

Praktikum

Moderne Methoden der Regelungstechnik

Schwingungsarmes Verfahren der Schweren Kette

Stand: 09.05.2023



Abbildung 1: Aufnahme des Versuchsaufbaus

Inhaltsverzeichnis

Theorie und Versuchsvorbereitung	3
1 Einleitung und Motivation	3
1.1 Problemstellung	3
1.2 Versuchsaufbau	3
2 Modellierung der Kette	5
3 Theoretische Grundlagen	9
3.1 Flachheitsbasierte Steuerung	9
3.2 Ljapunow bzw. Energie basierter Reglerentwurf mit Backstepping	10
3.3 Bestimmung der Wagenbewegung über den flachen Ausgang	11
3.4 Bestimmung der Regelung	13
Versuchsdurchführung	15
Daten, Konstanten, Matlab-Variablen	16

Theorie und Versuchsvorbereitung

Lesen Sie die gesamte Versuchsanleitung (*Theorie und Versuchsdurchführung*) vor dem Versuchstermin aufmerksam durch. Zu Beginn des Praktikumsversuchs werden Ihnen Fragen gestellt, um das Verständnis zu überprüfen. Bearbeiten Sie die Aufgaben 1 bis 3 und geben Sie eine saubere Ausarbeitung pro Gruppe ab. Implementierungsaufgaben müssen Sie Ihrer Ausarbeitung nicht beifügen. Speichern Sie die Datei mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabe 2.2 auf Ihrem eigenen Uni-Konto. Sollten Sie einzelne Aufgaben nicht lösen können, so versuchen Sie diese in Gruppenarbeit zu beantworten oder wenden Sie sich rechtzeitig vor dem Versuchstermin an den entsprechenden Betreuer.

1 Einleitung und Motivation

1.1 Problemstellung

In diesem Versuch soll für eine hängende Kette in Abbildung 1 eine Steuerung mit überlagerter Regelung bestimmt werden. Die Aufgabe der Steuerung ist es eine gewünschte Zielposition so anzufahren, dass kein Nachschwingen der Kette auftritt. Falls Störungen auf das System einwirken, soll eine überlagerte Regelung diese ausregeln.

Im Gegensatz zu den sonst oftmals betrachteten Versuchen zur Regelung von Kransystemen, liegt die Besonderheit des Versuchs darin, dass am unteren Ende der Kette *keine Last* befestigt ist. Dadurch wird die Kette nicht "straffgezogen". Eine Modellierung als Pendel erscheint somit ungeeignet. Für eine Beschreibung der Kette wird deshalb der kontinuierliche Charakter des Systems beibehalten. Dies bedeutet, dass der Zustand der Kette nicht durch einen Zustandsvektors endlicher Dimension sondern über eine Funktion des Ortes beschrieben wird. Der Zustand und die zugehörigen Parameter (z.B. Masse...) sind somit über den Ort - die Länge der Kette - verteilt, weshalb dieses und vergleichbare Systeme als *verteilparametrische Systeme* bezeichnet werden.

Im Rahmen der Versuchsdurchführung werden folgende Methoden verwendet:

- Flachheitsbasierte Berechnung einer Steuerung für ein System mit verteilten Parametern
- Regelung mittels Energiebetrachtungen und Backstepping

Um die in der Vorlesung Moderne Methoden 2 vermittelten Kenntnisse zu den beiden Punkten zu vertiefen, wird in den nachfolgenden Kapiteln die benötigte Theorie wiederholt.

Ziel der Versuchsvorbereitung ist es, Verständnis für die zu implementierende Steuerung und Regelung aufzubauen. Aufgrund der Komplexität des Systems ist der hierfür nötige Arbeitsaufwand nicht unerheblich. Im Gegenzug bietet der Versuch jedoch die Möglichkeit sich in der Praxis mit modernen Methoden der Regelungstechnik vertraut zu machen. Mithilfe dieser Techniken ist möglich ein durchaus nicht triviales, Regelungstechnisches Problem zu lösen.

