $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ ), è quella costante  $\varphi(t) = \varphi_0$ . Dal teorema di esistenza ed unicità si ha subito che  $\varphi_0$  è configurazione di equilibrio se e solo se:

$$R(m\omega^2 - \kappa) \cos \varphi_0 = 0 . \quad (\text{D.90})$$

Abbiamo pertanto che: se  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  si hanno due configurazioni di equilibrio  $\varphi_{\pm} := \pm\pi/2$ , mentre *ogni* punto  $\varphi_0 \in [-\pi, \pi)$  è configurazione di equilibrio se  $m\omega^2/\kappa = 1$ . In questo caso le configurazioni di equilibrio *non sono isolate*.

Lo studio della stabilità nel caso  $m\omega^2/\kappa \neq 1$  può essere eseguito usando

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + (R^2\kappa - m\omega^2 R^2) \sin \varphi$$

come funzione di Liapunov per il sistema del prim'ordine scritto sopra; oppure attraverso il teorema di Lagrange-Dirichlet, pensando le equazioni (D.85) come le equazioni del moto per un problema unidimensionale per un punto di massa  $mR$ , coordinata  $\varphi$  in moto sulla retta reale sottoposto alla sola forza conservativa di energia potenziale:

$$\mathcal{U}(\varphi) = R(\kappa - m\omega^2) \sin \varphi .$$

Per l'instabilità, per  $m\omega^2/\kappa \neq 1$ , conviene usare il secondo punto di vista e riferirsi al teorema della matrice hessiana del potenziale nei punti di stazionarietà. Esaminiamo le varie situazioni nel caso  $m\omega^2/\kappa \neq 1$ .

Se  $m\omega^2/\kappa < 1$ ,  $\varphi_+$  e  $\varphi_-$  corrispondono rispettivamente ad un massimo ed ad un minimo stretti dell'energia potenziale. Nel caso del massimo la matrice hessiana dell'energia potenziale è negativa. Concludiamo che, se  $m\omega^2/\kappa < 1$ ,  $\varphi_-$  è un punto di equilibrio stabile nel passato e nel futuro, mentre  $\varphi_+$  è un punto di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.

Se  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $\varphi_+$  e  $\varphi_-$  corrispondono rispettivamente ad un minimo ed ad un massimo stretti dell'energia potenziale. Nel caso del massimo la matrice hessiana dell'energia potenziale è negativa. Concludiamo che, se  $m\omega^2/\kappa > 1$ ,  $\varphi_+$  è un punto di equilibrio stabile nel passato e nel futuro, mentre  $\varphi_-$  è un punto di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.

Se  $m\omega^2/\kappa = 1$ , non possiamo usare i metodi classici in quanto le configurazioni di equilibrio non sono isolate. Tuttavia l'analisi diretta mostra che ogni configurazione di equilibrio è instabile. Infatti, nel caso considerato, l'equazione del moto si riduce a:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Questa, riscritta come sistema al primo'ordine, è:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = 0 \quad (\text{D.91})$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (\text{D.92})$$

La soluzione di questo sistema con condizioni iniziali  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$  è  $\varphi(t) = \varphi_0 + t\dot{\varphi}_0$ . Deve allora essere chiaro che ogni punto  $\varphi_0$ , che è configurazione di equilibrio per quanto detto, è *instabile nel passato e nel futuro*. Infatti comunque fissiamo un intorno  $U$  attorno a  $(\varphi_0, 0)$  ogni soluzione del sistema con condizioni iniziali (diverse da  $(\varphi_0, 0)$ ) in un intorno  $V \subset U$  di  $(\varphi_0, 0)$  piccolo a piacere, non potrà essere confinata in  $U$  per tutti i tempi  $t \in \mathbb{R}$  a causa del suo andamento lineare in  $t$  (se  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ ).

(4). In virtù della conservazione di  $\mathcal{E}$  varrà, si u ogni fissato moto:  $\mathcal{E}(t=0) = \mathcal{E}(t)$ . Nel caso in esame, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate avremo dunque che:

$$\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}(t)^2 + (R^2\kappa - m\omega^2R^2)\sin\varphi(t).$$

Quest'equazione produce:

$$\dot{\varphi}(t)^2 = 2\left(\omega^2 - \frac{\kappa}{m}\right)\sin\varphi(t) + \omega^2,$$

che si risolve in

$$\dot{\varphi}(t) = \pm \sqrt{2\left(\omega^2 - \frac{\kappa}{m}\right)\sin\varphi(t) + \omega^2}.$$

Il segno viene fissato notatdo che per  $t = 0$  il primo membro deve coincidere con  $\omega > 0$ . Tale segno, per continuità viene mantenuto almeno fino a quando  $\dot{\varphi}(t)$  non si annulla. Pertanto abbiamo che:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2},$$

valida istante per istante sul moto considerato. Inserendo questa espressione nell'equazione che determina  $\phi^r$ :

$$\phi^r = -mR\dot{\varphi}^2 + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R\dot{\varphi},$$

si ottiene una relazione che individua, sul moto detto,  $\phi^r$  come funzione della sola posizione  $\varphi$ :

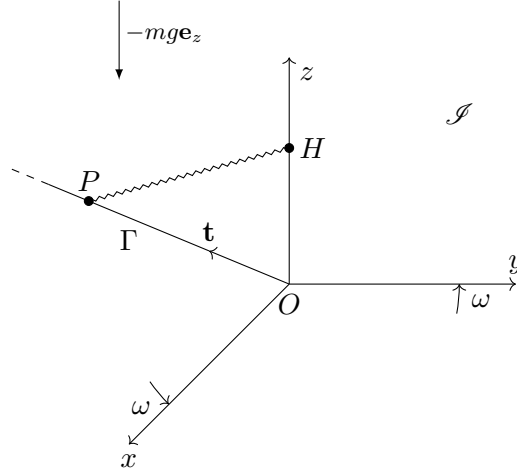
$$\phi^r(\varphi) = -mR \left[ 2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2 \right] + R(\kappa - m\omega^2)(1 + \sin \varphi) - 2m\omega R \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2},$$

da cui:

$$\phi^r(\varphi) = R\kappa - 2mR\omega^2 + 3R(\kappa - m\omega^2) \sin \varphi - 2m\omega R \sqrt{2 \left( \omega^2 - \frac{\kappa}{m} \right) \sin \varphi + \omega^2}.$$

## ESERCIZIO 7

Sia  $\mathcal{I}_0$  un sistema di riferimento *inerziale* ed  $\mathcal{I}$  un altro riferimento che ruota senza traslare (rispetto a  $\mathcal{I}_0$ ) attorno al punto  $O$  in quiete in  $\mathcal{I}_0$ . Si consideri un sistema di coordinate



cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$  e si supponga che  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}_0} = \omega \mathbf{e}_z$  con  $\omega > 0$  costante. Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  vincolato alla retta  $\Gamma$  uscente da  $O$  con versore tangente  $\mathbf{t} = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)/\sqrt{2}$ , supposta liscia, è sottoposto alle seguenti forze in addizione alla reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$ :

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ ,

(ii) la forza di una molla ideale di costante  $\kappa > 0$ , lunghezza nulla a riposo, fissata ad  $H = O + h \mathbf{e}_z$  con  $h > 0$  noto.

Si risolvano i seguenti quesiti descrivendo  $P$  in termini della lunghezza, *indicata con  $s$* , del segmento  $P - O$  (di segno negativo se  $P$  precede  $O$ ).

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento del punto  $P$  e l'equazione che determina la reazione vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  sui moti del sistema.

(2). Si dimostri che sui moti si conserva l'integrale primo:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h)$$

Si provi che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$  e si spieghi perché  $\mathcal{E}$  si conserva usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica.

(3). Supponendo  $mg \geq \kappa h$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Se ne discuta la stabilità a seconda che  $m\omega^2/(2\kappa) > 1$ ,  $m\omega^2/(2\kappa) = 1$  e  $m\omega^2/(2\kappa) < 1$ .

(4). Posto  $a := (2\kappa - m\omega^2)/(2m)$  e  $b := (mg - \kappa h)/(m\sqrt{2})$ , si trovi il moto del sistema nell'ipotesi  $a > 0$  quando sono assegnate le condizioni iniziali  $\dot{s}(0) = 0$  e  $s(0) = b/a$  e si scriva, in

funzione del tempo, la reazione vincolare su tale moto.

**Soluzione.**

(1) Conviene introdurre una nuove base ortonormale destrorsa  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  con  $\mathbf{n} := (\mathbf{e}_z - \mathbf{e}_x)/\sqrt{2}$  e  $\mathbf{b} := \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ . Da cui si ha subito che

$$\mathbf{e}_x = (\mathbf{t} - \mathbf{n})/\sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_y = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_z = (\mathbf{t} + \mathbf{n})/\sqrt{2}$$

Al fine di scrivere esplicitamente la forza della molla in funzione di  $s$  si osservi che vale  $P-O = st$  e quindi:

$$P - H = P - O + O - H = st - \frac{h \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} = st - h \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto, nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}_0$ , l'equazione  $F = ma$  si scrive:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}_0} = -mg \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}} - \kappa st + \frac{\kappa h(\mathbf{t} + \mathbf{n})}{\sqrt{2}} + \phi. \quad (\text{D.93})$$

Nel riferimento  $\mathcal{I}$  abbiamo di conseguenza che:

$$m(\mathbf{a}_P|_{\mathcal{I}} + \omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} + \omega \mathbf{e}_z \wedge (\omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O))) = -mg \frac{\mathbf{t} + \mathbf{n}}{\sqrt{2}} - \kappa st + \frac{\kappa h(\mathbf{t} + \mathbf{n})}{\sqrt{2}} + \phi.$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_z = (\mathbf{t} + \mathbf{n})/\sqrt{2}$ , del fatto che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} = \dot{s}\mathbf{t}$  ed, infine, del fatto che  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  è base ortonormale destrorsa, abbiamo l'equazione del moto in  $\mathcal{I}$  (si osservi che  $\phi$  non ha componenti lungo  $\mathbf{t}$  essendo il vincolo ideale):

$$m\ddot{s}\mathbf{t} = \left(-\frac{mg}{\sqrt{2}} - \kappa s + \frac{h\kappa}{\sqrt{2}} + \frac{m\omega^2 s}{2}\right)\mathbf{t} + \left(-\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{h\kappa}{\sqrt{2}} - \frac{m\omega^2 s}{2} + \phi^n\right)\mathbf{n} + (-\sqrt{2}m\omega\dot{s} + \phi^b)\mathbf{b}.$$

Separando le equazioni ottenute dalle varie componenti otteniamo quindi, in riferimento all'asse  $\mathbf{t}$ , l'equazione pura di movimento:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} - \kappa s + \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 s}{2}, \quad (\text{D.94})$$

questa è un'equazione differenziale del secondo ordine in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$  e pertanto determina univocamente la soluzione del problema del moto una volta assegnate condizioni iniziali. In riferimento agli assi  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  otteniamo invece le due equazioni che determinano la reazione vincolare se è data una soluzione del problema del moto:

$$\phi^n = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 s}{2}, \quad (\text{D.95})$$

$$\phi^b = m\omega\dot{s}, \quad (\text{D.96})$$

(2) Moltiplicando ambo i membri di (D.94) per  $ds/dt$  e raccogliendo tutto a primo membro, il risultato può essere riscritto come l'equazione di conservazione (sui moti) di  $\mathcal{E}$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h) \right] = 0.$$

L'interpretazione fisica di  $\mathcal{E}$  è chiara: si tratta dell'energia meccanica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$ . Infatti, in tale riferimento, il punto  $P$  è sottoposto alle forze conservative della gravità e della molla, che producono il termine di energia potenziale (omettendo una costante additiva inessenziale):

$$\frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h) + \frac{\kappa s^2}{2},$$

un altro termine di energia potenziale è quello dovuto alla forza centrifuga:

$$-s^2 \frac{m\omega^2}{4}.$$

L'energia cinetica è semplicemente  $\frac{1}{2} m \dot{s}^2$ . La somma di tali termini è proprio  $\mathcal{E}$ . La derivata temporale della somma dell'energia cinetica più quella potenziale (cioè  $\mathcal{E}$ ) deve uguagliare la potenza delle forze rimanenti: la forza di Coriolis e la reazione vincolare  $\phi$ . Queste ultime hanno potenza nulla essendo entrambe normali alla velocità nel riferimento  $\mathcal{I}$  e questo spiega, in termini fisici, la ragione della conservazione di  $\mathcal{E}$ .

(3) Le equazioni che determinano il moto del sistema, ridotte al prim'ordine sono:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{\kappa}{m} s + \frac{h\kappa}{2m} + \frac{\omega^2 s}{2}, \quad (\text{D.97})$$

$$\frac{ds}{dt} = v. \quad (\text{D.98})$$

Le configurazioni di equilibrio  $s_0$  si ottengono come le configurazioni che annullano il secondo membro del sistema appena scritto, quando si richiede anche che  $v = 0$ . Si trova pertanto l'unica configurazione di equilibrio:

$$s_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2mg - h\kappa\sqrt{2}}{m\omega^2 - 2\kappa}.$$

Possiamo studiarne la stabilità usando il teorema di Liapunov e l'integrale primo  $\mathcal{E}$  che ha un punto con gradiente nullo esattamente in  $(s_0, v = 0)$ . Per stabilire se c'è un minimo stretto in tale configurazione, studiamo il segno della derivata seconda in  $s_0$  dell'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(s) = \frac{s^2}{4} (2\kappa - m\omega^2) + \frac{s}{\sqrt{2}} (mg - \kappa h).$$

Si ha esplicitamente:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}}{ds^2} \Big|_{s_0} = \frac{2\kappa - m\omega^2}{2}.$$

Il punto  $s_0$  corrisponde ad un punto di minimo stretto di  $\mathcal{U}$  solo se  $2\kappa - m\omega^2 > 0$  ossia  $m\omega^2/2\kappa < 1$ . In tal caso, direttamente dal teorema di Liapunov, possiamo dire che la configurazione di equilibrio  $s_0$  è stabile nel futuro. Si ha invece un punto di massimo stretto se  $m\omega^2/2\kappa > 1$ . In questo caso la configurazione  $s_0$  risulta essere di equilibrio instabile per noti teoremi. Il caso  $m\omega^2/2\kappa = 1$  non può essere studiato con i metodi generali visti nel corso. Tuttavia, in questa situazione, l'equazione pura di movimento (D.94), si riduce a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{h\kappa}{2m},$$

la cui soluzione generale è :

$$s(t) = \left( \frac{h\kappa}{2m} - \frac{g}{\sqrt{2}} \right) \frac{t^2}{2} + At + B.$$

Si osservi che il coefficiente davanti a  $t^2/2$  è sicuramente strettamente negativo se, come richiesto dalle ipotesi,  $mg > h\kappa$ . Di conseguenza, per  $t \rightarrow +\infty$ , comunque scegliamo le costanti  $A$  e  $B$  si ha che  $s(t) \rightarrow -\infty$  oppure  $s(t) \rightarrow +\infty$  se  $t \rightarrow -\infty$ . Pertanto il moto non può essere confinato per tutti i tempi in un intorno di  $s_0$  e quindi è impossibile che  $s_0$  sia una configurazione di equilibrio stabile nel futuro o nel passato.

(4) L'equazione del moto (D.94) si scrive, con le definizioni date di  $a$  e  $b$ :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + as + b = 0$$

ossia, nell'ipotesi  $a > 0$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a(s + b/a) = 0.$$

Definendo  $\sigma := s + b/a$ , l'equazione diviene:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + a\sigma = 0. \quad (\text{D.99})$$

Dato che  $a > 0$  per ipotesi, la soluzione generale è :

$$\sigma(t) = A \cos(\sqrt{a}t) + B \sin(\sqrt{a}t),$$

ossia

$$s(t) = -\frac{b}{a} + A \cos(\sqrt{a}t) + B \sin(\sqrt{a}t).$$

Le condizioni iniziali  $s(0) = b/a$  e  $\dot{s}(0) = 0$  forniscono:  $A = 2b/a$  e  $B = 0$  da cui:

$$s(t) = \frac{b}{a} (1 + 2 \cos(\sqrt{a}t)). \quad (\text{D.100})$$

e anche

$$\dot{s}(t) = -2 \frac{b}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}t). \quad (\text{D.101})$$

Inserendo nelle espressioni per le reazioni vincolari (D.95) e (D.96) si ottiene infine l'espressione, in componenti, delle reazioni vincolari in funzione del tempo:

$$\phi^n(t) = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \frac{h\kappa}{2} + \frac{m\omega^2 b}{2a} (1 + 2 \cos(\sqrt{a}t)) , \quad (\text{D.102})$$

$$\phi^b(t) = -\frac{2m\omega b}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}t) . \quad (\text{D.103})$$



## ESERCIZIO 8

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $z^2 + y^2 = R^2$  e  $x = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(R, 0, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g \geq 0$ ). Sul punto  $Q$  agisce una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante. Infine i punti sono connessi l'un l'altro da una molla di costante elastica  $\kappa > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari. Si determini la posizione del punto  $P$  tramite l'angolo  $\varphi$  che  $P - O$  descrive rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Si determini la posizione del punto  $Q$  tramite la sua coordinata  $z$ .

(2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema solo se  $\gamma = 0$ . Nel caso  $\gamma > 0$  si calcoli la derivata temporale dell'energia meccanica totale in funzione delle posizioni e delle velocità dei due punti.

(3). Si scrivano le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità nella situazione  $\gamma, g = 0$  (conservando la richiesta  $\kappa > 0$ ).

### Soluzione.

(1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|_{\mathcal{I}}$  in quanto lavoriamo solo con un riferimento)

$$m\mathbf{a}_P = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(P - Q) + \phi_P, \quad (\text{D.104})$$

$$m\mathbf{a}_Q = -mg \mathbf{e}_z - \kappa(Q - P) + \phi_Q - \gamma \mathbf{v}_Q. \quad (\text{D.105})$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \varphi$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\varphi$  individua  $P - O$  rispetto all'asse  $y$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_x$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_y + \sin \varphi \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.106})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.107})$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{D.108})$$

$$\mathbf{e}_z = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{D.109})$$

Di conseguenza:

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + R \cos \varphi \mathbf{e}_y + (R \sin \varphi - z) \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.110})$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + R \cos \varphi (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) + (R \sin \varphi - z) (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi),$$

ossia:

$$P - Q = -R \mathbf{e}_x + (R - z \sin \varphi) \mathbf{e}_r - z \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi . \quad (\text{D.111})$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{v}_Q = \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_Q = \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z ,$$

l'equazione (D.105) usando (D.110), può decomporsi, sulla base  $\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + \kappa(R \sin \varphi - z) - \gamma \frac{dz}{dt} , \\ 0 &= \kappa R \cos \varphi + \phi_Q^y , \\ 0 &= -\kappa R + \phi_Q^x . \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r ,$$

con una analoga procedura, usando l'equazione (D.111), l'equazione del moto (D.104) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_x$ :

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= (\kappa z - mg) \cos \varphi , \\ -mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - z \sin \varphi) + \phi_P^r , \\ 0 &= -\kappa R + \phi_P^x . \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$mR \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = (\kappa z - mg) \cos \varphi , \quad (\text{D.112})$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\gamma \frac{dz}{dt} - mg + \kappa(R \sin \varphi - z) , \quad (\text{D.113})$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -mg \sin \varphi - \kappa(R - z \sin \varphi) + mR \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 , \\ \phi_P^x &= \kappa R , \\ \phi_Q^y &= -\kappa R \cos \varphi , \\ \phi_Q^x &= \kappa R . \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 ,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{\kappa}{2} (P - Q)^2 + mgR \sin \varphi + mgz .$$

Usando (D.110) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (\text{D.114})$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi + mgR \sin \varphi + mgz . \quad (\text{D.115})$$

Per provare che, se  $\gamma = 0$ ,  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (D.112) per  $Rd\varphi/dt$  e ambo membri di (D.113) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} R^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\kappa z^2}{2} + \kappa R z \sin \varphi - mgR \sin \varphi - mgz \right) ,$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (D.112) e (D.113):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 .$$

Se  $\gamma > 0$ , la stessa procedura fornisce invece:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 .$$

(3). Le configurazioni  $(\varphi_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (D.112)-(D.113) si ottengono imponendo che per  $(\varphi, z) = (\varphi_0, z_0)$  i secondi membri di (D.112) e (D.113) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\varphi/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} (\kappa z_0 - mg) \cos \varphi_0 &= 0 , \\ -mg + \kappa(R \sin \varphi_0 - z_0) &= 0 . \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $\gamma, g = 0$  e  $\kappa > 0$ , il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} z_0 \cos \varphi_0 &= 0, \\ R \sin \varphi_0 &= z_0. \end{aligned}$$

Abbiamo 4 soluzioni:  $(z_0, \varphi_0) = (0, 0), (0, \pi), (R, \pi/2), (-R, -\pi/2)$ . Passiamo allo studio della stabilità delle 4 configurazioni di equilibrio. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che, essendo conservata vale  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ . Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (D.115), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt, dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro e anche nel passato valendo  $\dot{\mathcal{E}} = 0$  e non solo  $\dot{\mathcal{E}} \leq 0$ . Viceversa se la matrice hessiana dell'energia potenziale in una delle due configurazioni ha un autovalore negativo concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile. Il calcolo della matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  con  $g = 0$ :

$$\mathcal{U}(z, \varphi) := \frac{\kappa z^2}{2} - \kappa R z \sin \varphi,$$

fornisce direttamente

$$H(z_0, \varphi_0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \cos \varphi_0 \\ -R \cos \varphi_0 & z_0 R \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H(0, 0) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & -R \\ -R & 0 \end{bmatrix}.$$

Avendo questa matrice (omettendo il fattore positivo  $\kappa$ ) traccia 1 e determinante  $-R^2$ , concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono uno positivo e l'altro negativo positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è instabile. Passando alla seconda configurazione di equilibrio troviamo

$$H(0, \pi) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & R \\ R & 0 \end{bmatrix}.$$

Avendo questa matrice (omettendo il fattore positivo  $\kappa$ ) traccia 1 e determinante  $-R^2$ , concludiamo che i suoi autovalori (la cui somma è la traccia della matrice ed il cui prodotto ne è il determinante) sono uno positivo e l'altro negativo positivi. Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio considerata è ancora instabile. La terza configurazione di equilibrio fornisce

$$H(R, \pi/2) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}.$$

Dato che il determinante e la traccia della matrice sono entrambi positivi entrambi gli autovalori sono strettamente positivi e pertanto si ha stabilità nel passato e nel futuro.

La quarta configurazione di equilibrio fornisce ancora

$$H(-R, -\pi/2) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} ,$$

con le stesse conclusioni: la configurazione è di equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 9

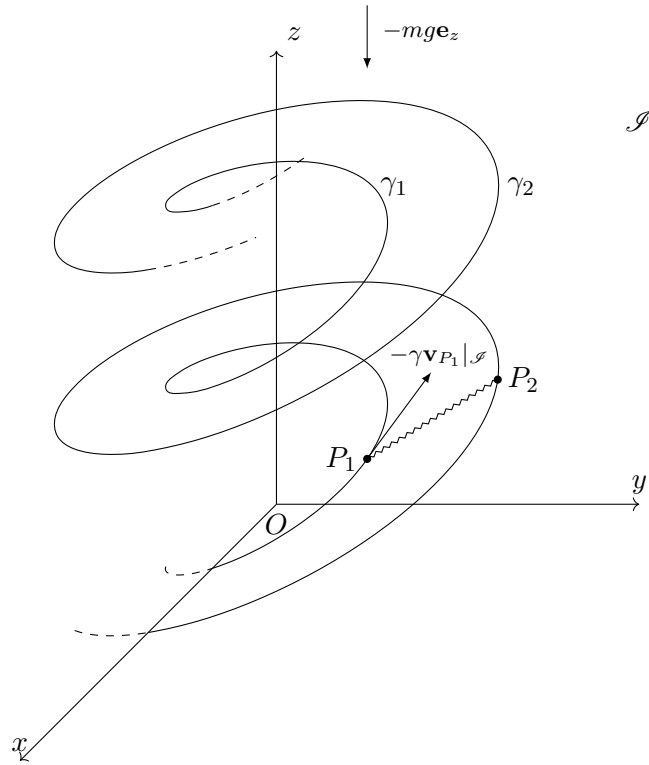
In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , si considerino le due curve:  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  di equazioni:

$$\gamma_1 : \quad x(\theta_1) = r \cos \theta_1, \quad y(\theta_1) = r \sin \theta_1, \quad z(\theta_1) = h\theta_1, \quad \theta_1 \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_2 : \quad x(\theta_2) = 2r \cos \theta_2, \quad y(\theta_2) = 2r \sin \theta_2, \quad z(\theta_2) = h\theta_2, \quad \theta_2 \in \mathbb{R}$$

dove  $h, r > 0$  sono costanti fissate.

I punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  con la stessa massa  $m > 0$  sono vincolati a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  rispettivamente, pensate come curve prive di attrito. Oltre alle reazioni vincolari, sui due punti agiscono le



seguenti forze:

- (i) la forza  $-mg \mathbf{e}_z$  su *ciascuno* dei due punti, con  $g \geq 0$  costante fissata,
- (ii) la forza di una molla che ha gli estremi fissati ai due punti, di lunghezza nulla a riposo, priva di peso, con costante elastica  $K > 0$  assegnata.
- (iii) una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{I}}$  (che agisce dunque solo su  $P_1$ ) dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota. Usando come coordinate libere gli angoli  $\theta_1$  e  $\theta_2$  si risolvano i quesiti (a),(b),(c) ed un ulteriore quesito scelto tra (d) e (e).

- (a) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema dei due punti materiali.
- (b) Nel caso  $\gamma = 0$  si dimostri che l'energia meccanica totale del sistema (riferita al sistema inerziale  $\mathcal{S}$ ) si conserva e se ne dia l'espressione esplicita in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime temporali.
- (c) Nel caso  $\gamma = 0$  partendo dalle coordinate libere  $\theta_1, \theta_2$  si passi alla formulazione hamiltoniana, scrivendo esplicitamente:
- (1) l'hamiltoniana in funzione delle variabili di Hamilton  $\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}$  e
  - (2) le equazioni di Hamilton.
- (d) Nel caso  $\gamma = 0$  e  $g = 0$  si passi alle nuove coordinate lagrangiane  $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$  e  $\Phi = (\theta_1 - \theta_2)/2$  e si proceda come segue.
- (1) Si verifichi che la lagrangiana del sistema (riferita a  $\mathcal{S}$ ) è indipendente da  $\Theta$  e si determini l'integrale primo associato  $I$ ;
  - (2) Si scrivano esplicitamente in funzione delle coordinate libere e delle coordinate libere puntate, la componente  $z$  del momento angolare totale rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$  ed al polo  $O$ ,  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z$ , e la componente  $z$  dell'impulso totale rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{P}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z$ . Si verifichi se  $I$  sia o meno esprimibile come una funzione di  $\mathbf{\Gamma}_O|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{P}|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_z$ .
- (e) Si considerino le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso  $\gamma = 0$  e si proceda come segue.
- (1) Per  $r, h > 0$  assegnate, si determinino i valori della costante  $g \geq 0$  per cui possono esistere soluzioni del problema del moto tali che  $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$ ;
  - (2) si dia infine l'espressione esplicita di tali soluzioni.

### Soluzione.

(a) Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{S}}$  essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{S}$ . In riferimento a coordinate cilindriche, vale:  $P_1 - O = r \mathbf{e}_r(\theta_1) + z(\theta_1) \mathbf{e}_z$ ,  $P_2 - O = 2r \mathbf{e}_r(\theta_2) + z(\theta_2) \mathbf{e}_z$ . Pertanto

$$\mathbf{v}_{P_1} = r\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_{P_2} = 2r\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_\theta(\theta_2) + h\dot{\theta}_2 \mathbf{e}_z.$$

L'energia cinetica del sistema di punti sarà allora data da:

$$\mathcal{T} := \frac{m}{2} (r^2\dot{\theta}_1^2 + h^2\dot{\theta}_1^2 + 4r^2\dot{\theta}_2^2 + h^2\dot{\theta}_2^2) = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2.$$

Tendo conto del fatto che:  $P_1 - P_2 = r \mathbf{e}_r(\theta_1) - 2r \mathbf{e}_r(\theta_2) + z(\theta_1) \mathbf{e}_z - z(\theta_2) \mathbf{e}_z$ , si ha che l'energia potenziale totale avrà invece espressione:

$$mg(z(\theta_1) + z(\theta_2)) + \frac{K}{2} (P_1 - P_2)^2 = mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (r^2 + 4r^2 - 2r \mathbf{e}_r(\theta_1) \cdot \mathbf{e}_r(\theta_2) + h^2(\theta_1 - \theta_2)^2).$$

Essendo:

$$\mathbf{e}_r(\theta_1) \cdot \mathbf{e}_r(\theta_2) = (\cos \theta_1 \mathbf{e}_x + \sin \theta_1 \mathbf{e}_y) \cdot (\cos \theta_2 \mathbf{e}_x + \sin \theta_2 \mathbf{e}_y) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

abbiamo l'espressione finale:

$$\mathcal{U} = mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)),$$

dove abbiamo trascurato una costante additiva inessenziale. Infine la componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_{\theta_1}$  (l'unica non nulla) della forza viscosa è

$$\mathcal{Q}_{\theta_1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{P_1}}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_{P_1}) = -\gamma(r \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h \mathbf{e}_z) \cdot (r \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_z),$$

cioè

$$\mathcal{Q}_{\theta_1} = -\gamma(r^2 + h^2)\dot{\theta}_1.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange prendono dunque la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \mathcal{Q}_{\theta_1} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \dot{\theta}_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} &= \dot{\theta}_2, \end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto la funzione lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2 - mgh(\theta_1 + \theta_2) - \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - \gamma(r^2 + h^2) \frac{d\theta_1}{dt}, \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned}$$

(b) Siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, pertanto si conserva nel tempo la funzione hamiltoniana. Ulteriormente nel riferimento  $\mathcal{S}$  i vincoli non dipendono dal tempo, le coordinate libere sono solidali a tale riferimento, le forze attive sono tutte conservative e la lagrangiana è stata calcolata rispetto a  $\mathcal{S}$ . In tal caso, come è noto l'hamiltoniana del sistema coincide con l'energia meccanica totale calcolata rispetto a  $\mathcal{S}$ . Possiamo anche fare una verifica esplicita. L'Hamiltoniana è per definizione:

$$\mathcal{H} = \dot{\theta}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \mathcal{L}$$

Nel caso in esame otteniamo immediatamente che, esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2 + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

In tale espressione

$$\frac{m(r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} \dot{\theta}_2^2$$



non è altro che l'energia cinetica del sistema come provato precedentemente, mentre

$$mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

è, come calcolato sopra, l'energia potenziale delle forze attive (la forza viscosa è assente e le reazioni vincolari non compiono lavoro). Abbiamo trovato che l'energia meccanica totale del sistema coincide con l'hamiltoniana.

(c) Nel nostro caso la trasformazione di Legendre si riduce a:

$$\begin{aligned} p_{\theta_1} &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) m(r^2 + h^2) \dot{\theta}_1, \\ p_{\theta_2} &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) m(4r^2 + h^2) \dot{\theta}_2, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione esplicita dell'hamiltoniana trovata in (b) otteniamo che la funzione hamiltoniana come funzione delle variabili di Hamilton si scrive;

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}) = \frac{p_{\theta_1}^2}{2m(r^2 + h^2)} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2m(4r^2 + h^2)} + mgh(\theta_1 + \theta_2) + \frac{K}{2} (h^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - 4r^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).$$

Possiamo allora scrivere il set di equazioni di Hamilton come:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_1}} \right) \frac{p_{\theta_1}}{m(r^2 + h^2)}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta_2}} \right) \frac{p_{\theta_2}}{m(4r^2 + h^2)}, \\ \frac{dp_{\theta_1}}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} \right) - mgh - K(h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)), \\ \frac{dp_{\theta_2}}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} \right) - mgh - K(h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)). \end{aligned}$$

(d) Vale:  $\theta_1 = \Theta + \Phi$  e  $\theta_2 = \Theta - \Phi$ . Sostituendo nell'espressione della lagrangiana trovata in (a) con  $\gamma = 0$  e  $g = 0$ , si vede immediatamente che essa si trascrive:

$$\mathcal{L} = \frac{m(r^2 + h^2)}{2} (\dot{\Theta} + \dot{\Phi})^2 + \frac{m(4r^2 + h^2)}{2} (\dot{\Theta} - \dot{\Phi})^2 - \frac{K}{2} (4h^2\Phi^2 - 4r^2 \cos(2\Phi)).$$

Dato che la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $\Theta$ , si ha allora l'integrale primo:

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = m(r^2 + h^2) (\dot{\Theta} + \dot{\Phi}) + m(4r^2 + h^2) (\dot{\Theta} - \dot{\Phi}) .$$

In definitiva:

$$I = m(r^2 + h^2)\dot{\theta}_1 + m(4r^2 + h^2)\dot{\theta}_2 .$$

D'altra parte:

$$(P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} = (r\mathbf{e}_r(\theta_1) + h\theta_1\mathbf{e}_z) \wedge m(r\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z) = mr^2\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z - mrh\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta - mrh\theta_1\dot{\theta}_1\mathbf{e}_r ,$$

per cui:

$$(P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} \cdot \mathbf{e}_z = mr^2\dot{\theta}_1 .$$

Nello stesso modo troviamo:

$$(P_2 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_2} \cdot \mathbf{e}_z = 4mr^2\dot{\theta}_2 ,$$

da cui:

$$\Gamma_O \cdot \mathbf{e}_z = ((P_1 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_1} + (P_2 - O) \wedge m\mathbf{v}_{P_2}) \cdot \mathbf{e}_z = mr^2\dot{\theta}_1 + 4mr^2\dot{\theta}_2 .$$

Riguardo all'impulso totale lungo l'asse  $z$  si ha invece:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z = (m\mathbf{v}_{P_1} + m\mathbf{v}_{P_2}) \cdot \mathbf{e}_z = (m(r\dot{\theta}_1\mathbf{e}_\theta(\theta_1) + h\dot{\theta}_1\mathbf{e}_z) + m(r\dot{\theta}_2\mathbf{e}_\theta(\theta_2) + h\dot{\theta}_2\mathbf{e}_z)) \cdot \mathbf{e}_z = mh\dot{\theta}_1 + mh\dot{\theta}_2 .$$

Concludiamo che:

$$I = \Gamma_O \cdot \mathbf{e}_z + h\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z ,$$

ed in particolare  $\alpha = h$ .

(e) Le equazioni di E-L nel caso  $\gamma = 0$  si riducono a:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_1 - \theta_2) + 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -mgh - K(h^2(\theta_2 - \theta_1) + 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) . \end{aligned}$$

Se  $\theta_1 = \theta_1(t)$ ,  $\theta_2 = \theta_2(t)$  è una soluzione con  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ , allora deve valere

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -mgh . \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro troviamo:

$$m3r^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0 .$$

Pertanto, valendo

$$m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -mgh$$

con  $m, r, h > 0$ , deve anche essere  $-mgh = 0$ . Dato che è  $mh > 0$  per ipotesi, si possono avere soluzioni suddette solo per  $g = 0$ .

Determiniamo la forma esplicita di tali soluzioni. Se esistono soluzioni con  $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$  devono soddisfare in particolare:  $\theta_1(0) = \theta_2(0)$  e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0)$ . Se fissiamo condizioni iniziali:  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = v_0$  per arbitrarie costanti  $\theta_0, v_0$ , la coppia di funzioni:

$$\theta_1(t) = v_0 t + \theta_0, \quad \theta_2(t) = v_0 t + \theta_0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

soddisfa le equazioni:

$$\begin{aligned} m(r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} &= -K (h^2(\theta_1 - \theta_2) - 2r^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) , \\ m(4r^2 + h^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} &= -K (h^2(\theta_2 - \theta_1) - 2r^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)) . \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali dette ed anche la richiesta  $\theta_1(t) = \theta_2(t)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Queste sono dunque tutte e sole le soluzioni del tipo cercato per il teorema di unicità dei sistemi di equazioni differenziali in forma normale con secondo membro regolare.

## ESERCIZIO 10

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $M > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $M > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-Mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$ ). I punti sono connessi l'un l'altro da una molla senza peso e di costante elastica  $K > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Sul punto  $P$  agisce infine la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P$  dove  $\gamma \geq 0$  è una costante assegnata e la velocità è riferita al riferimento  $\mathcal{I}$ . Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate lagrangiane  $\theta \in (-\pi, \pi)$  (valutato su  $C$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ) per descrivere la posizione del punto  $P$  e la quota  $z$  per descrivere la posizione del punto  $Q$ .

(1). Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema e, nel caso  $\gamma = 0$ , l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione di  $\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}$ .

(2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ . Per  $\gamma > 0$ , esprimere la derivata temporale dell'energia meccanica valutata sui moti del sistema in funzione di  $\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}$ .

(3). Ponendo  $\gamma = 0$ , Si passi in formulazione di Hamilton, scrivendo esplicitamente l'Hamiltoniana del sistema in funzione delle variabili di Hamilton e le equazioni di Hamilton in tali variabili.

(4). Ponendo  $\gamma = 0$ , in formulazione di Lagrange, si risolva il problema del moto con i dati iniziali:

$$\theta(0) = -\pi/2$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

$$z(0) = Z$$

$$\dot{z}(0) = 0,$$

con  $Z$  costante assegnata, e si calcolino le componenti delle reazioni vincolari su tale soluzione in funzione del tempo.

(5). Ponendo  $\gamma = 0$ , in formulazione di Lagrange, si determinino tutte le condizioni iniziali al tempo  $t = 0$ ,  $(z(0), \dot{z}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0))$  per cui il moto risultante è di quiete:  $z(t) = \text{costante}$ ,  $\theta(t) = \text{costante}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

### Soluzione.

(1). Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \theta$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\theta$  individua  $P - O$  rispetto all'asse  $x$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.116})$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.117})$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{D.118})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{D.119})$$

Di conseguenza:

$$\mathbf{x}_P = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{x}_Q = 2R \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z.$$

Dunque:

$$\mathbf{v}_P = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{v}_Q = \dot{z} \mathbf{e}_z.$$

Perché saranno utili tra poco, ricaviamo anche  $P - Q$  in coordinate cartesiane e polari:

$$P - Q = R \cos \theta \mathbf{e}_x + (R \sin \theta - 2R) \mathbf{e}_y - z \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.120})$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = R \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + (R \sin \theta - 2R) (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) - z \mathbf{e}_z,$$

ossia:

$$P - Q = R(1 - 2 \sin \theta) \mathbf{e}_r - 2R \cos \theta \mathbf{e}_\theta - z \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.121})$$

Passiamo a scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange. Usando (D.120) l'energia potenziale della molla risulta avere espressione esplicita, in coordinate lagrangiane:

$$\frac{K}{2} (P - Q)^2 = \frac{K}{2} (R^2 + 4R^2 - 4R^2 \sin \theta + z^2).$$

Trascurando una costante additiva inessenziale, l'energia potenziale totale, tenendo conto anche dell'energia potenziale della forza di gravità  $Mgz$ , risulta essere:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz. \quad (\text{D.122})$$

L'energia cinetica ha banalmente la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2).$$

Se fosse  $\gamma = 0$  avremmo che la lagrangiana seguente determinan completamente il moto del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) - \frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz. \quad (\text{D.123})$$

Tuttavia si deve tenere conto della forza viscosa che ha solo componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_\theta$  non nulla:

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P) = -\gamma R^2 \dot{\theta}.$$

La coppia non banale di equazioni di Eulero-Lagrange, nel caso generale di  $\gamma \neq 0$ , è data da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.124})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta} . \quad (\text{D.125})$$

Esplicitamente si ottiene, tenendo conto di (D.123):

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -Mg - Kz , \quad (\text{D.126})$$

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} . \quad (\text{D.127})$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ): per trovare le equazioni che determinano le reazioni vincolari notiamo che valgono le equazioni di Newton (per  $\gamma = 0$ ):

$$\begin{aligned} M \mathbf{a}_P &= -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P , \\ M \mathbf{a}_Q &= -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q . \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere:

$$MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r = -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P , \quad (\text{D.128})$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q . \quad (\text{D.129})$$

Quindi, sviluppando  $P - Q$  usando (D.121) nella prima equazione del moto (D.128) e (D.120) nella seconda (D.129) e, finalmente, proiettando la prima equazione lungo le direzioni  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_z$  e la seconda equazione lungo le direzioni  $\mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_x$  otteniamo le equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + KR(1 - 2 \sin \theta) , \\ \phi_P^z &= Mg - Kz , \\ \phi_Q^y &= -K(R \sin \theta - 2R) , \\ \phi_Q^x &= -KR \cos \theta . \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale tale:

$$\mathcal{E} = \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz . \quad (\text{D.130})$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema quando  $\gamma = 0$  è sufficiente applicare il teorema di Jacobi tenendo conto che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo e i vincoli sono solidali al riferimento. Oppure si può procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (D.127) per  $R^2 d\theta/dt$  e ambo membri di (D.126) per  $dz/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz \right),$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (D.128) e (D.129):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la stessa procedura fornisce:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2. \quad (\text{D.131})$$

**(3).** Partendo dalla lagrangiana (D.123) ed applicando la definizione di hamiltoniana, risulta subito:

$$\mathcal{H} = \frac{M}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz.$$

Partendo dalla lagrangiana (D.123), i momenti coniugati sono:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = MR^2 \dot{\theta}, \quad (\text{D.132})$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}, \quad (\text{D.133})$$

Pertanto l'hamiltoniana si scrive, in funzione di tali variabili:

$$\mathcal{H} = \frac{p_z^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2MR^2} + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz. \quad (\text{D.134})$$

Abbiamo quindi il set di equazioni di Hamilton:

$$\frac{dp_z}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \right) = -Mg - Kz, \quad (\text{D.135})$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = 2KR^2 \cos \theta, \quad (\text{D.136})$$

$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} \right) = \frac{p_z}{M}, \quad (\text{D.137})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{MR^2}. \quad (\text{D.138})$$

(4) In riferimento alle equazioni del moto scritte in forma normale (D.126) e (D.127), si osservi che le equazioni sono disaccoppiate. Dato che la seconda equazione risulta essere soddisfatta dalla funzione  $\theta(t) = -\pi/2$  costantemente, questa è l'unica soluzione determinata dalle condizioni iniziali dette. Bisogna risolvere la seconda equazione, che riscriviamo come:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{K}{M} z + g = 0 .$$

ossia, se  $z_1 := z + \frac{M}{K}g$ ,

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{K}{M} z_1 = 0 .$$

Questa è omogenea ed ha soluzione generale:

$$z_1(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) .$$

Quindi nella variabile  $z$ :

$$z(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K} g .$$

Dato che  $z(0) = Z$  deve essere:  $Z = A - \frac{M}{K}g$  e dunque  $A = Z + \frac{M}{K}g$ . Pertanto:

$$z(t) = \left( Z + \frac{M}{K}g \right) \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K}g .$$

Derivando in  $t$  e imponendo che la derivata si annulli per  $t = 0$  si trova che  $B = 0$ . In definitiva la soluzione richiesta è:

$$\theta(t) = -\pi/2 , \quad z(t) = \left( Z + \frac{M}{K}g \right) \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K}g , \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} .$$

Sostituendo le funzioni  $z(t)$  e  $\theta(t)$  nei secondi membri delle equazioni trovate sopra per le componenti delle reazioni vincolari, si ha l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione del tempo sul moto considerato:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= 3KR , \\ \phi_P^z &= 2Mg - (KZ + Mg) \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) , \\ \phi_Q^y &= 3RK , \\ \phi_Q^x &= 0 . \end{aligned}$$



(5) Consideriamo le equazioni del moto scritte in forma normale.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{K}{M}\cos\theta - \frac{\gamma}{M}\frac{d\theta}{dt}, \quad (\text{D.139})$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{K}{M}z, \quad (\text{D.140})$$

Dato che il secondo membro è di classe  $C^\infty$  come funzione delle funzioni incognite e delle loro derivate prime, l'assegnazione di condizioni iniziali individua univocamente una soluzione, vale cioè il teorema di esistenza ed unicità.

