technische universität
dortmund

Zwischenstand Spektraldichten-Testverfahren: Symmetrie und Isotropie

Carsten Stahl

October 23, 2025

TU Dortmund University - Department of Computer Science

Symmetrie zweidimensionales Periodogram

Isotropie Hypothese

Symmetrie zweidimensionales Periodogram

Symmetriebedingung auf $I(\omega, \tilde{\omega})$

Wir wissen für ein beliebiges Frequenzpaar, dass:

$$I(\omega, \tilde{\omega}) = I(-\omega, -\tilde{\omega})$$

Frage: Welche Teilmenge von $[-\pi, \pi]^2$ können wir nutzen, um die Symmetrie zu erhalten?

Symmetriebedingung auf $I(\omega, \tilde{\omega})$

Antwort:

- Jeder Halbraum, erzeugt durch eine durch den Koordinatenursprung gehende Gerade
- Beweis:
  - Es sei ein beliebiges Frequenzpaar $\vec{\omega}$ und $\vec{u}$ der Normalvector von $\vec{\omega}$ [1].
  - Dann sei der Halbraum aus $\vec{\omega}$ definiert als: $H_{\vec{\omega}} := \{\vec{c} \in [-\pi, \pi]^2 : \langle \vec{c}, \vec{u} \rangle > 0\}$
  - Dann gilt für jedes $\vec{c} \in H_{\vec{\omega}}$:
    - $\langle -\vec{c}, \vec{u} \rangle = -\langle \vec{c}, \vec{u} \rangle < 0$
    - $\implies -\vec{c} \notin H_{\vec{\omega}}$

[1] Also $\vec{\omega} \perp \vec{u}$ und $\|u\| = 1$

Implikation für die Implementierung

Die Symmetriebedingung lässt uns viele Freiheiten, wenn es um die Teststatistiken T_n und T_n^* geht:

$$T_n := \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi [\dots]^2 d\omega d\tilde{\omega}$$
$$T_n^* := \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi [\dots]^2 d\omega d\tilde{\omega}$$

- Hier können wir z.B. das Riemannintegral auf $H_{(1,0)}$ auswerten um die Symmetrie zu garantieren

Isotropie Hypothese

Hypothese und Implikationen

Unter H_0 soll gelten:

$$C(k,l) = C(\|(k,l)\|_2) \iff f(\omega,\tilde{\omega}) = f(\|\omega,\tilde{\omega}\|_2)$$

Wir können also auf Gleichheit der Spektraldichte bei Frequenzen mit derselben L_2 Distanz testen.

- Nehme zusätzlich ein Quadratisches Gitter an.
- Für alle $d > 0$ Tausche $(\omega,\tilde{\omega}) : \|(\omega,\tilde{\omega})\|_2 = d$
- Problem: q nicht mehr Konstant (wenn wir uns auf Fourier Frequenzen beschränken)

Offene Fragen zu der Implementierung

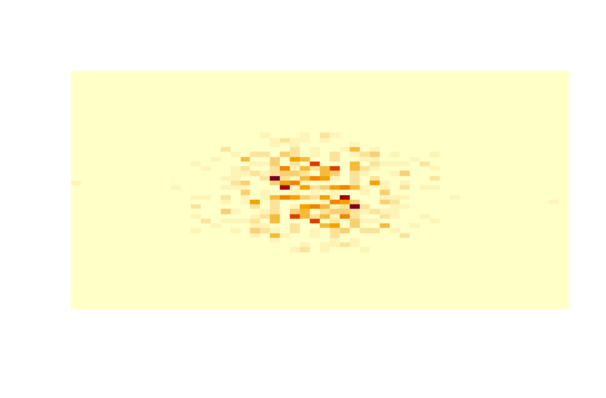


Figure 1: $I(\omega, \tilde{\omega})$ für $MA(1)$ Prozess

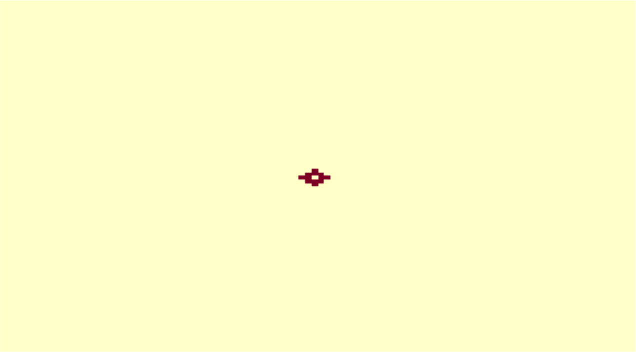
- Welche Distanzen $\{d_1, .., d_p\}$ verwende ich für das Tauschen?
- Gegeben einer Distanz d, welche Einträge aus $I(\omega, \tilde{\omega})$ Tausche ich?
- Wie sieht dann mein $\tilde{I}(\omega)$ aus?
- An welchen Frequenzpaaren Werte ich am Ende aus, um T_n und T_n^* zu bekommen?