1.2 Versuchsaufbau

Labormodell Der Aufbau besteht, wie in Abbildung 1 zu sehen ist, aus einer Schiene, auf der ein Wagen horizontale Bewegungen ausführen kann. An diesem Wagen ist die eigentliche Kette derart

befestigt, so dass nur Schwingungen definiert in einer Ebene möglich sind. Die Bewegung des Wagens wird von einem Elektromotor der Fa. Neugart übernommen (Abbildung 1, hinter dem linken Ende der Schiene). Die Verdrehung des obersten Kettengliedes wird über einen Winkelsensor erfasst. Dies ist in Abbildung 2 dargestellt.



Abbildung 2: Winkelsensor am obersten Kettenglied

Zusätzlich besteht die Möglichkeit, die Auslenkung des untersten Kettengliedes optisch mithilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera der Fa. Baumer zu erfassen. Auf diese Weise kann die Qualität der Regelung und die Einhaltung der vorgegebenen Trajektorien überwacht werden. Aus den einzelnen Aufnahmen wird zunächst der interessierende Bereich ausgewählt. Anhand von Helligkeitswerten wird hierauf die Position der Markierung im Bild erfasst. Aus diesen Daten kann schließlich die Auslenkung des unteren Kettenendes berechnet werden.

Regelung Für die Regelung der schweren Kette wird Simulink Real-Time (früher bekannt als xPC-Target) verwendet. Mit Simulink Real-Time kann aus einem Simulink-Modell eine echtzeitfähige Anwendung erstellt werden, welche anschließend auf einem speziell dafür vorgesehenen Computer (Target-PC) ausgeführt werden kann. Der Target-PC ist über eine digital/analog Ein-Ausgangskarte (I/O-Karte) mit dem Versuchsaufbau verbunden, so dass mit der Echtzeitanwendung Messgrößen erfasst und Stellgrößen aufgeschaltet werden können.

In Abbildung 3 ist der Hardwareaufbau des Versuchs bestehend aus dem Host- und Target-PC schematisch dargestellt.

Über den Host-PC erfolgt die Eingabe und das Editieren des gewünschten Softwarecodes in Form eines Simulink-Modells. Das Simulink-Modell des entworfenen Reglers wird mithilfe des Simulink Coders in C-Code übersetzt und kompiliert. Durch eine Ethernetverbindung wird dieser Code auf den Target-PC übertragen, wo die eigentliche Ausführung der Echtzeitanwendung erfolgt. Die Echtzeitfähigkeit des Target-PCs ist gegeben durch einen Echtzeitkernel, der nach dem Start des Computers automatisch geladen wird. Über den Monitor des Target-PCs können Informationen über den aktuellen Systemstatus und Signalverläufe in der ausgeführten Echtzeitanwendung angezeigt werden. Eine Kommunikation mit dem Target-PC ist auf die in der Versuchsdurchführung beschriebene Weise über den Host-PC möglich.

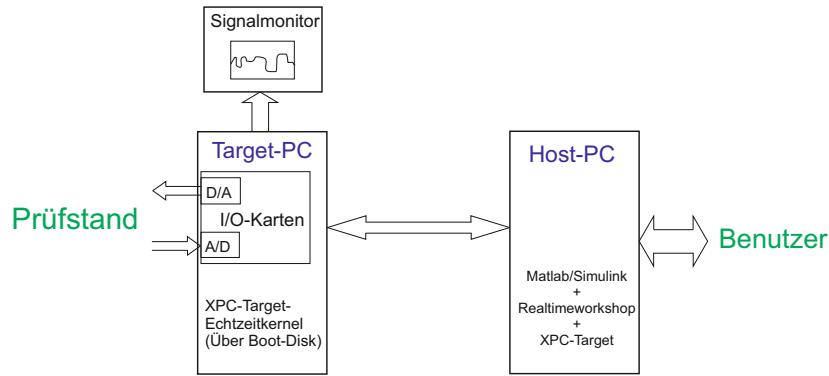


Abbildung 3: Hardwareaufbau des Versuchs

Der Target-PC übernimmt darüber hinaus durch Ausgabe von Triggersignalen auch die Steuerung der Kamera. Dadurch werden nur in den interessierenden Zeitintervallen Aufnahmen gemacht und der Aufwand der Auswertung der Bilder minimiert, da dieser Prozess durch die Verarbeitung großer Datenmengen erheblichen Rechenaufwand erfordert.