Condizione necessaria affinché una soluzione sia rappresentata da funzioni costanti nel tempo è che entrambi i membri del sistema scritto sopra siano nulli per ogni tempo. Il primo membro si annulla banalmente se le funzioni  $\theta = \theta(t)$ ,  $z = z(t)$  sono costanti. Il secondo si annulla invece solo se  $\theta(t) = \theta_0$  e  $z(t) = z_0$  prendono i valori costanti  $\theta_0 = \pm\pi/2$  e  $z_0 = -Mg/K$ . Usando questi valori come dati di Cauchy unitamente a  $d\theta/dt|_{t=0} = 0$ ,  $dz/dt|_{t=0} = 0$ , il teorema di esistenza ed unicità implica che le uniche soluzioni associate siano quelle costanti. In definitiva le condizioni iniziali (a  $t = 0$ ) che producono moti costanti sono tutte e sole date da:

$$(\theta(0), z(0), d\theta/dt|_{t=0}, dz/dt|_{t=0}) = (\pm\pi/2, -Mg/K, 0, 0).$$

## ESERCIZIO 11

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{I}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $M > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ . Un secondo punto materiale  $Q$  di massa  $M > 0$  è vincolato ad appartenere alla retta parallela a  $\mathbf{e}_z$  e passante per  $(0, 2R, 0)$ . Entrambi i vincoli sono supposti lisci ed entrambi i punti sono sottoposti alla forza di gravità  $-Mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$ ). I punti sono connessi da una molla di costante elastica  $K > 0$ , massa nulla e lunghezza nulla a riposo. Sul punto  $P$  agisce infine la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P$  dove  $\gamma \geq 0$  è una costante assegnata e la velocità è riferita al riferimento  $\mathcal{I}$ . Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate:  $\theta \in (-\pi, \pi)$  (valutato su  $C$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ) per descrivere la posizione del punto  $P$  e la quota  $z$  per descrivere la posizione del punto  $Q$ .

- (1). Scrivere le equazioni pure di movimento del sistema e le equazioni che determinano le reazioni vincolari quando è noto il moto del sistema.
- (2). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema e si provi che si conserva sui moti del sistema se  $\gamma = 0$ . Se  $\gamma > 0$ , esprimere la derivata temporale dell'energia meccanica valutata sui moti del sistema in funzione delle velocità di  $P$  e  $Q$ .
- (3). Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità.
- (4). Si risolva il problema del moto con i dati iniziali:  $\theta(0) = -\pi/2$ ,  $d\theta/dt|_{t=0} = 0$ ,  $z(0) = Z$  (con  $Z$  costante assegnata) e  $dz/dt|_{t=0} = 0$ .

### Soluzione.

- (1). Le equazioni del moto dei due punti sono (non scriviamo esplicitamente  $|\mathcal{I}$  in quanto lavoriamo solo con un riferimento)

$$M\mathbf{a}_P = -Mg \mathbf{e}_z - K(P - Q) + \phi_P, \quad (\text{D.141})$$

$$M\mathbf{a}_Q = -Mg \mathbf{e}_z - K(Q - P) + \phi_Q. \quad (\text{D.142})$$

Definiamo il solito sistema di coordinate polari piane  $r, \theta$  adattato alla circonferenza in cui l'angolo  $\theta$  individua  $P-O$  rispetto all'asse  $x$ , con orientazione positiva rispetto a  $\mathbf{e}_z$ . Esprimiamo le equazioni del moto usando, per ciascun punto, le coordinate suggerite nel testo. Le relazioni tra i versori  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  e quelli associati alle coordinate polari sono, al solito:

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.143})$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.144})$$

che si invertono in (prendendo la trasposta della corrispondente trasformazione lineare):

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{D.145})$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{D.146})$$

Di conseguenza:

$$P - Q = R \cos \theta \mathbf{e}_x + (R \sin \theta - 2R) \mathbf{e}_y - z \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.147})$$

può anche essere scritto come

$$P - Q = R \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + (R \sin \theta - 2R)(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) - z \mathbf{e}_z ,$$

ossia:

$$P - Q = R(1 - 2 \sin \theta) \mathbf{e}_r - 2R \cos \theta \mathbf{e}_\theta - z \mathbf{e}_z . \quad (\text{D.148})$$

Tenendo conto del fatto che

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z ,$$

l'equazione (D.142) usando (D.147), può decomporsi, sulla base  $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$  nelle tre equazioni con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 z}{dt^2} &= -Mg - Kz , \\ 0 &= K(R \sin \theta - 2R) + \phi_Q^y , \\ 0 &= KR \cos \theta + \phi_Q^x . \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mathbf{a}_P = R \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r ,$$

e anche  $\mathbf{v}_P = R \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta$ , con una analoga procedura, usando l'equazione (D.148), l'equazione del moto (D.141) si decompone nelle tre equazioni sulla base  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ :

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} , \\ -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -KR(1 - 2 \sin \theta) + \phi_P^r , \\ 0 &= \phi_P^z + Mg . \end{aligned}$$

Abbiamo dunque un sistema di equazioni differenziali corrispondente alle equazioni pure di movimento (infatti tale sistema è scrivibile in forma normale ed il secondo membro è  $C^\infty$ ):

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2K \cos \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} , \quad (\text{D.149})$$

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -Mg - Kz , \quad (\text{D.150})$$

ed equazioni che, una volta noto un moto del sistema, determinano tutte le componenti delle reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} \phi_P^r &= -MR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + KR(1 - 2 \sin \theta) , \\ \phi_P^z &= Mg - Kz , \\ \phi_Q^y &= -K(R \sin \theta - 2R) , \\ \phi_Q^x &= -KR \cos \theta . \end{aligned}$$

(2). L'energia meccanica del sistema è la somma dell'energia cinetica

$$\mathcal{T} := \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 ,$$

e delle energie potenziali dovute alla forza della molla ed alla gravità (attenzione che l'energia della molla è contata *una volta sola*):

$$\mathcal{U} = \frac{K}{2} (P - Q)^2 + mgz .$$

Usando (D.147) si trova esplicitamente, trascurando una inessenziale costante additiva:

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz . \quad (\text{D.151})$$

Sommando tutto:

$$\mathcal{E} = \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz . \quad (\text{D.152})$$

Per provare che  $\mathcal{E}$  è conservata sui moti del sistema quando  $\gamma = 0$  è sufficiente procedere come segue. Si moltiplicano ambo membri di (D.149) per  $dz/dt$  e ambo membri di (D.150) per  $R^2 d\theta/dt$ , quindi si sommano membro a membro i risultati ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{M}{2} R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{Kz^2}{2} + 2KR^2 \sin \theta - Mgz \right) ,$$

che può essere riscritta semplicemente come, supponendo verificate le equazioni (D.149) e (D.150):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 .$$

Nel caso  $\gamma > 0$  la stessa procedura fornisce:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 . \quad (\text{D.153})$$

(3). Le configurazioni  $(\theta_0, z_0)$  di equilibrio per il sistema del *secondo ordine* (D.149)-(D.150) si ottengono, ragionando come per l'esercizio precedente, imponendo che per  $(\theta, z) = (\theta_0, z_0)$  i secondi membri di (D.149) e (D.150) siano nulli quando valgono le ulteriori condizioni  $d\theta/dt = 0$  e  $dz/dt = 0$ . Questa procedura porta immediatamente alle equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} 0 &= -Mg - Kz_0 , \\ 0 &= 2KR \cos \theta_0 . \end{aligned}$$

che ha come uniche soluzioni:

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{Mg}{K}, \\ \theta_0 &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Passiamo allo studio della stabilità di esse. Al solito l'idea è di usare l'energia meccanica come funzione di Liapunov dato che vale  $\mathcal{E} \leq 0$  come conseguenza della (D.153). Dall'espressione di  $\mathcal{E}$  in (D.152), vediamo che si ha un minimo stretto nella parte riguardate le velocità  $d\varphi/dt$ ,  $dz/dt$  attorno alla configurazione di velocità nulle. Se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una delle due configurazioni di equilibrio, l'energia totale, pensata come funzione di Liapunov, soddisfa le ipotesi del teorema di Liapunov e si ha stabilità nel futuro.

$$\mathcal{U}(\varphi, z) := \frac{Kz^2}{2} - 2KR^2 \sin \theta + Mgz,$$

fornisce direttamente

$$H(\varphi_0, z_0) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 2KR^2 \sin \varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che:

$$H\left(-\frac{Mg}{K}, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \pm 2KR^2 \end{bmatrix}.$$

Segue immediatamente che la configurazione di equilibrio  $\left(-\frac{Mg}{K}, \frac{\pi}{2}\right)$  è stabile nel futuro (e anche nel passato se  $\gamma = 0$ ). Viceversa se  $\gamma = 0$  possiamo anche concludere che la configurazione di equilibrio  $\left(-\frac{Mg}{K}, -\frac{\pi}{2}\right)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(4) Consideriamo le equazioni del moto scritte in forma normale.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\frac{K}{M} \cos \theta - \frac{\gamma}{M} \frac{d\theta}{dt}, \quad (\text{D.154})$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{K}{M}z, \quad (\text{D.155})$$

Si osservi che le equazioni sono disaccoppiate. Dato che entrambi i membri della prima equazione si annullano per  $\theta(t) = -\pi/2$  costantemente, questa è l'unica soluzione determinata dalle condizioni iniziali dette. Bisogna risolvere la seconda equazione, che riscriviamo come:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{M}z + g = 0.$$

ossia, se  $z_1 := z + \frac{M}{K}g$ ,

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{K}{M}z_1 = 0.$$

Questa è omogenea ed ha soluzione generale:

$$z_1(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) .$$

Quindi nella variabile  $z$ :

$$z(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K} g .$$

Dato che  $z(0) = Z$  deve essere:  $Z = A - \frac{M}{K} g$  e dunque  $A = Z + \frac{M}{K} g$ . Pertanto:

$$z(t) = \left( Z + \frac{M}{K} g \right) \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K} g .$$

Derivando in  $t$  e imponendo che la derivata si annulli per  $t = 0$  si trova che  $B = 0$ . In definitiva la soluzione richiesta è :

$$\theta(t) = -\pi/2, \quad z(t) = \left( Z + \frac{M}{K} g \right) \cos \left( \sqrt{\frac{K}{M}} t \right) - \frac{M}{K} g, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

## ESERCIZIO 12

Nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}$ , rispetto a coordinate cartesiane ortonormali solidali con  $\mathcal{J}$ ,  $x, y, z$  di origine  $O$ , un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato a giacere sulla circonferenza  $C$  di equazione  $x^2 + z^2 = R^2$ ,  $y = 0$  supposta liscia. Il punto materiale è connesso all'asse  $z$  con una molla ideale, di lunghezza nulla a riposo, priva di massa, di costante elastica  $k > 0$ . Il punto  $Q$  sull'asse  $z$  al quale è attaccato un estremo della molla è libero di scorrere lungo tale asse e si trova sempre alla stessa quota di  $P$ . Infine il punto  $P$  è sottoposto alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  costante. Il sistema di riferimento  $\mathcal{J}$  ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è costante.

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinata per descrivere il punto sulla circonferenza l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi)$  individuato da  $P - O$  rispetto all'asse  $x$  ed orientato positivamente rispetto a  $-\mathbf{e}_y$ .

- (1). Scrivere l'equazione pura di movimento di  $P$  in termini di equazioni di Eulero-Lagrange, ottenendola sia nel riferimento inerziale che in quello non inerziale e provando che le due equazioni coincidono.
- (2). Scrivere le equazioni che determinano le reazioni vincolari quando è noto il moto del punto.
- (3). Si scriva esplicitamente l'energia meccanica totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{J}$  e si provi che si conserva sui moti del sistema.
- (4). Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri  $m, k, \Omega, g$  in  $(0, +\infty)$ .

### Soluzione.

(1). Scriviamo la lagrangiana del sistema nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  nel quale non sono presenti forze inerziali e tutte le forze vere sono conservative. In tale riferimento la lagrangiana avrà forma  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}_0} - \mathcal{U}$  e le equazioni di Eulero-Lagrange avranno la forma più semplice:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Riferiamoci ad un sistema di coordinate polari piane  $(r, \theta)$  centrato in  $O$  nel piano  $x, z$  del riferimento non inerziale. Sappiamo che, se  $\mathbf{v}|_{\mathcal{J}}$  indica la velocità di  $P$  rispetto a  $\mathcal{J}$  e  $\mathbf{v}|_{\mathcal{J}_0}$  indica la velocità di  $P$  rispetto a  $\mathcal{J}_0$ , allora:  $\mathbf{v}|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}_0} \wedge (P - O)$ . Nel caso in esame  $\mathbf{v}|_{\mathcal{J}} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  e pertanto:

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{J}_0} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \Omega \mathbf{e}_z \wedge R \mathbf{e}_r,$$

Sapendo che  $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z$  si ha subito:

$$\mathbf{v}|_{\mathcal{J}_0} = R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\Omega \cos \theta \mathbf{e}_y.$$

Quindi, tenendo conto che  $\mathbf{e}_\theta \perp \mathbf{e}_y$ , avremo che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}_0} = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \cos^2 \theta). \quad (\text{D.156})$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , essa avrà due contributi: quello dovuto alla molla  $(1/2)k(P-Q)^2$  e quello dovuto alla forza di gravità  $mz_{Pg}$  (avendo scelto lo zero dell'energia gravitazionale a  $z=0$ ):

$$\mathcal{U}(\theta) = \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta + mgR \sin \theta . \quad (\text{D.157})$$

In definitiva:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{m}{2} \left( R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \Omega^2 \cos^2 \theta \right) - \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - mgR \sin \theta . \quad (\text{D.158})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano allora essere:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mR^2 \Omega^2 \cos \theta \sin \theta + kR^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \cos \theta . \quad (\text{D.159})$$

Questa equazione, dividendo per  $mR^2$ , risulta essere scritta in forma normale con secondo membro dato da una funzione  $C^\infty$  di  $\theta$ . Per il teorema di esistenza ed unicità, tale equazione determina univocamente una soluzione quando sono assegnate le condizioni iniziali. Pertanto la (D.159) è l'equazione pura di movimento del punto  $P$ .

Vediamo come si ottenga la stessa equazione lavorando nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ . In questo caso appaiono forze fittizie non tutte conservative e conviene usare le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma più generale:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}}{\partial \theta} = \mathcal{Q}_\theta + \mathcal{Q}'_\theta , \quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} , \quad (\text{D.160})$$

dove  $\mathcal{Q}_\theta$  e  $\mathcal{Q}'_\theta$  sono, rispettivamente, le componenti lagrangiane delle forze attive vere e delle forze attive inerziali. L'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}$  è semplicemente  $m|\mathbf{v}|_{\mathcal{S}}^2/2$  e cioè:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 . \quad (\text{D.161})$$

La componente lagrangiana delle forze attive vere sarà data da, tenendo conto che le forze vere sono quella gravitazionale  $-mg \mathbf{e}_z$  e quella della molla  $-k(P-Q)$ :

$$\mathcal{Q}_\theta = (k(Q-P) - mg \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = (-kR \cos \theta \mathbf{e}_x - mg \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} R(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z) .$$

In definitiva:

$$\mathcal{Q}_\theta = kR^2 \cos \theta \sin \theta - mgR \cos \theta . \quad (\text{D.162})$$

Le forze attive inerziali, in questo caso di assenza di traslazione e rotazione con  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ , sono solo la forza centrifuga:

$$\mathbf{F}^{(cent.)} := -m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge (P-O)) = m\Omega^2(P-Q) = mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x$$

e quella di Coriolis:

$$\mathbf{F}^{(Coriolis)} := -2m\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge \mathbf{v}|_{\mathcal{S}} = -2m\Omega R \mathbf{e}_z \wedge \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = -2m\Omega \dot{\theta} R \mathbf{e}_z \wedge (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) = 2mR\Omega \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y ,$$



dove abbiamo tenuto conto che:

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

In definitiva:

$$\mathcal{Q}'_\theta = \left( mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x + 2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} R(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_z) = -m\Omega^2 R^2 \cos \theta \sin \theta . \quad (\text{D.163})$$

Si osservi che, in particolare, la forza di Coriolis non fornisce contributo alle componenti lagrangiane delle forze attive. A questo punto la (D.160), tenendo conto di (D.161), (D.162) e (D.163) si esplicita in:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = kR^2 \cos \theta \sin \theta - mgR \cos \theta - m\Omega^2 R^2 \cos \theta \sin \theta ,$$

che coincide con (D.159), già ottenuta per altra via.

(2). Conviene lavorare nel riferimento non inerziale nel quale abbiamo già l'espressione esplicita delle forze inerziali. L'equazione newtoniana del moto ha la forma, nel riferimento non inerziale e tenendo conto che in coordinate polari piane vale:  $d\mathbf{e}_r/dt = (d\theta/dt) \mathbf{e}_\theta$  e  $d\mathbf{e}_\theta/dt = -(d\theta/dt) \mathbf{e}_r$ ,

$$mR \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r = -mg \mathbf{e}_z - kR \cos \theta \mathbf{e}_x + mR\Omega^2 \cos \theta \mathbf{e}_x + 2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\phi} .$$

Cioè:

$$\begin{aligned} mR \frac{d^2 \theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r &= (2mR\Omega\dot{\theta} \sin \theta + \phi^y) \mathbf{e}_y - mg(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \\ &+ (mR\Omega^2 - kR) \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + \phi^r \mathbf{e}_r , \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la reazione vincolare, dato che è per ipotesi perpendicolare alla circonferenza, può solo avere componente radiale e lungo l'asse  $y$ :

$$\boldsymbol{\phi} = \phi^r \mathbf{e}_r + \phi^y \mathbf{e}_y .$$

Decomponendo l'equazione del moto di Newton scritta sopra lungo gli assi  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_y$  si ha il sistema di equazioni:

$$\phi^r = -mR \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg \sin \theta - (mR\Omega^2 - kR) \cos^2 \theta , \quad (\text{D.164})$$

$$mR \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \cos \theta - (mR\Omega^2 - kR) \cos \theta \sin \theta , \quad (\text{D.165})$$

$$\phi^y = -2mR\Omega \sin \theta \frac{d\theta}{dt} . \quad (\text{D.166})$$

La seconda è ancora l'equazione pura di movimento (basta moltiplicare ambo membri per  $R$ ) già trovata, le rimanenti due determinano le componenti della reazione vincolare quando è noto

il moto del sistema.

(3). Notiamo preventivamente che la forza centrifuga in  $\mathcal{S}$  è conservativa: ha la stessa struttura di quella di una molla con costante elastica *negativa*:  $-m\Omega^2$  ed ha pertanto un'energia potenziale  $-m\Omega^2(P-Q)^2/2$ . L'energia meccanica  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  nel sistema  $\mathcal{S}$  è data dalla somma dell'energia cinetica, dell'energia potenziale gravitazionale, dell'energia potenziale della molla e dell'energia potenziale centrifuga. Le rimanenti forze: la forza di Coriolis e la reazione vincolare non contribuiscono al calcolo non essendo conservative e compiendo sempre lavoro nullo. Per quest'ultima ragione, parlando in termini fisici, l'energia meccanica totale si conserva nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2\cos^2\theta. \quad (\text{D.167})$$

Tuttavia questo *non* è il modo di risolvere l'esercizio usando l'approccio matematico della meccanica Lagrangiana. La maniera più rapida per provare che  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  è un integrale primo usando l'approccio matematico della meccanica di Lagrange è però quella di notare prima di tutto che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$  espressa in coordinate  $(\theta, \dot{\theta})$ , quindi adattate al riferimento  $\mathcal{S}$ , non dipende esplicitamente dal tempo e pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi:

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) := \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}(\theta, \dot{\theta})$$

L'espressione di  $\mathcal{H}$  si ottiene senza calcoli applicando direttamente la seconda parte del teorema di Jacobi osservando che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  coincide con  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$  data da (D.158), *dove ora il termine  $\frac{mR^2}{2}\Omega^2\cos^2\theta$  è visto come energia potenziale della forza centrifuga* e non dell'energia cinetica che ora è:  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}$  i vincoli non dipendono dal tempo e la coordinata lagrangiana  $\theta$  è solidale con  $\mathcal{S}$ . Di conseguenza la seconda parte del teorema di Jacobi ci dice che la funzione di Hamilton calcolata a partire da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$  coincide con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2\cos^2\theta = \mathcal{E}|_{\mathcal{S}}.$$

Un metodo alternativo e più laborioso è quello di prendere l'equazione pura di movimento (D.159) moltiplicare ambo membri per  $d\theta/dt$ , ottenendo:

$$mR^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mR^2\Omega^2 \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \sin\theta + kR^2 \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \cos\theta - mgR \frac{d\theta}{dt} \cos\theta$$

e notando che il risultato si può riscrivere come, su ogni moto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\Omega^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta - mgR\sin\theta \right).$$

Questa è infine riscrivibile come:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2\cos^2\theta \right) = 0,$$

cioé, dove la derivata temporale totale è riferita ad una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange  $t \mapsto (t, \theta(t), \dot{\theta}(t))$  inserita in  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}|_{\mathcal{J}}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) = 0 .$$

(4) In riferimento alle equazioni pure di movimento (D.159) che riscriviamo in forma normale ed al prim'ordine:

$$\frac{dv}{dt} = -\Omega^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{k}{m} \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \cos \theta , \quad (\text{D.168})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = v , \quad (\text{D.169})$$

le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole le configurazioni per le quali l'unica soluzione del sistema autonomo sopra scritto con condizioni iniziali  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $v(0) = 0$  sono date da  $\theta(t) = \theta_0$  e  $v(t) = 0$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Deve allora essere chiaro, in base al teorema di esistenza ed unicità globale delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali, che le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole quelle che annullano il secondo membro di (D.168). Questo è equivalente a dire che le configurazioni di equilibrio sono tutti e soli i punti di stazionarietà della funzione energia potenziale totale (D.157). L'equazione per le configurazioni di equilibrio è dunque:

$$\left[ \left( \frac{k}{m} - \Omega^2 \right) \sin \theta_0 - \frac{g}{R} \right] \cos \theta_0 = 0 . \quad (\text{D.170})$$

Assumeremo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  con  $-\pi \equiv \pi$ . Abbiamo dunque sempre le seguenti configurazioni di equilibrio:  $\theta_{\pm} = \pm\pi/2$ . Inoltre, nel caso  $k \neq m\Omega^2$  e

$$\left| \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} \right| \leq 1$$

esistono altre configurazioni di equilibrio. Più precisamente, se in tali ipotesi  $k > m\Omega^2$ , si hanno ancora le soluzioni

$$\theta_1^{(>)} = \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} , \quad \theta_2^{(>)} = \pi - \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} ,$$

e se viceversa  $k < m\Omega^2$ , si hanno le ulteriori soluzioni:

$$\theta_1^{(<)} = \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} , \quad \theta_2^{(<)} = -\pi - \arcsin \frac{gm}{R(k - m\Omega^2)} .$$

Tenendo conto del fatto che dal punto di vista matematico, guardando le equazioni lagrangiane del moto, possiamo completamente ignorare la presenza della forza di Coriolis che non gioca alcun ruolo in esse, possiamo supporre che il sistema sia completamente descritto da forze conservative ed applicare la teoria generale che sappiamo in tale caso. La stabilità delle configurazioni di

equilibrio si può completamente studiare andando a guardare il segno della derivata seconda dell'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U}(\theta) := mgR \sin \theta + \frac{1}{2}kR^2 \cos^2 \theta - \frac{m}{2}R^2\Omega^2 \cos^2 \theta .$$

Se tale segno è positivo in una configurazione di equilibrio  $\theta_0$ ,  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  è una funzione di Liapunov per  $(\theta_0, 0)$  rispetto al sistema del primo ordine (D.168)-(D.169) e pertanto si ha equilibrio stabile nella configurazione  $\theta_0$ . Se il segno è negativo, per noti teoremi sappiamo che l'equilibrio è instabile. Se il segno è nullo non possiamo concludere nulla in base ai teoremi che conosciamo. Vale:

$$\frac{d\mathcal{U}(\theta)}{d\theta} = mgR \cos \theta - \frac{R^2}{2} (k - m\Omega^2) 2 \sin \theta \cos \theta = mgR \cos \theta - \frac{R^2}{2} (k - m\Omega^2) \sin(2\theta) .$$

Derivando ancora una volta:

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} = -mgR \sin \theta - R^2 (k - m\Omega^2) \cos(2\theta) = -mgR \sin \theta - R^2 (k - m\Omega^2) (1 - 2 \sin^2 \theta) .$$

In definitiva:

$$\frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} = -mgR \sin \theta + R^2 (k - m\Omega^2) (2 \sin^2 \theta - 1) . \quad (\text{D.171})$$

Usando questa espressione troviamo subito che:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_+} = -mgR + R^2 (k - m\Omega^2) ,$$

possiamo dire che  $\theta_+$ :

- (i) è stabile se  $-mg + R (k - m\Omega^2) > 0$ ,
- (ii) è instabile se  $-mg + R (k - m\Omega^2) < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $-mg + R (k - m\Omega^2) = 0$ .

Nello stesso modo troviamo che:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_-} = mgR + R^2 (k - m\Omega^2) ,$$

possiamo dire che  $\theta_-$ :

- (i) è stabile se  $mg + R (k - m\Omega^2) > 0$ ,
- (ii) è instabile se  $mg + R (k - m\Omega^2) < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $mg + R (k - m\Omega^2) = 0$ .

Consideriamo ora le altre configurazioni trovate nel caso  $k \neq m\Omega^2$  e  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$ . Focalizziamo l'attenzione sulle configurazioni di equilibrio  $\theta_{1,2}^{(>)}$ . Si osservi che il seno di tali angoli coincide e vale  $\frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} > 0$ . Pertanto, usando (D.171) si trova:

$$\left. \frac{d^2\mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(>)}} = -mgR \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} + R^2 (k - m\Omega^2) \left[ 2 \left( \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] ,$$

cioé , con qualche passaggio:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(>)}} = \frac{g^2 m^2}{k - m\Omega^2} - R^2 (k - m\Omega^2) .$$

Tenendo conto che  $k - m\Omega^2 > 0$  concludiamo che:  $\theta_1^{(>)}$  e  $\theta_2^{(>)}$  sono entrambe a priori:

- (i) configurazioni di equilibrio stabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 > 0$ ,
- (ii) configurazioni di equilibrio instabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 < 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ .

Tuttavia dobbiamo ricordare il vincolo  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$  che implica che il caso (i) non è possibile.

Inoltre nel caso (iii), cioè per  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ , in realtà si ritrova il caso già trattato indecidibile (iii)  $\theta_1^{(>)} = \theta_2^{(>)} = \pi/2$  già visto sopra.) Concludiamo dicendo che: *quando differiscono da  $\pi/2$ , le configurazioni di equilibrio  $\theta_1^{(>)}$  e  $\theta_2^{(>)}$  sono entrambe instabili.*

Consideriamo per finire le configurazioni di equilibrio  $\theta_{1,2}^{(<)}$ . Si osservi che il seno di tali angoli coincide e vale  $\frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} < 0$ . Pertanto, usando (D.171) si trova:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(<)}} = -mgR \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} + R^2 (k - m\Omega^2) \left[ 2 \left( \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right)^2 - 1 \right] ,$$

cioé , con qualche passaggio:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_{1,2}^{(<)}} = \frac{g^2 m^2}{k - m\Omega^2} - R^2 (k - m\Omega^2) .$$

Tenendo conto che  $k - m\Omega^2 < 0$  concludiamo che:  $\theta_1^{(<)}$  e  $\theta_2^{(<)}$  sono entrambe, a priori:

- (i) configurazioni di equilibrio stabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 < 0$ ,
- (ii) configurazioni di equilibrio instabile se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 > 0$ ,
- (iii) non possiamo dire nulla con i teoremi noti se  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ .

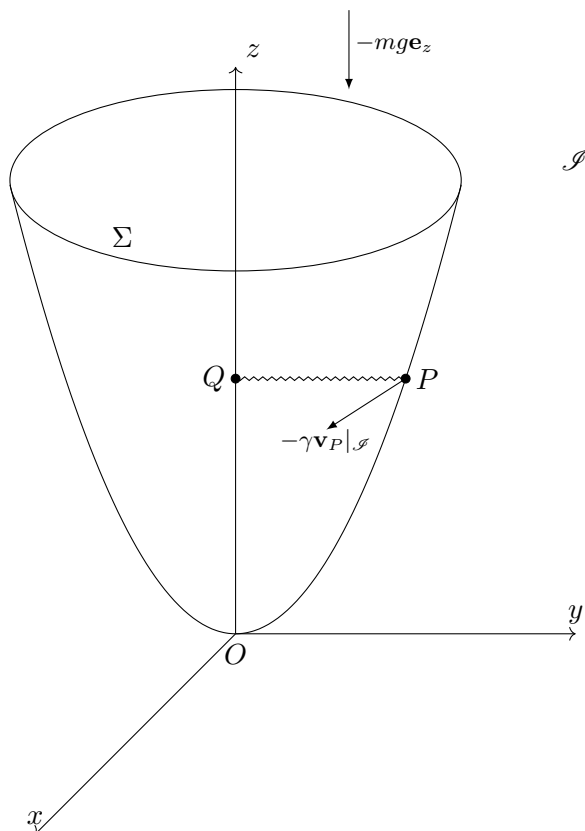
Tuttavia dobbiamo ricordare il vincolo  $\left| \frac{gm}{R(k-m\Omega^2)} \right| \leq 1$  che implica che il caso (ii) non è possibile.

Inoltre nel caso (iii), cioè per  $g^2 m^2 - R^2 (k - m\Omega^2)^2 = 0$ , in realtà si ritrova il caso già trattato indecidibile (iii)  $\theta_1^{(<)} = \theta_2^{(<)} = -\pi/2$  visto sopra.

Concludiamo dicendo che: *quando differiscono da  $-\pi/2$ , le configurazioni di equilibrio  $\theta_1^{(<)}$  e  $\theta_2^{(<)}$  sono entrambe stabili.*

### ESERCIZIO 13

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $z = a(x^2 + y^2)/2$  con  $a > 0$  costante. Sia  $P$  un punto materiale di massa  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo



ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

- (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),
- (ii) la forza di una molla ideale di costante elastica  $k > 0$ , lunghezza nulla a riposo, con un estremo in  $P$  e l'altro dato dal punto  $Q$  sull'asse  $z$  che si trova sempre alla stessa quota di  $P$ ,
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Si scrivano le equazioni pure di movimento per il punto  $P$  usando coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  adattate al sistema di assi  $x, y, z$ .

(2). Si dimostri che, se  $\gamma = 0$ , esistono moti con  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $d\theta/dt = \dot{\theta}_0$  costante e si determinino tutti i valori ammissibili per  $r_0$  e  $\dot{\theta}_0$ . Su tali moti si calcoli la reazione vincolare

$\phi$ . Si dimostri infine che moti con  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $d\theta/dt = \dot{\theta}_0$  costante *non possono esistere* nel caso  $\gamma > 0$ .

(3). Nel caso  $\gamma = 0$ , si determinino *due* integrali primi indipendenti del sistema spiegandone il significato fisico. Si discuta se qualcuno dei due integrali possa derivare dall'applicazione elementare del teorema di Nöther.

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton esplicitando l'Hamiltoniana del sistema in funzione delle variabili  $r, \theta, p_r, p_\theta$  e scrivendo esplicitamente le equazioni di Hamilton.

*Suggerimento.* Si ricordi che, in coordinate cilindriche:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z.$$

### Soluzione.

(1). Omettiamo nel seguito l'indice  $|\mathcal{S}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{S}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale. Le coordinate libere saranno le coordinate polari piane  $r$  e  $\theta$ , dato che la variabile  $z$  è vincolata a soddisfare  $z = ar^2/2$  in conseguenza del fatto che  $P \in \Sigma$ . Visto che il vincolo è ideale, le equazioni pure di movimento (cioè equazioni differenziali in forma normale che *non* contengono le reazioni vincolari e che permettono di ottenere i moti del sistema) si possono sempre scrivere come equazioni di Eulero-Lagrange. Nel caso  $\gamma = 0$  le forze sono tutte conservative se si esclude la reazione vincolare, pertanto il sistema ammette una lagrangiana di struttura  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ . Nel caso  $\gamma > 0$  le equazioni di Eulero-Lagrange si possono scrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \mathcal{Q}_r, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \mathcal{Q}_\theta, \quad (\text{D.172})$$

dove le  $\mathcal{Q}_r, \mathcal{Q}_\theta$  sono le componenti lagrangiane della forza attiva viscosa  $-\gamma \mathbf{v}$ , la lagrangiana  $\mathcal{L}$  è la stessa di prima e sono sottointese le ulteriori equazioni  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  e  $\dot{r} = dr/dt$ .

Andiamo a determinare  $\mathcal{L}$  e le componenti lagrangiane della forza viscosa notando che, nelle nostre coordinate, vale:

$$P - O = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r + \frac{ar^2}{2} \mathbf{e}_z \quad (\text{D.173})$$

e

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar \dot{r} \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.174})$$

Quadrando la seconda e moltiplicando il risultato per  $m/2$  si ha l'espressione dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  di  $P$ . L'energia potenziale totale di  $P$ ,  $\mathcal{U}$ , è data dalla somma del contributo  $mgz = mgar^2/2$ , dovuto alla forza di gravità, e del contributo  $k(P-Q)^2/2 = kr^2/2$ , dovuto alla molla. Pertanto, nel caso  $\gamma = 0$ , la lagrangiana di  $P$  in  $\mathcal{S}$ , tenendo anche conto di (D.174) risulta essere:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + a^2 r^2 \dot{r}^2 \right) - \frac{mgar^2}{2} - \frac{kr^2}{2}$$

cioé

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left( (1 + a^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{mga + k}{2} r^2. \quad (\text{D.175})$$

Passiamo alle componenti lagrangiane della forza viscosa. Abbiamo da (D.173) e (D.174)

$$\mathcal{Q}_r = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \mathbf{r}} = -\gamma \left( \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar \dot{r} \mathbf{e}_z \right) \cdot (\mathbf{e}_r + ar \mathbf{e}_z) = -\gamma \dot{r} (1 + a^2 r^2), \quad (\text{D.176})$$

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma \left( \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + ar \dot{r} \mathbf{e}_z \right) \cdot r \mathbf{e}_\theta = -\gamma r^2 \dot{\theta}. \quad (\text{D.177})$$

Le quazioni di Eulero-Lagrange, da (D.172), risultano immediatamente essere:

$$m \frac{d}{dt} \left( (1 + a^2 r^2) \frac{dr}{dt} \right) = ma^2 r \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + mr \left( \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - ga - \frac{k}{m} \right) - \gamma \frac{dr}{dt} (1 + a^2 r^2), \quad (\text{D.178})$$

$$m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = -\gamma r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (\text{D.179})$$

Sviluppando il primo membro si arriva facilmente, con qualche passaggio, ad un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale con secondo memebro di classe  $C^\infty$ . Valendo il teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni di sistemi die equazioni differenziali, concludiamo che il sistema sopra scritto è formato da equazioni pure di movimento.

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + c$  con  $\dot{\theta}_0$  e  $c$  costanti nelle equazioni di Eulero-Lagrange (D.178) e (D.179) (per  $\gamma = 0!$ ), si trova che esse sono verificate da tali funzioni se e solo se:

$$(m\dot{\theta}_0^2 - mga - k) = 0,$$

e quindi i valori possibili per  $r_0 > 0$  e  $\dot{\theta}_0$  sono:

$$r_0 > 0 \quad \text{e} \quad \dot{\theta}_0 = \pm \sqrt{ga + \frac{k}{m}}. \quad (\text{D.180})$$

Le equazioni che determinano la reazione vincolare si ottengono decomponendo la seconda legge della dinamica (nel caso  $\gamma = 0$ ) sulla terna  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$  e tenendo conto che la reazione vincolare non ha componenti tangenti a  $\Sigma$  e pertanto ha la struttura  $\boldsymbol{\phi} = \phi^{(z)} \mathbf{e}_z + \phi^{(r)} \mathbf{e}_r$ . Se

$$\mathbf{F} = -mg \mathbf{e}_z - kr \mathbf{e}_r - \gamma \mathbf{v},$$

è la somma delle forze attive agenti su  $P$ , e

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z,$$

vale in particolare

$$m \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_z, \quad m \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{e}_r,$$



che, tenendo conto che  $z = ar^2/2$ , si esplicitano in:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \frac{a}{2} r^2 = \phi^{(z)} - mg, \quad m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -kr + \phi^{(r)}.$$

Inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \pm \sqrt{ga + \frac{k}{m}} t + c$  si trovano le uniche componenti di  $\phi$ :

$$\phi^{(z)} = mg \quad \text{e} \quad \phi^{(r)} = -mr_0ga,$$

e quindi:

$$\phi = -mr_0ga \mathbf{e}_r + mg \mathbf{e}_z.$$

Nel caso  $\gamma > 0$ , inserendo le funzioni  $r(t) = r_0 > 0$  costante e  $\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + c$  con  $\dot{\theta}_0$  e  $c$  costanti nelle equazioni di Eulero-Lagrange (D.178) e (D.179) si ottiene la coppia di equazioni  $\gamma r_0 \dot{\theta}_0 = 0$  e  $r_0 (m\dot{\theta}_0^2 - mga - k) = 0$ . Nelle nostre ipotesi  $\gamma > 0, mga > 0, k > 0$ , e con la richiesta  $r_0 > 0$ , tale sistema *non* ammette soluzioni.