Grundidee des Algorithmus 1 (Intervalle statt bestimmte d)

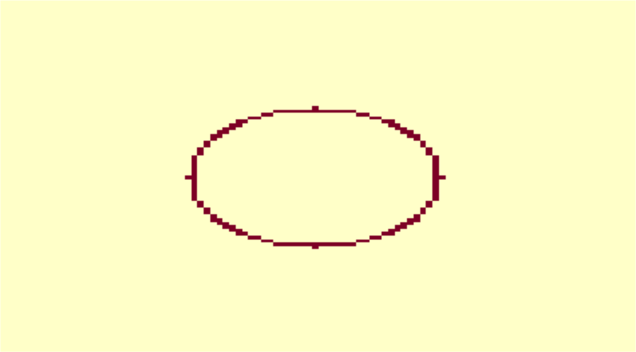
- Damit wir jeden Eintrag von $I(\omega, \tilde{\omega})$ verwenden, müssen wir uns **Intervalle** statt bestimmten d verwenden[2].
- Der erste Schritt für den Algorithmus ist also die **Partition** von $[0, \pi]$ in Intervalle
- Für diese Implementierung habe ich die Fourier Frequenzen ω_k nach der Gittergröße N genommen.
- Wir definieren also die **Tauschmengen** $T_k := \{\vec{\omega} \in [-\pi, \pi]^2 : \|\vec{\omega}\| \in [\omega_{k-1}, \omega_k)\}$ für alle $k \in \{1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor\}$

[2] Und folglich Annuli statt Sphären

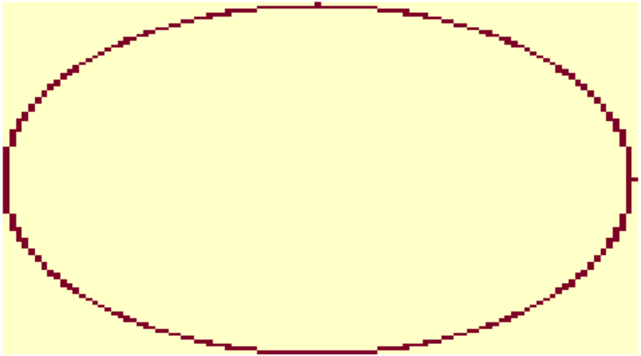
T_2 bei $N = 100$



T_{20} bei $N = 100$



T_{50} bei $N = 100$



Vor und nach dem Tauschen H_1

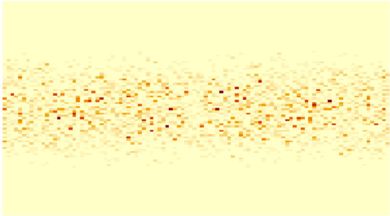


Figure 2: $I(\omega, \tilde{\omega})$ für $MA(1)$ Zeilen Prozess vor dem Tausch

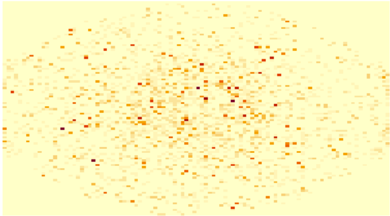


Figure 3: $I(\omega, \tilde{\omega})$ für $MA(1)$ Zeilen Prozess nach dem Tausch

Vor und nach dem Tauschen H_0

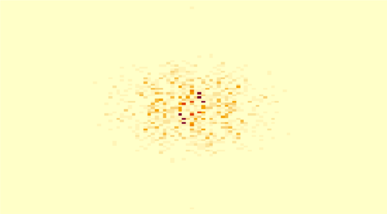


Figure 4: $I(\omega, \tilde{\omega})$ für isotropen $MA(1)$ Prozess vor dem Tausch