2 Modellierung der Kette

Alle für die nun folgende Modellierung benötigten Variablen sind in Abbildung 4 dargestellt. Die Koordinate x läuft entlang der Kette von $x = 0$ (Position des Wagens) nach $x = L$ (freies Kettenende).

Im Rahmen der Betrachtung wird die Kette als Kontinuum angenommen. Das bedeutet, die Auslenkung der Kette kann als kontinuierliche Funktion $w(x, t)$ beschrieben werden. Die Auslenkung an der Stelle $w(0, t)$ bezeichnet dabei die Position des Wagens. Entsprechend $w(L, t)$ die Auslenkung des freien Kettenendes an. Die einzige Messgröße im System ist der Winkel φ am Aufhängepunkt der Kette. Der verwendete Sensor ist in Abbildung 2 dargestellt.

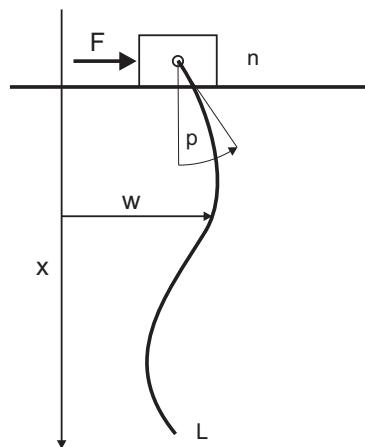


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Kette

Ferner wird für die Modellierung angenommen, dass die Auslenkungen so gering sind, dass der Winkel jedes einzelnen Kettengliedes φ gegen die Vertikale im Rahmen der sog. Kleinwinkelnäherung mit der

Ableitung $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{w}'(x, t)$ approximiert werden kann. Denn für kleines φ gilt:

$$\mathbf{w}'(x, t) = \tan(\varphi) \approx \varphi \quad (1)$$

Somit entspricht der am Aufhängepunkt gemessene Winkel der Ableitung $\mathbf{w}'(0, t)$.

Die Eingangsgröße in das System stellt die Kraft F auf den Wagen dar, welche durch einen Elektromotor aufgebracht wird.

Um die Bewegungsgleichungen für das System zu bestimmen, wird das von Hamilton eingeführte Prinzip der *extremalen Wirkung* verwendet. Beschreibt man den Zustand eines mechanischen Systems mit dessen generalisierten Positionen und Geschwindigkeiten $\mathbf{z} = (\mathbf{q} \dot{\mathbf{q}})^T$, so besagt das Prinzip der kleinsten Wirkung, dass die Bewegung des Systems von einem gegebenen Startpunkt $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0 \dot{\mathbf{q}}_0)^T$ zu einem Endpunkt $\mathbf{z}_e = (\mathbf{q}_e \dot{\mathbf{q}}_e)^T$ so verläuft, dass die sog. *Wirkung* ein Extremum annimmt. Unter der *Wirkung* S versteht man hierbei das zeitliche Integral über die Differenz aus kinetischer Energie $T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ und potentieller Energie $V(\mathbf{q})$:

$$S = \int_0^{t_e} T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - V(\mathbf{q}) \, dt \quad (2)$$

Diese Größe stellt demnach ein Maß für die Umsetzung der Energien innerhalb des Systems dar.