(3). Da (D.179) si conclude che, nel caso  $\gamma = 0$ , la grandezza:

$$L_z := mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

è un integrale primo. Il suo significato fisico è evidentemente la componente  $z$  del momento angolare di  $P$  rispetto al polo  $O$  nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Infatti, il calcolo diretto mostra che:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z &= m(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \wedge (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z = m\mathbf{e}_z \wedge (r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \cdot (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z) \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

L'integrale primo suddetto è un caso elementare di applicazione del teorema di Nöther per invarianza del sistema sotto rotazioni attorno ad un asse, notando che la Lagrangiana (D.175) non dipende esplicitamente dall'angolo  $\theta$  e pertanto si conserva l'integrale primo:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}.$$

Il calcolo esplicito (già svolto nel ricavare le equazioni di E-L) mostra immediatamente che

$$I = mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

L'esistenza di un secondo integrale primo, sempre nel caso  $\gamma = 0$ , segue immediatamente dal teorema di Jacobi, visto che il sistema è conservativo nel riferimento  $\mathcal{S}$ , i vincoli sono indipendenti dal tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$  e le coordinate libere usate sono solidali con il riferimento  $\mathcal{S}$ . Dal teorema di Jacobi si ha immediatamente che si conserva l'hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) := \dot{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L}$$

del sistema fisico e che essa coincide con l'energia meccanica totale del sistema fisico studiato valutata nel sistema di riferimento  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} \left( (1 + a^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{mga + k}{2} r^2 .$$

(4). Passiamo alla formulazione di Hamilton nel caso  $\gamma = 0$ . I momenti coniugati sono dati da:

$$p_r := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m(1 + a^2 r^2) \dot{r} , \quad p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} ,$$

che si invertono banalmente in

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m(1 + a^2 r^2)} , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} .$$

Pertanto la funzione hamiltoniana espressa in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = p_r \dot{r}(r, \theta, p_r, p_\theta) + p_\theta \dot{\theta}(r, \theta, p_r, p_\theta) - \mathcal{L}(r, \theta, p_r, p_\theta)$$

risulta avere la forma:

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m(1 + a^2 r^2)} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{mga + k}{2} r^2 .$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \right) &= \frac{a^2 r p_r^2}{m(1 + a^2 r^2)^2} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} - (mga + k)r , \\ \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= 0 , \\ \frac{dr}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \right) &= \frac{p_r}{m(1 + a^2 r^2)} , \\ \frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) &= \frac{p_\theta}{mr^2} . \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 14

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  dotato di coordinate cartesiane ortonormali solidali  $x, y, z$  di origine  $O$ , si considerino due punti materiali  $P$  e  $p$  di masse  $M > 0$  e  $m > 0$  rispettivamente, vincolati a stare nel piano  $x = 0$ , supponendo il vincolo ideale. Si supponga che i punti materiali interagiscano con una forza conservativa con energia potenziale (in  $\mathcal{S}$ ) data da

$$\mathcal{U}(p, P) = k||p - P||^3$$

dove  $k > 0$  è una costante assegnata. Sul punto  $P$  agisce una forza non conservativa  $\mathbf{f} := \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante (notare che la forza agisce solo lungo l'asse  $z$ ). Infine i due punti sono sottoposti alla forza di gravità con accelerazione  $-g\mathbf{e}_z$  essendo  $g > 0$  una costante. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema usando come coordinate libere: le due coordinate  $y, z$  del centro di massa  $G$ , l'angolo  $\theta$  che  $P - G$  individua rispetto all'asse  $y'$  passante per  $G$  e parallelo (equiverso) a  $y$  e la distanza  $r > 0$  di  $P$  da  $G$ .  $\theta$  è supposto essere orientato positivamente rispetto a versore  $\mathbf{e}_x$ .

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , si scriva l'espressione esplicita dell'energia meccanica totale, della componente  $x$  del momento angolare rispetto al centro di massa e della componente  $y$  dell'impulso totale del sistema, relativi al riferimento  $\mathcal{S}$ , e si dimostri che sono tutte integrali primi.

(3). Nel caso  $\gamma = 0$ , si discuta se possano esistere soluzioni delle equazioni del moto  $y = y(t), z = z(t), \theta = \theta(t), r = r(t)$  con  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \neq 0$  costante ed eventualmente si determinino tali soluzioni esplicitamente.

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton, si scriva l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton in funzione delle coordinate hamiltoniane del sistema  $y, z, \theta, r, p_y, p_z, p_\theta, p_r$ .

**Soluzione.** Tutte le quantità considerate sono relative al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}$  e pertanto omettiamo di scrivere esplicitamente il pedice  $\mathcal{S}$ .

(1) Per costruzione vale, se  $\rho > 0$  è la distanza di  $p$  da  $G$ ,  $m\rho = Mr$ , da cui

$$\rho = \frac{M}{m}r.$$

Vale allora:

$$P - O = (y + r \cos \theta) \mathbf{e}_y + (z + r \sin \theta) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.181})$$

$$p - O = \left(y - \frac{M}{m}r \cos \theta\right) \mathbf{e}_y + \left(z - \frac{M}{m}r \sin \theta\right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.182})$$

Da queste relazioni si trovano

$$\mathbf{v}_P = (\dot{y} + \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_y + (\dot{z} + \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.183})$$

$$\mathbf{v}_p = \left(\dot{y} - \frac{M}{m}\dot{r} \cos \theta + \frac{M}{m}r\dot{\theta} \sin \theta\right) \mathbf{e}_y + \left(\dot{z} - \frac{M}{m}\dot{r} \sin \theta - \frac{M}{m}r\dot{\theta} \cos \theta\right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.184})$$

Questa espressione fornisce, con qualche calcolo, l'espressione dell'energia cinetica definita come  $\mathcal{T} = (1/2)m\mathbf{v}_p^2 + (1/2)M\mathbf{v}_P^2$  (lo stesso risultato si ottiene direttamente applicando il teorema di König):

$$\mathcal{T} = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) . \quad (\text{D.185})$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale

$$\mathcal{U}(p, P) = k||P - p||^3 = k \left( r + \frac{M}{m} r \right)^3 = k(1 + M/m)^3 r^3$$

a quella dovuta alla forza di gravità :

$$mgz_p + Mgz_P = Mg(z + r \sin \theta) + mg \left( z - \frac{M}{m} \sin \theta \right) = (m + M)gz .$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema è pertanto:

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - k \left( 1 + \frac{M}{m} \right)^3 r^3 - (m + M)gz . \quad (\text{D.186})$$

Nel caso  $\gamma \neq 0$  le equazioni di E-L terranno anche conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  di  $\mathbf{f}$  ed avranno dunque la forma

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k$$

dove  $\mathcal{L}$ , come scritto sopra, tiene conto delle sole forze conservative. Le componenti lagrangiane di  $\mathbf{f}$  sono:

$$\mathcal{Q}_y = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial y} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = 0 ,$$

$$\mathcal{Q}_z = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial z} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) ,$$

$$\mathcal{Q}_r = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial r} = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_y + \sin \theta \mathbf{e}_z) = \gamma \sin \theta (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) ,$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = \gamma r \cos \theta (\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} \cdot \mathbf{e}_y) .$$

Mettendo tutto insieme, le equazioni di Eulero-Lagrange risultano infine essere:

$$\frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = 0 , \quad (\text{D.187})$$

$$(M+m) \frac{d}{dt} \frac{dz}{dt} = -(m+M)g + \gamma \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) , \quad (\text{D.188})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) &= r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{3k(m+M)^2}{Mm^2} r^2 \\ &\quad + \frac{m\gamma \sin \theta}{M(m+M)} \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (\text{D.189})$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{m\gamma r \cos \theta}{M(m+M)} \left( \frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) . \quad (\text{D.190})$$

(2) Se  $\gamma = 0$ , il sistema fisico è sottoposto a sole forze conservative ed ha vincoli ideali indipendenti dal tempo. Possiamo applicare il teorema di Jacobi che afferma che (a) l'energia meccanica totale si conserva nel tempo sulle soluzioni delle equazioni del moto e (b) coincide con la funzione di Hamilton. Pertanto l'energia meccanica totale ha la forma:

$$\mathcal{H}(y, z, \theta, r, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{r}) = \frac{M+m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{M(m+M)}{2m} (\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^3 + (m+M)gz. \quad (\text{D.191})$$

La lagrangiana non dipende esplicitamente da  $y$ , applicando la versione più elementare del teorema di Nöther, ovvero direttamente da (D.187), concludiamo che si deve conservare il momento coniugato:

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m+M)\dot{y} = (M+m)\frac{dy}{dt}.$$

Risulta evidente che  $p_y$  altro non è che la componente  $y$  dell'impulso totale del sistema essendo il prodotto della massa totale del sistema moltiplicata per la componente  $y$  della velocità del centro di massa e valendo il teorema del centro di massa. La componente  $x$  del momento angolare totale del sistema rispetto al centro di massa è:

$$L_G^x = (M(P - G) \wedge \mathbf{v}_P + m(p - G) \wedge \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{e}_x.$$

Facendo uso di (D.181)-(D.184) notando che  $G - O = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ , si trova con qualche calcolo che:

$$L_G^x = M \left(1 + \frac{M}{m}\right) r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

In virtù della non dipendenza esplicita di  $\mathcal{L}$  da  $\theta$ , si conserva il momento coniugato:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{M}{m}(m+M)r^2\dot{\theta} = \frac{M}{m}(m+M)r^2\frac{d\theta}{dt} = L_G^x.$$

Lo stesso risultato si evince dalla (D.190).

(3) Se  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0$  è costante non nulla, (D.190) implica immediatamente che  $r$  deve rimanere costante sul moto. Sostituendo questo risultato nella (D.189) si arriva all'equazione algebrica:

$$r\dot{\theta}_0^2 - \frac{3k(m+M)^2}{Mm^2}r^2 = 0.$$

Questa equazione ammette come unica soluzione ammissibile (l'altra è  $r = 0$  che non si deve accettare perché abbiamo richiesto  $r > 0$  per evitare la singolarità dell'origine nelle coordinate polari):

$$r_0 = \frac{\dot{\theta}_0^2 M m^2}{3k(m+M)^2}.$$

Concludiamo che per ogni valore  $\dot{\theta}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  c'è una classe di soluzioni in cui  $\theta(t)$  ammette derivata costante pari a  $\dot{\theta}_0$ , parametrizzata da  $y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ :

$$y(t) = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad (\text{D.192})$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (\text{D.193})$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t, \quad (\text{D.194})$$

$$r(t) = \frac{\dot{\theta}_0^2 M m^2}{3k(m+M)^2}. \quad (\text{D.195})$$

(5) I momenti coniugati sono

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m+M)\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = (m+M)\dot{z}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{M}{m}(M+m)\dot{r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{M}{m}(M+m)r^2\dot{\theta}.$$

L'hamiltoniana è stata scritta in (D.191) in funzione delle variabili di Lagrange. Invertendo le relazioni di sopra e sostituendo nella (D.191) si ritrova:

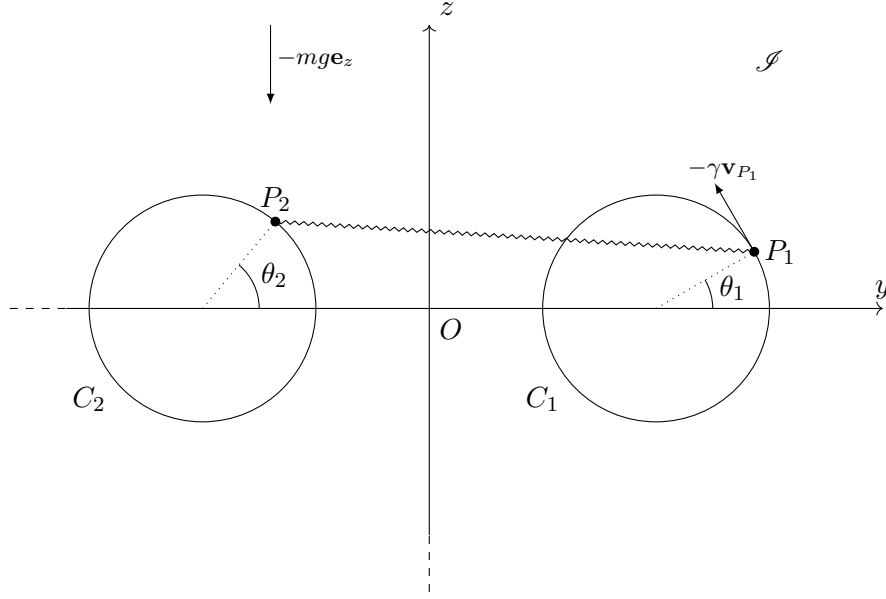
$$\mathcal{H}(y, z, \theta, r, p_y, p_z, p_\theta, p_r) = \frac{(p_y^2 + p_z^2)}{2(M+m)} + \frac{m(r^2 p_r^2 + p_\theta^2)}{2r^2 M(m+M)} + k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^3 + (m+M)gz. \quad (\text{D.196})$$

Le equazioni di Hamilton sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{M+m}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{M+m} \\ \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0, & \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -(m+M)g \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{m p_r}{M(M+m)}, & \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{m p_\theta}{r^2 M(M+m)} \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{m p_\theta^2}{r^3 M(m+M)} - 3k \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 r^2, & \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 15

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{I}$  si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa



$m > 0$ , sono supposti essere vincolati alle circonferenze lisce  $C_1$  e  $C_2$  di centro, rispettivamente  $(0, 2R, 0)$  e  $(0, -2R, 0)$  e raggi uguali pari a  $R > 0$  giacenti nel piano  $x = 0$ . I due punti materiali sono connessi l'un l'altro da una molla ideale di lunghezza nulla a riposo, massa trascurabile e costante elastica  $k > 0$ . Sui due punti agisce la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$ . Infine sul punto  $P_1$  agisce la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_1}$  con  $\gamma \geq 0$  costante fissata ed essendo la velocità riferita a sistema inerziale considerato.

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  nel piano  $y, z$ , valutati a partire dall'asse  $y$  ed orientati positivamente rispetto all'asse  $x$ .

- (1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del sistema dei due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ .
- (2). Si esprima la derivata temporale dell'energia meccanica del sistema in funzione di  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  e si dimostri che, per  $\gamma = 0$ , l'energia meccanica è un integrale primo.
- (3). (i) Si determini il valore della costante  $m > 0$  in funzione delle costanti positive (supposte assegnate)  $k, g, R$  in modo tale che le condizioni iniziali

$$\theta_1(0) = -3\pi/4, \quad \theta_2(0) = -\pi/4, \quad \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

individuino la soluzione di quiete:

$$\theta_1(t) = -3\pi/4, \quad \theta_2(t) = -\pi/4 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si può determinare il valore della costante  $m > 0$  in funzione delle costanti positive  $k, g, R$  in modo tale che le condizioni iniziali

$$\theta_1(0) = 3\pi/4, \quad \theta_2(0) = \pi/4, \quad \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$$

individuino la soluzione di quiete:

$$\theta_1(t) = 3\pi/4, \quad \theta_2(t) = \pi/4 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} ?$$

(4). Si determinino le (tre) componenti della reazione vincolare agenti su ciascuno dei due punti sul moto individuato in (3) (i).

(5). Nell'ipotesi  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del sistema.

### Soluzione.

(1). Dato che le circonferenze sono lisce i vincoli sono ideali e dunque possiamo usare la formulazione lagrangiana della meccanica. Usando la solita base ortonormale  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$  adattata alle coordinate polari piane, la velocità del punto  $P_1$  risulta essere  $\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$  e quella di  $P_2$  ha una forma analoga. L'energia cinetica del sistema riferita a  $\mathcal{I}$  è quindi semplicemente:

$$\mathcal{T} := \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) .$$

L'energia potenziale totale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale

$$mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

all'energia potenziale della molla

$$\frac{k}{2}(P_1 - P_2)^2 = \frac{k}{2} [R(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \mathbf{e}_z + (2R + R \cos \theta_1 + 2R - R \cos \theta_2) \mathbf{e}_y]^2 .$$

Sommando tutto trascurando un'inessenziale costante additiva che si ha sviluppando l'energia potenziale di sopra, si ha infine l'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U} = mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 [-\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 + 4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)]$$

cioé

$$\mathcal{U} = mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 [4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)] .$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema vale pertanto  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 [4(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)] . \quad (\text{D.197})$$



Le equazioni di Eulero-Lagrange assumono pertanto, nel caso generale, la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \mathcal{Q}_i \quad \text{per } i = 1, 3.$$

Le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_i$  sono riferite alla forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1$ . Il calcolo diretto mostra subito che:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = 0.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere in tal modo in forma normale e date da:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4kR^2 \sin \theta_1 - \gamma R^2 \frac{d\theta_1}{dt}, \quad (\text{D.198})$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 4kR^2 \sin \theta_2. \quad (\text{D.199})$$

**(2).** Moltiplicando entrambi i membri della prima equazione di E-L per  $\frac{d\theta_1}{dt}$ , quelli della seconda per  $\frac{d\theta_2}{dt}$  e sommando membro a membro il risultato, si arriva all'identità:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] = -\frac{d\theta_1}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} - \frac{d\theta_2}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} - \gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2.$$

Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \mathcal{U} \right] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2,$$

cioé

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{T} + \mathcal{U}] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2.$$

Abbiamo ottenuto in tal modo che la derivata temporale dell'energia meccanica totale  $E$  si può scrivere, su ogni moto del sistema, come:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Nel caso in cui  $\gamma = 0$  si conclude che l'energia meccanica del sistema si conserva sui moti del sistema e pertanto l'energia meccanica totale è un integrale primo.

**(3).** (i) Dato che il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (D.198)- (D.199) è (a parte un coefficiente irrilevante a primo membro) in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , vale il teorema di esistenza ed unicità. Pertanto le possibili condizioni iniziali  $\theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0)$  per il moto dei due punti in modo tale che il moto risultante sia di quiete sono tutte e sole quelle per le quali si annulla il secondo membro del sistema detto. Di conseguenza deve essere:  $\dot{\theta}_1(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$  ed ulteriormente deve valere:

$$0 = -mgR \cos \theta_1(0) - kR^2 \sin(\theta_1(0) - \theta_2(0)) + 4kR^2 \sin \theta_1(0), \quad (\text{D.200})$$

$$0 = -mgR \cos \theta_2(0) + kR^2 \sin(\theta_1(0) - \theta_2(0)) - 4kR^2 \sin \theta_2(0). \quad (\text{D.201})$$

Imponendo che le equazioni dette siano soddisfatte per le configurazioni

$$\theta_1(0) = -3\pi/4, \quad \theta_2(0) = -\pi/4,$$

si ha subito la condizione (la stessa per entrambe le equazioni):

$$m = \frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}, \quad (\text{D.202})$$

che determina un valore strettamente positivo di  $m$  e pertanto accettabile. Procedendo in senso inverso nelle implicazioni, si verifica subito che assumendo che  $m = \frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}$ , le condizioni iniziali assegnate individuano la soluzione di quiete voluta in virtù del teorema di esistenza ed unicità.

(ii) In questo caso, procedendo come nel caso (i) si trova il valore di  $m$

$$m = -\frac{(4 - \sqrt{2})kR}{g}.$$

che è inaccettabile in quanto negativo. Si conclude che la risposta al quesito è negativa.

(4). Per calcolare la reazione vincolare  $\phi = \phi^x \mathbf{e}_x + \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$  agente sul punto  $P_1$ , si osservi che tale reazione è normale alla circonferenza su cui è vincolato  $P_1$ , essendo il vincolo liscio, ed ha pertanto direzione radiale. Dato che  $P_1$  è in quiete, la somma delle forze agenti su di esso deve dare il vettore nullo:

$$\phi - mg \mathbf{e}_z - k(P_1 - P_2) = \mathbf{0}.$$

Nella configurazione considerata la componente  $\phi^y$  e la componente  $\phi^z$  coincidono ( $\theta_1(0) = -3\pi/4$ ). Tenendo conto del fatto che  $\phi^z$  deve equilibrare il peso del punto, che non ci sono componenti delle forze attive nella direzione  $\mathbf{e}_x$  si trova immediatamente:

$$\phi^x = 0, \quad \phi^y = mg, \quad \phi^z = mg.$$

La simmetria del problema porta immediatamente a determinare la reazione vincolare  $\phi = \phi^x \mathbf{e}_x + \phi^y \mathbf{e}_y + \phi^z \mathbf{e}_z$  agente sul punto  $P_2$  come:

$$\phi^x = 0, \quad \phi^y = -mg, \quad \phi^z = mg.$$

(5). Riferendosi alla lagrangiana (D.197), i momenti  $p_1$  e  $p_2$  coniugati rispettivamente con la coordinata  $\theta_1$  e  $\theta_2$  risultano essere immediatamente:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = mR^2 \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2.$$

Invertendo tali semplici relazioni ed esprimendo l'hamiltoniana  $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i - \mathcal{L}$  in funzione delle variabili canoniche si trova subito:

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2mR^2} (p_1^2 + p_2^2) + mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 [4 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)].$$

Le equazioni di Hamilton risultano pertanto essere:

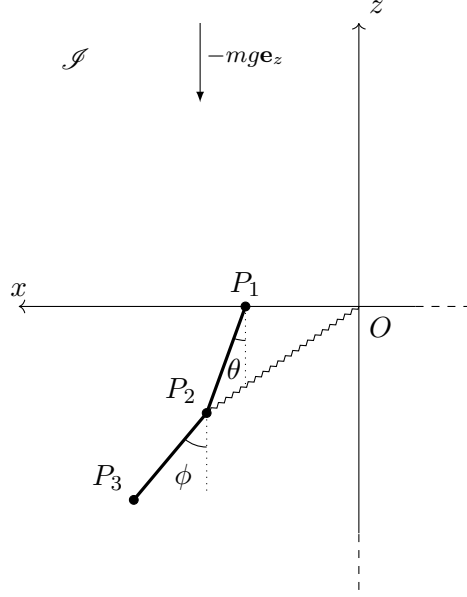
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{p_2}{mR^2}$$

e

$$\frac{dp_1}{dt} = -mgR \cos \theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 4kR^2 \sin \theta_1, \quad \frac{dp_2}{dt} = -mgR \cos \theta_2 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4kR^2 \sin \theta_2.$$

## ESERCIZIO 16

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{I}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{I}$ . Tre punti materiali  $P_1, P_2, P_3$  tutti di massa  $m > 0$ , sono



supposti essere vincolati a rimanere nel piano  $x, z$ , pensato come vincolo liscio, ed in modo tale che:

- (i) il punto  $P_1$  si può muovere solo sull'asse  $x$  pensato come curva liscia,
- (ii) il punto  $P_2$  è appeso al punto  $P_1$  con un'asta rigida priva di peso e lunga  $\ell > 0$ ,
- (iii) il punto  $P_3$  è appeso al punto  $P_2$  con una seconda asta rigida priva di peso e lunga  $\ell > 0$ .

I tre punti, oltre alle reazioni vincolari, sono sottoposti alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$ , con  $g > 0$  nota, ed alla forza di una molla ideale di massa nulla, lunghezza a riposo nulla, costante elastica  $k \geq 0$  assegnata, fissata ad un estremo in  $O$  ed all'altro estremo in  $P_2$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinate libere le tre seguenti coordinate. L'ascissa  $s$  di  $P_1$ , l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  che  $P_2 - P_1$  individua rispetto a  $-\mathbf{e}_z$  pensato su di una retta verticale (su cui  $\theta = 0$ ) passante per  $P_1$  ed in modo tale che  $\theta$  sia orientato positivamente rispetto all'asse  $-\mathbf{e}_y$ , l'angolo  $\phi \in (-\pi, \pi]$  che  $P_3 - P_2$  individua rispetto a  $-\mathbf{e}_z$  pensato su di una retta verticale (su cui  $\phi = 0$ ) passante per  $P_2$  ed in modo tale che  $\phi$  sia orientato positivamente rispetto all'asse  $-\mathbf{e}_y$ .

(1). Si scriva la lagrangiana per il sistema dei tre punti.

(2). Per  $k = 0$  si determinino due integrali primi scrivendone l'espressione in funzione delle coordinate libere e delle coordinate libere puntate e precisandone il significato fisico. Si provi che, se  $k > 0$ , una delle due funzioni continua ad essere un integrale primo, mentre l'altra cessa

di esserlo e si calcoli esplicitamente la derivata temporale di tale funzione su un moto generico del sistema in funzione delle coordinate libere.

(3). Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema per  $m, g, \ell, k > 0$  e si studi la stabilità di ciascuna di esse per quanto possibile con i teoremi noti.

(4). Si calcolino le reazioni vincolari agenti su ciascuno dei tre punti quando il sistema è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile con  $\theta \neq 0$ .

*Suggerimento.* Si osservi che le aste, essendo prive di massa, trasmettono completamente la forza ai loro estremi: in altre parole, le forze applicate agli estremi di un'asta rigida priva di massa sono sempre uguali e contrarie e coincidono con la tensione dell'asta.

**Soluzione.**

(1). In base alla definizioni date:

$$\begin{aligned} P_1 - O &= s \mathbf{e}_x, & P_2 - O &= (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_x - \ell \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ P_3 - O &= (s + \ell(\sin \theta + \sin \phi)) \mathbf{e}_x - \ell(\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{D.203})$$

Notiamo che le coordinate libere sono quindi solidali con il riferimento  $\mathcal{I}$  ed inoltre la coordinata  $s$  è traslazionale nella direzione di  $\mathbf{e}_x$ . L'espressione per la velocità dei punti si ottiene immediatamente (nel seguito ometteremo sistematicamente di usare l'indice  $\mathcal{I}$ , dato che si lavora in un unico sistema di riferimento).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \dot{s} \mathbf{e}_x, & \mathbf{v}_2 &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_x + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{v}_3 &= (\dot{s} + \ell \dot{\theta} \cos \theta + \ell \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_x + \ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{D.204})$$

Usando le espressioni trovate, con un calcolo banale si perviene all'espressione dell'energia cinetica del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2)$ , che vale:

$$\mathcal{T} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2 \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right].$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale di  $P_2$  e  $P_3$  (quella di  $P_1$  si può trascurare dato che il punto rimane a quota costante), all'energia potenziale della molla. Avendo scelto la quota  $z = 0$  per la quale l'energia potenziale gravitazionale si annulla, si trova

$$\mathcal{U} = -mg\ell(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{k}{2} \|P_2 - O\|^2 = -mg\ell(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{k}{2} [(s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta],$$

cioè, trascurando una costante inessenziale:

$$\mathcal{U} = -mg\ell(2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{ks}{2} (s + 2\ell \sin \theta). \quad (\text{D.205})$$

Concludiamo che la lagrangiana del sistema fisico, nel riferimento  $\mathcal{S}$  ha la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right] \\ + m g \ell (2 \cos \theta + \cos \phi) - \frac{k s}{2} (s + 2\ell \sin \theta) . \end{aligned} \quad (\text{D.206})$$

(2). Nel caso generale di  $k \geq 0$  sicuramente un integrale primo è l'hamiltoniana che coincide con l'energia meccanica del sistema, visto che siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi: i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{S}$  e le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{S}$ , la lagrangiana (D.206) non dipende esplicitamente dal tempo, le forze sono tutte conservative. L'espressione esplicita di questo integrale primo è dunque:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = m \left[ \frac{3}{2} \dot{s}^2 + \ell \dot{s} (2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) + \ell^2 \left( \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) \right) \right] \\ - m g \ell (2 \cos \theta + \cos \phi) + \frac{k s}{2} (s + 2\ell \sin \theta) . \end{aligned}$$

Un secondo integrale primo si ottiene, nel caso  $k = 0$ , notando che in tal caso la lagrangiana (D.206) non dipende dalla variabile  $s$ . Pertanto la quantità  $I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}$  si conserva sui moti del sistema. Dato che, da (D.203) risulta immediatamente

$$P_i(s + \Delta s, \theta, \phi) = P_i(s, \theta, \phi) + \Delta s \mathbf{e}_x, \quad i = 1, 2, 3,$$

concludiamo che la coordinata libera  $s$  è traslazionale lungo la direzione  $\mathbf{e}_x$ . Di conseguenza  $I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}}$  coincide con l'impulso totale del sistema nella direzione  $\mathbf{e}_x$ . Il calcolo esplicito usando (D.206) produce:

$$I := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = 3m\dot{s} + m\ell(2\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) ,$$

Si verifica immediatamente, usando le espressioni (D.204) trovate sopra per le velocità dei tre punti, che questo è l'impulso totale del sistema lungo l'asse  $x$ . Nel caso in cui  $k > 0$ , le stesse equazioni di Eulero-Lagrange per la coordinata  $s$  ci dicono quanto valga la derivata temporale di  $I$  quando valutata su un generico moto del sistema  $s = s(t), \theta = \theta(t), \phi = \phi(t)$ , cioè su una generica soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange. Usando nuovamente l'espressione trovata per  $\mathcal{L}$ , ma con  $k > 0$ , si ha subito dall'equazione di E-L per  $s$ :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -k(s(t) + \ell \sin \theta(t)) .$$

(3) Le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando il secondo membro delle equazioni di Eulero-Lagrange, quando queste sono state scritte in forma normale. Nel caso in esame, tutte le forze attive sono conservative, le coordinate libere sono solidali al riferimento  $\mathcal{S}$  nel quale si valuta la lagrangiana, come è noto, in tal caso le configurazioni di equilibrio si ottengono come tutte e sole le configurazioni che annullano tutte le derivate parziali prime di  $\mathcal{U}$ . Nel caso in

esame troviamo le seguenti condizioni direttamente da (D.205).

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} = mgl \sin \phi = 0 \text{ da cui } \phi = 0 \text{ oppure } \phi = \pi.$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 2mgl \sin \theta + ksl \cos \theta = 0 \text{ da cui } 2mgl \sin \theta = -ksl \cos \theta.$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} = ks + kl \sin \theta = 0 \text{ da cui } s = -\ell \sin \theta.$$

Inserendo l'ultima condizione trovata nella precedente, abbiamo infine le condizioni che individuano le configurazioni di equilibrio:

$$\sin \phi = 0, \quad \sin \theta \left( \frac{2mg}{k\ell} - \cos \theta \right) = 0, \quad s = -\ell \sin \theta.$$

Abbiamo pertanto i seguenti due casi.

Se  $\frac{2mg}{k\ell} > 1$ , allora ci sono le configurazioni di equilibrio  $(\phi, \theta, s)$ :

$$(0, 0, 0), \quad (\pi, 0, 0), \quad (\pi, \pi, 0), \quad (0, \pi, 0)$$

Se  $\frac{2mg}{k\ell} \leq 1$ , *oltre alle precedenti*, ci sono anche le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$(0, \theta_0, s_0), \quad (0, -\theta_0, -s_0)$$

e

$$(\pi, \theta_0, s_0), \quad (\pi, -\theta_0, -s_0)$$

dove abbiamo definito

$$\theta_0 := \arccos \frac{2mg}{k\ell} \geq 0, \quad s_0 := -\ell \sin \theta_0 = -\ell \sqrt{1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2},$$

e quindi valgono in particolare

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2}, \quad s_0 \sin \theta_0 = -\ell \left( 1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2 \right). \quad (\text{D.207})$$

Da (D.205), la matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial s} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial s} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial \phi} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial \theta} & \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s \partial s} \end{bmatrix},$$

risulta avere forma

$$H(\phi, \theta, s) = \begin{bmatrix} mgl \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 2mgl \cos \theta - ksl \sin \theta & kl \cos \theta \\ 0 & kl \cos \theta & k \end{bmatrix},$$

Osserviamo che tutte le configurazioni di equilibrio con  $\phi = \pi$ , sono tali che  $H(\pi, \theta, s)$  ammette sempre un autovalore negativo  $mg\ell \cos \pi = -mg\ell$  associato al vettore colonna  $(1, 0, 0)$ . Pertanto queste configurazioni sono tutte instabili nel passato e futuro. Restringiamoci pertanto a studiare le configurazioni di equilibrio con  $\phi = 0$ . Questo è equivalente a studiare la sottomatrice quadrata

$$H'(\phi, \theta, s) = \begin{bmatrix} 2mg\ell \cos \theta - ksl \sin \theta & k\ell \cos \theta \\ k\ell \cos \theta & k \end{bmatrix}.$$

Se la configurazione di equilibrio  $(0, \theta, s)$  rende definita positiva tale matrice, l'equilibrio è stabile nel passato e nel futuro. Se appare qualche autovalore negativo, l'equilibrio è instabile nel passato e nel futuro. Se infine appare qualche autovalore nullo, non siamo in grado di decidere la natura della stabilità con i teoremi a disposizione. Dato che il minore dato dall'elemento in basso a destra è sempre strettamente positivo, la positività della matrice  $H'$  è equivalente alla positività del suo determinante:

$$\det H'(\phi, \theta, s) = k(2mg\ell \cos \theta - ksl \sin \theta) - k^2\ell^2 \cos^2 \theta.$$

Viceversa, se il determinante risultasse essere negativo, dato che esso coincide con il prodotto degli autovalori, un autovalore dovrebbe essere negativo e pertanto si avrebbe instabilità. Se il determinante risultasse nullo, non potremmo trarre alcuna conclusione. Esaminando le configurazioni prima individuate (solo quelle con  $\phi = 0$  le altre sappiamo già essere instabili) abbiamo che:

$\det H'(0, 0, 0) = k^2\ell^2 \left( \frac{2mg}{k\ell} - 1 \right)$  e pertanto si ha stabilità per  $2mg > k\ell$ , instabilità per  $2mg < k\ell$ , non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

$\det H'(0, \pi, 0) = -k^2\ell^2 \left( \frac{2mg}{k\ell} + 1 \right)$  e pertanto si ha sempre instabilità.

$\det H'(0, \theta_0, s_0) = k^2\ell^2 \left( 1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2 \right)$ , dove abbiamo usato (D.207), e pertanto si ha stabilità per  $2mg < k\ell$ , instabilità per  $2mg > k\ell$  – ma in realtà questo caso è escluso per ipotesi – e non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

$\det H'(0, -\theta_0, -s_0) = k^2\ell^2 \left( 1 - \left( \frac{2mg}{k\ell} \right)^2 \right)$ , dove abbiamo usato (D.207), e pertanto si ha nuovamente stabilità per  $2mg < k\ell$  e non possiamo decidere nulla per  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.

Riassumendo:

- (a)  $(\pi, 0, 0)$ ,  $(\pi, \pi, 0)$  sono configurazioni di equilibrio instabili nel passato e futuro.
- (b)  $(0, 0, 0)$  è configurazione di equilibrio instabili nel passato e futuro rispettivamente per  $2mg < k\ell$  e stabile nel passato e nel futuro se  $2mg > k\ell$ , e non possiamo decidere niente per il caso  $2mg = k\ell$  con i teoremi noti.
- (c)  $(0, \pi, 0)$  è configurazione di equilibrio instabile nel passato e nel futuro.
- (d) Nel caso  $2mg < k\ell$ , le ulteriori configurazioni di equilibrio  $(0, \theta_0, s_0)$ ,  $(0, -\theta_0, -s_0)$  sono stabili nel passato e nel futuro. Nel caso  $2mg = k\ell$ , non possiamo decidere niente sulla stabilità di tali configurazioni con i teoremi noti.



(3) Consideriamo ad esempio la configurazione di equilibrio stabile che si ha per  $\phi = 0$ ,  $\theta = \theta_0 := \arccos \frac{2mg}{k\ell}$ ,  $s = s_0 := -\ell \sin \theta_0$  (la discussione per l'altra configurazione stabile con  $\theta \neq 0$  è del tutto analoga). Si osservi che, in questo caso,  $P_1$  si trova sull'asse  $x$  negativo a distanza  $-s_0$  dall'origine,  $P_2$  e  $P_3$  giacciono sull'asse  $z$ . Determiniamo le reazioni vincolari che agiscono su ciascuno dei tre punti. Le forze che agiscono su ciascun punto devono avere risultante nulla visto che ciascun punto non ha accelerazione nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Esaminiamo i tre punti separatamente.

(a) Punto  $P_3$ . La reazione vincolare sul punto  $P_3$  sarà banalmente:

$$\phi_3 = mg \mathbf{e}_z .$$

Si osservi che non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione. Quanto trovato mostra anche che la tensione dell'asta che unisce  $P_3$  a  $P_2$  uguaglia il peso di  $P_3$ .

(b) Punto  $P_2$ . Il punto  $P_2$  è sottoposto alla forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza della molla ed alla reazione vincolare dovuta all'asta che connette  $P_1$  a  $P_2$ . Non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione. La forza della molla vale  $k\ell \cos \theta_0 \mathbf{e}_z = k\ell \frac{2mg}{k\ell} = 2mg \mathbf{e}_z$  e pertanto coincide con la somma della forza peso di  $P_2$  e della reazione vincolare dovuta all'asta che unisce  $P_2$  a  $P_3$ , cioè alla tensione dell'asta (con il segno opportunamente scelto). Concludiamo che la reazione vincolare dovuta all'asta che connette  $P_2$  a  $P_1$  deve essere nulla (ed è pertanto nulla anche la tensione di tale asta). In definitiva l'unica reazione vincolare che agisce su  $P_2$  è quella dovuta all'asta che lo connette a  $P_3$ . Vale pertanto:

$$\phi_2 = -mg \mathbf{e}_z .$$

(c) Punto  $P_1$ . Il punto  $P_1$  è sottoposto alla forza vincolare che lo trattiene alla guida liscia data dall'asse  $x$ , alla forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_3$  ed alla forza dovuta all'asta che lo connette a  $P_2$ . Quest'ultima forza è nulla, dato che la tensione dell'asta è nulla come detto sopra. Si conclude che:

$$\phi_1 = mg \mathbf{e}_z .$$

Ancora, non vi sono componenti della reazione vincolare (totale) perpendicolare al piano  $x, z$ , dato che l'accelerazione normale al piano è nulla e non vi sono forze attive che agiscono in tale direzione.

## ESERCIZIO 17

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $z = cx^2$  con  $c > 0$  costante nota. Sia  $P$  un punto materiale di massa assegnata  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

- (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),
- (ii) le forze di due molle ideali entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(0, q, 0)$ , con  $q > 0$  costante nota,
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate  $x, y$  come coordinate lagrangiane, scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale e provando esplicitamente nel caso in esame che (come sappiamo che deve essere vero nel caso generale) vale il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni.

(2) Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle "coordinate lagrangiane puntate". Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma > 0$ .

(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio per il punto  $P$ , si verifichi che tali configurazioni individuano un punto di stazionarietà dell'energia potenziale ed, infine, si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.

(4) Si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio.

(5) Si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0, y(0) = q, \frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$  e si dica quanto vale il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di tale soluzione.

### Soluzione.

Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{I}}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{I}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + cx^2 \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.208})$$

e pertanto

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + 2cx\dot{x} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.209})$$

da cui, l'energia cinetica del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  ha la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} ((1 + 4c^2x^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale alle due energie potenziali della molla

$$\mathcal{U} = mgz + \frac{k}{2} \|P - O\|^2 + \frac{k}{2} \|P - Q\|^2.$$

Il calcolo esplicito, tenendo conto dell'espressione esplicita di  $P - O$  (D.208) in funzione delle coordinate libere  $x, y$  e delle coordinate di  $Q$ , produce immediatamente, trascurando una costante additiva inessenziale:

$$\mathcal{U} = c^2 k x^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q) .$$

La lagrangiana del sistema avrà allora forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} ((1 + 4c^2 x^2)\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - c^2 k x^4 - (k + mcg)x^2 - ky(y - q) . \quad (\text{D.210})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange devono però anche tenere conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  della forza non conservativa viscosa e avranno la solita forma generale, per  $q^1 = x$  e  $q^2 = y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \mathcal{Q}_k \\ \frac{d\dot{q}^k}{dt} &= \dot{q}^k . \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito fornisce subito, tramite (D.208) e (D.209):

$$\mathcal{Q}_x = \frac{\partial P - O}{\partial x} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{x}(1 + 4c^2 x^2) \quad (\text{D.211})$$

$$\mathcal{Q}_y = \frac{\partial P - O}{\partial y} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{y} . \quad (\text{D.212})$$

Concludiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono esplicitamente:

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \left( (1 + 4c^2 x^2) \frac{dx}{dt} \right) &= -4c^2 k x^3 - 2(k + mcg)x - \gamma(1 + 4c^2 x^2) \frac{dx}{dt} + 4mc^2 x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 , \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -2ky + kq - \gamma \frac{dy}{dt} , \end{aligned}$$

ovvero, in forma normale:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-4c^2 k x^3 - 2(k + mcg)x - (\gamma + 4\gamma c^2 x^2) \frac{dx}{dt} - 4mc^2 x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}{m(1 + 4c^2 x^2)} , \quad (\text{D.213})$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2 \frac{ky}{m} + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt} , \quad (\text{D.214})$$

dove il secondo membro è evidentemente di classe  $C^\infty$  in tutte le variabili congiuntamente (pensando  $\dot{x} := dx/dt$  e  $\dot{y} := dy/dt$  come variabili indipendenti da  $x$  e  $y$ ). Le funzioni a secondo membro sono infatti rapporti di polinomi i cui denominatori non hanno zeri reali. Concludiamo che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

**(2)** Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  essendo tutte le forze conservative, i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{J}$ , le coordinate

libere sono solidali con  $\mathcal{I}$ . Infine  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che coincide con l'energia meccanica del sistema

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{I}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{I}} .$$

Esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} \left( (1 + 4c^2 x^4) \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + c^2 k x^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q) .$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , calcolando la derivata di  $\mathcal{H}$  su ogni moto del sistema vale la nota identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k ,$$

dove  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane delle forze non conservative. Nel caso in esame si trova subito che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (1 + 4c^2 x^2) - \gamma \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = -\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} ,$$

da cui si vede che  $\mathcal{H}$  in generale non può continuare ad essere un integrale primo. Dal punto di vista fisico abbiamo ottenuto che l'energia meccanica viene dissipata dalla potenza della forza viscosa.