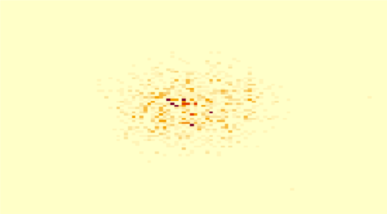


Figure 5: $I(\omega, \tilde{\omega})$ für isotropen $MA(1)$ Prozess nach dem Tausch

Grundidee des Algorithmus 2 $\tilde{I}(\omega)$

- Das gepoolte Periodogramm bekommen wir aus dem Durchschnitt der Einträge aus den Tauschmengen T_k:

$$\tilde{I}(\omega_k) = \frac{1}{\#T_k} \sum_{\vec{\omega} \in T_k} I(\vec{\omega})$$

Grundidee des Algorithmus 3: Die Auswertung

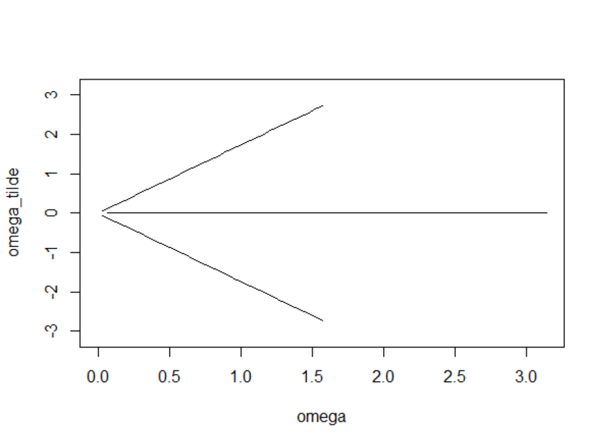


Figure 6: Auswertung für $q = 3$

- Bei der Auswertung beschränken wir uns nicht mehr auf Fourier Frequenzen, sondern werten auf Linien L_i der Länge π auf dem Raum $[0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ aus.
- Diese werden gleichmäßig im Winkel verteilt
- Wir führen hiermit einen neuen Hyperparamter q ein, welcher die Anzahl der Linien bestimmt

Der Algorithmus

```r
# Computing Tn
I_x_diff <- demean_iso(I(x))
Tn_diff <- eval_star(I_smooth(I_x_diff, h,h), q, N)
Tn_val <- sum(Tn_diff^2) *(2*pi / N)

# Computing Tn_star
Tn_star_val <- numeric(B)
T_val <- numeric(B)
for (i in 1:B) {
    I_x_diff_rand <- shuffle_circ(I_x_diff)
    diffs <- eval_star(I_smooth(I_x_diff_rand, h, h), q, N)
    Tn_star_val[i] <- sum(diffs^2) * (2*pi/N)
    T_val[i] <- sum(Tn_star_val[1:i] < Tn_val)/ i
}

```

- `demean_iso` $\rightarrow I(\omega, \tilde{\omega}) - \tilde{I}(\omega)$
- `eval_star` $\rightarrow$ Auswertung für alle Linien L_i, $i \in \{1, ..., q\}$
- `shuffle_circ` $\rightarrow$ Tauschen bei den Tauschmengen T_k

Ablehnung unter H_1

- $N = 1000$ mit $\alpha = 5\%, B = 100, q = 5$ auf 25×25 Gitter von einem MA Prozess mit:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .7 & 1 & .7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ablehnung: $12,8\%$

Ablehnung unter H_1

- $N = 100$ mit $\alpha = 5\%, B = 100, q = 5$ auf 50×50 Gitter von einem MA Prozess mit:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .7 & 1 & .7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ablehnung: 94%

Ablehnung unter H_0

- $N = 1000$ mit $\alpha = 5\%$, $B = 100$, $q = 5$ auf 25×25 Gitter von einem MA Prozess mit:

$$K = \begin{pmatrix} .7 & .7 & .7 \\ .7 & 1 & .7 \\ .7 & .7 & .7 \end{pmatrix}$$

- Ablehnung: .7%
- Vermutung: Korrelierte Stichproben? Dann sollte es für $q = 2$ besser klappen

Ablehnung unter H_0

- $N = 1000$ mit $\alpha = 5\%, , B = 100, q = 2$ auf 25×25 Gitter von einem MA Prozess mit:

$$K = \begin{pmatrix} .7 & .7 & .7 \\ .7 & 1 & .7 \\ .7 & .7 & .7 \end{pmatrix}$$

- Ablehnung: 3%