Die Aussage, dass die Wirkung einen Extremwert annehme, lässt sich durch die Einführung von virtuellen Vergleichskurven oder auch Variationen nutzen. Wird die tatsächliche Bewegung mit $\mathbf{z}^* = (\mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}}^*)^T$ bezeichnet, so können alle möglichen Bewegungen von \mathbf{z}_0 nach \mathbf{z}_e mit den Variationen $\tilde{\mathbf{q}}$ und $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ dargestellt werden als:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{q}} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (4)$$

Damit Start- und Endpunkt dabei erhalten bleiben, müssen die Variationen an den Rändern $t = 0$ und $t = t_e$ verschwinden:

$$\tilde{\mathbf{q}}(0) = \tilde{\mathbf{q}}(t_e) = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t_e) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Wird (3) und (4) in (2) eingesetzt, so kann aus der Forderung nach einem Extremum für $\varepsilon = 0$ (entspricht $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ bzw. $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^*$) geschlossen werden:

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) lassen sich die Bewegungsgleichungen ableiten, was im Folgenden für die Kette gezeigt wird. In diesem Fall treten anstelle der generalisierten Positionen \mathbf{q} und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ die Auslenkung der Kette $\mathbf{w}(x, t)$ und deren Ableitung $\dot{\mathbf{w}}(x, t)$.

Unter Verwendung dieser Größen bestimmen sich die potentielle Energie V und die kinetische Energie

T der Kette samt Wagen zu:

$$T = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{w}}^2 dx}_{\text{kinetische Energie der Kette}} + \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\mathbf{w}}^2(0, t)}_{\text{kinetische Energie des Wagens}} \quad (8)$$

$$V = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2} p(x) \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right)^2 dx}_{\text{potentielle Energie der Kette}} - \underbrace{F \mathbf{w}(0, t)}_{F \text{ als pot. Energie}} \quad (9)$$

wobei M die Masse des Wagens, $\mathbf{w}(0, t)$ die Position des Wagens, ρ die Masse der Kette pro Länge und

$$p(x) = g \rho(L - x) \quad (10)$$

die Gewichtskraft in der Kette ist. Eine Herleitung für die potentielle Energie (9) findet sich im Anhang.

Werden nun alle möglichen Auslenkungen mit Hilfe von Variationen dargestellt

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{w}} \\ \mathbf{w}_x &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{w}_x^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{w}}_x \\ \dot{\mathbf{w}} &= \dot{\mathbf{w}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \end{aligned}$$

wobei für Anfangs- und Endzeitpunkt Folgendes gelte:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}(x, 0) &= \tilde{\mathbf{w}}(x, t_e) = 0 \\ \tilde{\mathbf{w}}_x(x, 0) &= \tilde{\mathbf{w}}_x(x, t_e) = 0 \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}(x, 0) &= \dot{\tilde{\mathbf{w}}}(x, t_e) = 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Wirkung S :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{t_e} \int_0^L \frac{1}{2} \rho (\dot{\mathbf{w}}^* + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{w}}})^2 dx + \frac{1}{2} M (\dot{\mathbf{w}}^*(0, t) + \varepsilon \dot{\tilde{\mathbf{w}}}(0, t))^2 \\ &\quad - \left(\int_0^L \frac{1}{2} p(x) (\mathbf{w}_x^* + \varepsilon \tilde{\mathbf{w}}_x)^2 dx - F (\mathbf{w}^*(0, t) + \varepsilon \tilde{\mathbf{w}}(0, t)) \right) dt \end{aligned} \quad (11)$$

Wird die Ableitung dieses Ausdrucks nach ε gebildet und diese entsprechend (7) an der Stelle $\varepsilon = 0$ zu Null gesetzt, so ergibt sich:

$$\int_0^{t_e} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{w}}^* \dot{\tilde{\mathbf{w}}} dx + M \dot{\mathbf{w}}^*(0, t) \dot{\tilde{\mathbf{w}}}(0, t) - \int_0^L p(x) \mathbf{w}_x^* \tilde{\mathbf{w}}_x dx + \int_0^{t_e} F \tilde{\mathbf{w}}(0, t) dt = 0. \quad (12)$$