**(3)** Per definizione, le configurazioni di equilibrio  $(x_0, y_0)$  si ottengono imponendo che il secondo membro di (D.213)-(D.214) sia nullo quando valutato per  $(x, y) = (x_0, y_0)$  in aggiunta alla condizione che  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ . Queste richieste producono il sistema di equazioni per  $(x_0, y_0)$ :

$$0 = \frac{-4c^2 k x_0^3 - 2(k + mcg)x_0}{m(1 + 4c^2 x_0^2)} , \quad (\text{D.215})$$

$$0 = -2 \frac{k y_0}{m} + \frac{k q}{m} , \quad (\text{D.216})$$

che, tenendo conto della stretta positività di  $c, m, g, k$ , ammettono l'unica soluzione:

$$(x_0, y_0) = (0, q/2) .$$

Si osservi che questa configurazione annulla le derivate parziali dell'energia potenziale

$$\mathcal{U}(x, y) = c^2 k x^4 - (k + mcg)x^2 + ky(y - q) ,$$

valendo

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right|_{(0, q/2)} = [4kc^2 x^3 + 2(k + mcg)x]|_{(0, q/2)} = 0 , \quad \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \right|_{(0, q/2)} = [2ky - kq]|_{(0, q/2)} = 0 .$$

Dato che le forze non conservative sono dissipative e si annullano per  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ , il teorema di Lagrange-Dirichlet permette di concludere che la configurazione di equilibrio trovata è stabile

nel futuro (e anche nel passato in assenza della forza dissipativa, cioè per  $\gamma = 0$ ) se l'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(x, y) = c^2 k x^4 + (k + mcg)x^2 + ky(y - q)$$

ha un minimo stretto in  $(0, q/2)$ . Dato che, come già notato,  $(0, q/2)$  è un punto di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ , possiamo studiare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  in  $(0, q/2)$  per decidere se la configurazione individui un minimo stretto. Dato che risulta:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \right|_{(0, q/2)} = 2(k + mcg) > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y} \right|_{(0, q/2)} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y \partial x} \right|_{(0, q/2)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \right|_{(0, q/2)} = 2k > 0,$$

concludiamo che  $(0, q/2)$  è un punto di minimo stretto per  $\mathcal{U}$ , in quanto la matrice hessiana ha entrambi gli autovalori strettamente positivi, e pertanto la configurazione di equilibrio  $(0, q/2)$  è stabile nel futuro per il teorema di Lagrange-Dirichlet valendo  $\sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k = -\gamma \mathbf{v}^2 \leq 0$ . Se  $\gamma = 0$  la configurazione di equilibrio è stabile anche nel passato.

(4) Nell'unica configurazione di equilibrio trovata  $R \equiv (0, q/2, 0)$ , all'equilibrio, vale

$$\mathbf{0} = m\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\phi} - k(R - O) - k(R - Q) - mg \mathbf{e}_z - \gamma \mathbf{0}.$$

Pertanto il valore esplicito di  $\boldsymbol{\phi}$  è:

$$\boldsymbol{\phi} = k(R - O) + k(R - Q) + mg \mathbf{e}_z = kq/2 \mathbf{e}_y + k(q/2 - q) \mathbf{e}_y + mg \mathbf{e}_z = mg \mathbf{e}_z.$$

(5). Osservando il sistema (D.213)-(D.214), si vede che la funzione  $x(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa la prima equazione che, essendo disaccoppiata dalla seconda, ammette tale funzione come unica soluzione per condizioni iniziali  $x(0) = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ . Per concludere dobbiamo risolvere la seconda equazione:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2k}{m}y + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt},$$

con le condizioni iniziali  $y(0) = q$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ . Introduciamo la nuova variabile  $Y := y - q/2$ . In questo modo l'equazione si riscrive in forma di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dY}{dt} + \frac{2k}{m} Y = 0.$$

Le due soluzioni del polinomio caratteristico sono:

$$\chi_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{8k}{m}}.$$

Nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ , abbiamo evidentemente che  $\chi_{\pm}$  sono numeri reali, negativi e distinti. Possiamo scrivere la soluzione generale nella variabile  $y$ , come, se  $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ ,

$$y(t) = q/2 + Y(t) = q/2 + C_+ e^{\chi_+ t} + C_- e^{\chi_- t}.$$

Sappiamo che  $y(0) = q$  e quindi  $q/2 + C_+ + C_- = q$ , ma anche  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  e quindi  $\chi_+ C_+ + \chi_- C_- = 0$ . Si ricava facilmente che:  $C_- = q\chi_+/2(\chi_+ - \chi_-)$  e  $C_+ = -q\chi_-/2(\chi_+ - \chi_-)$ .

In definitiva, il moto del punto  $P$  con i dati iniziali proposti, cioè la soluzione del problema di Cauchy complessivo, si scrive:

$$x(t) = 0, \quad y(t) = \frac{q}{2} - \frac{q\chi_- e^{\chi_+ t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} + \frac{q\chi_+ e^{\chi_- t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente la soluzione del problema di Cauchy posto è massimale e completa. Dato che  $\chi_{\pm} < 0$  nelle nostre ipotesi, il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di  $y(t)$  vale  $q/2$  in quanto i rimanenti addendi si annullano nel limite. In definitiva:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, q/2).$$

## ESERCIZIO 18

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , sia  $\Sigma$  la superficie  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Sia  $P$  un punto materiale di massa assegnata  $m > 0$  vincolato a muoversi su  $\Sigma$ , pensata come vincolo ideale.  $P$  è sottoposto alle seguenti forze:

- (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),
- (ii) le forze di due molle ideali entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(0, 2R, 0)$ ,
- (iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

**(1)** Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate cilindriche  $\theta, z$  come coordinate lagrangiane (con  $\theta \in (-\pi, \pi]$  valutata a partire dall'asse  $x$  ed orientata positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ ), scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale.

**(2)** Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle "coordinate lagrangiane puntate". Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma \geq 0$ .

**(3)** Si determinino le configurazioni di equilibrio per il punto  $P$  discutendone la stabilità nel caso  $\gamma > 0$ .

**(4)** Si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile nel caso  $\gamma \geq 0$ .

**(5)** Si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$ ,  $z(0) = c$ ,  $\frac{dz}{dt}(0) = 0$ , con  $c > 0$  costante assegnata, nel caso  $mk > 100\gamma^2$ . Si calcoli il limite della soluzione per  $t \rightarrow +\infty$ , discutendo se tale limite dipenda o meno da  $c$ .

### Soluzione.

Omettiamo nel seguito l'indice  $|_{\mathcal{I}}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{I}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

**(1)** Dalle ipotesi abbiamo che

$$P - O = z \mathbf{e}_z + R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (\text{D.217})$$

e di conseguenza

$$\mathbf{v} = \dot{z} \mathbf{e}_z + R \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y), \quad (\text{D.218})$$

per cui, l'energia cinetica vale:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2).$$

L'energia potenziale sarà data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale  $mgz$  e di quella delle due molle:

$$\frac{k}{2} \|P - O\|^2 + \frac{k}{2} \|P - Q\|^2 = \frac{k}{2} (z^2 + R^2) + \frac{k}{2} (z^2 + R^2 \cos^2 \theta + (2R - R \sin^2 \theta)^2) .$$

Omettendo alcune costanti additive inessenziali:

$$\mathcal{U} = mgz + k (z^2 - 2R^2 \sin \theta) . \quad (\text{D.219})$$

La lagrangiana del sistema, che tiene conto delle sole forze attive conservative, avrà dunque forma

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) - mgz - k (z^2 - 2R^2 \sin \theta) . \quad (\text{D.220})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange avranno la forma generale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k , \quad \frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k ,$$

dove il secondo membro includerà le componenti lagrangiane della forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}$  che valgono, usando (D.217) e (D.218)

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta} , \quad \mathcal{Q}_z = -\gamma \mathbf{v} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial z} = -\gamma \dot{z} .$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno allora date da:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - 2kz - \gamma \frac{dz}{dt} , \quad (\text{D.221})$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 4kR^2 \cos \theta - \gamma R^2 \frac{d\theta}{dt} . \quad (\text{D.222})$$

Queste equazioni si scrivono in forma normale come:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{2kz}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} , \quad (\text{D.223})$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{2k}{m} \cos \theta - \frac{\gamma}{m} \frac{d\theta}{dt} . \quad (\text{D.224})$$

**(2)** Nel caso  $\gamma = 0$ , siamo nelle ipotesi del teorema di Jacobi (vincoli indipendenti dal tempo, coordinate libere solidali con il riferimento, lagrangiana non dipendente dal tempo esplicitamente). Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che, nel caso in esame, per la seconda parte del teorema di Jacobi, coincide con l'energia meccanica del sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + R^2 \dot{\theta}^2) + mgz + k (z^2 - 2R^2 \sin \theta) .$$



Nel caso in cui valga  $\gamma > 0$ , e tenendo conto delle forze non conservative descritte dalle  $\mathcal{Q}_k$ , vale la formula generale, per la derivata dell'integrale primo di Jacobi valutato su una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \mathcal{Q}_k .$$

Quindi, nel nostro caso:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = -\gamma \mathbf{v}^2 .$$

L'energia meccanica è quindi dissipata dalla forza viscosa.

**(3)** Le configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, z_0)$  si ottengono annullando il secondo memebro delle equazioni di E-L scritte in forma normale, con l'aggiunta delle condizioni  $\dot{\theta} = 0, \dot{z} = 0$ . Dalle (D.221) e (D.222), ricaviamo le condizioni:

$$0 = mg + 2kz_0 , \quad (\text{D.225})$$

$$0 = 2kR^2 \cos \theta_0 . \quad (\text{D.226})$$

Abbiamo dunque le due configurazioni di equilibrio:  $(\pm\pi/2, -mg/(2k))$ . Si osservi che tali configurazioni annullano il gradiente di  $\mathcal{U}$  come è immediato verificare da (D.219). Se la matrice jacobiana  $H$  di  $\mathcal{U}$  è definita positiva su una configurazione di equilibrio, il teorema di Lagrange-Dirichlet assicura che la configurazione di equilibrio è stabile nel futuro, si noti a tal proposito, che è presente la componente lagrangiana della forza viscosa,  $\mathcal{Q}_k$  che soddisfa  $\sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k \leq 0$ . Nel caso in cui  $\gamma = 0$ , cioè non è presente la componente lagrangiana detta, la presenza di un autovalore negativo implica l'instabilità nel futuro. Il calcolo produce immediatamente

$$H(\theta_0, z_0) = \text{diag}(2kR^2 \sin \theta_0, 2k) .$$

Concludiamo che per la configurazione  $(\pi/2, mg/(2k))$  si hanno solo autovalori positivi, per cui  $\mathcal{U}$  ha un minimo stretto e pertanto tale configurazione è stabile nel futuro. Nella configurazione  $(-\pi/2, mg/(2k))$ , un autovalore è negativo e pertanto si ha equilibrio instabile almeno per  $\gamma = 0$ .

**(4)** Nel caso  $\gamma > 0$ , la configurazione di equilibrio  $(\pi/2, mg/(2k))$  è stabile. Calcoliamo la reazione vincolare  $\phi$  su  $P$  in tale configurazione, quando  $P$  è in quiete. Dato che il punto è in quiete, tutte le forze si bilanciano e  $\phi - k(P - O) - k(P - Q) - mg \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$ . Abbiamo omesso la forza viscosa, che è nulla se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Decomponendo sugli assi le forze scritte sopra abbiamo che:

$$(\phi^x - kR - k(R - 2R)) \mathbf{e}_x + (\phi^y) \mathbf{e}_y + (\phi^z - k(-2mg/2k) - mg) \mathbf{e}_z .$$

Pertanto:

$$\phi^x = 0 , \quad \phi^y = 0 , \quad \phi^z = 0 .$$

**(5)** L'equazione (D.222) ammette banalmente la soluzione

$$\theta(t) = \pi/2 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}, \quad (\text{D.227})$$

che soddisfa anche la condizione iniziale  $\theta(0) = \pi/2$  e  $d\theta/dt(0) = 0$ . Dato che l'equazione (D.222) è scrivibile in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$  congiuntamente in tutte le variabili, questa è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali assegnate. Per determinare il moto del sistema è sufficiente risolvere l'altra equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} + \frac{2k}{m} z + g = 0 ,$$

con le condizioni iniziali assegnate  $z(0) = c > 0$  e  $dz/dt(0) = 0$ . A tal fine, introduciamo la nuova variabile  $Z := z + gm/(2k)$ . In questa nuova variabile l'equazione si riscrive in forma omogenea:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dZ}{dt} + \frac{2k}{m} Z = 0 .$$

Le equazioni del polinomio caratteristico sono, tenendo conto che  $mk > 100\gamma^2$  e quindi  $8mk - \gamma^2 > 0$ :

$$\chi_{\pm} = \frac{\pm i \sqrt{8mk - \gamma^2} - \gamma}{2m} .$$

La soluzione generale ha quindi la forma:

$$Z(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] ,$$

dove

$$\Omega := \frac{1}{2m} \sqrt{8mk - \gamma^2} .$$

La condizione  $dz/dt(0) = 0$ , cioè  $dZ/dt(0) = 0$  fornisce

$$(-\gamma/(2m))A + B\Omega = 0 .$$

La condizione  $z(0) = c > 0$ , cioè  $Z(0) = c + gm/(2k)$  implica che:

$$A = c + gm/(2k) .$$

Abbiamo infine ottenuto che

$$z(t) = -\frac{gm}{2k} + \left(c + \frac{gm}{2k}\right) e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left[ \cos(\Omega t) + \frac{\gamma}{2\Omega m} \sin(\Omega t) \right] , \quad t \in \mathbb{R} . \quad (\text{D.228})$$

Il moto del sistema, con le condizioni iniziali date, è completamente descritto dalle funzioni (D.227) e (D.228). È evidente che, essendo  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \cos(\Omega t) + (\gamma/(2\Omega)) \sin(\Omega t)$  una funzione limitata, vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t), z(t)) = \left( \frac{\pi}{2}, -\frac{gm}{2k} \right) .$$

Il limite non dipende dunque da  $c$ .

## ESERCIZIO 19

I versori  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  individuano un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destorse di origine  $O$ , solidali con il riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ . Tale riferimento ruota attorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$  con  $\omega_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è una costante nota.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a muoversi sulla curva  $\Gamma$  piana, solidale con  $\mathcal{S}$ , di equazione

$$z = ay^3, \quad x = 0,$$

dove  $a > 0$  è una costante assegnata. La curva  $\Gamma$  è priva di attrito. Sul punto  $P$  agisce (i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  e (ii) la forza di una molla ideale, di massa trascurabile e lunghezza nulla a riposo con costante elastica  $k > 0$  nota, con un estremo fissato in  $O$  e l'altro in  $P$ .

Si risolvano i seguenti quesiti usando come coordinata lagrangiana la coordinata  $y$  solidale con il riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ .

(1). (i) Usando la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ , *calcolata nel riferimento inerziale*, scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del punto  $P$ . (ii) Scrivere e esplicitamente l'espressione delle componenti delle reazioni vincolari in funzione di  $y$  e  $\frac{dy}{dt}$  e  $\frac{d^2y}{dt^2}$  usando  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  come versori. (iii) È possibile esprimere la reazione vincolare in funzione delle sole  $y$  e  $\frac{dy}{dt}$ ?

(2). (i) Si dimostri che la funzione hamiltoniana  $\mathcal{H}$  riferita alla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}(y, \dot{y})$  è un integrale primo. (ii) Si dimostri che tale integrale primo ha il significato fisico dell'energia meccanica del punto  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ . (iii) Si spieghi infine perchè, per una soluzione generica delle equazioni di E-L del punto  $P$ , non si conserva l'energia meccanica totale relativa al riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$ .

(3). (i) Dimostrare che vale

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}(y, \dot{y}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}_0}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}_0}(y) = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(y) =: \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}(y, \dot{y}),$$

dove  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}}$  è l'energia cinetica rispetto al riferimento *non inerziale*  $\mathcal{S}$  e l'energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(y) \neq \mathcal{U}|_{\mathcal{S}_0}(y)$  si riferisce alle forze conservative che sono viste agire nel riferimento *non inerziale*  $\mathcal{S}$  e quindi *includendo le forze inerziali* conservative. (ii) Ponendo  $k = m\Omega^2$ , si determinino le configurazioni di equilibrio del punto  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$  e se ne discuta la stabilità. (iv) Sempre per  $k = m\Omega^2$ , si determini la reazione vincolare  $\phi$  alla quale è sottoposto il punto materiale  $P$  in ogni configurazione di equilibrio se si trova in tali posizioni con velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \mathbf{0}$ .

### Suggerimenti.

Riguardo al punto (2). Si ricordi che l'energia meccanica totale del punto  $P$  valutata in un certo riferimento è la somma dell'energia cinetica, valutata in quel riferimento, e delle energie potenziali di tutte le forze conservative (incluse quelle inerziali se ve ne sono) in quel riferimento.

Riguardo al punto (3). Lavorando nel riferimento  $\mathcal{S}$  come detto sopra ed usando  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}}(y, \dot{y}) - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(y)$ , possiamo applicare la solita teoria della stabilità per sistemi con lagrangiana della forma  $\sum_{ij} a_{ij}(q^1, \dots, q^n) \dot{q}^i \dot{q}^j - \mathcal{U}(q^1, \dots, q^n)$  dove le  $q^k$  (la sola  $y$  nel caso in esame)

sono coordinate solidali con  $\mathcal{I}$ .

**Soluzione.**

(1). Il sistema considerato ammette lagrangiana. Calcoleremo la lagrangiana nel riferimento inerziale  $cI_0$  usando però la coordinata lagrangiana  $y$  che è solidale con  $\mathcal{I}$ . Vale  $P - O = y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z$  e quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}_0} = \dot{y}(\mathbf{e}_y + 3ay^2 \mathbf{e}_z) + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z) = \dot{y}(\mathbf{e}_y + 3ay^2 \mathbf{e}_z) - \Omega y \mathbf{e}_x.$$

In definitiva, l'energia cinetica di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}$  ha la forma:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{I}_0} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + \frac{m\Omega^2}{2} y^2.$$

Nel riferimento  $\mathcal{I}_0$  le forze attive che agiscono sono: la forza di gravità, con energia potenziale  $mgz_p = mgy^3$  e la forza della molla, con energia potenziale  $k(P - O)^2/2$ . Di conseguenza l'energia potenziale totale risulta essere:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{I}_0} = mgy^3 + \frac{k}{2} (y^2 + a^2 y^6).$$

In definitiva, la lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{I}_0$  risulta essere:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{I}_0} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) - mgy^3 - \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 - \frac{ka^2}{2} y^6. \quad (\text{D.229})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono subito dalla lagrangiana trovata come:

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dy}{dt} (1 + 9a^2 y^4) \right) = 18ma^2 y^3 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - 3mgy^2 - (k - m\Omega^2)y - 3ka^2 y^5.$$

Tali equazioni possono essere riscritte come:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{18a^2 y^3 m \frac{dy}{dt} + 3mgy^2 + (k - m\Omega^2)y + 3ka^2 y^5}{m(1 + 9a^2 y^4)}. \quad (\text{D.230})$$

Abbiamo scritto le equazioni in forma normale. Per quanto riguarda la reazione vincolare  $\phi$  sul punto  $P$ , conviene lavorare nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}_0$ . In esso vale:

$$m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{I}_0} = \phi - mg \mathbf{e}_z - k(y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z)$$

e quindi

$$\phi = m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{I}_0} + mg \mathbf{e}_z + k(y \mathbf{e}_y + ay^3 \mathbf{e}_z).$$

D'altra parte, dalle note relazioni tra le accelerazioni valutate in due riferimenti, troviamo subito:

$$m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{I}_0} = m\mathbf{a}_p|_{\mathcal{I}} + 2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_p|_{\mathcal{I}} + m\Omega^2 \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge (P - O)).$$

Tenendo conto delle espressioni trovate sopra per  $P - O$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  abbiamo alla fine che:

$$\phi = -2m\Omega \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_x + \left( ky - m\Omega^2 y + m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mathbf{e}_y + \left( mg + kay^3 + 6ay \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 3ma^2 y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.231})$$

Ovviamente l'espressione della reazione vincolare può essere ulteriormente semplificata in una funzione della sola  $y$  e della derivata prima  $dy/dt$ , quando si esplicita la derivata seconda  $d^2 y/dt^2$  in funzione delle prime due attraverso l'equazione del moto (D.230).

**(2)** Dato che la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  non dipende esplicitamente dal tempo, per il teorema di Jacobi, si conserva, sui moti del sistema, la funzione di Hamilton:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + mgy^3 + \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6.$$

Nel sistema di riferimento  $\mathcal{J}$ , le forze che agiscono su  $P$  sono: la forza di gravità, la forza della molla, la forza centrifuga, la forza di Coriolis e la reazione vincolare. Le ultime due non compiono lavoro in quanto sono sempre perpendicolari alla velocità  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  e pertanto non contribuiscono all'energia totale del sistema. La forza di gravità è conservativa con energia potenziale  $mgz_P = mgy^3$ , la forza della molla è conservativa, con energia potenziale  $k(P - O)^2/2 = \frac{k}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6$ . La forza centrifuga, come sappiamo, si può vedere come la forza di una molla repulsiva con costante elastica negativa  $-m\Omega^2$ , attaccata ad un estremo all'asse  $z$  e con tale estremo che si trova sempre alla stessa quota del punto  $P$ . L'energia potenziale di tale "molla" è quindi  $-\frac{m\Omega^2}{2} y^2$ . In definitiva l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{J}$  è

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) + mgy^3 + \frac{k}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6 - \frac{m\Omega^2}{2} y^2 = \mathcal{H}.$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}_0$ , le forze conservative sono quella della molla e quella gravitazionale, l'energia meccanica è pertanto data dalla somma delle energie potenziali di tali forze e dell'energia cinetica in  $\mathcal{J}_0$ . Tuttavia esiste anche la reazione vincolare  $\phi$  che non è una forza conservativa e compie lavoro in  $\mathcal{J}_0$ : è normale alla curva  $\Gamma$ , ma non è normale a  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0}$ , dato che la curva si muove in  $\mathcal{J}_0$  e quindi  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0}$  non è tangente alla curva! Si conclude che l'energia meccanica totale non si conserva nel riferimento  $\mathcal{J}_0$ .

**(3)** Possiamo scrivere la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  come

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \dot{y}^2 (1 + 9a^2 y^4) - mgy^3 - \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 - \frac{ka^2}{2} y^6,$$

dove:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} := mgy^3 + \frac{k - m\Omega^2}{2} y^2 + \frac{ka^2}{2} y^6.$$

Siamo nel caso in cui le coordinate lagrangiane sono solidali con il riferimento ed in tale riferimento la lagrangiana ha forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  con energia cinetica con struttura standard  $\sum_{i,k=1}^1 a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$  con  $a_{ik}$ . Infine le equazioni di E-L rispetto a questa lagrangiana ed in assenza di

termini dovuti a componenti lagrangiane di forze attive<sup>1</sup>, coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange per  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  e quindi determinano le corrette equazioni del moto già trovate per il punto  $P$ . Possiamo pertanto applicare la teoria della stabilità elementare, notando che, per prima cosa, le configurazioni di equilibrio si determinano come punti stazionari dell'energia potenziale:

$$3mgy^2 + (k - m\Omega^2)y + 3ka^2y^5 = 0 .$$

Se, come richiesto  $k = m\Omega^2$ , l'equazione si riduce a

$$3mgy^2 + 3ka^2y^5 = 0 ,$$

che ammette come soluzioni  $y = 0$  e  $y = -\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3}$ . In entrambi i casi, tenendo conto che nelle configurazioni di equilibrio il moto è dato dalla quiete (e pertanto sono nulle le derivate temporali di  $y$ ), l'identità (D.231) fornisce  $\boldsymbol{\phi} = mg \mathbf{e}_z$  per la prima configurazione e  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$  per la seconda. Passiamo allo studio della stabilità. Consideriamo la matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  che, nel caso in esame si riduce alla derivata seconda

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dy^2} = ay (6mg + 15kay^3) .$$

La configurazione di equilibrio  $y = 0$  annulla il secondo membro e pertanto per essa non possiamo concludere nulla con il teorema di Lagrange-Dirichlet o con altre tecniche elementari. Viceversa la configurazione  $y = -\left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3}$  produce

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dy^2} = -a \left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3} \left(6mg - 15ka \frac{mg}{ka}\right) = 9amg \left(\frac{mg}{ka}\right)^{1/3} > 0 .$$

Tale configurazione è dunque stabile nel passato e nel futuro.

---

<sup>1</sup>In effetti, partendo direttamente dal riferimento  $\mathcal{J}$  uno potrebbe pensare di dover tenere conto delle componenti lagrangiane delle forze di Coriolis, ma in questo caso risultano essere nulle per verifica diretta ed immediata.

## Esercizio 20

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrose  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con un riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . La guida  $\Gamma$ , costituita da una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $R > 0$  assegnato e massa nulla, è libera di *rotolare senza strisciare* sull'asse  $y$  nel piano verticale  $x = 0$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è saldato alla guida ed è soggetto al forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  assegnato. Una molla ideale (massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica nota  $K \geq 0$ , è fissata con un estremo in  $C$  e l'altro in  $O$ .

Si indichi con  $\theta$  l'angolo che il segmento  $P - C$  individua rispetto alla retta verticale  $r$  passante per  $C$ . Tale angolo è orientato positivamente rispetto al versore  $-\mathbf{e}_x$  e vale  $\theta = 0$  quando  $P, C$  e  $O$  si trovano allineati sull'asse  $z$ . Usando  $\theta$  come coordinata libera, assumendo tutti i vincoli ideali, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) (i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$ . (ii) Discutere per quali valori di  $\theta(0)$  e  $d\theta/dt(0)$  vale il teorema di esistenza ed unicità per tali equazioni. (iii) Scrivere le equazioni che determinano la reazione vincolare  $\phi$  su  $P$  in funzione di  $\theta, d\theta/dt$  e  $d^2\theta/dt^2$ .

(2). Si determini un integrale primo e se ne spieghi il significato fisico.

(3). (i) Si dimostri che se  $KR/(mg) > 0$  è sufficientemente grande, e si precisi quanto grande, allora il sistema ammette un'unica configurazione di equilibrio. (ii) Si determini tale configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità. (iii) Si spieghi cosa succede al numero delle configurazioni di equilibrio quando  $KR/(mg) > 0$  si avvicina al valore nullo.

(4). Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si esprima la componente  $\phi^y$  della reazione vincolare  $\phi$  in funzione di  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$ .

### Soluzione.

(1)(i) Nel seguito, dato che si userà un unico riferimento  $\mathcal{I}$ , ometteremo la specificazione del riferimento,  $|\mathcal{I}$ , nelle quantità cinematiche. Se  $Q$  è il punto in cui  $r$  interseca  $\Gamma$  sull'asse  $y$ , il vincolo di rotolamento della guida  $\Gamma$  impone che

$$Q - O = R\theta \mathbf{e}_y,$$

e pertanto possiamo esprimere la posizione del punto  $P$ , cioè il vettore  $P - O$  in termini della sola coordinata  $\theta$ . Si ha subito che

$$P - O = P - C + C - O = (R\theta + R\sin\theta) \mathbf{e}_y + (R + R\cos\theta) \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.232})$$

da cui

$$\mathbf{v}_P = R\dot{\theta}(1 + \cos\theta) \mathbf{e}_y - R\dot{\theta}\sin\theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.233})$$

e quindi, ricaviamo la forma dell'accelerazione che sarà utile più tardi:

$$\mathbf{a}_P = R[\ddot{\theta}(1 + \cos\theta) - \dot{\theta}^2 \sin\theta] \mathbf{e}_y - R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.234})$$

Le forze attive sono tutte conservative e pertanto il sistema può essere descritto con una lagrangiana di struttura  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  e senza componenti lagrangiane di forze non conservative. Da

(D.233) otteniamo che l'energia cinetica vale

$$\mathcal{T} = mR^2\dot{\theta}^2(1 + \cos \theta) .$$

Le forze attive sono conservative e l'energia potenziale complessiva ha banalmente la forma:

$$\mathcal{U} = mgz_p + \frac{K\|C - O\|^2}{2} = mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2}\theta^2 + \text{cost.}$$

da cui, trascurando inessenziali costanti additive, si trova subito:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = mR^2\dot{\theta}^2(1 + \cos \theta) - mgR \cos \theta - \frac{KR^2}{2}\theta^2 . \quad (\text{D.235})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano pertanto essere

$$\frac{d}{dt} \left( 2mR^2 \frac{d\theta}{dt} (1 + \cos \theta) \right) = mgR \sin \theta - KR^2\theta ,$$

che si possono esplicitamente scrivere,

$$2mR^2(1 + \cos \theta) \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgR \sin \theta + KR^2\theta = 0 . \quad (\text{D.236})$$

Per  $\theta \neq \pi + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , queste equazioni possono infine riscriversi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{mgR \sin \theta - KR^2\theta + 2mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2mR^2(1 + \cos \theta)} . \quad (\text{D.237})$$

(ii) Dato che il secondo membro è una funzione  $C^\infty$  delle variabili  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ , concludiamo che, per condizioni iniziali  $(\theta(0), d\theta/dt(0))$  arbitrarie in  $\mathbb{R}^2$ , ma con  $\theta(0) \neq (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , vale il teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni dell'equazione del moto ù (D.236). Assegnando condizioni iniziali  $(\theta(0), d\theta/dt(0))$  in  $\mathbb{R}^2$  con  $\theta(0) = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , il problema non ammette soluzioni, dato che la (D.236) per  $t = 0$  e valutata su ogni eventuale soluzione, si ridurrebbe all'identità impossibile:

$$KR^2(2k+1)\pi = 0 , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Si osservi che lo stesso problema si ha anche assegnando condizioni iniziali al generico tempo  $t$ , dato che i coefficienti dell'equazione differenziale (D.236) non dipendono dal tempo. Si osservi che il moto, in virtù della patologia trovata, può avvenire solo tra due consecutivi valori di  $\theta = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}^2$ .

(iii) Per scrivere esplicitamente la formula della reazione vincolare  $\phi$  agente su  $P$ , si osservi che su di esso, oltre a  $\phi$ , agisce solo la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e che vale

$$m\mathbf{a}_P = \phi - mg \mathbf{e}_z .$$

---

<sup>2</sup>Dal punto di vista fisico, la patologia incontrata deriva dal fatto che la guida  $\Gamma$  ha massa nulla, ma è sottoposta a forze la cui somma non si annulla quando  $\theta(t) = (2k+1)\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ .



Il primo membro si ricava da (D.234) ottenendo alla fine:

$$\phi = mR \left[ \frac{d^2\theta}{dt^2} (1 + \cos \theta) - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right] \mathbf{e}_y + \left( mg - R \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta - R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \right) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.238})$$

(2) Dato che siamo completamente nelle ipotesi del teorema di Jacobi, abbiamo che un integrale primo è dato dalla funzione hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$  che coincide con l'energia meccanica totale del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  quando si pone, su un generico moto del sistema,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 0$ :

$$\mathcal{H}(\theta, \dot{\theta}) = mR^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) + mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2} \theta^2. \quad (\text{D.239})$$

(3) (i) e (iii). Nel caso in esame di lagrangiana  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$ , con forze attive tutte conservative e vincoli indipendenti dal tempo, le configurazioni di equilibrio si trovano come i punti di stazionarietà della funzione  $\mathcal{U}(\theta) = mgR \cos \theta + \frac{KR^2}{2} \theta^2$  (sottointendendo che tali punti non devono coincidere con nessuno dei punti  $(2k+1)\pi$  dove  $k \in \mathbb{Z}$ ). Pertanto, le configurazioni di equilibrio  $\theta_0$  sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione:

$$\sin \theta_0 = \frac{KR}{mg} \theta_0,$$

dove  $KR/(mg) > 0$  per ipotesi. L'equazione descrive le intersezioni di un senoide con un fascio di rette uscenti dall'origine e con coefficiente angolare  $KR/(mg) > 0$ . Lo studio delle intersezioni (facendo banalmente la figura), prova che si ha una sola intersezione  $\theta_0 = 0$  per  $KR/(mg) \geq 1$ , mentre per valori più piccoli, ma sempre positivi, si ha un numero di soluzioni sempre più grande che tende all'infinito per  $KR/(mg) \rightarrow 0^+$ . (ii) Nel caso  $KR/(mg) \geq 1$ , possiamo studiare la stabilità della soluzione applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet. Vale

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{d\theta^2} \big|_{\theta=0} = -mgR \cos 0 + KR^2 = R(KR - mg).$$

Nel caso  $KR/(mg) > 1$  si ha pertanto stabilità nel futuro e nel passato, mentre non si può decidere nulla con i teoremi elementari di cui disponiamo nel caso  $KR/(mg) = 1$ .

(4) Prima di tutto notiamo che, inserendo il secondo membro di Eq. (D.237) nel secondo membro dell'Eq. (D.238) si ricava l'espressione di  $\phi$  in funzione di  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  unicamente. In particolare troviamo:

$$\phi^y = mR \left[ \frac{mgR \sin \theta - KR^2 \theta + 2mR^2 \sin \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2}{2mR^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right],$$

cioè :

$$\phi^y = \frac{1}{2} (mg \sin \theta - RK\theta(t)). \quad (\text{D.240})$$

Abbiamo trovato l'espressione cercata, dato che  $\dot{\theta}$  non appare esplicitamente.

**ESERCIZIO 21** (si tratta del precedente esercizio 4 ora svolto con le tecniche della meccanica lagrangiana)

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane ortonormali destrorse  $x, y, z$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , di origine  $O$  e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . L'asse  $\mathbf{e}_y$  è verticale in direzione opposta all'accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$  (con  $g \geq 0$ ). Un punto geometrico  $O'$ , distante  $R > 0$  da  $O$ , ruota nel piano  $xy$  con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ , essendo  $\omega > 0$  costante nel tempo. Sia  $\mathcal{I}'$  un nuovo sistema di riferimento (non inerziale) che ammette un sistema di coordinate cartesiane destrorse ortonormali  $x', y', z'$  solidali con  $\mathcal{I}'$ , di origine  $O'$  e assi  $\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z$  con  $\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{e}'_y$  dato dal versore di  $O' - O$ . Si supponga che  $\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ .

Nel piano  $x'y'$ , in quiete con  $\mathcal{I}'$ , si trova una circonferenza  $\Gamma$  di centro  $O'$  e raggio  $r > 0$  con  $r < R$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$ , sottoposto alla forza di gravità è vincolato a muoversi su  $\Gamma$  pensata come vincolo *liscio*. Si indichi con  $\phi$  la reazione vincolare agente su  $P$  dovuta al vincolo.

(1). Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange del punto  $P$ , usando come coordinata del punto l'angolo  $\varphi$  che  $P - O'$  individua rispetto a  $\mathbf{e}'_x$ , orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}'_z$ .

(2). Si ricavi il valore della reazione vincolare  $\phi$  al tempo  $t = 0$  quando valgono le condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Esprimere tale reazione vincolare rispetto agli assi del riferimento  $\mathcal{I}$ .

(3). Assumendo  $g = 0$ , si dimostri che la grandezza

$$\mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - m \omega^2 R r \sin \varphi$$

è conservata nel tempo su ogni moto di  $P$ . Si spieghi quale sia il significato fisico di  $\mathcal{E}$ .

(4). Assumendo  $g = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{I}'$  e se ne discuta la stabilità.

### Soluzione.

D'ora in poi  $\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}'}|_{\mathcal{I}} = \omega \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}_{z'}$ .

(1) Per ricavare le equazioni di E-L è comodo lavorare sia sulla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  che sulla base  $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}$ . Le relazioni tra queste due basi, tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_{y'} \equiv \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ , sono:

$$\mathbf{e}_{x'} = \cos(\omega t) \mathbf{e}_x + \sin(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_{y'} = -\sin(\omega t) \mathbf{e}_x + \cos(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.241})$$

che si invertono in:

$$\mathbf{e}_x = \cos(\omega t) \mathbf{e}_{x'} - \sin(\omega t) \mathbf{e}_{y'}, \quad \mathbf{e}_y = \sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}. \quad (\text{D.242})$$

Notiamo che:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{I}} \mathbf{e}_{y'} = -\omega \mathbf{e}_{x'}. \quad (\text{D.243})$$

Scriviamo, al fine di ottenere la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{I}}$ , l'energia cinetica  $\mathcal{T}|_{\mathcal{I}}$  in funzione della coordinata libera indicata nel testo. Vale

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}'} + \mathbf{v}_{O'}|_{\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O').$$

L'ultimo termine si può esplicitare in  $\omega \mathbf{e}_{z'} \wedge r \mathbf{e}_r = r\omega \mathbf{e}_\varphi$ . Tenendo conto del fatto che  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ ,  $O' - O = R \mathbf{e}_{y'}$  ed usando coordinate polari piane relative agli assi  $x', y'$  nel piano  $z' = 0$ , possiamo riscrivere la formula precedente per  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  come:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \omega R \mathbf{e}_{x'} + r\omega \mathbf{e}_\varphi ,$$

dove abbiamo usato (D.241). In altre parole:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = r(\dot{\varphi} + \omega) \mathbf{e}_\varphi - \omega R \mathbf{e}_{x'} .$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_{x'} + \cos \varphi \mathbf{e}_{y'}$ , il quadrato dell'espressione precedente fornisce:

$$(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}})^2 = r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2 + \omega^2 R^2 + 2\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi . \quad (\text{D.244})$$

Avremo allora che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2 + \omega^2 R^2 + m\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi . \quad (\text{D.245})$$

La forza di gravità è data da  $\mathbf{f} = -mg \mathbf{e}_y$ . Vediamone le componenti lagrangiane rispetto alla coordinata  $\varphi$ . Facendo uso di (D.242) si trova che:

$$\mathcal{Q}_\varphi = -mg \mathbf{e}_y \cdot \frac{\partial(P - O)}{\partial \varphi} = -mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (R \mathbf{e}_{y'} + r \mathbf{e}_r) ,$$

Da cui:

$$\mathcal{Q}_\varphi = -mg(\sin(\omega t) \mathbf{e}_{x'} + \cos(\omega t) \mathbf{e}_{y'}) \cdot r \mathbf{e}_\varphi = -mgr(-\sin(\omega t) \sin \varphi + \cos(\omega t) \cos \varphi) = -mgr \cos(\omega t + \varphi) .$$

In definitiva, possiamo ricavare  $\mathcal{Q}_\varphi$  dal potenziale (non si parla di energia potenziale visto che si ha dipendenza esplicita dal tempo):

$$\mathcal{V}(t, \varphi) = -mgr \sin(\omega t + \varphi) ,$$

e quindi il sistema è descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}(\varphi, \dot{\varphi}) := \mathcal{T}|_{\mathcal{J}}(\varphi, \dot{\varphi}) + \mathcal{V}(t, \varphi) = \frac{m}{2} r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2 + m\omega Rr(\dot{\varphi} + \omega) \sin \varphi - mgr \sin(\omega t + \varphi) , \quad (\text{D.246})$$

dove abbiamo trascurato la costante additiva  $\omega^2 R^2$ , che non fornisce alcun contributo alle equazioni di Eulero-Lagrange. Con la lagrangiana (D.246), le equazioni di Eulero Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \varphi} , \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} ,$$

risultano essere, dopo un banale calcolo:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{R\omega^2}{r} \cos \varphi - \frac{g}{r} \cos(\omega t + \varphi) . \quad (\text{D.247})$$

(2) Per ricavare la reazione vincolare  $\phi$  all'istante  $t = 0$  sul moto con condizioni iniziali  $\varphi(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ , partiamo dall'equazione di Newton:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \phi - mg \mathbf{e}_y . \quad (\text{D.248})$$

Ora ricaviamo l'accelerazione  $\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}}$  all'istante considerato usando la formula:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} + \mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} . \quad (\text{D.249})$$

Studiamo separatamente i termini nel secondo membro di (D.249). Notiamo che  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$  si annulla all'istante  $t = 0$ , proprio per le condizioni iniziali. Pertanto il termine di Coriolis  $2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'}$  si omette. Nello stesso modo, in:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{e}_\varphi - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r$$

il secondo addendo è nullo a  $t = 0$ , mentre il primo vale (a parte il fattore  $r \mathbf{e}_\varphi$ )

$$\frac{R\omega^2}{r} \cos \varphi(0) - \frac{g}{r} \cos(\omega 0 + \varphi(0)) = \frac{R\omega^2}{r} \cos(\pi/2) - \frac{g}{r} \cos(\pi/2) = 0 .$$

Infine, il punto  $O'$  compie un moto circolare uniforme sulla circonferenza di raggio  $R$  e con  $\omega$  costante, la sua accelerazione sarà quindi centripeta con modulo  $\omega^2 R$  (lo stesso risultato si ottiene svolgendo i calcoli) per  $t = 0$ , avremo allora

$$\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} = -\omega^2 R \mathbf{e}_y ,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il versore di  $O' - O$  è  $\mathbf{e}_y$  quando  $t = 0$ . In definitiva, tenendo conto che  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y$  per  $t = 0$ :

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = -\omega^2 R \mathbf{e}_y + \omega^2 \mathbf{e}_{z'} \wedge (\mathbf{e}_{z'} \wedge r \mathbf{e}_r) = -\omega^2 R \mathbf{e}_y - r\omega^2 \mathbf{e}_r = -\omega^2 R \mathbf{e}_y - r\omega^2 \mathbf{e}_y .$$

Abbiamo trovato che, sul moto considerato e per  $t = 0$ :

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}} = -m\omega^2(R + r) \mathbf{e}_y .$$

Per differenza, (D.248) fornisce:

$$\phi = m(g - \omega^2(R + r)) \mathbf{e}_y .$$

(3) Mettiamoci nel caso  $g = 0$ . La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  individuata in (D.246) e con  $g = 0$ , non dipende esplicitamente dal tempo. Per il teorema di Jacobi, si conserverà la funzione di Hamilton:  $\mathcal{H}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$ . Il calcolo diretto produce immediatamente, a parte inessenziali costanti additive,

$$\mathcal{H}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - m \omega^2 R r \sin \varphi =: \mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}) .$$

Pertanto  $\mathcal{E}$  è davvero conservato sui moti del sistema. Non possiamo applicare la seconda parte del teorema di Jacobi e concludere che  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica del sistema nel riferimento  $\mathcal{J}$ , dato che la coordinata libera  $\varphi$  non è solidale con il riferimento  $\mathcal{J}$ . Si può allora supporre che  $\mathcal{E}$  coincida con l'energia meccanica totale di  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$ . Tale energia meccanica totale, per definizione, è la somma dell'energia cinetica di  $P$  in  $\mathcal{J}'$  e di tutte le energie potenziali delle forze attive (vere e inerziali) conservative. Esaminiamo le forze attive che agiscono su  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}'$  nel caso  $g = 0$ .