Um von (12) zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen, werden durch geeignete partielle Integration die Variationen $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$ und $\tilde{\mathbf{w}}_x$ in Variationen $\tilde{\mathbf{w}}$ überführt. Hierzu muss teilweise die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left(\rho \dot{\mathbf{w}}^* \tilde{\mathbf{w}}|_0^{t_e} - \int_0^{t_e} \rho \ddot{\mathbf{w}}^* \tilde{\mathbf{w}} t \right) dx + M \dot{\mathbf{w}}^*(0, t) \tilde{\mathbf{w}}(0, t)|_0^{t_e} \\ &- \int_0^{t_e} M \ddot{\mathbf{w}}^*(0, t) \tilde{\mathbf{w}}(0, t) dt - \int_0^{t_e} \left(p(x) \mathbf{w}_x^* \tilde{\mathbf{w}}|_0^L - \int_0^L \tilde{\mathbf{w}} \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \mathbf{w}_x^*) dx \right) dt \\ &+ \int_0^{t_e} F \tilde{\mathbf{w}}(0, t) dt = 0 \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, dass die Variation $\tilde{\mathbf{w}}$ zu den Anfangs- und Endzeitpunkten verschwindet und vertauscht wiederum die Integrationsreihenfolgen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_e} \int_0^L \left(-\rho \ddot{\mathbf{w}}^* + \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \mathbf{w}_x^*) \right) \tilde{\mathbf{w}} \, dx \, dt \\ & + \int_0^{t_e} (p(0) \mathbf{w}_x^*(0, t) - M \ddot{\mathbf{w}}^*(0, t) + F) \tilde{\mathbf{w}}(0, t) - p(L) \mathbf{w}_x^*(L, t) \tilde{\mathbf{w}}(L, t) \, dt = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Die Bedingung (13) muss unabhängig von den Variationen $\tilde{\mathbf{w}}$ bzw. für alle möglichen Variationen $\tilde{\mathbf{w}}$ gelten. Dies ist nur möglich falls für \mathbf{w}^* und deren örtliche bzw. zeitliche Ableitungen gilt:

$$-\rho \ddot{\mathbf{w}}^* + \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \mathbf{w}_x^*) = 0 \quad (14)$$

$$F - M \ddot{\mathbf{w}}^*(0, t) + p(0) \mathbf{w}_x^*(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$p(L) \mathbf{w}_x^*(L, t) = 0 \quad (16)$$

Gleichung (14) ist die gesuchte partielle Differentialgleichung für die Bewegung der Kette. Über die beiden Gleichungen (15) und (16) werden die Randbedingungen für die Bewegung gesetzt. Da im Folgenden keine Variationen mehr betrachtet werden, wird zur besseren Übersichtlichkeit \mathbf{w}^* durch \mathbf{w} ersetzt. Damit lauten Bewegungsgleichung und Randbedingungen:

$$-\rho \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = 0 \quad (17)$$

$$F - M \ddot{\mathbf{w}}(0, t) + p(0) \mathbf{w}_x(0, t) = 0 \quad (18)$$

$$p(L) \mathbf{w}_x(L, t) = 0 \quad (19)$$

Aufgabe 1:

1. Betrachten Sie die Randbedingung (18). Wie hätten Sie diese Gleichung unter Verwendung bekannter mechanischer Erhaltungssätze (z.B. Impulssatz) bestimmen können?
2. Bei der Steuerung bzw. Regelung von verteilparametrischen Systemen unterscheidet man, ob der Eingriff am Rand oder im Inneren des Systems stattfindet. Welcher Fall liegt bei der Kette bezüglich der Kraft F vor? Welche Situation ergebe sich bezüglich einer Windlast $F_{wind}(x, t)$?
3. Betrachten Sie die Randbedingung (19). Können Sie anhand dieser eine Aussage bezüglich $\mathbf{w}_x(L, t)$ treffen?
4. In Vorbereitung auf den Entwurf der Regelung, soll die Energie der Kette E_k (ohne Wagen) betrachtet werden:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{\mathbf{w}}^2 + p(x) \mathbf{w}_x^2 \, dx \quad (20)$$