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{J}'} = -m\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} - m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) - 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}'} + \boldsymbol{\phi}.$$

La forza vincolare  $\boldsymbol{\phi}$  non entra in gioco nella discussione che stiamo facendo (e non compie lavoro in  $\mathcal{J}'$ , per cui non contraddice l'eventuale conservazione dell'energia meccanica). La forza di gravità non è presente se  $g = 0$ , ma abbiamo tre forze inerziali nel riferimento  $\mathcal{J}'$ . Una è la forza di Coriolis, che non è conservativa (e non compie lavoro in  $\mathcal{J}'$  come  $\boldsymbol{\phi}$ ). Un'altra è la forza centrifuga:

$$\mathbf{F}^{(cent)} := -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (P - O')) = -m\omega^2 r \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) = m\omega^2 r \mathbf{e}_r.$$

Questa è una forza conservativa di una molla repulsiva, di costante elastica  $-m\omega^2$  con energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{(cent)}(x', y') = -\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2),$$

dove  $x'$  e  $y'$  sono le coordinate di  $P$  rispetto agli assi solidali con  $\mathcal{J}'$ . Tuttavia, nel caso considerato,  $(x'^2 + y'^2) = r^2$  costantemente per ogni moto del sistema e pertanto tale energia potenziale rimane sempre costante e può essere assimilata ad una costante additiva ed eliminata. Si osservi che la forza considerata è comunque sempre perpendicolare alla velocità nel caso in esame e quindi non compie lavoro in  $\mathcal{J}'$ . La forza inerziale dovuta alla rimanente parte del moto di trascinamento è infine data dall'accelerazione centripeta di  $O'$  cambiata di segno e moltiplicata per  $m$ :

$$\mathbf{F}^{(trasc)} = -m\mathbf{a}_{O'}|_{\mathcal{J}} = mR\omega^2 \mathbf{e}_{y'}.$$

Questa forza inerziale è pensabile come una forza di gravità fittizia nella direzione  $\mathbf{e}_{y'}$  (che è fisso in  $\mathcal{J}'$ ), con modulo  $g_{eff} := mR\omega^2$ , ed è pertanto descritta in  $\mathcal{J}'$  dall'energia potenziale:

$$\mathcal{U}_{(trasc)}(x', y') = -mR\omega^2 y' = -mrR\omega^2 \sin \varphi.$$

L'energia potenziale in  $\mathcal{J}'$  della quale dobbiamo tener conto è dunque solo quest'ultima, e l'energia meccanica totale coincide con la somma di essa e dell'energia cinetica in  $\mathcal{J}'$ . Dunque vale proprio, come si supponeva:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - m\omega^2 Rr \sin \varphi = \mathcal{E}(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Concludiamo che  $\mathcal{E}$  è l'energia meccanica totale di  $P$  nel sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{J}'$ .

(4) Per studiare le configurazioni di equilibrio nel riferimento  $\mathcal{J}'$ , converrebbe usare la lagrangiana (nel caso  $g = 0$ ) riferita a tale sistema di riferimento espressa in coordinate  $\varphi$ . Infatti i vincoli

sono indipendenti dal tempo in  $\mathcal{S}'$  e  $\varphi$  è solidale con  $\mathcal{S}'$  e pertanto potremmo applicare i teoremi sull'equilibrio nella forma più elementare. La lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$  si ottiene come  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}'} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}'}$ , dove  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}'} := -mrR\omega^2 \sin \varphi$  è l'unica energia potenziale non costante individuata al punto (3). Si deve osservare che le equazioni di Eulero-Lagrange in  $\mathcal{S}'$  potrebbero essere però della forma generale che include qualche componente lagrangiana  $\mathcal{Q}_\varphi$  di qualche forza attiva (sicuramente inerziale) non conservativa. L'unica forza attiva non conservativa è data dalla forza di Coriolis che ha  $\mathcal{Q}_\varphi = 0$  come si verifica facilmente. Alternativamente, senza calcolare  $\mathcal{Q}_\varphi$ , si può notare che, assumendo direttamente:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + m\omega^2 Rr \sin \varphi, \quad (\text{D.250})$$

le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma elementare (senza alcuna  $\mathcal{Q}_\varphi$ !):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (\text{D.251})$$

producono le corrette equazioni del moto (D.247), che per loro natura non dipendono dal riferimento scelto. La verifica è immediata. Concludiamo che la  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$  è comunque una buona lagrangiana per il sistema in  $\mathcal{S}'$ . Possiamo allora studiare le configurazioni di equilibrio per la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$  in (D.250) dove le equazioni di E-L sono quelle in forma standard (D.251). In base a noti teoremi, tali configurazioni si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{S}'}}{\partial \varphi} = -m\omega^2 Rr \cos \varphi = 0.$$

Abbiamo pertanto le due configurazioni di equilibrio:  $\varphi_\pm := \pm\pi/2$ . La stabilità di esse si studia considerando gli autovalori della matrice hessiana, cioè il segno della derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{S}'}}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi_\pm} = m\omega^2 Rr \sin \varphi_\pm = \pm m\omega^2 Rr.$$

Concludiamo che la configurazione  $\varphi_+$  è stabile nel passato e nel futuro, mentre la configurazione  $\varphi_-$  è instabile nel passato e nel futuro.

## ESERCIZIO 22

In un sistema di riferimento *inerziale*  $\mathcal{I}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$ , solidali con  $\mathcal{I}$ . Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m > 0$ , sono vincolati alla circonferenza priva d'attrito,  $C$ , di centro  $(0, 0, 0)$ , raggio  $R > 0$  e giacente nel piano  $x = 0$ . I due punti materiali sono connessi l'un l'altro da una molla ideale di lunghezza nulla a riposo, massa trascurabile e costante elastica  $k > 0$ . Sui due punti agisce la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$ . Infine sul punto  $P_1$  agisce la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_1}$  con  $\gamma \geq 0$  costante fissata ed essendo la velocità riferita a sistema inerziale considerato.

Si risolvano i seguenti quesiti, usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dei due punti  $P_1$  e  $P_2$  nel piano  $y, z$ , valutati a partire dall'asse  $y$  ed orientati positivamente rispetto all'asse  $x$ .

(1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del sistema dei due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  usando la lagrangiana  $\mathcal{L}$  riferita al sistema inerziale  $\mathcal{I}$  e le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  delle forze non conservative presenti.

(2). (i) Si esprima la derivata temporale dell'energia meccanica del sistema in funzione di  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$  e si dimostri che, per  $\gamma = 0$ , l'energia meccanica è un integrale primo (cioè si conserva nel tempo sui moti del sistema).

(ii) Si dimostri che, se  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ , si conserva nel tempo sui moti del sistema anche la quantità :

$$J := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2}.$$

(iii) Si spieghi il significato fisico di  $J$ .

(3). (i) Per  $\gamma = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio e si discuta per quali valori del rapporto  $KR/(mg)$  esistono configurazioni di equilibrio differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$ .

(ii) Per  $\gamma = 0$ , si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$ .

(4). Nell'ipotesi  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del sistema.

Alcune formule che possono essere utili svolgendo l'esercizio.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\beta) = 1 - 2 \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1.$$

**Soluzione.**

(1). Dato che la circonferenza è liscia, i vincoli sono ideali e dunque possiamo usare la formulazione lagrangiana della meccanica. Usando la solita base ortonormale  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r$  adattata alle coordinate polari piane, la velocità del punto  $P_1$  risulta essere  $\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}_1 \mathbf{e}_\theta$  e quella di  $P_2$  ha una forma analoga. L'energia cinetica del sistema riferita a  $\mathcal{I}$  è quindi semplicemente:

$$\mathcal{T} := \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) .$$

L'energia potenziale totale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale

$$mgR(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

all'energia potenziale della molla

$$\frac{k}{2}(P_1 - P_2)^2 = \frac{k}{2} [R(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \mathbf{e}_z + R(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \mathbf{e}_y]^2 .$$

Quadrando, tenendo conto che i due versori sono ortogonali, trascurando un'inessenziale costante additiva che si ha sviluppando l'energia potenziale di sopra, si ha infine l'energia potenziale totale:

$$\mathcal{U} = mgR(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema vale pertanto  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgR(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) . \quad (\text{D.252})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange assumono pertanto, nel caso generale, la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \mathcal{Q}_i \quad \text{per } i = 1, 2 .$$

Le componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_i$  sono riferite alla forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1$ . Il calcolo diretto mostra subito che:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = 0 .$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange risultano essere in tal modo in forma normale e date da:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \gamma R^2 \frac{d\theta_1}{dt} , \quad (\text{D.253})$$

$$mR^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) . \quad (\text{D.254})$$

(2). (i) Moltiplicando entrambi i membri della prima equazione di E-L per  $\frac{d\theta_1}{dt}$ , quelli della seconda per  $\frac{d\theta_2}{dt}$  e sommando membro a membro il risultato, si arriva all'identità:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right] = -\frac{d\theta_1}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_1} - \frac{d\theta_2}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta_2} - \gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 .$$



Questa identità può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \mathcal{U} \right] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 ,$$

cioé

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{T} + \mathcal{U}] = -\gamma R^2 \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right)^2 .$$

Abbiamo ottenuto in tal modo che la derivata temporale dell'energia meccanica totale  $E$  si può scrivere, su ogni moto del sistema, come:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2 .$$

Nel caso in cui  $\gamma = 0$  si conclude che l'energia meccanica del sistema si conserva sui moti del sistema e pertanto l'energia meccanica totale è un integrale primo. Si arriva allo stesso risultato notando che i vincoli sono indipendenti dal tempo nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , le coordinate libere usate sono solidali con  $\mathcal{S}$  ed, infine, la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo. Sappiamo che in questo caso, la funzione Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale  $E$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  e sulle soluzioni del problema del moto vale:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \mathcal{Q}_k \dot{q}^k = -\gamma R^2 \dot{\theta}_1^2 .$$

(ii) Assumiamo  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ . Un metodo abbastanza rapido è quello di notare che il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi che preservano le fibre di  $\mathbb{V}^{2+1}$ ,  $\theta_1 \rightarrow \theta'_1 := \theta_1 + \epsilon$ ,  $\theta_2 \rightarrow \theta'_2 := \theta_2 + \epsilon$  che si rialza su  $J^1(\mathbb{V}^{2+1})$  aggiungendo le trasformazioni banali  $\dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{\theta}'_1 := \dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{\theta}'_2 := \dot{\theta}_2$  è una simmetria per la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(t', \theta'_1, \theta'_2, \dot{\theta}', \dot{\theta}') = \mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

dove abbiamo usato il fatto che:

$$\theta'_1 - \theta'_2 = \theta_1 + \epsilon - (\theta_2 + \epsilon) = \theta_1 - \theta_2 .$$

L'integrale che risulta dal teorema di Noether è allora:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} ,$$

per cui risulta che:

$$J = mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

è un integrale primo. Un metodo alternativo è quello di passare, nella lagrangiana (sempre con  $g = 0$  e  $\gamma = 0$ ) alle nuove variabili  $\Theta := (\theta_1 - \theta_2)/2$ ,  $\Phi := (\theta_1 + \theta_2)/2$  e notare che la lagrangiana

espressa nelle nuove variabili non dipende esplicitamente dalla variabile  $\Phi$  e pertanto si conserva, in virtù delle equazioni di E-L, la quantità  $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Phi}$ . Tale grandezza coincide con  $J$ .

(iii) Si verifica immediatamente facendo il calcolo, che  $J$  è la componente  $x$  del momento angolare

$$\Gamma_O|_{\mathcal{S}} = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{S}} + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{S}}.$$

(3). (i) Le configurazioni di equilibrio, nel caso in esame, si ottengono come punti di stazionarietà di  $\mathcal{U}$ . Abbiamo pertanto le equazioni:

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_1} = mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\theta_2} = mgR \cos\theta_2 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Questo sistema di equazioni equivale a

$$mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \cos\theta_1 = -\cos\theta_2. \quad (\text{D.255})$$

la seconda equazione si risolve in  $\theta_2 = \pi + \theta_1$  e  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ . La prima equazione in (D.255) è soddisfatta, se  $\theta_2 = \pi + \theta_1$ , per  $\theta_1 = \pm\pi/2$ . Si ottengono in questo caso le configurazioni di equilibrio individuate da  $\theta_1 = -\theta_2 = \pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = -\pi/2$ . Passiamo al secondo caso  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  e studiamo la prima equazione in (D.255) in questo caso. Tale equazione diventa:

$$mgR \cos\theta_1 + kR^2 \sin(2\theta_1 - \pi) = 0$$

cioè:

$$mgR \cos\theta_1 - kR^2 \sin(2\theta_1) = 0$$

cioè:

$$mgR \cos\theta_1 - 2kR^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 = 0.$$

Il caso  $\cos\theta_1 = 0$  produce le configurazioni di equilibrio  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = -\pi/2$ . Consideriamo infine il caso  $\cos\theta_1 \neq 0$ . In questa situazione, le configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo

$$mgR = 2kR^2 \sin\theta_1, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Si hanno dunque soluzioni solo se (dove  $m, g, k > 0$ ):  $mg/(2kR) \leq 1$  e tali soluzioni sono differenti da  $\theta_1 = \theta_2 = \pm\pi/2$  e  $\theta_1 = -\theta_2 = \pm\pi/2$  solo se:

$$\frac{mg}{kR} < 2.$$

(ii) Passiamo a studiare la stabilità della configurazioni di equilibrio che, valendo  $0 < \frac{mg}{kR} < 2$ , si ottengono risolvendo

$$\sin\theta_1 = \frac{mg}{2kR}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Le soluzioni e quindi le configurazioni di equilibrio, sono pertanto

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right), \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right)$$

e

$$\theta_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right), \quad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{mg}{2kR}\right).$$

Si osservi che, come deve essere, una soluzione si ottiene dall'altra scambiando il ruolo di  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , data la simmetria del problema. Possiamo quindi studiare la stabilità per la prima configurazione di equilibrio dato che il risultato varrà, per simmetria, anche per la seconda. Abbiamo che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1^2} = -mgR \sin \theta_1 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2^2} = -mgR \sin \theta_2 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Nel caso in esame, essendo  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  si ha

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = \frac{mg}{2kR}$$

mentre:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(2\theta_1 - \pi) = -\cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{mg}{2kR}\right)^2 - 1$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1^2} = -kR^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = -\frac{(mg)^2}{2k} + kR^2, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta_2^2} = -kR^2.$$

La traccia della matrice hessiana risulta essere

$$-2kR^2 < 0.$$

Conseguentemente almeno uno degli autovalori della matrice hessiana deve essere negativo e quindi le due configurazioni di equilibrio sono instabili nel passato e nel futuro.

(4). Riferendosi alla lagrangiana (D.252), i momenti  $p_1$  e  $p_2$  coniugati rispettivamente con la coordinata  $\theta_1$  e  $\theta_2$  risultano essere immediatamente:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = mR^2 \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2.$$

Invertendo tali semplici relazioni ed esprimendo l'hamiltoniana  $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \dot{\theta}_i - \mathcal{L}$  in funzione delle variabili canoniche si trova subito:

$$\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2mR^2} (p_1^2 + p_2^2) + mgR (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Le equazioni di Hamilton risultano pertanto essere:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{p_1}{mR^2}, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{p_2}{mR^2}$$

e

$$\frac{dp_1}{dt} = -mgR \cos \theta_1 - kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad \frac{dp_2}{dt} = -mgR \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

## ESERCIZIO 23

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidali con un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ , sia  $S$  la superficie  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z = ay^4$  con  $a > 0$  costante nota. Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  si muove su  $S$ , pensata come vincolo ideale. Su  $P$  agiscono le forze elencate di seguito:

(ii) le forze di due molle prive di peso entrambe di costante elastica  $k > 0$  assegnata, lunghezza nulla a riposo; una molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo in  $O$ , mentre l'altra molla ha un estremo in  $P$  e l'altro estremo nel punto  $Q$  di coordinate  $(q, 0, 0)$ , con  $q > 0$  costante nota,

(i) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  (con  $g > 0$  costante),

(iii) una forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}}$  con  $\gamma \geq 0$  costante nota.

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per il punto  $P$  usando le coordinate  $x, y$  come coordinate lagrangiane, scrivendo esplicitamente le dette equazioni in forma normale e spiegando esplicitamente nel caso in esame per quale motivo vale il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni.

(2) Nel caso  $\gamma = 0$ , si provi che esiste un integrale primo spiegandone il significato fisico e dandone la forma esplicita in termini delle coordinate lagrangiane e delle coordinate lagrangiane puntate. Si discuta se tale funzione sia ancora un integrale primo per  $\gamma > 0$ .

(3) Nel caso  $\gamma = 0$  si trovino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità per i valori dei parametri  $a, m, k, g > 0$ .

(4) Nel caso  $\gamma = 0$ , si calcolino le componenti rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  della reazione vincolare  $\phi$  che agisce sul punto materiale  $P$  quando è in quiete in una configurazione di equilibrio.

(5) Nel caso  $\gamma > 0$ , si determini il moto del punto  $P$  con condizioni iniziali  $x(0) = q$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$  e si dica quanto vale il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di tale soluzione.

(6) Nel caso  $\gamma = 0$ , si passi in formulazione di Hamilton scrivendo esplicitamente la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton per il punto  $P$ .

**Soluzione.**

Omettiamo nel seguito l'indice  $|\mathcal{S}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{S}$ ; ometteremo anche l'indice  $P$  visto che si lavora con un unico punto materiale.

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + ay^4 \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.256})$$

e pertanto

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + 4ay^3 \dot{y} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.257})$$

da cui, l'energia cinetica del punto  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  ha la forma:

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2 y^6) \dot{y}^2).$$

L'energia potenziale si ottiene sommando l'energia potenziale gravitazionale alle due energie potenziali della molla

$$\mathcal{U} = mgz + \frac{k}{2} \|P - O\|^2 + \frac{k}{2} \|P - Q\|^2.$$

Il calcolo esplicito, tenendo conto dell'espressione esplicita di  $P - O$  (D.256) in funzione delle coordinate libere  $x, y$  e delle coordinate di  $Q$ , produce immediatamente, trascurando una costante additiva inessenziale:

$$\mathcal{U} = ka^2 y^8 + mgy^4 + ky^2 + kx(x - q).$$

La lagrangiana del sistema avrà allora forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2 y^6) \dot{y}^2) - ka^2 y^8 - mgy^4 - ky^2 - kx(x - q). \quad (\text{D.258})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange devono però anche tenere conto delle componenti lagrangiane  $\mathcal{Q}_k$  della forza non conservativa viscosa e avranno la solita forma generale, per  $q^1 = x$  e  $q^2 = y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \mathcal{Q}_k \\ \frac{d\dot{q}^k}{dt} &= \dot{q}^k. \end{aligned}$$

Il calcolo esplicito fornisce subito, tramite (D.256) e (D.257):

$$\mathcal{Q}_x = \frac{\partial P - O}{\partial x} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{x}, \quad (\text{D.259})$$

$$\mathcal{Q}_y = \frac{\partial P - O}{\partial y} \cdot (-\gamma \mathbf{v}) = -\gamma \dot{y} (1 + 16a^2 y^6). \quad (\text{D.260})$$

Concludiamo che le equazioni di Eulero-Lagrange si scrivono esplicitamente:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -2kx + kq - \gamma \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d}{dt} \left( (1 + 16a^2 y^6) \frac{dy}{dt} \right) &= 48a^2 m y^5 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - 8a^2 k y^7 - 4mgy^3 - 2ky - \gamma (1 + 16a^2 y^6) \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

ovvero, in forma normale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{kx}{m} + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} \quad (\text{D.261})$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-8a^2ky^7 - 4mgay^3 - 2ky - \gamma(1 + 16a^2y^6)\frac{dy}{dt} - 48ma^2y^5\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{m(1 + 16a^2y^6)}, \quad (\text{D.262})$$

dove il secondo membro è evidentemente di classe  $C^\infty$  in tutte le variabili congiuntamente (pensando  $\dot{x} := dx/dt$  e  $\dot{y} := dy/dt$  come variabili indipendenti da  $x$  e  $y$ ). Le funzioni a secondo membro sono infatti rapporti di polinomi i cui denominatori non hanno zeri reali. Concludiamo che siamo nelle ipotesi di validità del teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

**(2)** Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  essendo tutte le forze conservative, i vincoli non dipendono dal tempo nel riferimento  $\mathcal{J}$ , le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{J}$ . Infine  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto si ha l'integrale primo di Jacobi che coincide con l'energia meccanica del sistema

$$\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}.$$

Esplicitamente:

$$\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{U} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + (1 + 16a^2y^6)\dot{y}^2) + ka^2y^8 + mgay^4 + ky^2 + kx(x - q). \quad (\text{D.263})$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , calcolando la derivata di  $\mathcal{H}$  su ogni moto del sistema vale la nota identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_k \dot{q}^k \mathcal{Q}_k,$$

dove  $\mathcal{Q}_k$  sono le componenti lagrangiane delle forze non conservative. Nel caso in esame si trova subito che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

da cui si vede che  $\mathcal{H}$  in generale non può continuare ad essere un integrale primo. Dal punto di vista fisico abbiamo ottenuto che l'energia meccanica viene dissipata dalla potenza della forza viscosa.

**(3)** Nel caso  $\gamma = 0$  le forze attive sono tutte conservative, pertanto le configurazioni di equilibrio  $(x_0, y_0)$  si ottengono imponendo che il gradiente dell'energia potenziale sia nullo quando valutato per  $(x, y) = (x_0, y_0)$ . Queste richieste producono il sistema di equazioni per  $(x_0, y_0)$ :

$$0 = 2kx_0 - kq, \quad (\text{D.264})$$

$$0 = y(8ka^2y^6 + 4mgay^2 + 2k). \quad (\text{D.265})$$

Dato che il secondo fattore a secondo membro di (D.265) è strettamente positivo con i valori dei parametri che abbiamo supposto, l'unica soluzione è evidentemente

$$(x_0, y_0) = (q/2, 0) .$$

Se l'energia potenziale:

$$\mathcal{U}(x, y) = ka^2y^8 + mgy^4 + ky^2 + kx(x - q)$$

ha un minimo stretto in  $(q/2, 0)$  la configurazione è di equilibrio stabile. Possiamo studiare la matrice hessiana di  $\mathcal{U}$  in  $(q/2, 0)$  per decidere se la configurazione individui un minimo stretto. Dato che risulta:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \right|_{(q/2, 0)} = 2k > 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y} \right|_{(q/2, 0)} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y \partial x} \right|_{(q/2, 0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \right|_{(q/2, 0)} = 2k > 0,$$

concludiamo che  $(q/2, 0)$  è un punto di minimo stretto per  $\mathcal{U}$ , in quanto la matrice hessiana ha entrambi gli autovalori strettamente positivi, e pertanto la configurazione di equilibrio  $(q/2, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

(4) Nella configurazione di equilibrio trovata  $R \equiv (q/2, 0, 0)$ , all'equilibrio, vale

$$\mathbf{0} = m\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\phi} - k(R - O) - k(R - Q) - mg \mathbf{e}_z .$$

Pertanto il valore esplicito di  $\boldsymbol{\phi}$  è:

$$\boldsymbol{\phi} = k(R - O) + k(R - Q) + mg \mathbf{e}_z = kq/2 \mathbf{e}_x + k(q/2 - q) \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z = mg \mathbf{e}_z .$$

(5). Osservando il sistema (D.261)-(D.262), si vede che la funzione  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  soddisfa la seconda equazione che, essendo disaccoppiata dalla prima, ammette tale funzione come unica soluzione per condizioni iniziali  $y(0) = 0$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ . Per concludere dobbiamo risolvere la prima equazione:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x + \frac{kq}{m} - \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} ,$$

con le condizioni iniziali  $x(0) = q$ ,  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$  nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ . Introduciamo la nuova variabile  $X := x - q/2$ . In questo modo l'equazione si riscrive in forma di equazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dX}{dt} + \frac{2k}{m} X = 0 .$$

Le due soluzioni del polinomio caratteristico sono:

$$\chi_{\pm} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{2k}{m}} .$$

Nel caso  $\gamma^2 > 100mk$ , abbiamo evidentemente che  $\chi_{\pm}$  sono numeri reali, negativi e distinti. Possiamo scrivere la soluzione generale nella variabile  $x$ , come, se  $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ ,

$$x(t) = q/2 + X(t) = q/2 + C_+ e^{\chi_+ t} + C_- e^{\chi_- t}.$$

Sappiamo che  $x(0) = q$  e quindi  $q/2 + C_+ + C_- = q$ , ma anche  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$  e quindi  $\chi_+ C_+ + \chi_- C_- = 0$ . Si ricava facilmente che:  $C_- = q\chi_+/2(\chi_+ - \chi_-)$  e  $C_+ = -q\chi_-/2(\chi_+ - \chi_-)$ .

In definitiva, il moto del punto  $P$  con i dati iniziali proposti, cioè la soluzione del problema di Cauchy complessivo, si scrive:

$$y(t) = 0, \quad x(t) = \frac{q}{2} - \frac{q\chi_- e^{\chi_+ t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} + \frac{q\chi_+ e^{\chi_- t}}{2(\chi_+ - \chi_-)} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente la soluzione del problema di Cauchy posto è massimale e completa. Dato che  $\chi_{\pm} < 0$  nelle nostre ipotesi, il limite per  $t \rightarrow +\infty$  di  $x(t)$  vale  $q/2$  in quanto i rimanenti addendi si annullano nel limite. In definitiva:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (q/2, 0).$$

(5) Dalla forma della lagrangiana (D.258) si ha immediatamente che:

$$p_x := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \tag{D.266}$$

$$p_y := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(1 + 16a^2 y^6) \dot{y}. \tag{D.267}$$

Da queste, invertendole e tendo conto di (D.263) segue subito che la funzione di Hamilton è:

$$\mathcal{H}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m(1 + 16a^2 y^6)} + ka^2 y^8 + mgy^4 + ky^2 + kx(x - q).$$

Le quattro equazioni di Hamilton sono allora:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \right) \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} \right) \frac{p_y}{m(1 + 16a^2 y^6)}$$

che ripristinano il legame tra le coordinate lagrangiane puntate ed i momenti sul moto del sistema, insieme alle due equazioni che contengono la dinamica:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) = -2kx + kq \\ \frac{dp_y}{dt} &= \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \right) = \frac{48a^2 y^5}{m(1 + 16a^2 y^6)^2} p_y^2 - 8a^2 k y^7 - 4mgy^3 - 2ky. \end{aligned}$$



### ESERCIZIO 24

In un sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , si fissi un sistema di assi cartesiani ortonormali destrorsi  $x, y, z$  con origine  $O$  solidali con  $\mathcal{S}$ . Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  è vincolato ad appartenere alla curva liscia di equazione  $z = ax^3 - x$ ,  $y = 0$ , con  $a > 0$  parametro fissato. Il riferimento  $\mathcal{S}$  ruota senza traslare rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$  con  $\omega_{\mathcal{S}_0}|\mathcal{S} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è una costante fissata. Oltre alla reazione vincolare  $\phi$ , sul punto agisce la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  e la forza di una molla (di massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  attaccata con un estremo in  $P$  e l'altro sull'asse  $z$  al punto  $Q$  sull'asse  $z$ , che ha sempre la stessa quota di  $P$ . Si risolvano i seguenti quesiti, usando come coordinata lagrangiana per  $P$ , la sua ascissa  $x$  nel riferimento  $\mathcal{S}$ .

- (1). Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il moto del punto  $P$ . Quindi si determinino le formule che determinano le componenti della reazione vincolare  $\phi$  in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$  nel riferimento  $\mathcal{S}$ .
- (2). Si determini un integrale primo del sistema spiegandone il significato fisico.
- (3). Si studino le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  in funzione dei valori dei parametri  $m > 0, g > 0, a > 0, \Omega > 0, k > 0$  e se ne studi la stabilità.
- (4). Si calcoli esplicitamente la reazione vincolare  $\phi$  in una configurazione di equilibrio stabile, esprimendone le componenti rispetto ad una base solidale con il riferimento inerziale.

**Soluzione.**

(1) La posizione del punto  $P$  è individuata in  $\mathcal{S}$  da:

$$P(t) - O = x(t) \mathbf{e}_x + (ax(t)^3 - x(t)) \mathbf{e}_z .$$

Passiamo a scrivere le quantità cinematiche riferite a  $\mathcal{S}_0$  tenendo conto che, per costruzione, si ha facilmente che  $\frac{d\mathbf{e}_x}{dt}|_{\mathcal{S}_0} = \Omega \mathbf{e}_y$ . La velocità nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  sarà data da:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt}|_{\mathcal{S}_0} + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z = \dot{x} \mathbf{e}_x + x\Omega \mathbf{e}_y + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z .$$

Quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + x\Omega \mathbf{e}_y + \dot{x} (3ax^2 - 1) \mathbf{e}_z . \quad (\text{D.268})$$

Tenendo conto del fatto che  $\frac{d\mathbf{e}_y}{dt}|_{\mathcal{S}_0} = -\Omega \mathbf{e}_x$  troviamo anche:

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}_0} = (\ddot{x} - \Omega^2 x) \mathbf{e}_x + 2\dot{x}\Omega \mathbf{e}_y + (\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2) \mathbf{e}_z . \quad (\text{D.269})$$

L'energia cinetica in  $\mathcal{S}_0$  la possiamo ricavare quadrando l'espressione trovata per la velocità, tenendo conto che la base di vettori usata è ortonormale. Si ottiene in tal modo:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 [1 + (3ax^2 - 1)^2] + \frac{m}{2} x^2 \Omega^2 \quad (\text{D.270})$$

Le forze attive in  $\mathcal{S}_0$  sono tutte conservative: la forza gravitazionale con energia potenziale  $mg(ax^3 - x)$  e la forza della molla con energia potenziale  $\frac{k}{2}x^2$ . In totale abbiamo una lagrangiana in  $\mathcal{S}_0$ :

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 [9a^2x^4 - 6ax^2 + 2] + \frac{1}{2} (m\Omega^2 - k) x^2 - mg(ax^3 - x). \quad (\text{D.271})$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange si ricavano dalla solita formula:

$$\frac{d}{dt} \left[ m \frac{dx}{dt} (9a^2x^4 - 6ax^2 + 2) \right] = m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)$$

cioè:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} (9a^2x^4 - 6ax^2 + 2) = -m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)$$

e quindi risultano essere, già scritte in forma normale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 (18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{m (9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} \quad (\text{D.272})$$

Si osservi che il denominatore non può mai annullarsi in virtù del teorema che prova che le equazioni di Eulero-Lagrange si devono poter scrivere in forma normale. In ogni caso tale

denominatore è, a parte il fattore  $m > 0$ , dato da:  $1 + (3ax^2 - 1)^2$  per cui non può mai annullarsi.

Ora ricaviamo le componenti della reazione vincolare  $\phi$  agente sul punto, scritte rispetto alla terna  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ . Le equazioni di Newton, nel riferimento  $\mathcal{S}_0$ , ma usando la terna solidale con  $\mathcal{S}$ , dicono che:

$$m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}_0} = -mg\mathbf{e}_z - kx\mathbf{e}_x + \phi,$$

dunque:

$$\phi = m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}_0} + mg\mathbf{e}_z + kx\mathbf{e}_x$$

che, tenendo conto di (D.269) diventa:

$$\phi = m(\ddot{x} - \Omega^2 x)\mathbf{e}_x + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y + m(\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2)\mathbf{e}_z + mg\mathbf{e}_z + kx\mathbf{e}_x$$

e quindi:

$$\phi = m\left(\ddot{x} - \Omega^2 x + \frac{k}{m}x\right)\mathbf{e}_x + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y + m(\ddot{x}(3ax^2 - 1) + 6ax\dot{x}^2 + g)\mathbf{e}_z \quad (\text{D.273})$$

dove a  $\ddot{x}$  si deve sostituire il secondo membro di (D.272) ottenendo la reazione vincolare in funzione della sola  $x$  e  $\dot{x}$ :

$$\begin{aligned} \phi = & \left[ \frac{-m\dot{x}^2(18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{(9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} + m(-\Omega^2 x + kx) \right] \mathbf{e}_x \\ & + 2m\dot{x}\Omega\mathbf{e}_y \\ & + \left[ (3ax^2 - 1) \frac{-m\dot{x}^2(18a^2x^3 - 6ax) + (m\Omega^2 - k)x - mg(3ax^2 - 1)}{(9a^2x^4 - 6ax^2 + 2)} + m(6ax\dot{x}^2 + g) \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

**(2)** Dato che la lagrangiana (D.271) non dipende esplicitamente dal tempo si ha l'integrale primo di Jacobi:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}}{\partial t} \dot{x} - \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$$

cioè

$$E(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 [9a^2x^4 - 6ax^2 + 2] + \frac{1}{2}(k - m\Omega^2)x^2 + mg(ax^3 - x). \quad (\text{D.274})$$

L'integrale primo detto ha il significato dell'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{S}$ . Infatti in tale riferimento agiscono la forza gravitazionale, la forza centrifuga e la forza della molla, alle quali compete un'energia potenziale totale (tenendo conto dei tre addendi detti che corrispondono ai tre addendi nello stesso ordine nel secondo membro dell'espressione che segue):

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = mg(ax^3 - x) - \frac{1}{2}m\Omega^2x^2 + \frac{1}{2}kx^2;$$

agiscono anche la forza di Coriolis e la reazione vincolare che non compiono lavoro in quanto sempre normali alla velocità in  $\mathcal{S}$ . L'energia cinetica in  $\mathcal{S}$  si ricava tenendo conto che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{x}(3ax^2 - 1)\mathbf{e}_z \quad (\text{D.275})$$

e quindi:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \left[ 1 + (3ax^2 - 1)^2 \right]. \quad (\text{D.276})$$

Sommando tale energia cinetica e l'energia potenziale detta otteniamo proprio il secondo membro di (D.274).

**(3)** Nel riferimento  $\mathcal{J}$  possiamo usare la stessa lagrangiana di  $\mathcal{J}_0$  (D.271), interpretando la parte  $\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$  dell'energia cinetica come l'energia potenziale della forza centrifuga. Essendo la lagrangiana della forma  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ , possiamo applicare i soliti metodi della teoria della stabilità. In particolare, le configurazioni di equilibrio si ottengono come gli zeri del gradiente dell'energia potenziale. In realtà non tutte le forze agenti in  $\mathcal{J}$  su  $P$  sono conservative, dato che c'è anche una forza non conservativa data dalla forza di Coriolis, tuttavia questa forza non compare nelle equazioni di Eulero-Lagrange dato che ha componente lagrangiana nulla come si verifica immediatamente, essendo tale forza perpendicolare a  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{x}\partial(P-O)/\partial x$  e quindi  $\mathcal{Q}_x^{(\text{Coriolis})} = \partial(P-O)/\partial x \cdot \mathbf{f}^{(\text{Coriolis})} = 0$ . Conseguentemente, come detto prima, la condizione di annullamento di della componente lagrangiana della forza totale agente su  $P$  equivale allora alla condizione di annullamento del gradiente dell'energia potenziale di tutte le forze conservative e le configurazioni di equilibrio sono allora le soluzioni di:

$$\frac{d}{dx} \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = mg(3ax^2 - 1) + (k - m\Omega^2)x = 0.$$

Cioè:

$$3amgx^2 + (k - m\Omega^2)x - mg = 0.$$

Esplicitamente abbiamo sempre, cioè per tutti i valori di  $m > 0, a > 0, k > 0, g > 0, \Omega > 0$ , le due soluzioni:

$$x_{\pm} = \frac{m\Omega^2 - k \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g}}{6amg}. \quad (\text{D.277})$$

Per la stabilità studiamo il segno della derivata seconda di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ . Se tale segno è positivo possiamo concludere che la configurazione di equilibrio studiata è stabile se il segno è nullo non possiamo concludere niente. Se il segno è negativo possiamo concludere che la configurazione è stabile anche se in  $\mathcal{J}$  agisce anche la forza attiva di Coriolis, avendo essa componente lagrangiane nulle. Vale:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dx^2} = 6amgx + (k - m\Omega^2)$$

per cui:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dx^2} \Big|_{x_{\pm}} = m\Omega^2 - k \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2} + (k - m\Omega^2) = \pm \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2}.$$

Concludiamo che  $x_+$  è sicuramente stabile (nel futuro e nel passato). Con i teoremi che conosciamo possiamo similmente dire che  $x_-$  è instabile.

(4) Consideriamo la configurazione di equilibrio stabile  $x_+$ . Se  $P$  è fermo in  $\mathcal{J}$  in tale configurazione di equilibrio, allora  $dx/dt = 0$  e  $d^2x/dt^2 = 0$  per ogni tempo. In questo caso la (D.273) si riduce a:

$$\phi_{x_+} = (k - m\Omega^2) x_+ \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z$$

e quindi, se  $\mathbf{e}_{x0}, \mathbf{e}_{y0}, \mathbf{e}_{z0} = \mathbf{e}_z$  è una terna ortonormale in  $O$  solidale con  $\mathcal{J}_0$ :

$$\phi_{x_+} = (k - m\Omega^2) \frac{m\Omega^2 - k + \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + 12am^2g^2}}{6amg} (\cos(\Omega t) \mathbf{e}_{x0} + \sin(\Omega t) \mathbf{e}_{y0}) + mg \mathbf{e}_z .$$

### ESERCIZIO 25

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  dotato di coordinate cartesiane ortonormali solidali  $x, y, z$  di origine  $O$ , si considerino tre punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse uguali  $m > 0$  e  $G$  di massa  $2m$  vincolato a rimanere nel centro di massa del sistema di  $P_1$  e  $P_2$ . I tre punti sono vincolati a muoversi nel piano  $y = 0$  senza attrito. I due punti  $P_1$  e  $P_2$  interagiscono per mezzo di una forza conservativa con energia potenziale (in  $\mathcal{I}$ ):

$$\mathcal{U}(P_1, P_2) = a\|P_1 - P_2\|^3 - b\|P_1 - P_2\|^2$$

dove  $a, b > 0$  sono noti. Sul punto  $G$  agisce la forza di una molla ideale di lunghezza nulla a riposo e massa nulla, di costante elastica  $k > 0$  nota, il cui secondo estremo è fissato ad  $O$ . Sul punto  $P_1$  agisce una forza non conservativa  $\mathbf{f} := \gamma(\mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$  costante assegnata. Infine i tre punti sono sottoposti alla forza di gravità di accelerazione  $-g \mathbf{e}_z$  essendo  $g > 0$  nota. Si risolvano i seguenti quesiti.

(1). Assumendo che tutti i vincoli siano ideali, si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema usando come coordinate libere: le due coordinate  $x, z$  del punto  $G$ , la distanza  $r > 0$  di  $P_1$  da  $G$ , l'angolo  $\theta$  che  $P_1 - G$  individua rispetto all'asse  $x'$  passante per  $G$  e parallelo (equiverso) a  $x$ .  $\theta$  è supposto essere orientato positivamente rispetto a versore  $\mathbf{e}_y$ .

(2). Nel caso  $\gamma = 0$ , si scriva l'espressione esplicita di:

- (a) l'energia meccanica totale,
  - (b) la componente  $y$  del momento angolare rispetto al centro di massa del sistema dei tre punti,
  - (c) la componente  $x$  dell'impulso totale del sistema dei tre punti, relativi al riferimento  $\mathcal{I}$ .
- Si dimostri che le prime due grandezze sono integrali primi, mentre la terza lo è nell'ipotesi  $k = 0$ .

(3). Nel caso  $\gamma = 0$  e  $k = 0$ , usando le equazioni del moto trovate, si determinino, in funzione delle condizioni iniziali, le eventuali soluzioni:  $x = x(t), z = z(t), \theta = \theta(t), r = r(t)$  delle equazioni del moto in cui valga  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \neq 0$  costantemente per tutti i tempi  $t$  (ricordare che  $r > 0$  per ipotesi).

(4). Nel caso  $\gamma = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio con  $r > 0$  e se ne studi la stabilità.

### Soluzione.

Tutte le quantità considerate sono relative al sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{I}$  e pertanto omettiamo di scrivere esplicitamente il pedice  $\mathcal{I}$ .

(1) Per costruzione, dato che  $P_1$  e  $P_2$  hanno la stessa massa, il centro di massa di essi si trova esattamente a metà del segmento che unisce i due punti, inoltre  $P_2 - G = -(P_1 - G)$ . Vale allora:

$$G - O = x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.278})$$

$$P_1 - O = (x + r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (z + r \sin \theta) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.279})$$

$$P_2 - O = (x - r \cos \theta) \mathbf{e}_x + (z - r \sin \theta) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.280})$$

Da queste relazioni si trovano, con ovvie notazioni:

$$\mathbf{v}_G = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.281})$$

$$\mathbf{v}_1 = (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{z} + \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z \quad (\text{D.282})$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{x} - \dot{r} \cos \theta + r \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_x + (\dot{z} - \dot{r} \sin \theta - r \dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.283})$$

Questa espressione fornisce, con qualche calcolo, l'espressione dell'energia cinetica definita come  $\mathcal{T} = m\mathbf{v}_G^2 + (1/2)m(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)$  (lo stesso risultato si ottiene direttamente applicando il teorema di König):

$$\mathcal{T} = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (\text{D.284})$$

L'energia potenziale si ottiene sommando  $\mathcal{U} = 8ar^3 - 4br^2$  a quella dovuta alla forza di gravità:  $-2mgz_G - mgz_1 - mgz_2 = -4mgz$ . Nel caso  $\gamma = 0$  la lagrangiana del sistema è pertanto:

$$\mathcal{L} = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + z^2) - 8ar^3 + 4br^2 - 4mgz. \quad (\text{D.285})$$

Nel caso  $\gamma \neq 0$  le equazioni di E-L terranno anche conto delle componenti lagrangiane di  $\mathbf{f}$ :

$$\mathcal{Q}_x = \gamma(\mathbf{v}_P|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial x} = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$\mathcal{Q}_z = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial z} = \gamma(\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta),$$

$$\mathcal{Q}_r = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial r} = \gamma \sin \theta (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \gamma(\mathbf{v}_1|_{\mathcal{I}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial P_1 - O}{\partial \theta} = \gamma r \cos \theta (\dot{x} + \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta),$$

Si ricavano quindi le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma

$$\frac{dq^k}{dt} = \dot{q}^k, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \mathcal{Q}_k$$

dove  $\mathcal{L}$ , come scritto sopra, tiene conto delle sole forze conservative. Le quazioni dette sono date esplicitamente da:

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{4m}, \quad (\text{D.286})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{dt} = -\frac{kz}{4m} - g + \frac{\gamma}{4m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right), \quad (\text{D.287})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{12a}{m} r^2 + \frac{4b}{m} r + \frac{\gamma \sin \theta}{2m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \quad (\text{D.288})$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{\gamma r \cos \theta}{2m} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right). \quad (\text{D.289})$$

(2) Se  $\gamma = 0$ , il sistema fisico è sottoposto a sole forze conservative ed ha vincoli ideali indipendenti dal tempo. Possiamo applicare il teorema di Jacobi che afferma che (a) l'energia meccanica totale si conserva nel tempo sulle soluzioni delle equazioni del moto e (b) coincide con la funzione di Hamilton. Pertanto l'energia meccanica totale ha la forma:

$$\mathcal{H}(x, z, \theta, r, \dot{x}, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{r}) = 2m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + z^2) + 8ar^3 - 4br^2 + 4mgz. \quad (\text{D.290})$$

Se (oltre a  $\gamma = 0$ , che assicura che il sistema sia descritto da una lagrangiana senza dover introdurre forze generalizzate)  $k = 0$ , la lagrangiana non dipende esplicitamente da  $x$ , applicando la versione più elementare del teorema di Nöther, ovvero direttamente da (D.286), concludiamo che si deve conservare il momento coniugato:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 4m\dot{x} = 4m \frac{dx}{dt}.$$

Dato che  $x$  è una coordinata traslazionale, il momento coniugato  $p_x$  corrisponde alla componente  $x$  dell'impulso totale del sistema. (Risulta comunque direttamente evidente dall'espressione trovata che  $p_x$  altro non è che la componente  $x$  dell'impulso totale del sistema essendo il prodotto della massa totale del sistema moltiplicata per la componente  $x$  della velocità del centro di massa (che coincide con  $G$ ) e valendo il teorema del centro di massa).

In virtù della non dipendenza esplicita di  $\mathcal{L}$  da  $\theta$  (se  $\gamma = 0$ ), si conserva il momento coniugato:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2mr^2\dot{\theta} = 2mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Sapendo che:

$$L_G^y := (m(P_1 - G) \wedge \mathbf{v}_1 + m(P_2 - G) \wedge \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{e}_y + 2m(G - O) \wedge \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e}_y,$$

facendo uso di (D.279)-(D.283) notando che  $G - O = x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ , si trova con qualche calcolo che:

$$L_G^y = 2mr^2 \frac{d\theta}{dt} = p_\theta.$$



(3) Quando  $\gamma = 0$  e  $k = 0$  le prime due equazioni del moto hanno soluzione immediata:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad (\text{D.291})$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (\text{D.292})$$

Passiamo alle altre due equazioni. Se, valendo  $\gamma = 0$ ,  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0$  è costante non nulla, (D.289) implica immediatamente che  $r$  deve rimanere costante sul moto. Sostituendo questo risultato nella (D.288) si arriva all'equazione algebrica:

$$r \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right) - \frac{12a}{m} r^2 = 0.$$

Questa equazione ammette come unica soluzione ammissibile (l'altra è  $r = 0$  che non si deve accettare perché abbiamo richiesto  $r > 0$  per evitare la singolarità dell'origine nelle coordinate polari):

$$r_0 = \frac{m}{12a} \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right).$$

Per questa scelta di  $r_0$  in funzione di ogni fissato valore  $\theta_0$  le funzioni  $r(t) = r_0$  e  $\theta(t) = \theta_0$  soddisfano le equazioni del moto come si verifica procedendo indietro nei passaggi di sopra. Concludiamo che per ogni valore  $\dot{\theta}_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  c'è una classe di soluzioni in cui  $\theta(t)$  ammette derivata costante pari a  $\dot{\theta}_0$ , parametrizzata da  $x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ :

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad (\text{D.293})$$

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (\text{D.294})$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t, \quad (\text{D.295})$$

$$r(t) = \frac{m}{12a} \left( \dot{\theta}_0^2 + \frac{4b}{m} \right). \quad (\text{D.296})$$

(4) Nella situazione considerata il sistema fisico è soggetto a sole forze conservative (a parte le forze reattive). Pertanto le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale totale:

$$U(x, z, r, \theta) := \frac{k}{2}(x^2 + z^2) + 8ar^3 - 4br^2 + 4mgz.$$

Abbiamo in particolare che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = kz + 4mg, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 32ar^2 - 8br, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \equiv 0.$$

Pertanto la generica configurazioni di equilibrio  $(x_0, z_0, r_0, \theta_0)$  (scartando il caso  $r_0 = 0$ ) è del tipo:

$$x_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{4mg}{k}, \quad r_0 = \frac{b}{4a}, \quad \theta_0 \in \mathbb{R} \quad \text{arbitrariamente fissato}.$$

La stabilità non può essere studiata attraverso il segno degli autovalori della matrice hessiana (che è comunque già in forma diagonale) dato che un autovalore, quello corrispondente alla coordinata  $\theta$ , è nullo. Tuttavia dall'equazione del moto di  $\theta$ , che nel caso in esame, essendo  $r$  costante, si riduce a  $d^2\theta/dt^2 = 0$ , ricaviamo che le configurazioni di equilibrio non sono stabili, nel passato e nel futuro. Infatti, in base a tale equazione, le soluzioni possibili sono tutte e sole della forma  $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$ . Ne consegue che partendo da una configurazione iniziale  $x_0, z_0, r_0, \theta_0$ , pur scegliendo condizioni iniziali sulle velocità  $(\dot{x}_0, \dot{z}_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0) \neq (0, 0, 0, 0)$  piccole a piacere, l'orbita della soluzione, nello spazio degli atti di moto esce da qualunque fissato intorno dell'atto di moto iniziale  $(x_0, z_0, r_0, \theta_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$  a causa dell'evoluzione:  $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$ .

## ESERCIZIO 26

In riferimento al sistema di assi cartesiani ortonormali  $x, y, z$  destrorso di origine  $O$  e solidale con il sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{J}$ , due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  della stessa massa assegnata  $m > 0$  si muovono, rispettivamente:  $P_1$  sulla circonferenza  $C_1$  di raggio noto  $R > 0$  e centro  $O$ , giacente nel piano  $z = 0$ , e  $P_2$  sulla circonferenza  $C_2$  dello stesso raggio  $R > 0$ , giacente nel piano  $z = R$  e centrata nel punto  $O_2 = (0, 0, R)$ . Le circonferenze sono lisce. Sui due punti agiscono le seguenti forze attive.

(i) Le forze di tre molle ideali (peso nullo e lunghezza nulla a riposo) : *due* di costante elastica  $k \geq 0$  assegnata con un estremo in  $P_1$  ed i secondi estremi, rispettivamente nei punti  $(2R, 0, 0)$  e  $(0, 2R, 0)$ ; e la *terza* molla, di costante elastica  $K > 0$  nota, unisce  $P_1$  a  $P_2$ .

(ii) Una forza agente su  $P_1$  e data da  $\mathbf{f} = H \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}_{P_1}|_{\mathcal{J}}$  con  $H \geq 0$  costante nota.

(iii) La forza di gravità:  $-mg \mathbf{e}_z$ , con  $g > 0$  costante assegnata agente sui due punti.

Si risolvano i seguenti quesiti usando le seguenti due coordinate libere:

$\theta$ , angolo tra  $P_1 - O$  e  $\mathbf{e}_x$ , orientato positivamente rispetto all'asse  $z$ ,

$\phi$  angolo tra la proiezione di  $P_2 - O_2$  sul piano  $z = 0$  e  $P_1 - O$ , orientato positivamente rispetto all'asse  $z$ .

(1) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange per i punti  $P_1$  e  $P_2$  e si scrivano esplicitamente in forma normale.

(2) Nel caso  $k = 0$ , si provi l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}$  del sistema in  $\mathcal{J}$  e la componente  $z$  del momento angolare totale del sistema valutata in  $\mathcal{J}$  rispetto al polo  $O$ ,  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}}$ , sono integrali primi. Scrivere esplicitamente l'espressione di questi due integrali primi in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate temporali prime. Assumendo poi  $k > 0$ , dimostrare che su un moto generico del sistema  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}$  è ancora conservata, mentre  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}}$  cessa di essere conservata dato che la sua derivata temporale è non nulla in generale.

(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità in funzione di  $R, k, K, m, g > 0$  e si calcoli la reazione vincolare su  $P_2$  se il sistema è in quiete in una configurazione di equilibrio stabile.

(4) Assumendo  $k = 0$  determinare tutte le condizioni iniziali per cui la soluzione del problema del moto è del tipo:  $\theta(t) = At + B$  e  $\phi = C$  per qualche scelta delle costanti  $A, B, C$ .

(5) (Per *Meccanica Analitica*) Si passi in formulazione di Hamilton, scrivendo la trasformazione di Legendre, l'hamiltoniana del sistema e le equazioni di Hamilton esplicitamente.

(5)' (Per *Fondamenti di Fisica Matematica*) Per  $k = 0$ , si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.

**Soluzione.**

Omettiamo nel seguito l'indice  $|\mathcal{J}$ , essendo tutte le grandezze cinematiche associate unicamente al riferimento  $\mathcal{J}$ .

(1) Per costruzione, in funzione delle coordinate libere  $x, y$ , abbiamo:

$$P_1 - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad P_2 - O = R \cos(\theta + \phi) \mathbf{e}_x + R \sin(\theta + \phi) \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.297})$$

e pertanto:

$$\mathbf{v}_{P_1} = R\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{v}_{P_1} = R(\dot{\theta} + \dot{\phi})(-\sin(\theta + \phi) \mathbf{e}_x + \cos(\theta + \phi) \mathbf{e}_y). \quad (\text{D.298})$$

Per quanto riguarda le forze agenti sui due punti, possiamo dire che sono tutte conservative eccetto la forza  $\mathbf{f}$  agente su  $P_1$ , che tuttavia non ha componenti lagrangiane, dato che è sempre normale al vincolo  $C_1$  per costruzione e dunque ha prodotto scalare nullo con  $\partial P_1 / \partial \theta$ . L'energia potenziale gravitazionale può non essere considerata nel calcolo della lagrangiana, dato che entrambi i punti si possono muovere solo rimanendo a quota costante. Tuttavia entrambe le forze si devono prendere in considerazione nel calcolo delle reazioni vincolari. In definitiva il sistema è descritto da una lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ , dove  $\mathcal{U}$  è l'energia potenziale delle sole forze delle tre molle. Scriviamo la lagrangiana esplicitamente. L'energia cinetica del sistema dei due punti nel riferimento  $\mathcal{J}$  si calcola da (D.298) come:

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \left[ \dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 (\sin^2(\theta + \phi) + \cos^2(\theta + \phi)) \right],$$

e quindi:

$$\mathcal{T} = \frac{mR^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \right]. \quad (\text{D.299})$$

L'energia potenziale si calcola usando le (D.297) come:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{k}{2} \|P_1 - (2R, 0, 0)\|^2 + \frac{k}{2} \|P_1 - (0, 2R, 0)\|^2 + \frac{K}{2} \|P_1 - P_2\|^2 \\ &= \frac{k}{2} [(2R - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta] + \frac{k}{2} [R^2 \cos^2 \theta + (R \sin \theta - 2R)^2] \\ &\quad + \frac{KR^2}{2} [(\cos \theta - \cos(\theta + \phi))^2 + (\sin \theta - \sin(\theta + \phi))^2 + 1]. \end{aligned}$$

Sviluppando i calcoli e trascurando le costanti additive si trova infine:

$$\mathcal{U} = -2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) - KR^2 \cos \phi \quad (\text{D.300})$$

Di conseguenza la lagrangiana del sistema è:

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + 2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) + KR^2 \cos \phi, \quad (\text{D.301})$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange che ne derivano sono:

$$\left[ 2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] = \frac{2k}{m} (\cos \theta - \sin \theta), \quad (\text{D.302})$$

$$\left[ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\phi}{dt^2} \right] = -\frac{K}{m} \sin \phi. \quad (\text{D.303})$$

Sottraendo la seconda dalla prima e poi due volte la seconda dalla prima, otteniamo il sistema equivalente al precedente ma scritto in forma normale:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2k}{m} (\cos \theta - \sin \theta) + \frac{K}{m} \sin \phi, \quad (\text{D.304})$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{2k}{m} (\cos \theta - \sin \theta) - \frac{2K}{m} \sin \phi. \quad (\text{D.305})$$

**(2)** La Lagrangiana (D.301) non dipende esplicitamente dal tempo, i vincoli sono indipendenti dal tempo in  $\mathcal{J}$  e le coordinate libere sono solidali con il riferimento detto. Nel caso  $H = 0$  tutte le forze attive sono conservative. Pertanto possiamo applicare il teorema di Jacobi provando che l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H}$  coincide con l'energia meccanica totale nel riferimento  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{H} = \frac{mR^2}{2} [2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}] - 2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) - KR^2 \cos \phi. \quad (\text{D.306})$$

Nel caso in cui  $H \neq 0$  il teorema di Jacobi in questo caso si generalizza a, dove la derivata è calcolata sui moti del sistema:  $\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}}{dt} = Q_\theta \dot{\theta} + Q_\phi \dot{\phi}$ . Tuttavia il risultato finale non cambia perché le componenti lagrangiane della forza non conservativa che agisce su  $P_1$  sono nulle come sappiamo. Per quanto riguarda  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}}$ , osserviamo che, per costruzione  $\theta$  è una coordinate rotazionale attorno all'asse  $z$ , inoltre, se  $k = 0$ , la lagrangiana (D.301) non dipende esplicitamente da  $\theta$ . Per noti teoremi, concludiamo che in tal caso  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$  coincide con  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}}$  ed è un integrale primo. Nel caso in cui  $k > 0$ , l'equazione di E-L (D.302) che corrisponde a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta},$$

mostra che, su un moto generico del sistema:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2kR^2(\cos \theta - \sin \theta)$$

il cui secondo membro in generale è non nullo. Pertanto, se  $k > 0$ ,  $\Gamma_{Oz}|_{\mathcal{J}}$  cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Ignorando il valore di  $H$  che non gioca alcun ruolo nella dinamica del sistema dato che corrisponde ad una forza attiva che ammette componenti lagrangiane sempre nulle, le configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0)$  si ottengono annullando le componenti lagrangiane delle forze attive che agiscono sul sistema, imponendo contemporaneamente che  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ . Nel caso in

esame, data la forma della lagrangiana, le configurazioni di equilibrio si ottengono come zeri del gradiente dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}|_{\theta_0, \phi_0} = -2kR^2(\cos \theta_0 - \sin \theta_0) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi}|_{\theta_0, \phi_0} = 2KR^2 \sin \phi_0 = 0.$$

Dunque, essendo  $k, K, R > 0$  abbiamo le seguenti configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0)$ :  $(\pi/4, 0)$ ,  $(5\pi/4, 0)$ ,  $(\pi/4, \pi)$ ,  $(5\pi/4, \pi)$ . La stabilità può essere studiata studiando gli autovalori della matrice hessiana  $H$  di  $\mathcal{U}$  valutata nelle configurazioni di equilibrio. Per costruzione:

$$H(\theta_0, \phi_0) = 2R^2 \text{diag}(k(\sin \theta_0 + \cos \theta_0), \frac{K}{2} \cos \phi_0).$$

Abbiamo di conseguenza che  $H(\pi/4, 0) = 2R^2 \text{diag}(k\sqrt{2}, K/2)$  e quindi la configurazione  $(\pi/4, 0)$  è di equilibrio stabile (nel passato e nel futuro, se  $R, k, K, m, g > 0$ ). Per le rimanenti tre configurazioni di equilibrio si vede immediatamente che la matrice hessiana ha almeno un autovalore negativo. Si conclude che se  $R, k, K, m, g > 0$  tali configurazioni sono instabili.

Nella configurazione di equilibrio  $(\theta_0, \phi_0) = (\pi/4, 0)$ , il punto  $P_2$  si trova in quiete sottoposto alle forze di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , alla forza della molla di costante elastica  $K$ :  $-K(P_2 - P_1) = -KR \mathbf{e}_z$  e la reazione vincolare incognita  $\phi$ . La somma di tali forze deve essere nulla dato che il punto è in quiete in una configurazione di equilibrio, pertanto:

$$\phi = (mg + KR) \mathbf{e}_z.$$

(4) Se  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = C$  risolve le equazioni del moto, sostituendo tali funzioni nelle (D.304), (D.305) otteniamo che deve essere (ricordando che  $k = 0$ ):

$$0 = \frac{K}{m} \sin C, \quad (\text{D.307})$$

$$0 = -\frac{2K}{m} \sin C. \quad (\text{D.308})$$

da cui  $\sin C = 0$  e quindi  $C = 0$ , oppure  $C = \pi$  costantemente. Nel primo caso  $\phi(0) = 0$  e nel secondo  $\phi(0) = \pi$ , in entrambi i casi  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ . Nello stesso modo, per costruzione  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$ . Se viceversa fissiamo condizioni iniziali:  $\phi(0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  le funzioni  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = 0$  soddisfano il problema di Cauchy dato da tali condizioni iniziali e le equazioni (D.304), (D.305) che costituiscono un sistema in forma normale con secondo membro di classe  $C^\infty$ , pertanto sono le uniche soluzioni del problema dato. Similmente, se fissiamo condizioni iniziali:  $\phi(0) = \pi$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  le funzioni  $\theta(t) = At + B$ ,  $\phi(t) = \pi$  soddisfano il problema di Cauchy dato da tali condizioni iniziali e le equazioni (D.304), (D.305) e sono le uniche soluzioni del problema dato. Concludiamo che le scelte possibili di condizioni iniziali che producono soluzioni del tipo voluto sono solo  $\phi(0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$  e  $\phi(0) = \pi$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ ,  $\theta(0) = B$  e  $\frac{d\theta}{dt}(0) = A$ . Nel primo caso  $\phi(t) = 0$  costantemente e nel secondo  $\phi(t) = \pi$  costantemente.

(5) Dalla forma della lagrangiana (D.301) si ha subito che la trasformazione di Legendre è:

$$p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2(2\dot{\theta} + \dot{\phi}), \quad p_\phi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})$$

con inversa:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - p_\phi}{mR^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{2p_\phi - p_\theta}{mR^2}.$$

Sostituendo nell'espressione della funzione di Hamilton (D.306), troviamo l'espressione della funzione di Hamilton in variabili hamiltoniane:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2mR^2} [p_\theta^2 + 2p_\phi^2 - 2p_\theta p_\phi] - 2kR^2(\sin \theta + \cos \theta) - KR^2 \cos \phi.$$

Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) &= \frac{1}{mR^2} (p_\theta - p_\phi), & \frac{d\phi}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) &= \frac{1}{mR^2} (2p_\phi - p_\theta) \\ \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= 2kR^2 (\cos \theta - \sin \theta), & \frac{dp_\phi}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) &= -KR^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

(5)' Le configurazioni di equilibrio si ottengono come nel punto (3), come zeri del gradiente dell'energia potenziale, tenendo però conto del fatto che  $k = 0$  e  $K, R > 0$ :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \big|_{\theta_0, \phi_0} = 0 = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} \big|_{\theta_0, \phi_0} = 2KR^2 \sin \phi_0 = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio risultano allora essere:  $(\theta_0, \phi_0) = (\theta_0, 0)$  per ogni  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  e  $(\theta_0, \phi_0) = (\theta_0, \pi)$  per ogni  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . La matrice Hessiana ha sempre un autovalore nullo e, nella seconda classe di configurazioni, un autovalore negativo. Pertanto le configurazioni  $(\theta_0, \pi)$  sono instabili nel futuro e nel passato. Per quanto riguarda le configurazioni  $(\theta_0, 0)$  non possiamo concludere nulla dallo studio della matrice hessiana data la presenza dell'autovalore nullo. Tuttavia possiamo dire qualcosa direttamente applicando la definizione di configurazione di equilibrio stabile. Infatti, dal punto (4) sappiamo che fissando condizioni iniziali date dalla configurazione di equilibrio  $(\theta_0, 0)$  unitamente a  $\frac{d\theta}{dt}(0) = \epsilon$ ,  $\frac{d\phi}{dt}(0) = 0$ , si ottiene la soluzione  $\theta(t) = \epsilon t + \theta_0$ ,  $\phi(t) = 0$ . Comunque prendiamo piccolo un intorno, nello spazio degli atti di moto, dell'atto di moto  $(\theta_0, 0, 0, 0)$ , possiamo fissare  $\epsilon > 0$  abbastanza piccolo in modo tale che  $(\theta_0, 0, \epsilon, 0)$  appartiene a tale intorno, ma la soluzione con dati iniziali  $(\theta_0, 0, \epsilon, 0)$  esce dall'intorno se  $|t|$  è abbastanza grande, in virtù del fatto che la soluzione, come detto, è  $\theta(t) = \epsilon t + \theta_0$ ,  $\phi(t) = 0$ . Concludiamo che ogni configurazione di equilibrio  $(\theta_0, 0)$  è instabile, nel passato e nel futuro.

### ESERCIZIO 27

Si consideri la curva  $\Gamma$  di equazione  $y = 0, z = -ax^2$ , per  $a > 0$  fissato, riferita ad un sistema di coordinate cartesiane ortonormali  $x, y, z$  di origine  $O$  solidali con il sistema di riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$ . Tale riferimento ruota senza traslare attorno all'asse  $\mathbf{e}_{0z} \equiv \mathbf{e}_z$  solidale con il sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$  e vale  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}|\mathcal{S}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , con  $\Omega > 0$  costante assegnata. Il punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a rimanere su  $\Gamma$  pensata come vincolo liscio. Su  $P$  agiscono le seguenti forze vere attive:

- (i) la forza di una molla ideale (massa nulla e lunghezza nulla a riposo) di costante elastica  $k > 0$  nota, attaccata a  $P$  ed al punto  $O$ ;
- (ii) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  costante nota;
- (iii) la forza viscosa  $\mathbf{f} = -H \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0}$ , dove  $H \geq 0$  è una costante nota.

Usando l'ascissa  $x$  del punto  $P$  come coordinata libera si risolvano i quesiti seguenti.

**(1)** Scrivere, esplicitamente in forma normale, le equazioni di Eulero Lagrange per il punto  $P$  e l'equazione che determina la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  della reazione vincolare agente su  $P$  in funzione di  $x$  e  $\frac{dx}{dt}$  sui moti del sistema.

**(2)** Scrivere esplicitamente, in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$  l'energia meccanica totale  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{S}$ , provando che tale energia è un integrale primo se  $H = 0$ . Nel caso  $H > 0$ , calcolare esplicitamente la derivata temporale di  $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  valutata su un moto del sistema in funzione di  $x$  e  $\dot{x}$ .

**(3)** Calcolare le configurazioni di equilibrio di  $P$  nel riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$  in funzione dei valori dei parametri  $a, m, k, g, \Omega > 0$  e studiare la stabilità di tali configurazioni se  $H > 0$ .

**(4)** (Per *Meccanica Analitica*) Per  $H = 0$ , passare in formulazione di Hamilton, scrivendo esplicitamente la trasformata di Legendre, la funzione di Hamilton in funzione delle variabili hamiltoniane e le equazioni di hamilton.

**(4)'** (Per *Fondamenti di Fisica Matematica*) Per  $H = 0$ , calcolare la reazione vincolare agente su  $P$ , rispetto alla base  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , quando si trova in quiete in  $\mathcal{S}$  in una configurazione di equilibrio diversa da  $O$ .



**Soluzione.**

(1) Il vettore posizione del punto  $P$  è

$$P - O = x \mathbf{e}_x - ax^2 \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.309})$$

per cui, la velocità in  $\mathcal{J}$  vale:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z). \quad (\text{D.310})$$

Conseguentemente, essendo  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}_0} \wedge (P - O)$ , abbiamo anche che:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} = \dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) + \Omega x \mathbf{e}_y. \quad (\text{D.311})$$

Le energie cinetiche nei due riferimenti saranno allora date da:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2), \quad \mathcal{T}|_{\mathcal{J}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (\text{D.312})$$

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  tutte le forze attive esclusa  $\mathbf{f}$  sono conservative. L'energia potenziale totale è quella dovuta alla molla più quella gravitazionale:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}_0}(x) = \frac{k}{2}||P - O||^2 + mgz_P = \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2. \quad (\text{D.313})$$

Avremo allora una lagrangiana in  $\mathcal{J}_0$  data da:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{m\Omega^2}{2}x^2 - \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) + mgax^2. \quad (\text{D.314})$$

Per scrivere le equazioni di E-L di  $P$  nel riferimento  $\mathcal{J}_0$  abbiamo ancora bisogno della componente lagrangiana della forza  $\mathbf{f}$ :

$$\mathcal{Q}_x = \mathbf{f} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = -H \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} \cdot (\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) = -H [\dot{x}(\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z) + \Omega x \mathbf{e}_y] \cdot (\mathbf{e}_x - 2ax \mathbf{e}_z),$$

cioè, eseguendo il calcolo:

$$\mathcal{Q}_x = -H\dot{x}(1 + 4a^2x^2). \quad (\text{D.315})$$

Le equazioni di E-L nel riferimento  $\mathcal{J}_0$ , che sono della forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial x} = \mathcal{Q}_x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

risultano essere:

$$m \frac{d}{dt} \left( (1 + 4a^2x^2) \frac{dx}{dt} \right) - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 4a^2x - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 4a^2x^3 = -H \frac{dx}{dt} (1 + 4a^2x^2),$$

e cioè

$$m(1 + 4a^2x^2) \frac{d^2x}{dt^2} + 4a^2mx \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 4a^2x^3 = -H \frac{dx}{dt} (1 + 4a^2x^2),$$

che in forma normale si scrivono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-4a^2mx \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - H\frac{dx}{dt}(1 + 4a^2x^2) + (m\Omega^2 - k + 2mga)x - 2ka^2x^3}{m(1 + 4a^2x^2)}. \quad (\text{D.316})$$

Per quanto riguarda la componente lungo  $\mathbf{e}_z$  della reazione vincolare, osserviamo che essa si ricava proiettando lungo  $\mathbf{e}_z$  l'equazione di Newton:

$$\phi = m\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}_0} + k(P - O) + H\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} + mg\mathbf{e}_z.$$

Si osservi che valendo  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$  e

$$\mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}_0} = \mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}_0} \wedge (P - O))$$

l'unico contributo lungo l'asse  $z$  è quello dato da  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{a}_P|_{\mathcal{S}} = -\frac{d}{dt}(2ax\dot{x})$ , dove abbiamo tenuto conto della (D.310). Concludiamo che:

$$\phi_z = -2m\frac{d}{dt}ax\dot{x} + k(P - O) \cdot \mathbf{e}_z + H\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} \cdot \mathbf{e}_z + mg,$$

sostituendo le espressioni già calcolate:

$$\phi_z = mg - 2m\frac{d}{dt}(ax\dot{x}) - kax^2 - 2Hax\dot{x},$$

e cioè, sul moto:

$$\phi_z = mg - 2ma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2max\frac{d^2x}{dt^2} - kax^2 - 2Hax\frac{dx}{dt}$$

L'espressione cercata per  $\phi_z$  in funzione dei soli  $x$  e  $\frac{dx}{dt}$  si ottiene dall'identità di sopra, sostituendo a  $\frac{d^2x}{dt^2}$  (nel secondo membro) il secondo membro della (D.316):

$$\begin{aligned} \phi_z = & mg - 2ma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2Hax\frac{dx}{dt} - kax^2 + mg \\ & + \frac{2ax}{1 + 4a^2x^2} \left[ 4a^2mx \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + H\frac{dx}{dt}(1 + 4a^2x^2) - (m\Omega^2 - k + 2mga)x + 2ka^2x^3 \right]. \end{aligned}$$

**(2)** Nel riferimento  $\mathcal{S}$ , oltre alle forze attive conservative presenti in  $\mathcal{S}_0$ , esistono anche le forze attive inerziali di Coriolis e centrifuga. La prima non compie lavoro nel riferimento considerato, essendo sempre normale alla velocità in tale riferimento, esattamente come la reazione vincolare in tale riferimento. La forza centrifuga è conservativa con energia potenziale  $-\frac{m\Omega^2}{2}x^2$ . L'energia meccanica totale in  $\mathcal{S}$  ha dunque la forma:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}_0} - \frac{m\Omega^2}{2}x^2,$$

e quindi:

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (\text{D.317})$$

Osservando la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  in (D.314), possiamo notare che la funzione di Hamilton ad essa associata è proprio, come si verifica immediatamente facendo il calcolo:

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{J}_0} = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + 4a^2x^2) + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2 \quad (\text{D.318})$$

pertanto  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{J}_0}$ . Nel caso in cui  $H = 0$ , il sistema è descritto in  $\mathcal{J}_0$  dalla sola lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  in (D.314) che non dipende esplicitamente dal tempo. Il teorema di Jacobi prova allora che  $\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{J}_0}$  è un integrale primo. Nel caso in cui  $H \neq 0$ , sappiamo che, su ogni soluzione delle equazioni di E-L vale:

$$\frac{d\mathcal{H}|_{\mathcal{J}_0}}{dt} = \mathcal{Q}_x \dot{x}$$

per cui, tenendo conto della (D.315), abbiamo trovato la relazione richiesta:

$$\frac{d\mathcal{E}|_{\mathcal{J}}}{dt} = -H\dot{x}^2(1 + 4a^2x^2). \quad (\text{D.319})$$

**(3)** Osserviamo preventivamente che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}$  dove nella prima lagrangiana abbiamo tenuto conto dell'energia potenziale della forza centrifuga che appare nella seconda lagrangiana come termine dell'energia cinetica. La coordinata libera  $x$  è solidale con  $\mathcal{J}$  e pertanto possiamo studiare le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{J}$  usando tale coordinata libera. Le configurazioni di equilibrio  $x_0$  in  $\mathcal{J}$  si individuano richiedendo che l'atto di moto  $(x_0, 0)$  annulli la componente lagrangiana di tutte le forze attive che agiscono in  $\mathcal{J}$ . Dato che la componente lagrangiana della forza centrifuga è nulla, quella della forza  $\mathbf{f}$  si annulla sull'atto di moto detto – essendo  $\dot{x} = 0$  e valendo (D.315) – concludiamo che le configurazioni di equilibrio si ottengono annullando la componente lagrangiana della forza conservativa totale, e cioè annullando il gradiente di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$ :

$$0 = \frac{d\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dx}|_{x_0} = 2a^2kx_0^3 + (k - 2mag - m\Omega^2)x_0,$$

da cui le configurazioni di equilibrio (ricordando che  $m, g, a, k, \Omega > 0$ ):

$$x_0 = 0, \quad x_{\pm} := \pm \sqrt{\frac{m\Omega^2 + 2amg - k}{2a^2k}},$$

dove le ultime due esistono solo se  $k \leq m\Omega^2 + 2amg$ .

Per studiare la stabilità per  $H > 0$  (che significa che è sempre presente una forza non conservativa con componenti lagrangiane non nulle), consideriamo la derivata seconda di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  valutata nelle tre soluzioni trovate:

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dx^2} = 6a^2kx^2 + (k - 2mag - m\Omega^2).$$

Per quanto riguarda  $x_0 = 0$ , possiamo concludere che la configurazione di equilibrio è stabile se  $k > 2mag + m\Omega^2$ , cioè se non esistono le altre due configurazioni di equilibrio. Non possiamo dire nulla per  $k \leq 2mag + m\Omega^2$  data la presenza della forza non conservativa con componente lagrangiana non nulla. Per quanto riguarda le altre due soluzioni si ha facilmente che:

$$\frac{d^2\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{dx^2}|_{x_{\pm}} = -2(k - 2mag - m\Omega^2)$$

e quindi quando tali configurazioni di equilibrio esistono e non coincidono con  $x_0 = 0$  (cioè quando  $k < m\Omega^2 + 2amg$ ), esse sono stabili nel futuro (e anche nel passato se  $H = 0$ ). Non possiamo dire nulla con i teoremi che conosciamo se  $k = m\Omega^2 + 2amg$ .

(4). Per costruzione la trasformata di Legendre si scrive:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4a^2x^2)\dot{x},$$

che si inverte immediatamente in:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m(1 + 4a^2x^2)}.$$

Sostituendo nell'espressione (D.318) della funzione di Hamilton:

$$\mathcal{H}|_{\mathcal{J}_0} = \frac{p_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)} + \frac{k}{2}(x^2 + a^2x^4) - mgax^2 - \frac{m\Omega^2}{2}x^2. \quad (\text{D.320})$$

Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \right) = \frac{p_x}{m(1 + 4a^2x^2)}$$

e

$$\frac{dp_x}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) = \frac{8a^2xp_x^2}{2m(1 + 4a^2x^2)^2} - k(x + 4a^2x^3) + 2mgax + m\Omega^2x.$$

(4)' Nella situazione detta, ragionando in  $\mathcal{J}_0$  per la configurazione di equilibrio  $x_+$  in  $\mathcal{J}$  trovata sopra per  $k < m\Omega^2 + 2amg$ , deve essere (tenendo conto che in  $\mathcal{J}_0$  il punto  $P$  si vede animato della sola accelerazione centripeta):  $-m\Omega^2x_+ \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\phi} - mg \mathbf{e}_z - k(P - O)$  e dunque  $\boldsymbol{\phi} = -m\Omega^2x_+ \mathbf{e}_x + mg \mathbf{e}_z + k(x_+ \mathbf{e}_x - ax_+^2 \mathbf{e}_z)$  ed infine:

$$\boldsymbol{\phi} = (k - m\Omega^2)x_+ \mathbf{e}_x + (mg - kax_+^2) \mathbf{e}_z,$$

dove

$$x_+ := \sqrt{\frac{m\Omega^2 + 2amg - k}{4a^2k}}.$$

### ESERCIZIO 28

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$  destrorsi solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . I punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m > 0$  nota, sono vincolati a muoversi rispettivamente:  $P_1$  sull'asse verticale  $z$  e  $P_2$  sulla curva di equazioni

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = R\theta \quad \text{per } \theta \in \mathbb{R}$$

dove  $R > 0$  è noto. Entrambe le curve sono prive di attrito e, oltre alle reazioni vincolari, sui due punti agiscono le seguenti forze attive.

- (a) La forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g > 0$  assegnata.
- (b) La forza di una molla ideale (lunghezza a riposo e peso nulli) di costante  $k \geq 0$  nota con un estremo in  $P_1$  e l'altro nell'origine degli assi  $O$ .
- (c) La forza di una molla ideale di costante ancora  $k$ , con un estremo in  $P_1$  e l'altro in  $P_2$ .
- (d) La forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_1|_{\mathcal{I}}$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota, che agisce su  $P_1$ .

Usando come coordinate libere la quota  $z$  di  $P_1$  e l'angolo  $\theta$  per determinare  $P_2$ , si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema e le equazioni che determinano la reazione vincolare  $\phi_1$  su  $P_1$  in funzione delle coordinate libere e delle loro derivate prime temporali al più.

(2) Provare che, se  $k > 0$  e  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico. Calcolare la derivata temporale di tale funzione lungo un generico moto del sistema se  $\gamma > 0$ , verificando che cessa di essere un integrale primo.

(3) Per  $k = 0$  e  $\gamma = 0$ , passare alle nuove coordinate libere  $q^1 = z - R\theta$  e  $q^2 = z + R\theta$  e provare che esistono ulteriori integrali primi precisandone l'espressione esplicita in funzione delle coordinate libere iniziali. *Facoltativo*: esistono altri integrali primi nel caso  $k = 0$  e  $\gamma = 0$ ?

(4) Per  $k > 0$  e  $\gamma = 0$ , determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei valori dei parametri  $R > 0$ ,  $m > 0$ ,  $g > 0$ ,  $k > 0$ .

(5) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema.

**Soluzione.**

Omettiamo l'indice  $\mathcal{J}$  dato che tutte le quantità cinematiche sono riferite a tale sistema di riferimento inerziale.

(1) Per prima cosa calcoliamo la lagrangiana del sistema che tiene conto delle forze attive-conservative in gioco (non ci sono forze inerziali dato che il sistema di riferimento è inerziale). I vettori posizione delle due particelle sono:

$$P_1 - O = z \mathbf{e}_z, \quad P_2 - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_y + R\theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{D.321})$$

da cui le velocità

$$\mathbf{v}_1 = \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_2 = R\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z). \quad (\text{D.322})$$

Quadrando le velocità e tenendo conto del fatto che le masse dei due punti sono entrambe uguali a  $m$  otteniamo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2. \quad (\text{D.323})$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale e quella delle due molle:

$$\mathcal{U} = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (\|P_1 - O\|^2 + \|P_2 - P_1\|^2) = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (z^2 + (R\theta - z)^2 + R^2).$$

Omettendo una costante addittiva inessenziale

$$\mathcal{U}(\theta, z) = mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} z^2 + \frac{k}{2} (R\theta - z)^2. \quad (\text{D.324})$$

Abbiamo infine la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 - mg(z + R\theta) - \frac{k}{2} (R\theta - z)^2 - \frac{k}{2} z^2. \quad (\text{D.325})$$

La forza viscosa che agisce su  $P_1$  ha come unica componente lagrangiana, usando ancora (D.321) e (D.324):

$$Q_z = \frac{\partial P_1}{\partial z} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_1) = -\gamma \dot{z}. \quad (\text{D.326})$$

Il sistema delle due equazioni di Eulero-Lagrange viene allora scritto, già come sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{2} - \frac{k}{2m} \left( \theta - \frac{z}{R} \right), \quad (\text{D.327})$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} - g - \frac{2kz}{m} + \frac{kR}{m} \theta. \quad (\text{D.328})$$

Per ricavare la reazione vincolare su  $P_1$  usiamo la legge di Newton

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = \phi_1 - mg \mathbf{e}_z - k(P_1 - P_2) - k(P_1 - O) - \gamma \mathbf{v}_1$$

da cui, usando (D.321), (D.324) e (D.328)

$$\phi_1 =$$

$$\left[ -\gamma \frac{dz}{dt} - mg - 2kz + kR\theta \right] \mathbf{e}_z + k(z \mathbf{e}_z - R \cos \theta \mathbf{e}_x - R \sin \theta \mathbf{e}_y - R\theta \mathbf{e}_z) + kz \mathbf{e}_z + mg \mathbf{e}_z + \gamma \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z$$

che si semplifica in:

$$\phi_1 = -kR \cos \theta \mathbf{e}_x - kR \sin \theta \mathbf{e}_y .$$

Si osservi che tale reazione vincolare è normale all'asse  $z$  come doveva essere visto che abbiamo assunto i vincoli lisci per garantire l'idealità dei vincoli.

**(2)** Nel caso  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto da una lagrangiana, i vincoli sono indipendenti dal tempo e le coordinate libere sono solidali con il riferimento rispetto al quale si calcola la lagrangiana che è l'unico sistema di riferimento in gioco  $\mathcal{I}$ . Concludiamo, dal teorema di Jacobi, che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  è un integrale primo e coincide con l'energia meccanica totale del sistema nel riferimento  $\mathcal{I}$  data da  $\mathcal{T} + \mathcal{U}$  e quindi:

$$\mathcal{H}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 + mg(z + R\theta) + \frac{k}{2} (R\theta - z)^2 + \frac{k}{2} z^2 . \quad (\text{D.329})$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , come sappiamo dalla teoria generale, su ogni fissata soluzione delle equazioni di Eulero Lagrange, la derivata temporale totale di  $\mathcal{H}$  è pari a  $\sum_k \mathcal{Q}_k^{non\ cons.} \dot{q}^k$ . nel nostro caso troviamo dunque, essendo l'unica forza attiva non conservativa quella viscosa la cui unica componente lagrangiana è stata calcolata sopra:

$$\left. \frac{d\mathcal{H}}{dt} \right|_{sol.eq.E-L} = -\gamma \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 .$$

È quindi chiaro che se  $\gamma > 0$  l'energia meccanica totale cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Mettiamoci nel caso  $\gamma = 0$  per cui la lagrangiana determina completamente il moto del sistema. La definizione delle nuove coordinate lagrangiane  $q^1 = z - R\theta$  e  $q^2 = z + R\theta$  si inverte in  $z = \frac{1}{2}(q^1 + q^2)$  e  $\theta = \frac{1}{2R}(q^2 - q^1)$  da cui

$$\dot{z} = \frac{1}{2}(\dot{q}^1 + \dot{q}^2) , \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2R}(\dot{q}^2 - \dot{q}^1) . \quad (\text{D.330})$$

La lagrangiana prende forma, nelle nuove coordinate

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mR^2 \dot{\theta}^2 - mgq^2 - \frac{k}{2} (q^1)^2 - \frac{k}{4} (q^1 + q^2)^2 . \quad (\text{D.331})$$

dove  $\dot{z}$  e  $\dot{\theta}$  sono date da (D.330). È evidente che se  $k = 0$  la lagrangiana non dipende più dalla coordinata  $q^1$  che risulta essere ciclica e pertanto abbiamo un nuovo integrale primo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1} = m\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}^1} + 2mR\dot{\theta} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{q}^1} = m\dot{z} \frac{1}{2} - 2mR^2 \dot{\theta} \frac{1}{2R} = \frac{m}{2} \dot{z} - mR\dot{\theta} .$$

Osserviamo che nel caso in esame in cui  $k = 0$ , la lagrangiana del sistema si scrive come somma di due lagrangiane indipendenti

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \right) + \left( mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\theta \right). \quad (\text{D.332})$$

Possiamo studiare separatamente il punto  $P_1$  con lagrangiana  $\left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \right)$  e il punto  $P_2$ , con lagrangiana  $\left( mR^2 \dot{\theta}^2 - mgR\theta \right)$ . Dato che queste due lagrangiane non dipendono dal tempo, possiamo applicare il teorema di Jacobi separatamente a ciascuna delle due, ottenendo che si hanno due integrali primi in più:  $\left( \frac{m}{2} \dot{z}^2 + mgz \right)$  e  $\left( mR^2 \dot{\theta}^2 + mgR\theta \right)$ . Ovviamente l'energia meccanica totale è una funzione banale di questi due integrali primi: la loro somma. (In generale anche se non richiesto nella soluzione di questo esercizio, precisiamo che il sistema ammette  $2n - 1$  integrali primi funzionalmente indipendenti con  $n$  pari al numero di gradi di libertà, facendo riferimento al teorema 4.14 dove il campo vettoriale  $\mathbf{X}$  è ora quello tangente alle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange in sullo spazio degli atti di moto, notando che le equazioni nel caso in esame sono autonome. Quindi nel nostro caso ci sono 3 integrali primi funzionalmente indipendenti).