Bestimmen Sie die zeitliche Ableitung von (20). Leiten Sie hierzu zuerst den Integranden nach der Zeit ab. Führen Sie anschließend eine geeignete partielle Integration in x aus, so dass Sie im Integral $\dot{\mathbf{w}}$ ausklammern können. Zeigen Sie schließlich, dass für die Änderung der Energie gilt

$$\dot{E}_k = -g\rho L \varphi v, \quad (21)$$

wobei $v(t) = \dot{\mathbf{w}}(0, t)$ die Geschwindigkeit des Wagens bezeichnet.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Flachheitsbasierte Steuerung

Ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (22)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathbb{R}$ wird als *flach* bezeichnet, falls ein (realer oder fiktiver) Ausgang

$$y = y(\mathbf{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad \alpha \in \mathbb{N}_0 \quad (23)$$

existiert, so dass aus y und den zeitlichen Ableitungen von y der Zustand \mathbf{x} und der Eingang u analytisch bestimmt werden können.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta)}) \quad \beta \in \mathbb{N}_0 \quad (24)$$

$$u = u(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta+1)}) \quad (25)$$

Falls dementsprechend in einem System die zu regelnde bzw. zu steuernde Größe einen flachen Ausgang darstellt, kann mittels (25) für eine Wunschtrajektorie ein entsprechendes Eingangssignal bestimmt werden. Somit stellt die Flachheit speziell für die Bestimmung einer Steuerung eine nützliche Systemeigenschaft dar.

Für die Kette kann gezeigt werden, dass die Position des unteren Endes der Kette, d.h. die Auslenkung $\mathbf{w}(L, t)$, ein flacher Ausgang ist. Wird der flache Ausgang als

$$y(t) = \mathbf{w}(L, t) \quad (26)$$

definiert, so ergibt sich daraus die Auslenkung der gesamten Kette zu (Herleitung für Interessierte siehe Anhang):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\sqrt{(L-x)/g} \sin \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y(t + 2\sqrt{(L-x)/g} \sin \eta) d\eta \end{aligned} \quad (27)$$

Hierbei ist zu beachten, dass es sich beim Integranden um die Auslenkung des Kettenendes zum Zeitpunkt $(t + 2\sqrt{(L-x)/g} \sin \eta)$ handelt und nicht um eine Multiplikation mit $(t + 2\sqrt{(L-x)/g} \sin \eta)$!

Laut (27) gehen in die Berechnung der Auslenkung $\mathbf{w}(x, t)$ zum Zeitpunkt t sowohl vergangene Werte wie auch zukünftige Werte des flachen Ausgangs y ein. Dieser Umstand verhindert die Nutzbarkeit des flachen Ausgangs nicht. Allerdings muss die gewünschte Trajektorie für den flachen Ausgang für ein entsprechend großes Zeitintervall definiert werden.

3.2 Ljapunow bzw. Energie basierter Reglerentwurf mit Backstepping

Um Störungen auszuregeln, die auf das System wirken, wird der flachheitsbasierten Steuerung eine Regelung überlagert. Für die Auslegung der Regelung wird zunächst die Geschwindigkeit des Wagens so vorgegeben, dass die Schwingungsenergie der Kette permanent abnimmt. Da die Geschwindigkeit des Wagens nicht direkt vorgebbar ist, wird mit Hilfe der Backstepping Methode ein Regelgesetz für die Beschleunigung des Wagens entworfen, welches tatsächlich realisiert werden kann. Das Vorgehen hierzu ist im Folgenden beschrieben.