(4) Le configurazioni di equilibrio si ottengono subito (essendo  $\gamma = 0$ ), cercando gli zeri del gradiente dell'energia potenziale totale:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = mgR + kR^2\theta - Rkz, \quad 0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = mg + 2kz - kR\theta$$

che ha come unica soluzione

$$z_0 = -\frac{mg}{2}k, \quad \theta_0 = -\frac{3mg}{2Rk},$$

che determinano un'unica configurazione di equilibrio. La matrice hessiana dell'energia potenziale è costante e vale sempre:

$$H(\theta, z) = \begin{bmatrix} kR^2 & -kR \\ -kR & 2k \end{bmatrix}.$$

Questa matrice ha traccia e determinante positivi se  $R, m, g, k > 0$ , per cui entrambi gli autovalori sono positivi e la configurazione di equilibrio trovata è stabile nel passato e nel futuro.

(5) La trasformazione di Legendre produce

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}, \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

che si inverte in

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{R^2 m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

La funzione di Hamilton scritta in variabili di Hamilton si scrive allora:

$$\mathcal{H}(\theta, z, p_\theta, p_z) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mg(z + R\theta) + \frac{k}{2}(R\theta - z)^2 + \frac{k}{2}z^2.$$



Le equazioni di Hamilton risultano allora essere:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{R^2 m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$$

che corrispondono alla trasformazione di Legendre valutata sul moto, e:

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -mgR - kR(R\theta - z), \quad \frac{dp_z}{dt} = -mg - 2kz + kR\theta.$$

## ESERCIZIO 29

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$ , destrorsi di origine  $O$ , solidali con il riferimento inerziale  $\mathcal{I}$ . Un sistema di due punti materiali è costituito come segue. Il punto  $P_1$  di massa  $m > 0$  assegnata è vincolato a muoversi nello spazio rimanendo attaccato ad un'estremo di un'asta rigida ideale (massa nulla) di lunghezza  $\ell > 0$  nota, il cui secondo estremo è sempre l'origine  $O$  degli assi. Il secondo punto  $P_2$ , ancora di massa  $m$ , è vincolato a rimanere sull'asse  $z$  ed è connesso al punto  $P_1$  tramite una seconda asta rigida ideale (massa nulla) di lunghezza ancora  $\ell$ .

Sul sistema di punti, oltre alle reazioni vincolari agiscono le seguenti forze:

- (a) La forza di una molla ideale di costante  $k > 0$  nota, peso nullo e lunghezza nulla a riposo, attaccata con un estremo a  $P_2$  e l'altro all'origine degli assi  $O$ .
- (b) La forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{I}}$ , dove  $\gamma \geq 0$  è una costante nota, che agisce su  $P_2$ .
- (c) La forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  che agisce su entrambi i punti materiali.

Usando come coordinate libere: l'angolo  $\theta \in (0, \pi)$  che  $P_1 - O$  individua rispetto all'asse  $z$  e l'angolo  $\phi \in [0, 2\pi)$  che la proiezione di  $P_1 - O$  sul piano  $z = 0$  individua rispetto a  $\mathbf{e}_x$  (angolo orientato positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_z$ )<sup>3</sup>, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Scrivere la formula che determina la reazione vincolare totale  $\phi$  agente sul punto  $P_2$  in funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate prime temporali, ma non le derivate seconde. Ricavare il modulo della tensione dell'asta tra  $P_1$  e  $P_2$ , assumendo che l'asse  $z$  sia liscio.

(2) Provare che se  $\gamma = 0$  esistono due integrali primi di cui se ne spieghi anche il significato fisico. Discutere se, per  $\gamma > 0$ , tali funzioni cessano di essere integrali primi.

(3) Se  $\gamma = 0$  discutere, *al variare di*  $m, k, g, \ell > 0$ , se esistono soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange della forma  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  dove  $\theta_0 \neq 0, \pi$  e  $\dot{\phi}_0 \neq 0$  e  $\phi_0$  sono costanti. Se esistono tali soluzioni precisare i valori possibili di  $\dot{\phi}_0$ ,  $\phi_0$  e  $\theta_0$ .

(4) Per  $\gamma \geq 0$  determinare le configurazioni di equilibrio con angolo  $\theta$  differente da  $0, \pi$  in funzione dei valori di  $m, k, g, \ell > 0$  e discutere cosa si possa concludere sulla stabilità di tali configurazioni con la teoria nota.

(5) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. Verificare direttamente dalle equazioni di Hamilton che  $p_\phi$  è un'integrale primo.

---

<sup>3</sup>Gli angoli  $\theta, \phi$  sono quindi le due coordinate angolari sferiche del punto  $P_1$ , la coordinata radiale  $r$  è fissata al valore costante  $\ell$ .

**Soluzione.**

(1) Per computo diretto abbiamo che

$$P_1 = O + \ell \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y) + \ell \cos \theta \mathbf{e}_z$$

e

$$P_2 = O + 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_z .$$

Come conseguenza abbiamo che, omettendo la specificazione del riferimento  $\mathcal{J}$  d'ora in poi,

$$\mathbf{v}_{P_1} = \ell(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_x + \ell(\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_y - \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z$$

e

$$\mathbf{v}_{P_2} = -2\ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z . \quad (\text{D.333})$$

Quadrando le espressioni ottenute, troviamo l'espressione per l'energia cinetica nel riferimento  $\mathcal{J}$ . In particolare:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{P_1}^2 &= \ell^2 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi) \\ &+ \ell^2 (\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi) + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta . \end{aligned}$$

Cioè:

$$\mathbf{v}_{P_1}^2 = \ell^2 [\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)] .$$

Facendo uso dell'identità trigonometrica fondamentale  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  e poi  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  si ha subito che

$$\mathbf{v}_{P_1}^2 = \ell^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) , \quad \mathbf{v}_{P_2}^2 = 4\ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta ,$$

da cui

$$\mathcal{T} = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} (1 + 4 \sin^2 \theta) + \frac{m\ell^2 \dot{\phi}^2}{2} \sin^2 \theta . \quad (\text{D.334})$$

L'energia potenziale totale, somma di energia potenziale gravitazionale ( $mg\ell \sin \theta + 2mg\ell \sin \theta$ ) ed energia potenziale della molla ( $\frac{1}{2}k\ell^2 4 \sin^2 \theta$ ), vale

$$\mathcal{U} = 3mg\ell \cos \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta . \quad (\text{D.335})$$

Abbiamo pertanto una lagrangiana data da:

$$\mathcal{L} = \frac{m\ell^2 \dot{\theta}^2}{2} (1 + 4 \sin^2 \theta) + \frac{m\ell^2 \dot{\phi}^2}{2} \sin^2 \theta - 3mg\ell \cos \theta - 2k\ell^2 \cos^2 \theta . \quad (\text{D.336})$$

L'unica componente lagrangiana della forza viscosa è:

$$\mathcal{Q}_\theta = \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \cdot (-\gamma)(-2\ell \dot{\theta} \sin \theta) \mathbf{e}_z = -4\gamma \ell^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta .$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per scrivere le due equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Esse sono, dove è ora sottointeso che  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  e  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ :

$$m\ell^2 \frac{d}{dt} [\dot{\theta} (1 + 4 \sin^2 \theta)] = (4m\ell^2 \dot{\theta}^2 + m\ell^2 \dot{\phi}^2 + 4k\ell^2) \sin \theta \cos \theta + 3mg\ell \sin \theta - 4\gamma\ell^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta \quad (\text{D.337})$$

che si esplicita in

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{m(1 + 4 \sin^2 \theta)} \quad (\text{D.338})$$

insieme a

$$m\ell^2 \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0. \quad (\text{D.339})$$

che non scriviamo in forma esplicita dato che ci servirà in questa forma.

L'equazione di Newton per il punto  $P_2$  nel riferimento  $\mathcal{S}$  è, tenendo conto di tutte le forze agenti e dove  $\boldsymbol{\phi}$  è la reazione vincolare *totale somma di quella dovuta all'asse  $z$  e quella dovuta all'asta di lunghezza  $\ell$* :

$$m\mathbf{a}_{P_2} = \boldsymbol{\phi} - k(2\ell \cos \theta \mathbf{e}_z) - mg \mathbf{e}_z - \gamma(-2\ell\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z).$$

L'accelerazione si trova derivando nel tempo l'espressione per la velocità (D.333).

$$\mathbf{a}_{P_2} = -2\ell \left( \frac{d\dot{\theta}}{dt} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \mathbf{e}_z.$$

È chiaro allora che deve essere  $\boldsymbol{\phi} = \phi_z \mathbf{e}_z$ , dove:

$$\phi_z = -2\ell \left( m \frac{d\dot{\theta}}{dt} \sin \theta + m\dot{\theta}^2 \cos \theta \right) + k2\ell \cos \theta + mg - 2\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta,$$

cioè

$$\phi_z = mg - 2\ell \left( m \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \gamma\dot{\theta} \right) \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta.$$

Tenendo conto di (D.338) abbiamo finalmente l'espressione di  $\boldsymbol{\phi}$  in funzione al più delle derivate prime temporali delle coordinate libere:  $\boldsymbol{\phi} = \phi_z \mathbf{e}_z$  con

$$\phi_z = mg - 2 \left[ \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} + \gamma\ell\dot{\theta} \right] \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta.$$

L'asta che connette  $P_1$  e  $P_2$  è ideale e pertanto può solo esercitare forze parallelamente alla sua direzione. La componente  $z$  della reazione vincolare totale su  $P_2$  può solo essere dovuta all'asta dato che l'asse  $z$  è supposto liscio. Concludiamo che, se  $\mathbf{T}$  è la tensione dell'asta,  $|\phi_z| = \|\mathbf{T}\| |\cos \theta|$  e quindi

$$\|\mathbf{T}\| = \left| \frac{mg - 2 \left[ \frac{\ell(4k + m\dot{\phi}^2 - 4m\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + (3mg - 4\gamma\ell\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta}{1 + 4 \sin^2 \theta} + \gamma\ell\dot{\theta} \right] \sin \theta + 2\ell(k - m\dot{\theta}^2) \cos \theta}{\cos \theta} \right|.$$

(2) Per  $\gamma = 0$  la sola lagrangiana (D.336) è sufficiente a descrivere il sistema fisico. Dato che essa non dipende esplicitamente dal tempo, abbiamo l'integrale primo di Jacobi dato dalla funzione di Hamilton del sistema

$$\mathcal{H} = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} (1 + 4\sin^2\theta) + \frac{m\ell^2\dot{\phi}^2}{2} \sin^2\theta + 3mgl\cos\theta + 2k\ell^2\cos^2\theta. \quad (\text{D.340})$$

Questa è evidentemente l'energia meccanica totale del sistema fisico nel riferimento  $\mathcal{I}$ , dato che è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di tutte le forze attive conservative, come è anche confermato dalla seconda parte del teorema di Jacobi valendone qui le ipotesi. Per  $\gamma > 0$  sappiamo che, sulle soluzioni delle equazioni di E.-L.

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{\theta}\mathcal{Q}_\theta = -4\gamma\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

e quindi  $\mathcal{H}$  cessa di essere un integrale primo. Un secondo integrale primo per  $\gamma = 0$  lo abbiamo tenendo conto che  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente da  $\phi$  che è dunque coordinata ciclica, per cui il suo momento coniugato  $p_\phi := \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$  è un integrale primo. Dato che, evidentemente,  $\phi$  è una coordinata rotazionale attorno all'asse  $z$ , concludiamo che  $p_\phi$  rappresenta la componente  $z$  del momento angolare totale del sistema dei due punti materiali rispetto al polo  $O$  nel riferimento  $\mathcal{I}$ . La conservazione di  $p_\phi$  sui moti si vede anche direttamente dalla seconda equazione di Eulero Lagrange (D.339), dato che

$$p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = m\ell^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

e l'ultimo membro appare nella derivata temporale totale (sul moto) a primo membro di (D.339). Dato che l'equazione (D.339) è valida anche per  $\gamma > 0$ , concludiamo che  $p_\phi$  continua ad essere un integrale primo anche se  $\gamma > 0$ .

(3) Se esistono soluzioni della forma detta devono soddisfare (D.337) e (D.339). La seconda equazione è soddisfatta da tali moti, mentre la prima fornisce la condizione

$$0 = (m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) \sin\theta_0 \cos\theta_0 + 3mgl\sin\theta_0.$$

Dato che si richiede  $\theta_0 \neq 0, \pi$  vale anche  $\sin\theta_0 \neq 0$  e pertanto:

$$0 = (m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) \cos\theta_0 + 3mgl.$$

Dato che  $(m\ell^2\dot{\phi}_0^2 + 4k\ell^2) > 0$  e  $3mgl > 0$  deve necessariamente essere  $\cos\theta_0 < 0$ . Pertanto  $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ . Abbiamo in questo modo l'identità

$$\dot{\phi}_0^2 = -\frac{3g}{\ell\cos\theta_0} - \frac{4k}{m}$$

dove il primo membro è strettamente positivo e pertanto giungiamo alla condizione finale

$$-\frac{3g}{\ell\cos\theta_0} > \frac{4k}{m}$$

ossia

$$-\frac{3gm}{4k\ell} < \cos \theta_0 < 0 \quad (\text{D.341})$$

Per risolvere questa disequazione in  $\theta_0 \in (0, \pi)$  dobbiamo tener conto dei possibili valori di  $-\frac{3gm}{4k\ell}$  al variare dei parametri che in esso appaiono  $g, m, k, \ell > 0$ . Abbiamo due casi come soluzione di (D.341):

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \arccos\left(-\frac{3gm}{4k\ell}\right) \quad \text{per } \frac{3gm}{4k\ell} < 1$$

oppure

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \quad \text{per } \frac{3gm}{4k\ell} \geq 1.$$

In entrambi i casi

$$\dot{\phi}_0 = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}. \quad (\text{D.342})$$

Ora procediamo a ritroso. Se scegliamo  $\theta_0$  arbitrariamente nei due intervalli a seconda dei due casi per  $\frac{3gm}{4k\ell} < 1$  oppure  $\frac{3gm}{4k\ell} \geq 1$  rispettivamente, e definiamo  $\dot{\phi}_0$  come in (D.342), sicuramente abbiamo un moto (uno per ogni segno) che soddisfa tutte le nostre condizioni: basta imporre le condizioni iniziali  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\phi}(0) = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}$ . La curva  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}t + \phi_0$  soddisfa sia le equazioni del moto che le condizioni iniziali e pertanto è il moto del tipo richiesto (l'unico dato che siamo nelle ipotesi del teorema di unicità). Concludendo, si hanno moti del tipo detto per ogni  $\theta_0$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \arccos\left(-\frac{3gm}{4k\ell}\right) \quad \text{se } \frac{3gm}{4k\ell} < 1$$

oppure per ogni  $\theta_0$

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \quad \text{se } \frac{3gm}{4k\ell} \geq 1.$$

In entrambi i casi,  $\phi_0 \in [0, 2\pi)$  è arbitrario e

$$\dot{\phi}_0 := \pm \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}.$$

Non ci sono altri casi possibili.

(4) Dato che  $\mathcal{Q}_\theta = 0$  per  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ , le configurazioni di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  si ottengono annullando il gradiente dell'energia potenziale. Dato che  $\mathcal{U}$  non dipende da  $\phi$ , l'unica condizione da imporre è:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \Big|_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = 0$$

che significa

$$-3mg\ell \sin \vartheta_0 - 4k\ell^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 = 0.$$

Tenendo conto che stiamo cercando soluzioni con  $\vartheta_0 \neq 0, \pi$  per cui  $\sin \vartheta_0 \neq 0$ , l'equazione trovata è equivalente a

$$\cos \vartheta_0 = -\frac{3mg}{4k\ell}. \quad (\text{D.343})$$

Concludiamo che, se  $3mg \geq 4k\ell$  non ci sono configurazioni di equilibrio (diverse da  $0, \pi$ ). Se invece  $3mg < 4k\ell$  abbiamo le infinite configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta_0, \varphi_0) = \left( \arccos \left( -\frac{3mg}{4k\ell} \right), \varphi_0 \right), \quad \forall \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Studiare la stabilità tramite la matrice hessiana permette al più di dire (per  $\gamma = 0$  in modo che tutte le forze siano conservative) se una configurazione è instabile nel caso  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2}|_{(\vartheta_0, \varphi_0)} < 0$ , dato che tutti gli altri elementi di matrice sono nulli per cui non possiamo applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet. Il calcolo diretto produce

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2}|_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = -3mg\ell \cos \vartheta_0 - 4k\ell^2(2 \cos^2 \vartheta_0 - 1).$$

Usando (D.343) abbiamo che

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2}|_{(\vartheta_0, \varphi_0)} = 4k\ell^2 - \frac{9m^2 g^2}{4k} = 4k\ell^2 \left[ 1 - \left( \frac{3mg}{4k\ell} \right)^2 \right].$$

Dato che la configurazioni di equilibrio che ci interessano esistono per  $3mg < 4k\ell$ , concludiamo che la derivata seconda di sopra è positiva. Con i teoremi noti non possiamo quindi concludere nulla rispetto alla stabilità delle configurazioni trovate. (Tuttavia<sup>4</sup>, applicando direttamente la definizione di stabilità e tenendo conto del punto (3), possiamo concludere che tutte le configurazioni trovate devono essere instabili nel passato e nel futuro. A tal fine fissiamo una configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ . Sappiamo che le soluzioni al problema del moto con condizioni iniziale del tipo  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\phi(0) = \phi_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) := \sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}}$  hanno la forma  $\theta(t) = \theta_0$  e  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  se la condizione (D.341):

$$-\frac{3gm}{4k\ell} < \cos \theta_0 < 0$$

è verificata. Per (D.343) tale condizione si può riscrivere:

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \vartheta_0$$

Inoltre vale anche  $0 < \dot{\phi}_0 \rightarrow 0$  se  $\theta_0 \rightarrow \vartheta_0$  da sinistra, come si verifica immediatamente. Controlliamo se la definizione di configurazione di equilibrio stabile si possa applicare alla configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ . Consideriamo allora un intorno  $V$  dell'atto di moto  $(\vartheta_0, \varphi_0, 0, 0)$ . Indipendentemente da quanto  $V$  è piccolo, l'atto di moto  $(\theta_0, \phi_0, 0, \dot{\phi}_0)$  (dove come detto  $\dot{\phi}(0) :=$

---

<sup>4</sup>Questa discussione tecnica non era richiesta alla prova d'esame.

$\sqrt{-\frac{3g}{\ell \cos \theta_0} - \frac{4k}{m}} > 0$ ) cade dentro  $V$  pur di scegliere  $\theta_0$  abbastanza vicino a  $\vartheta_0$ . La soluzione delle equazioni di E.-L.  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\theta(t), \phi(t), \dot{\theta}(t), \dot{\phi}(t))$  con tali condizioni iniziali uscirà comunque da qualunque altro intorno fissato  $U$  di  $(\vartheta_0, \varphi_0, 0, 0)$ , sia per  $t$  positivi abbastanza grandi che per  $t$  negativi abbastanza grandi, a causa dell'evoluzione lineare dell'angolo  $\phi(t)$ :  $\phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0$  dove  $\dot{\phi}_0 > 0$ . Pertanto ogni configurazione di equilibrio  $(\vartheta_0, \varphi_0)$  è instabile nel passato e nel futuro. Si osservi che il risultato vale anche se  $\gamma > 0$  dato che il punto (3) vale anche in questa situazione.)

(5) La trasformazione di Legendre è

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)\dot{\theta}, \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\ell^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

che banalmente si inverte in

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\ell^2 \sin^2 \theta}.$$

La funzione di Hamilton (D.340) in variabili di Hamilton ha quindi la forma

$$\mathcal{H}(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)} + \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2 \sin^2 \theta} + 3mg\ell \cos \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{D.344})$$

Le quazioni di Hamilton sono dunque:

$$\frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) = \frac{4p_\theta^2 \sin \theta \cos \theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)^2} + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m\ell^2 \sin^3 \theta} + 3mg\ell \sin \theta + 4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \frac{dp_\phi}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right) = 0,$$

dove si vede che  $p_\phi$  è integrale primo, dato che la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente da  $\phi$ , e

$$\frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{m\ell^2(1 + 4\sin^2 \theta)}, \quad \frac{d\phi}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} \right) = \frac{p_\phi}{m\ell^2 \sin^2 \theta}$$



### ESERCIZIO 30

Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota è attaccato all'origine  $O$  degli assi  $x, y, z$  di un riferimento non inerziale  $\mathcal{S}$  tramite un'asta ideale (senza peso) di lunghezza  $\ell > 0$ . Al punto  $P$  è attaccato un secondo punto  $Q$ , della stessa massa  $m > 0$ , tramite una seconda asta ideale di lunghezza ancora  $\ell$ . I due punti  $P$  e  $Q$  sono vincolati a rimanere nel piano verticale  $x, z$ .

Il riferimento  $\mathcal{S}$  ruota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$  con velocità angolare  $\Omega \mathbf{e}_z$  dove la costante  $\Omega > 0$  è nota.

Oltre alle reazioni vincolari (supposte ideali), sui due punti agiscono le seguenti forze attive vere:

(a) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  nota,

(b) le forze di una molla ideale di costante elastica  $k > 0$  nota e lunghezza nulla a riposo.

La molla è attaccata a  $P$  ad un estremo e l'altro estremo si trova sull'asse  $z$  rimanendo sempre alla quota di  $P$ .

(c) la forza di una seconda molla ideale ancora di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza nulla a riposo. Tale molla è attaccata a  $Q$  con un estremo e l'altro estremo si trova sull'asse  $z$  rimanendo sempre alla quota di  $Q$ .

Usando come coordinate libere l'angolo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  che  $P - O$  individua rispetto all'asse  $x$  e l'angolo  $\phi \in [-\pi, \pi]$  che  $Q - P$  individua rispetto alla parallela all'asse  $x$  passante per  $P$  si risolvano i seguenti problemi.

(1) Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange del sistema di punti e mostrare che risulta  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  osservando che anche nel riferimento  $\mathcal{S}$  la lagrangiana determina completamente il moto del sistema perché la forza di Coriolis non ha componenti lagrangiane.

(2) Provare che esiste un integrale primo di cui se ne discuta il significato fisico. Assumendo  $g = 0$ , si passi in coordinate  $\Theta := (\theta + \phi)/2$  e  $\Phi := (\theta - \phi)/2$  e si provi che esiste un secondo integrale primo se  $k = m\Omega^2$  e se ne spieghi il significato fisico.

(3) Ponendo  $g = 0$  determinare le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{S}$  per  $k \neq m\Omega^2$  al variare dei parametri  $\ell > 0, \Omega > 0, k > 0, m > 0$  e si discuta la stabilità di una configurazione di equilibrio in cui i  $P$  e  $Q$  risultano essere allineati, al variare dei valori dei parametri  $\ell > 0, \Omega > 0, k > 0, m > 0$  (sempre assumendo  $k \neq m\Omega^2$ ).

(4) Scrivere la trasformazione di Legendre e la sua inversa (cioè esprimere  $(p_\theta, p_\phi)$  in funzione di  $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$  e poi invertire tale funzione ottenendo  $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$  in funzione di  $(p_\theta, p_\phi)$ ). Esprimere la funzione di Hamilton tramite le variabili hamiltoniane  $(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi)$ .

**Soluzione.**

(1) Orientiamo gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  positivamente rispetto a  $\mathbf{e}_y$ . Per prima cosa valutiamo  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$  dato che in esso appaiono solo forze vere. Per computo diretto

$$P - O = \ell(\cos \theta \mathbf{e}_x - \sin \theta \mathbf{e}_z), \quad Q - O = \ell(\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\sin \theta + \sin \phi) \mathbf{e}_z.$$

Quindi

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} = -\ell\dot{\theta}(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{S}} = -\ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_z.$$

Le velocità nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  si ottengono con la solita formula  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O)$  e l'analoga formula per  $\mathbf{v}_Q$ , ottenendo

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} = -\ell\dot{\theta}(\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) + \Omega \ell \cos \theta \mathbf{e}_y$$

e

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}_0} = -\ell(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi) \mathbf{e}_x - \ell(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) \mathbf{e}_z + \Omega \ell (\cos \theta + \cos \phi) \mathbf{e}_y.$$

Con qualche calcolo da queste espressioni troviamo subito che:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}_0} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2].$$

L'energia potenziale delle forze attive (tutte conservative) è la somma dell'energia potenziale delle due molle e di quella gravitazionale e pertanto:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2 \sin \theta + \sin \phi].$$

La lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  ha pertanto la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = & m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] \\ & - \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] + mg\ell[2 \sin \theta + \sin \phi]. \end{aligned} \quad (\text{D.345})$$

Le quazioni di Eulero-Lagrange prendono la forma:

$$\begin{aligned} 2m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + m\ell^2\frac{d^2\phi}{dt^2}\cos(\theta - \phi) + m\ell^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\sin(\theta - \phi) + \ell^2(m\Omega^2 - k)[\sin 2\theta + \sin \theta \cos \phi] - 2mg\ell \cos \theta &= 0, \\ m\ell^2\frac{d^2\phi}{dt^2} + m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos(\theta - \phi) - m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin(\theta - \phi) + \frac{\ell^2}{2}(m\Omega^2 - k)[\sin 2\phi + 2 \cos \theta \sin \phi] - mg\ell \cos \phi &= 0. \end{aligned}$$

Passiamo a provare che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ . Nel riferimento  $\mathcal{S}$  l'energia cinetica è semplicemente (basta porre  $\Omega = 0$  nell'espressione per l'energia cinetica calcolata in  $\mathcal{S}_0$ )

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi),$$

inoltre, oltre alle forze attive vere e conservative che appaiono anche in  $\mathcal{S}_0$  esistono le forze inerziali centrifuga e di Coriolis. Queste ultime, applicate in  $P$  e  $Q$  sono dirette lungo  $\mathbf{e}_y$  dato che deve essere perpendicolare sia alla velocità dei punti in  $\mathcal{S}$  (che giace nel piano  $x, z$ ) che al vettore  $\Omega \mathbf{e}_z$ . Dato che le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis si ottengono dalla moltiplicazione scalare di queste forze per  $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \phi}$  il risultato è sempre nullo dato che questi vettori giacciono nel piano  $x, z$ . Come conseguenza abbiamo in particolare che anche nel riferimento non inerziale la dinamica è completamente descritta da una lagrangiana senza dover aggiungere componenti lagrangiane di forze non conservative ai secondi membri delle equazioni di Eulero-Lagrange. La forza centrifuga è conservativa ed ha un'energia potenziale pari a quella di una molla con costante elastica negativa  $-m\Omega^2$  attaccata all'asse di rotazione, alla quota dei punti che subiscono tale forza:

$$\mathcal{U}^{(cent)}|_{\mathcal{S}} = -\frac{m\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] .$$

Concludiamo che anche nel riferimento  $\mathcal{S}$  il sistema è completamente descritto da una lagrangiana, che avrà la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{m\ell^2\Omega^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] \\ - \frac{k\ell^2}{2}[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] + mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi] . \end{aligned} \quad (\text{D.346})$$

Per confronto con (D.345) abbiamo subito che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ .

(2) Consideriamo la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  data in (D.346), dove:

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) ,$$

ed energia potenziale totale in  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi] .$$

È chiaro che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  non dipende esplicitamente dal tempo e quindi la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  associata è un integrale primo per la prima parte del teorema di Jacobi. D'altra parte, nel riferimento  $\mathcal{S}$ , i vincoli non dipendono dal tempo e le coordinate libere sono solidali con tale riferimento. La seconda parte del teorema di Jacobi implica allora che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{S}}$  energia meccanica calcolata nel riferimento  $\mathcal{S}$ : la somma di energia cinetica e dell'energia potenziale di tutte le forze attive conservative che agiscono sul sistema in  $\mathcal{S}$ . Il calcolo diretto con la definizione di funzione di Hamilton o la semplice somma di energia cinetica ed energia potenziale in  $\mathcal{S}$  produce:

$$\mathcal{H} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi) + \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2\sin \theta + \sin \phi] . \quad (\text{D.347})$$

Nel caso in cui  $k = m\Omega^2$  e  $g = 0$ , la lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  si semplifica in

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)$$

Se passiamo in coordinate  $\Theta = (\theta + \phi)/2$  e  $\Phi = (\theta - \phi)/2$ , senza eseguire il calcolo, è evidente che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  non risulterà funzione di  $\Theta$  e di conseguenza il momento coniugato associato sarà un integrale primo  $I = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}}}{\partial \Theta}$ . Dato che  $\theta = \Theta + \Phi$  e  $\phi = \Theta - \Phi$ , alterando  $\Theta \rightarrow \Theta + \Delta\Theta$  i due punti ruotano rigidamente di  $\Delta\Theta$  attorno all'asse  $y$  in  $\mathcal{J}$  perché l'angolo tra  $Q-P$  e  $P-O$  vale  $\phi - \theta$  (o  $\pi + (\theta - \phi)$  a seconda di quale si considera) ed è pertanto costante se alteriamo  $\theta$  e  $\phi$  della stessa costante additiva  $\Delta\Theta$ . La coordinata  $\Theta$  è quindi una coordinata rotazionale attorno all'asse  $y$ . Per noti teoremi l'integrale primo  $I$  associato a  $\Theta$  è dunque (a meno del segno) la componente lungo  $\mathbf{e}_y$  del momento angolare totale del sistema di punti valutato in  $\mathcal{J}$  rispetto al polo  $O$ .

(3) Dato che il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  energia potenziale e si lavora in coordinate libere solidali con  $\mathcal{J}$  stesso, le configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{J}$  si ottengono come punti singolari della funzione energia potenziale (dove abbiamo posto  $g = 0$  come richiesto):

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\theta, \phi) = \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2\theta + (\cos\theta + \cos\phi)^2].$$

Annullando il gradiente di tale funzione tenendo conto che  $\frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2) \neq 0$  per ipotesi, abbiamo le equazioni:

$$(2\cos\theta + \cos\phi)\sin\theta = 0, \quad (\cos\theta + \cos\phi)\sin\phi = 0.$$

Le soluzioni si ottengono annullando i fattori delle due equazioni facendo tutti i casi possibili. Annullando simultaneamente i fattori  $\sin\theta$  e  $\sin\phi$  abbiamo la prima classe di 4 configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$$

Annullando  $\sin\theta$  nella prima equazione e  $\cos\theta + \cos\phi$  nella seconda equazione, abbiamo la seconda classe di 2 configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, \pi), (\pi, 0)$$

Annullando  $\sin\phi$  nella seconda equazione e  $2\cos\theta + \cos\phi$  nella prima equazione, abbiamo la terza classe di 4 soluzioni

$$(\theta, \phi) = (\pm\pi/3, \pi), (\pm2\pi/3, 0)$$

Annullando  $2\cos\theta + \cos\phi$  nella prima equazione e  $\cos\theta + \cos\phi$  nella seconda troviamo la quarta classe di 4 soluzioni:

$$(\theta, \phi) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2).$$

Per studiare la stabilità possiamo studiare gli autovalori della matrice Hessiana. Consideriamo la configurazione  $(\theta, \phi) = (0, 0)$  in cui i punti  $P$  e  $Q$  sono allineati (sull'asse  $x$ ). In tale configurazione (scriviamo  $\mathcal{U}$  al posto di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  per semplicità):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta \partial \phi} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi \partial \theta} \Big|_{(0,0)} = \ell^2 (k - m\Omega^2) \sin \theta \sin \phi \Big|_{(0,0)} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} \Big|_{(0,0)} = -\ell^2 (k - m\Omega^2) (2 \cos 2\theta + \cos \phi \cos \theta) \Big|_{(0,0)} = -3\ell^2 (k - m\Omega^2)$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \phi^2} \Big|_{(0,0)} = -\ell^2 (k - m\Omega^2) (\cos \theta \cos \phi + \cos 2\phi) \Big|_{(0,0)} = -2\ell^2 (k - m\Omega^2).$$

Pertanto la matrice Hessiana risulta essere diagonale e le ultime due derivate scritte sono i suoi autovalori. La conclusione è che la configurazione  $(\theta, \phi) = (0, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro se  $m\Omega^2 > k$  per il teorema di Lagrange-Dirichelet ed è instabile nel passato e nel futuro se  $m\Omega^2 < k$  per un teorema noto (essendo il sistema completamente determinato da una lagrangiana del tipo  $\mathcal{T} - \mathcal{U}$  senza presenza di componenti lagrangiane di forze non conservative a secondo membro delle equazioni di Eulero-Lagrange). Il caso  $m\Omega^2 = k$  è già stato escluso per ipotesi.

(4) La lagrangiana (D.346) ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(\mathbf{q})$$

dove  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{\theta}, \dot{\phi})^t$  e la matrice simmetrica  $M(\mathbf{q})$  è definita da

$$M(\mathbf{q}) := m\ell^2 \begin{bmatrix} 2 & \cos(\theta - \phi) \\ \cos(\theta - \phi) & 1 \end{bmatrix}.$$

La trasformazione di Legendre si può scrivere come, se  $\mathbf{p} = (p_\theta, p_\phi)^t$ ,

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

e quindi la sua inversa è

$$\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}, \tag{D.348}$$

dove, per esempio applicando la regola di Cramer

$$M(\mathbf{q})^{-1} := \frac{1}{m\ell^2(2 - \cos^2(\theta - \phi))} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\theta - \phi) \\ -\cos(\theta - \phi) & 2 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Hamilton come sappiamo dal punto (2) è

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}(\mathbf{q}) \tag{D.349}$$

Dato che vale la (D.348), sostituendo (D.348) in (D.349) abbiamo che in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}(M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p})^t M(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) .$$

Cioè, dato che  $M(\mathbf{q})^{-1}$  è simmetrica,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) .$$

Esplicitando l'ovvio calcolo,

$$\mathcal{H}(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2 + 2p_\phi^2 - 2p_\theta p_\phi \cos(\theta - \phi)}{2m\ell^2(2 - \cos^2(\theta - \phi))} + \frac{\ell^2}{2}(k - m\Omega^2)[\cos^2 \theta + (\cos \theta + \cos \phi)^2] - mg\ell[2 \sin \theta + \sin \phi] .$$

### ESERCIZIO 31

Si consideri la terna di assi ortonormali destrorsi  $x, y, z$  nel sistema di riferimento *non inerziale*  $\mathcal{S}$ . Un punto materiale  $P_1$  di massa  $m > 0$  nota può muoversi lungo la curva di equazione  $y = 0, z = ax^3/3$ , dove  $a > 0$  è un parametro noto. Un secondo punto materiale  $P_2$  ancora della stessa massa  $m$  si può muovere lungo l'asse  $z$ , i vincoli sono supposti ideali. Il sistema  $\mathcal{S}$  ruota attorno all'asse  $z$  con velocità angolare uniforme  $\Omega \mathbf{e}_z$  dove  $\Omega > 0$  è nota, rispetto al *riferimento inerziale*  $\mathcal{S}_0$ . Sui due punti agiscono le seguenti forze vere oltre alle reazioni vincolari:

(i) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e costante elastica  $k > 0$  nota che unisce i due punti;

(ii) la forza di gravità  $-mg \mathbf{e}_z$ , dove  $g > 0$  è nota.

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_{P_2}|_{\mathcal{S}}$  che agisce solo su  $P_2$ , dove  $\gamma \geq 0$  è nota.

Usando come coordinate libere la quota  $z$  di  $P_2$  e l'ascissa  $x$  di  $P_1$ , si risolvano i seguenti problemi.

(1) Provare che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$  e scrivere le equazioni di E-L del sistema verificando che risultino le stesse nei due sistemi di riferimento. Si scriva infine la formula che determina la reazione vincolare su  $P_2$  in funzione di  $x$  e  $z$ .

(2) Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico. Mostrare che se  $\gamma > 0$  la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

(3) Determinare le configurazioni di equilibrio rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$  in funzione dei parametri  $m, a, k, \Omega, g > 0$  e  $\gamma \geq 0$ . Si dimostri che esiste sempre una configurazione di equilibrio stabile per una scelta opportuna dei valori dei parametri suddetti ed una instabile per altri valori. Si calcolino le reazioni vincolari sui due punti materiali quando i due punti sono fermi in  $\mathcal{S}$  in una configurazione di equilibrio a scelta.

(4) Per  $\gamma = 0$  si risponda ai seguenti quesiti.

(i) Si supponga di tenere fissi tutti i parametri  $a > 0, m > 0, g > 0, k > 0$  e di fare crescere  $\Omega > 0$  con valori sempre più grandi. Cosa possiamo concludere riguardo alla stabilità delle configurazioni di equilibrio quando  $\Omega$  è abbastanza grande? (Es. sono tutte stabili, tutte instabili, alcune stabili ed altre instabili.)

(ii) Si supponga di tenere fissi tutti i parametri  $a > 0, m > 0, g > 0, \Omega > 0$  e di fare crescere  $k > 0$  con valori sempre più grandi. Cosa possiamo concludere riguardo alla stabilità delle configurazioni di equilibrio quando  $k$  è abbastanza grande? (Es. sono tutte stabili, tutte instabili, alcune stabili ed altre instabili.)

(5) Per  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton scrivendo la trasformazione di Legendre, la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton del sistema.

**Soluzione.**

(1) Nel riferimento  $\mathcal{S}$  la velocità di  $P_1$  è

$$\mathbf{v}_1|_{\mathcal{S}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + ax^2 \dot{x} \mathbf{e}_z$$

per cui, applicando le formue di cambiamento di riferimento,

$$\mathbf{v}_1|_{\mathcal{S}_0} = \dot{x} \mathbf{e}_x + ax^2 \dot{x} \mathbf{e}_z + \Omega x \mathbf{e}_y .$$

L'energia cinetica in  $\mathcal{S}_0$  è quindi, tenendo anche conto dell'energia cinetica di  $P_2$ ,

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{m}{2} [\dot{z}^2 + \dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \Omega^2 x^2] .$$

L'energia potenziale è data dalla somma dell'energia gravitazionale e di quella della molla:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}_0} = mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] .$$

Concludiamo che la lagrangiana nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  ha la forma

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{m}{2} [\dot{z}^2 + \dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \Omega^2 x^2] - mg[z + ax^3/3] - \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] .$$

Nel riferimento  $\mathcal{S}$ , oltre alle forze attive già considerate, appaiono anche la forza di Coriolis e la forza centrifuga. La prima non è conservativa ed ha componenti lagrangiane nulle, come si verifica subito, dato che è sempre perpendicolare a  $\mathbf{v}_i|_{\mathcal{S}}$  e quindi è normale alle due guide. La forza centrifuga è conservativa ed ha un'energia potenziale pari a quella di una molla repulsiva di costante  $-\Omega^2 m$  attaccata all'asse  $z$  sempre alla stessa quota del punto che la subisce. Pertanto  $P_2$  non risente di tale forza mentre per  $P_1$  bisogna tenere conto dell'energia potenziale

$$-m\Omega^2 x^2/2 .$$

In altre parole, dato che,

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] ,$$

abbiamo, come richiesto:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2(1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] - mg[z + ax^3/3] - \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] + \frac{m}{2} \Omega^2 x^2 = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} .$$

Tenedo conto che la forza viscosa ha solo componente lagrangiana

$$\mathcal{Q}_z = -\gamma \mathbf{v}_2|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial z} = -\gamma \dot{z} ,$$

Le due equazioni di E-L non banali sono allora:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}}{\partial z} = -\gamma \dot{z}$$



e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0}}{\partial x} = 0.$$

Concretamente:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + mg + k(z - ax^3/3) = 0$$

e

$$m(1 + a^2 x^4) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2max^3 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + mga x^2 + (k - m\Omega^2)x - k(z - ax^3/3) = 0.$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}$  l'equazione newtoniana del moto per  $P_2$  è

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - k((z - ax^3/3) \mathbf{e}_z - x \mathbf{e}_x) - m\Omega \mathbf{e}_z \wedge (\Omega \mathbf{e}_z \wedge z \mathbf{e}_z) - 2m\Omega \mathbf{e}_z \wedge \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z + \phi$$

che si semplifica in

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{e}_z = -mg \mathbf{e}_z - k((z - ax^3/3) \mathbf{e}_z - x \mathbf{e}_x) + \phi_x \mathbf{e}_x + \phi_y \mathbf{e}_y - \gamma \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z + \phi_z \mathbf{e}_z.$$

Decomponendo sui tre assi ed usando l'equazione di Eulero-Lagrange per la variabile  $z$  concludiamo che:

$$\phi_x = -kx, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = 0.$$

**(2)** Osserviamo che  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$  non dipende esplicitamente dal tempo. Se le componenti lagrangiane delle forze non conservative sono nulle, possiamo applicare il teorema di Jacobi e concludere che esiste un integrale primo dato dalla funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$ . Nel riferimento  $\mathcal{J}$  i vincoli sono indipendenti dal tempo e le coordinate sono solidali con i vincoli. Pertanto possiamo anche applicare la seconda parte del teorema di Jacobi concludendo che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{J}}$ , l'energia meccanica totale in  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{H} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 (1 + ax^2)^2 + \dot{z}^2] + mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2. \quad (\text{D.350})$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}_0$  i vincoli dipendono dal tempo per cui non si può arrivare alla stessa conclusione. Come ben noto, in caso di presenza di forze non conservative, nelle ipotesi fatte

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{soluzioni E-L}} \mathcal{E}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{Q}_z \dot{z} = -\gamma \dot{z}^2 \leq 0.$$

Quindi, se  $\gamma > 0$  la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

**(3)** Le configurazioni di equilibrio si ottengono come, come gli zeri del gradiente della funzione energia potenziale  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(x, z)$  (dato che le forze non conservative si annullano per  $\dot{x} = \dot{z} = 0$ ) con

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(x, z) = mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2}(z - ax^3/3)^2 + \frac{1}{2}(k - m\Omega^2)x^2$$

Vale

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial z} = mg + k(z - ax^3/3)$$

da cui in particolare, annullando il secondo membro,  $(z - ax^3/3) = -\frac{mg}{k}$  e

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial x} = mgax^2 + (k - m\Omega^2)x - ka(z - ax^3/3)x^2.$$

Annullando i secondi membri e ricordando che  $(z - ax^3/3) = -\frac{mg}{k}$  nella seconda equazione, troviamo il sistema di equazioni in  $(x, z)$ :

$$z - ax^3/3 + \frac{mg}{k} = 0, \quad mgax^2 + (k - m\Omega^2)x + mgax^2 = 0$$

le cui due soluzioni corrispondono ad altrettante configurazioni di equilibrio:

$$(x_1, z_1) = (0, -mg/k), \quad (x_2, z_2) = \left( \frac{m\Omega^2 - k}{2mag}, \frac{(m\Omega^2 - k)^3}{24m^3a^2g^3} - mg/k \right).$$

Per studiare la stabilità consideriamo la matrice Hessiana valutata nelle due soluzioni. Se entrambi gli autovalori sono positivi si ha stabilità nel futuro e nel passato, se almeno un autovalore è negativo abbiamo instabilità nel futuro e nel passato e se qualche autovalore è nullo non possiamo concludere nulla con i metodi elementari. Gli elementi della matrice Hessiana sono

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial z^2} = k, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial x \partial z} = -kax^2$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial x^2} = (k - m\Omega^2) + 2magx - 2kax(z - ax^3/3) + ka^2x^4.$$

Valutati sulla configurazione  $(x_1, z_1)$ , si trova:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial z^2} = k, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial x \partial z} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial x^2} = (k - m\Omega^2).$$

Quindi entrambi gli autovalori sono positivi se  $k > m\Omega^2$  e dunque, per  $\gamma = 0$ , tale configurazione è stabile nel passato e nel futuro nello stesso modo tale configurazione, sempre per  $\gamma = 0$ , è invece instabile se  $k < m\Omega^2$ . In questa configurazione, assunta come di quiete nel riferimento  $\mathcal{J}$ , le uniche forze agenti sono nella direzione verticale e pertanto si trovano immediatamente le reazioni vincolari sui due punti imponendo che la somma delle forze lungo  $z$  su ciascuno di essi sia nulla.

$$\phi_2 = (-mg + kmg/k) \mathbf{e}_z = 0 \mathbf{e}_z, \quad \phi_1 = -(-mg - kmg/k) \mathbf{e}_z = 2mg \mathbf{e}_z.$$

(4) Il calcolo diretto della traccia e del determinante della matrice Hessiana calcolata in  $(x_2, z_2)$  fornisce:

$$\text{tr}(H(x_2, z_2)) = m\Omega^2 + \frac{k}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4$$

e

$$\det(H(x_2, z_2)) = k(m\Omega^2 - k) + \frac{k^2}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4 - \frac{k^2}{16m^4a^2g^4}(m\Omega^2 - k)^4 = k(m\Omega^2 - k) .$$

È allora evidente che se teniamo fissi tutti i parametri (a valori strettamente positivi) e facciamo crescere  $k \rightarrow +\infty$  allora  $\text{tr}(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$  e  $\det(H(x_2, z_2)) \rightarrow -\infty$ . Tenuto conto di quanto ottenuto in (3), si conclude che per  $k$  abbastanza grande un autivalore di  $H(x_2, z_2)$  è positivo e l'altro è negativo e pertanto la configurazione di equilibrio  $(x_2, z_2)$  è, differentemente da  $(x_1, z_1)$ , instabile nel futuro e nel passato. È anche chiaro che se teniamo fissi tutti i parametri (a valori strettamente positivi) e facciamo crescere  $\Omega \rightarrow +\infty$  allora abbiamo ancora  $\text{tr}(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$  e  $\det(H(x_2, z_2)) \rightarrow +\infty$ . Tenuto conto di quanto ottenuto in (3), si conclude che per  $\Omega$  abbastanza grande entrambi gli autovalori di  $H(x_2, z_2)$  sono positivi e pertanto la configurazione di equilibrio  $(x_2, z_2)$  è stabile nel futuro e nel passato. Viceversa la configurazione  $(x_1, z_1)$  risulta essere instabile come si evince dal calcolo svolto nel punto (3).

(5) La trasformazione di Legendre è

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(1 + ax^2)^2 \dot{x} , \quad p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

da cui, usando l'espressione già trovata per la funzione di hamilton (D.350):

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m(1 + ax^2)^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mg[z + ax^3/3] + \frac{k}{2} [x^2 + (z - ax^3/3)^2] - \frac{m}{2} \Omega^2 x^2 .$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi, le due banali che hanno solo informazioni cinematiche,

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \right) \frac{p_x}{m(1 + ax^2)^2} , \quad \frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \right) \frac{p_z}{m}$$

e quelle che includono la dinamica:

$$\frac{dp_x}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \right) \frac{axp_x^2}{m(1 + ax^2)^3} - mgax^2 - k - (m\Omega^2)x + k(z - ax^3/3)ax^2$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \right) - mgz - k(z - ax^3/3) .$$

### ESERCIZIO 32

Si consideri una terna ortonormale destrorsa  $x, y, z$  di origine  $O$  in quiete nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m > 0$  nota si può muovere lungo l'asse  $x$  privo di attrito. Un secondo punto materiale  $Q$  è connesso a  $P$  tramite un'asta rigida senza peso di lunghezza  $\ell > 0$  assegnata e può muoversi rimanendo nel piano  $xz$ . Tutti i vincoli sono supposti ideali. Il riferimento  $\mathcal{S}$  ruota con velocità angolare costante  $\Omega > 0$  nota attorno all'asse  $z$  rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{S}_0$ . Sui due punti agiscono le seguenti forze vere attive:

- (a) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  dove  $g > 0$  è nota;
- (b) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e con costante elastica  $k > 0$  nota che connette  $Q$  e  $O$ ;
- (c) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e con costante elastica ancora  $k > 0$  che connette  $P$  e  $O$ ;
- (d) una forza viscosa  $\mathbf{f} = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  agente su  $P$  e dove  $\gamma \geq 0$ .

Usando le due coordinate libere:  $s \in \mathbb{R}$  data dall'ascissa di  $P$  lungo  $x$  e l'angolo  $\theta \in (-\pi, \pi]$  che il segmento  $Q - P$  individua rispetto ad un asse verticale per  $P$  parallelo all'asse  $z$  e diretto verso il basso, si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si scrivano le lagrangiane del sistema di punti materiali sia nel riferimento  $\mathcal{S}$  che nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  e si verifichi che sono uguali. Si scrivano quindi le equazioni di Eulero-Lagrange dedotte da tali lagrangiane.

(2) Per  $\gamma = 0$  si determini un integrale primo del sistema e se ne spieghi il significato fisico. Si calcoli la derivata temporale di tale funzione valutata su un moto del sistema quando  $\gamma > 0$  mostrando che risulta essere non positiva.

(3) *Assumendo*  $k = m\Omega^2$ , si discuta al variare dei valori dei parametri ( $m, k, \ell, g > 0, \gamma \geq 0$ ) se esistono soluzioni del problema del moto della forma  $s(t) = at + b$  e  $\theta(t) = c$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e opportuni valori delle costanti  $a, b, c \in \mathbb{R}$  da determinarsi.

(4) *Assumendo sia*  $\gamma = 0$  *che*  $k = m\Omega^2$ , si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema di punti rispetto al riferimento  $\mathcal{S}$  al variare dei valori dei parametri  $m, \ell, k, g > 0$  e se ne studi la stabilità (si tenga conto del punto 3).

(5) Per  $\gamma = 0$  si passi in formulazione di Hamilton con i seguenti passi:

- (i) scrivere la trasformazione di Legendre che esprime  $(p_s, p_\theta)$  in funzione di  $(\dot{s}, \dot{\theta})$  (a  $s$  e  $\theta$  fissati);
- (ii) invertire tale trasformazione ottenendo  $(\dot{s}, \dot{\theta})$  in funzione di  $(p_s, p_\theta)$  (a  $s$  e  $\theta$  fissati);
- (iii) scrivere la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  espressa nelle variabili hamiltoniane  $s, \theta, p_s, p_\theta$ .

**Soluzione.** (1) Valgono le identità

$$P - O = s \mathbf{e}_x, \quad Q - O = (s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_x - \ell \cos \theta \mathbf{e}_z$$

che producono immediatamente le velocità nel riferimento  $\mathcal{J}$  dei due punti:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{s} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}} = (\dot{s} + \dot{\theta} \ell \cos \theta) \mathbf{e}_x + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (\text{D.351})$$

da cui si trova subito l'energia cinetica

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta. \quad (\text{D.352})$$

Nel riferimento  $\mathcal{J}$  le forze attive sono tutte conservative eccetto la forza viscosa e quella di Coriolis. L'energia potenziale delle forze conservative è pari alla somma dell'energia potenziale gravitazionale, quella delle due molle e quella centrifuga rappresentate dai tre addendi del secondo membro della formula seguente:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = -mg\ell \cos \theta + \frac{k}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta) - \frac{m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2)$$

cioè

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = -mg\ell \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{D.353})$$

Concludiamo che la lagrangiana in  $\mathcal{J}$  è data da

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta + mg\ell \cos \theta - \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) - \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta \quad (\text{D.354})$$

Passiamo alla lagrangiana valutata nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$ . Vale come ben noto:

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O), \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (Q - O)$$

da cui

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} = \dot{s} \mathbf{e}_x + \Omega s \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{v}_Q|_{\mathcal{J}_0} = (\dot{s} + \dot{\theta} \ell \cos \theta) \mathbf{e}_x + \Omega(s + \ell \sin \theta) \mathbf{e}_y + \ell \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_z. \quad (\text{D.355})$$

quadrando ciascuno dei due vettori, moltiplicando il risultato per  $m/2$  si ha l'espressione dell'energia cinetica in  $\mathcal{J}_0$  che, con qualche calcolo, risulta essere

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}_0} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell\dot{s}\dot{\theta} \cos \theta + \frac{m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2). \quad (\text{D.356})$$

Nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  le forze attive sono tutte conservative non appare la forza centrifuga, pertanto l'energia potenziale è la stessa che in  $\mathcal{J}$  togliendo la parte dovuta alla forza centrifuga:

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}_0} = -mg\ell \cos \theta + \frac{k}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2 + \ell^2 \cos^2 \theta). \quad (\text{D.357})$$

È evidente, confrontando le espressioni trovate per le energie cinetiche ed energie potenziali, che le lagrangiane nei due sistemi di riferimento sono identiche:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}_0} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{J}_0} .$$

Passando a discutere le equazioni di Eulero-Lagrange, se deve osservare che nel riferimento  $\mathcal{J}$  appare una forza non conservativa che non appare in  $\mathcal{J}_0$ : la forza di Coriolis, di cui bisogna tenere conto nelle equazioni di E.-L. tramite componenti lagrangiane. Tuttavia le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle dato che essa è perpendicolare alle velocità in  $\mathcal{J}$  per sua stessa definizione, che significa in particolare perpendicolare al piano  $xz$ , mentre  $\frac{\partial P}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial s}$  e  $\frac{\partial Q}{\partial \theta}$  sono paralleli a tale piano dato che sono derivate di curve che giacciono in tale piano. Le componenti lagrangiane della forza viscosa (che appare sia in  $\mathcal{J}$  che in  $\mathcal{J}_0$  essendo una forza vera) applicata su  $P$  sono invece, usando (D.351) in particolare,

$$\mathcal{Q}_s = \frac{\partial P}{\partial s} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}) = -\gamma \dot{s} , \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot (-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}) = 0 . \quad (\text{D.358})$$

Possiamo a questo punto scrivere le equazioni di Eulero Lagrange indifferentemente in  $\mathcal{J}$  o in  $\mathcal{J}_0$ , essendo sicuri che risulteranno le stesse dato che le lagrangiane sono identiche e le componenti lagrangiane non nulle delle forze non conservative anche. Usando la lagrangiana (D.354) e l'espressione (D.358) per le componenti lagrangiane della forza viscosa troviamo, per la coppia di equazioni banali:  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  e  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  e per le rimanenti due:

$$2m \frac{d^2 s}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{\theta} \cos \theta = (m\Omega^2 - k)(2s + \ell \sin \theta) - \gamma \dot{s} \quad (\text{D.359})$$

e

$$m\ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m\ell \frac{d}{dt} \dot{s} \cos \theta = -m\ell \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta - mg\ell \sin \theta + \ell(m\Omega^2 - k)((s + \ell \sin \theta) \cos \theta) + k\ell^2 \sin \theta \cos \theta . \quad (\text{D.360})$$

**(2)** Nel riferimento  $\mathcal{J}$  la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo per cui esiste una funzione dell'atto di moto, l'integrale primo di Jacobi  $\mathcal{H}$ , che si conserva sui moti del sistema quando tutte le forze attive sono conservative, cioè  $\gamma = 0$ . Possiamo trascurare la forza di Coriolis dato che non prende parte alle equazioni di E-L avendo componenti lagrangiane nulle come visto sopra. In tale riferimento i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo e le coordinate libere sono solidali con  $\mathcal{J}$ , la seconda parte del teorema di Jacobi assicura allora che l'integrale primo di Jacobi coincida con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{J}$ :  $\mathcal{H} = \mathcal{T}|_{\mathcal{J}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  e quindi da (D.353) e (D.352)

$$\mathcal{H} = m\dot{s}^2 + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 + m\ell \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta - mg\ell \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta . \quad (\text{D.361})$$

Nel caso in cui  $\gamma > 0$ , da un teorema noto sappiamo che

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}|_{\text{soluzioni EL}} = \sum_k \mathcal{Q}_k \dot{q}^k = \mathcal{Q}_s \dot{s} = -\gamma \dot{s}^2 \leq 0 ,$$

dove abbiamo usato (D.358).

(3) Nel caso  $m\Omega^2 = k$  le equazioni del moto si semplificano in:

$$2m\frac{d^2s}{dt^2} + m\ell\frac{d}{dt}\dot{\theta}\cos\theta = -\gamma\dot{s} \quad (\text{D.362})$$

e

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + m\ell\frac{d}{dt}\dot{s}\cos\theta = -m\ell\dot{s}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta + k\ell^2\sin\theta\cos\theta. \quad (\text{D.363})$$

Sostituendo forme di soluzione del tipo  $s(t) = at + b$  e  $\theta(t) = c$  con  $a, b, c$  costanti, troviamo che deve essere:

$$0 = -\gamma a \quad (\text{D.364})$$

e

$$0 = -mgl\sin c + k\ell^2\sin c\cos c. \quad (\text{D.365})$$

Ricordiamo che  $m, g, \ell, k > 0$  mentre  $\gamma \geq 0$  (e anche che  $\Omega = \sqrt{k/m}$  è fissato). Supponiamo che funzioni del tipo detto siano soluzioni, allora devono soddisfare le equazioni del moto. Imponendo ciò abbiamo i seguenti casi.

**Se**  $\gamma > 0$ , l'unica possibilità nella prima equazione è  $a = 0$ . Nella seconda equazione deve invece essere, dato che  $\ell > 0$ ,

$$\sin c(mg - k\ell\cos c) = 0$$

e abbiamo le seguenti soluzioni:  $c = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $c = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La costante  $b$  può essere scelta arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ .

**Se**  $\gamma = 0$ , la prima equazione fornisce  $\forall a \in \mathbb{R}$ . Nella seconda equazione deve ancora essere essendo  $\ell > 0$ ,

$$\sin c(mg - k\ell\cos c) = 0$$

e abbiamo di nuovo le seguenti soluzioni:  $c = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $c = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La costante  $b$  può essere scelta arbitrariamente in  $\mathbb{R}$ . È chiaro che ogni scelta dei valori vista produce una soluzione procedendo a ritroso nelle formule, pertanto abbiamo trovato tutti e soli i casi possibili per  $a, b, c$ .

(4) Le configurazioni di equilibrio in  $\mathcal{S}$ , per  $\gamma = 0$  (e  $m\Omega^2 = k$ ) si ottengono annullando il gradiente di

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{S}} = -mgl\cos\theta + \frac{k}{2}\ell^2\cos^2\theta.$$

Cioè sono le soluzioni  $(s_0, \theta_0)$  del sistema

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}}{\partial s}|_{(s_0, \theta_0)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}}{\partial \theta}|_{(s_0, \theta_0)} = 0.$$

Dato che  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  non dipende da  $s$  concludiamo che  $s_0$  è qualunque numero in  $\mathbb{R}$ . La seconda equazione esplicitata fornisce

$$-mgl\sin\theta_0 + k\ell^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0,$$

che abbiamo studiato sopra ed ha soluzioni:  $\theta_0 = 0, \pi$  sempre alle quali si aggiungono  $\theta_0 = \pm \arccos(\frac{mg}{k\ell})$  se  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . Le configurazioni di equilibrio sono pertanto per ogni scelta di  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(s_0, 0)$ ,  $(s_0, \pi)$  alle quali si aggiungono  $(s_0, \arccos(\frac{mg}{k\ell}))$ ,  $(s_0, -\arccos(\frac{mg}{k\ell}))$  quando  $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ . La stabilità è facile da studiare se si applica direttamente la definizione altrimenti risulta essere indecidibile, eccetto il caso in cui l'unico elemento non nullo della matrice hessiana sia negativo che attesta instabilità nel passato e nel futuro, se si vuole usare il criterio degli autovalori della matrice Hessiana di dell'energia potenziale. È chiaro invece che tutte queste configurazioni di equilibrio sono instabili perché, per il risultato del punto (3) nel caso  $\gamma = 0$ , possiamo sempre trovare un moto della forma  $s(t) = at + s_0$ ,  $\theta(t) = \theta_0$  che per tempi sufficientemente grandi nel futuro o nel passato esce da qualunque intorno dell'atto di moto  $(s_0, \theta_0, 0, 0)$  pur essendo, per  $t = 0$ , arbitrariamente vicino a  $(s_0, \theta_0, 0, 0)$  scegliendo la velocità  $a$  piccola a piacere ma non nulla.

(5) La lagrangiana (D.354) ha la struttura

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q})$$

dove  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{s}, \dot{\theta})^t$  e la matrice simmetrica  $M(\mathbf{q})$  è definita da

$$M(\mathbf{q}) := m \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{2} \cos \theta \\ \frac{\ell}{2} \cos \theta & \frac{\ell^2}{2} \end{bmatrix}.$$

La trasformazione di Legendre si può scrivere come, se  $\mathbf{p} = (p_s, p_\theta)^t$ ,

$$\mathbf{p} = 2M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}},$$

e quindi la sua inversa è

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}, \quad (\text{D.366})$$

dove, per esempio applicando la regola di Cramer

$$M(\mathbf{q})^{-1} := \frac{4}{m\ell^2(2 - \cos^2 \theta)} \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{2} & -\frac{\ell}{2} \cos \theta \\ -\frac{\ell}{2} \cos \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di Hamilton come sappiamo dal punto (2) è

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^t M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) \quad (\text{D.367})$$

Dato che vale la (D.348), sostituendo (D.366) in (D.367) abbiamo che in variabili di Hamilton:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} (M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p})^t M(\mathbf{q}) M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}).$$

Cioè, dato che  $M(\mathbf{q})^{-1}$  è simmetrica,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \mathbf{p}^t M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\mathbf{q}).$$

Esplicitando l'ovvio calcolo,

$$\mathcal{H}(s, \theta, p_s, p_\theta) = \frac{p_s^2 + \frac{2}{\ell^2} p_\theta^2 - \frac{2}{\ell} p_\theta p_\phi \cos \theta}{2m(2 - \cos^2 \theta)} - mgl \cos \theta + \frac{k - m\Omega^2}{2} (s^2 + (s + \ell \sin \theta)^2) + \frac{k}{2} \ell^2 \cos^2 \theta.$$



### ESERCIZIO 33

Si consideri un sistema di assi ortonormali  $xyz$ , destrorsi di origine  $O$ , solidali con il riferimento *non* inerziale  $\mathcal{J}$ . Due punti materiali  $P$  e  $P'$ , entrambi di massa  $m > 0$  nota, sono rispettivamente vincolati a muoversi su due circonferenze  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  prive di attrito e di equazione  $\Gamma: x^2 + z^2 = R^2, y = 0$  e  $\Gamma': x^2 + z^2 = 4R^2, y = 0$ , dove  $R > 0$  è noto.

Il riferimento  $\mathcal{J}$  ruota rispetto al riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$  con  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{J}_0} = \Omega \mathbf{e}_z$ , dove  $\Omega > 0$  è una costante assegnata.

Sui punti  $P$  e  $P'$  agiscono le seguenti forze attive vere:

(i) la forza di una molla ideale di peso nullo, lunghezza nulla a riposo e costante  $k > 0$  nota che congiunge  $P$  e  $P'$ ;

(ii) la forza peso  $-mg \mathbf{e}_z$  con  $g \geq 0$  nota che agisce su  $P$  e  $P'$

(iii) la forza viscosa  $-\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}}$  che agisce sul punto  $P$ , dove  $\gamma \geq 0$  è assegnato.

Usando come coordinate libere gli angoli polari  $\theta \in [-\pi, \pi]$  e  $\theta' \in [-\pi, \pi]$  che rispettivamente  $P - O$  e  $P' - O$  individuano rispetto a  $\mathbf{e}_x$  si risolvano i seguenti quesiti.

**(1)** (a) Calcolare la lagrangiana del sistema in  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{J}_0$  mostrando che sono uguali. (b) Dimostrare che in  $\mathcal{J}$  la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle. (c) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema di punti.

**(2)** Provare che, se  $\gamma = 0$ , esiste un integrale primo e spiegarne il significato fisico in relazione ai riferimenti considerati. Dimostrare che, se  $\gamma > 0$ , la funzione trovata cessa di essere un integrale primo.

**(3)** (a) Dire tra le seguenti configurazioni quali sono configurazioni di equilibrio rispetto a  $\mathcal{J}$  assumendo  $g = 0$  ed al variare di  $m, \Omega, k, R > 0$  e  $\gamma \geq 0$ :

$(\theta, \theta') = (0, 0), (\pi/4, -\pi/4), (\pi, 0), (\pi/2, -\pi/2)$ .

(b) Per  $g = \gamma = 0$ , studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio determinate sopra al variare di  $m, \Omega, k, R > 0$ .

**(4)** (a) Per  $\gamma = 0$ , scrivere la trasformazione di Legendre, passare in formulazione di Hamilton e scrivere le equazioni di Hamilton del sistema. (b) Provare, usando la formulazione di Hamilton direttamente, che la funzione di Hamilton è un integrale primo senza usare il teorema di Jacobi lagrangiano.

**Soluzione** (1)(a) Calcoliamo  $\mathcal{L}|_{\mathcal{J}}$ . I vettori posizione di  $P$  e  $P'$  in  $\mathcal{J}$  sono dati da

$$P - O = R \cos \theta \mathbf{e}_x + R \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad P' - O = 2R \cos \theta' \mathbf{e}_x + 2R \sin \theta' \mathbf{e}_z \quad (\text{D.368})$$

da cui si ricava

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{\theta}R(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} = 2R\dot{\theta}'(-\sin \theta' \mathbf{e}_x + \cos \theta' \mathbf{e}_z). \quad (\text{D.369})$$

Quadrando, sommando e moltiplicando per  $m/2$  abbiamo subito che

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2).$$

L'energia potenziale è somma dell'energia potenziale della molla, gravitazionale e di quella dovuta alla forza centrifuga. Partiamo dalla prima.

$$\mathcal{U}^{(molla)}|_{\mathcal{J}} = \frac{k}{2}(P - P')^2 = \frac{kR^2}{2}[(\cos \theta - 2 \cos \theta')^2 + (\sin \theta' - 2 \sin \theta')^2] = \frac{kR^2}{2}(5 - 4 \cos(\theta - \theta'))$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che

$$\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta - \theta')$$

e dell'identità trigonometrica fondamentale  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . Possiamo nel seguito trascurare la costante additiva  $\frac{5kR^2}{2}$ . Il potenziale delle forze gravitazionali è dato da

$$\mathcal{U}^{(grav)}|_{\mathcal{J}} = mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta').$$

La forza centrifuga è conservativa come è noto, quando  $\omega$  è costante, ed ha energia potenziale pari a quella di una molla repulsiva di costante  $-m\Omega^2$  attaccata all'asse di rotazione alla stessa altezza dei punti che subiscono la forza centrifuga:

$$\mathcal{U}^{(cent)}|_{\mathcal{J}} = -\frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

Mettendo tutti insieme i contributi, trascurando costanti additive, la lagrangiana in  $\mathcal{J}$  risulta essere

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{J}} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + 2kR^2 \cos(\theta - \theta') - mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta'). \quad (\text{D.370})$$

Passiamo al calcolo della lagrangiana nel riferimento inerziale  $\mathcal{J}_0$ . In questo caso, applicando le solute formule per il calcolo della velocità al variare del riferimento,

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P - O), \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}_0} = \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} + \Omega \mathbf{e}_z \wedge (P' - O)$$

dove, tenendo conto di (D.368) e (D.369), abbiamo subito che

$$\mathbf{v}_P|_{\mathcal{J}} = \dot{\theta}R(-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_z) + \Omega R \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{J}} = 2R\dot{\theta}'(-\sin \theta' \mathbf{e}_x + \cos \theta' \mathbf{e}_z) + \Omega 2R \cos \theta' \mathbf{e}_y. \quad (\text{D.371})$$

Quadrando, moltiplicando per  $m/2$  e sommando abbiamo l'energia cinetica in  $\mathcal{S}_0$ :

$$\mathcal{T}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4\cos^2 \theta').$$

Nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}_0$  le forze attive conservative sono quella gravitazionale e quella della molla che hanno la stessa rispettiva energia potenziale che abbiamo ricavato in  $\mathcal{S}$ . La lagrangiana calcolata nel riferimento  $\mathcal{S}_0$  risulterà quindi essere la stessa che nel riferimento  $\mathcal{S}$  con un semplice riordinamento dei termini che assumono anche significato fisico diverso (l'energia potenziale della forza centrifuga in  $\mathcal{S}$  risulta essere parte dell'energia cinetica in  $\mathcal{S}_0$ ):

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) + \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4\cos^2 \theta') + 2kR^2 \cos(\theta - \theta') - mgR(\sin \theta + 2\sin \theta') = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}.$$

(b) La forza di Coriolis  $\mathbf{f}^{(Coriolis)}$  agisce in  $\mathcal{S}$  su  $P$  e  $P'$  e, per definizione, ha direzione perpendicolare al piano che contiene  $\Omega \mathbf{e}_z$  e  $\mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}}$  (rispettivamente  $\mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{S}}$ ). In altre parole, tenendo conto di (D.369),  $\mathbf{f}_P^{(Coriolis)}$  e  $\mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)}$  sono dirette lungo  $\mathbf{e}_y$  (con segno arbitrario ed eventualmente possono anche essere nulle). Tenendo conto di (D.368) troviamo allora:

$$\mathcal{Q}_\theta^{(Coriolis)} = \frac{\partial P - O}{\partial \theta} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + \frac{\partial P' - O}{\partial \theta} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = 0 + \mathbf{0} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = 0$$

e

$$\mathcal{Q}_{\theta'}^{(Coriolis)} = \frac{\partial P - O}{\partial \theta'} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + \frac{\partial P' - O}{\partial \theta'} \cdot \mathbf{f}_{P'}^{(Coriolis)} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{f}_P^{(Coriolis)} + 0 = 0.$$

(c) Le equazioni di Eulero-Lagrange si ottengono tenendo anche conto delle componenti lagrangiane della forza viscosa che agisce solo su  $P$ :

$$\mathcal{Q}_\theta = -\gamma \mathbf{v}_P|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta} = -\gamma R^2 \dot{\theta}, \quad \mathcal{Q}_{\theta'} = -\gamma \mathbf{v}_{P'}|_{\mathcal{S}} \cdot \frac{\partial P - O}{\partial \theta'} = 0. \quad (\text{D.372})$$

e risultano essere, con i soliti calcoli ed usando una delle due lagrangiane (uguali) trovate:

$$mR^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -2kR^2 \sin(\theta - \theta') - mgR \cos \theta - m\Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta - \gamma R^2 \frac{d\theta}{dt},$$

$$4mR^2 \frac{d^2 \theta'}{dt^2} = 2kR^2 \sin(\theta - \theta') - 2mgR \cos \theta' - 4m\Omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta'.$$

(2) Se  $\gamma = 0$  il sistema è completamente descritto dalla lagrangiana (D.370) (la forza di Coriolis può essere totalmente ignorata dato che ha componenti lagrangiane nulle). In tal caso possiamo applicare la prima parte del teorema di Jacobi che ci assicura che la funzione di Hamilton  $\mathcal{H}$  ricavata da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  (che coincide con quella ricavata da  $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$  ovviamente) è un integrale primo. Dato che i vincoli nel riferimento  $\mathcal{S}$  sono indipendenti dal tempo e le coordinate lagrangiane sono solidali con  $\mathcal{S}$ , tenuto conto del fatto che la Lagrangiana è della forma  $\mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  energia potenziale di tutte le forze conservative, la seconda parte del teorema di Jacobi prova che  $\mathcal{H} = \mathcal{E}|_{\mathcal{S}} := \mathcal{T}|_{\mathcal{S}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$ , cioè la funzione di Hamilton coincide

con l'energia meccanica totale valutata nel riferimento non inerziale. Si osservi che tale fatto è falso se si rimpiazza  $\mathcal{J}$  con  $\mathcal{J}_0$ . Nel caso in cui  $\gamma \neq 0$  e quindi le equazioni di E-L hanno a secondo membro il contributo di  $\mathcal{Q}_\theta$ , come sappiamo dalla teoria, vale l'identità

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}|_{\text{soluzioni eq. E.L.}} = \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \mathcal{Q}_k^{(n.c.)}.$$

Nel caso in esame il secondo memebro vale  $-\gamma R\dot{\theta}^2$  per (D.372) e pertanto  $\mathcal{H}$  cessa di essere un integrale primo, perché sul moto generico abbiamo che  $\dot{\theta} \neq 0$  insieme a  $\gamma \neq 0$  per ipotesi.

(3)(a) Le configurazioni di Equilibrio nel riferimento  $\mathcal{J}$ , rispetto al quale le coordinate sono solidali, sono date dai punti  $(\theta_0, \theta'_0)$  tali che, presi  $(\theta_0, \theta'_0)$  come condizioni iniziali insieme a  $(\dot{\theta}(0), \dot{\theta}'(0)) = (0, 0)$ , le uniche soluzioni del problema del moto siano la  $(\theta(t), \theta'(t)) = (\theta_0, \theta'_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Come noto dalla teoria, visto che la lagrangiana ha la struttura  $\mathcal{T}|_{\mathcal{J}} - \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  con  $\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}$  energia potenziale di tutte le forze conservative e che l'unica forza non conservativa che appare nelle equazioni di E.L. ha componenti lagrangiane che si annullano per  $(\dot{\theta}(0), \dot{\theta}'(0)) = (0, 0)$ , dal teorema di unicità delle soluzione di problema di Cauchy, le configurazioni di equilibrio risultano essere tutte e sole quelle che annullano il gradiente dell'energia potenziale. Sappiamo che, per  $g = 0$

$$\mathcal{U}|_{\mathcal{J}}(\theta, \theta') = -2kR^2 \cos(\theta - \theta') - \frac{m\Omega^2}{2} R^2 (\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta'). \quad (\text{D.373})$$

da cui abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial \theta} = 2kR^2 \sin(\theta - \theta') + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin 2\theta$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{U}|_{\mathcal{J}}}{\partial \theta'} = -2kR^2 \sin(\theta - \theta') + 2m\Omega^2 R^2 \sin 2\theta'$$

dove abbiamo sfruttato la nota identità  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ . Le configurazioni di equilibrio devono quindi soddisfare le richieste

$$0 = 2kR^2 \sin(\theta_0 - \theta'_0) + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin 2\theta_0$$

e

$$0 = -2kR^2 \sin(\theta_0 - \theta'_0) + 2m\Omega^2 R^2 \sin 2\theta'_0.$$

Le candidate configurazioni di equilibrio  $(\theta_0, \theta'_0) = (0, 0), (\pi, 0), (\pi/2, -\pi/2)$  soddisfano le due identità scritte comunque fissiamo  $R, m, \Omega, k > 0$  e  $\gamma \geq 0$ . Invece, per  $(\theta_0, \theta'_0) = (\pi/4, -\pi/4)$ , troviamo

$$0 = 2kR^2 \sin(\pi/2) + \frac{m\Omega^2}{2} R^2 \sin(\pi/2)$$

e

$$0 = -2kR^2 \sin(\pi/2) - 2m\Omega^2 R^2 \sin(\pi/2).$$

Cioè, dato che  $R^2 \neq 0$  e  $\sin(\pi/2) = 1$

$$0 = 2k + \frac{m\Omega^2}{2}$$

e

$$0 = -2k - 2m\Omega^2.$$

Sommando membro a membro vediamo subito che dovrebbe allora essere  $-3m^2\Omega^2/2 = 0$ , che però non è possibile per ipotesi essendo  $m, \Omega \neq 0$ . Quindi  $(\theta_0, \theta'_0) = (\pi/4, -\pi/4)$  non può essere configurazione di equilibrio comunque si scelgano i parametri  $R, m, \Omega, k > 0$  e  $\gamma \geq 0$ .

(b) Per l'analisi della la stabilità a  $\gamma = 0$  possiamo studiare gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  della matrice hessiana di  $\mathcal{U}|_{\mathcal{S}}$  nelle tre configurazioni di equilibrio considerate. Ricordando che  $\det H = \lambda_1 \lambda_2$  e  $\text{tr} H = \lambda_1 + \lambda_2$  possiamo studiarne gli autovalori riferendoci al segno del determinante e della traccia della matrice hessiana. Da (D.373) abbiamo subito:

$$H(\theta, \theta') = \begin{bmatrix} 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + m\Omega^2 R^2 \cos(2\theta) & -2kR^2 \cos(\theta - \theta') \\ -2kR^2 \cos(\theta - \theta') & 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + 4m\Omega^2 R^2 \cos(2\theta') \end{bmatrix}.$$

Sostituendo le configurazioni suddette abbiamo quando segue.

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2kR^2 + m\Omega^2 R^2 & -2kR^2 \\ -2kR^2 & 2kR^2 + 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix},$$

da cui  $\text{tr} H(0, 0) = R^2(4k + 5m\Omega^2) > 0$  e  $\det H(0, 0) = 2R^4 m\Omega^2(2m\Omega^2 + 5k) > 0$  comunque scegliamo  $R, m, \Omega, k > 0$ . Concludiamo che entrambi gli autovalori di  $H(0, 0)$  sono sempre positivi e quindi  $(0, 0)$  è configurazione di equilibrio stabile nel passato e nel futuro.

$$H(\pi, 0) = \begin{bmatrix} -2kR^2 + m\Omega^2 R^2 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & -2kR^2 + 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix},$$

da cui  $\text{tr} H(\pi, 0) = R^2(-4k + 5m\Omega^2)$  e  $\det H(\pi, 0) = 2R^4 m\Omega^2(2m\Omega^2 - 5k)$  per  $R, m, \Omega, k > 0$ . Quindi  $\text{tr} H(\pi, 0) \geq 0$  se e solo se  $k \leq 5m\Omega^4/4$ , mentre  $\det H(\pi, 0) \geq 0$  se e solo se  $k \leq 2m\Omega^4/5$ . Concludiamo che,

(i) se  $k < 2m\Omega^2/5$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  e quindi entrambi gli autovalori sono positivi: la configurazione  $(\pi, 0)$  è stabile nel passato e nel futuro;

(ii) se  $k = 2m\Omega^2/5$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$  e quindi almeno un autovalore è nullo e  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ : un autovalore è nullo e l'altro è positivo. In tal caso, con i teoremi a disposizione, non possiamo concludere nulla sulla stabilità di  $(\pi, 0)$ ;

(iii) se  $2m\Omega^2/5 < k$  vale  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  e quindi un autovalore è negativo e l'altro è positivo: la configurazione  $(\pi, 0)$  è instabile nel passato e nel futuro.

$$H(\pi/2, -\pi/2) = \begin{bmatrix} -2kR^2 - m\Omega^2 R^2 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & -2kR^2 - 4m\Omega^2 R^2 \end{bmatrix}.$$

In questo caso  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}H(\pi/2, -\pi/2) < 0$  comunque scegliamo  $R, m, \Omega, k > 0$ . Almeno un autovalore è sempre negativo e quindi la configurazione  $(\pi/2, -\pi/2)$  è instabile nel passato e nel futuro.

(3) La funzione di Hamilton, come sappiamo dal punto (2), coincide con l'energia meccanica totale in  $\mathcal{I}$ . Quindi, usando variabili di Lagrange,

$$\mathcal{H}(\theta, \theta', \dot{\theta}, \dot{\theta}') = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}'^2) - 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') - \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

La trasformazione di Legendre si ricava subito dalla (D.370):

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}, \quad p_{\theta'} = \frac{\partial \mathcal{L}|_{\mathcal{I}}}{\partial \dot{\theta}'} = 4mR^2 \dot{\theta}'.$$

Invertendola banalmente ed inserendo la funzione inversa nell'espressione trovata per la funzione di Hamilton abbiamo che

$$\mathcal{H}(\theta, \theta', p_\theta, p_{\theta'}) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_{\theta'}^2}{8mR^2} - 2kR^2 \cos(\theta - \theta') + mgR(\sin \theta + 2 \sin \theta') - \frac{m\Omega^2}{2}R^2(\cos^2 \theta + 4 \cos^2 \theta').$$

Le equazioni di Hamilton sono di conseguenza:

$$\frac{d\theta}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \right) = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \frac{d\theta'}{dt} \left( = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta'}} \right) = \frac{p_{\theta'}}{4mR^2},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right) &= -2kR^2 \sin(\theta - \theta') - mgR \cos \theta - \frac{m\Omega^2 R^2}{2} \sin(2\theta) \\ \frac{dp_{\theta'}}{dt} \left( = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta'} \right) &= 2kR^2 \sin(\theta - \theta') - 2mgR \cos \theta' - 2m\Omega^2 R^2 \sin(2\theta'). \end{aligned}$$

(b) Sappiamo dalla teoria che nella formulazione di Hamilton (in variabili hamiltoniane) vale l'identità

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} \Big|_{\text{soluzione eq. Hamilton}} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Dato che  $\mathcal{H}(\theta, \theta', p_\theta, p_{\theta'})$  scritto sopra non dipende esplicitamente dal tempo abbiamo che  $\mathcal{H}$  è un integrale primo perché il secondo membro dell'identità di sopra è identicamente nullo.

# Bibliografia

- [Arnold92] V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica* II ed., Ed. Riuniti, Roma, 1992
- [doCarmo92] M.P.do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston 1992
- [Fasano-Marmi] A. Fasano, S. Marmi *Meccanica analitica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002
- [Goldstein50] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Cambridge, MA, (1950)
- [GiustiI] E. Giusti *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003
- [GiustiII] E. Giusti *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003
- [Jackson] J.D. Jackson, *Elettrodinamica Classica*, Zanichelli, Trento, 1988
- [Lee03] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, New York, 2003
- [Malkin] I.G. Malkin, *Teoria della stabilità del moto*, Gostezchidat, Mosca, 1952.
- [Sernesi90] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1990
- [Westenholtz78] C. von Westenholtz, *Differential Forms in Mathematical Physics*; North-Holland, Amsterdam, (1978)

**Nota di licenza.** *Quest'opera è stata rilasciata sotto la licenza Creative Commons Attribuzione-Non commerciale-Non opere derivate 2.5 Italia. Per leggere una copia della licenza visita il sito web*

*<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/>*

*o spedisce una lettera a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.*