Im Folgenden wird ein nichtlineares, steuerungsaffines System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})z \quad (28)$$

mit dem Eingang z betrachtet und angenommen, dass eine Rückführung $z = r(\mathbf{x})$ bekannt sei, welche die gewünschte Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabilisiere. Ferner existiere eine Ljapunow-Funktion $V_0(\mathbf{x})$, mit welcher die asymptotische Stabilität der Ruhelage bei Verwendung des Regelgesetzes $z = r(\mathbf{x})$ nachgewiesen werden kann. ($\left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}}\right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}r)$ sei demnach negativ definit.) Um die Kette zur Ruhe zu bringen, kann auf direktem Weg ein Regelgesetz bezüglich der Wagengeschwindigkeit angegeben werden. Die zugehörige Ljapunow-Funktion zum Nachweis der Stabilität entspräche in diesem Fall die Energie der Kette. Leider kann jedoch die Geschwindigkeit des Wagens nicht frei vorgegeben werden. Stattdessen kann lediglich eine Vorgabe der Kraft F des Elektromotors auf den Wagen, welche direkt dessen Beschleunigung entspricht, realisiert werden. Allgemein drückt sich dies in einer weiteren Differentialgleichung für den Zustand z aus:

$$\dot{z} = \gamma(\mathbf{x}, z) + u \quad (29)$$

Die Variable u entspricht dabei dem tatsächlichen Systemeingang. Ausgehend von der Rückführung $r(\mathbf{x})$ (welche stabilisierend wirkt, jedoch nicht realisierbar ist) und der Ljapunow-Funktion V_0 kann

mittels der Backstepping Methode systematisch eine realisierbare Regelung $u(\mathbf{x}, z)$ berechnet werden. Hierzu wird die folgende Ljapunow-Funktion verwendet:

$$V(\mathbf{x}, z) = V_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(z - r(\mathbf{x}))^2. \quad (30)$$

Die zeitliche Ableitung dieser Funktion lautet:

$$\dot{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}}_{\dot{V}_0} + (z - r) \left(\underbrace{\gamma(\mathbf{x}, z) + u}_{\dot{z}} - \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}}}_{\dot{r}} \right) \quad (31)$$

Wird $\dot{\mathbf{x}}$ durch $\mathbf{a} + \mathbf{b}z$ ersetzt und an geeigneter Stelle eine Null in Form von $\mathbf{b}r - \mathbf{b}r$ addiert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}r - \mathbf{b}r + \mathbf{b}z) + (z - r) \left(\gamma + u - \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}z) \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}r)}_{<0} + (z - r) \left(\left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{b} + \gamma + u - \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}z) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Ausgehend von (32) lautet ein Regelgesetz, welches \dot{V} negativ definit werden lässt:

$$u = - \left(\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{b} - \gamma + \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{a} + \mathbf{b}z) - k(z - r), \quad k > 0 \quad (33)$$

3.3 Bestimmung der Wagenbewegung über den flachen Ausgang

Wie in Kapitel 3.1 beschrieben, kann aus der Bewegung des Kettenendes der gesamte Zustand der Kette bestimmt werden. Zusammen mit der Randbedingung (18) lässt sich daraus die Kraft F_w bestimmen, welche zu der gewünschten Bewegung führt. Die gewünschte Steuerung soll dabei eine Kette, welche zum Zeitpunkt $t = t_0$ in Ruhe am Ort 0 befindet

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, t_0) &= 0 \\ \dot{\mathbf{w}}(x, t_0) &= 0, \end{aligned}$$

derart bewegen, dass zum Zeitpunkt $t = t_e$ die Kette ruhig an einem Ort h hängt

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(x, t_e) &= h \\ \dot{\mathbf{w}}(x, t_e) &= 0. \end{aligned}$$

Um dies zu erreichen, soll für den flachen Ausgang folgende Wunschtrajektorie $y_w(t)$ vorgegeben werden (siehe Abbildung 5):

$$y_w(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq t_1 \\ \gamma(t) = k \int_{t_1}^t (\tau - t_1)^2 (\tau - t_2)^2 d\tau & \text{falls } t_1 < t < t_2 \\ h & \text{falls } t_2 \leq t \end{cases} \quad (34)$$

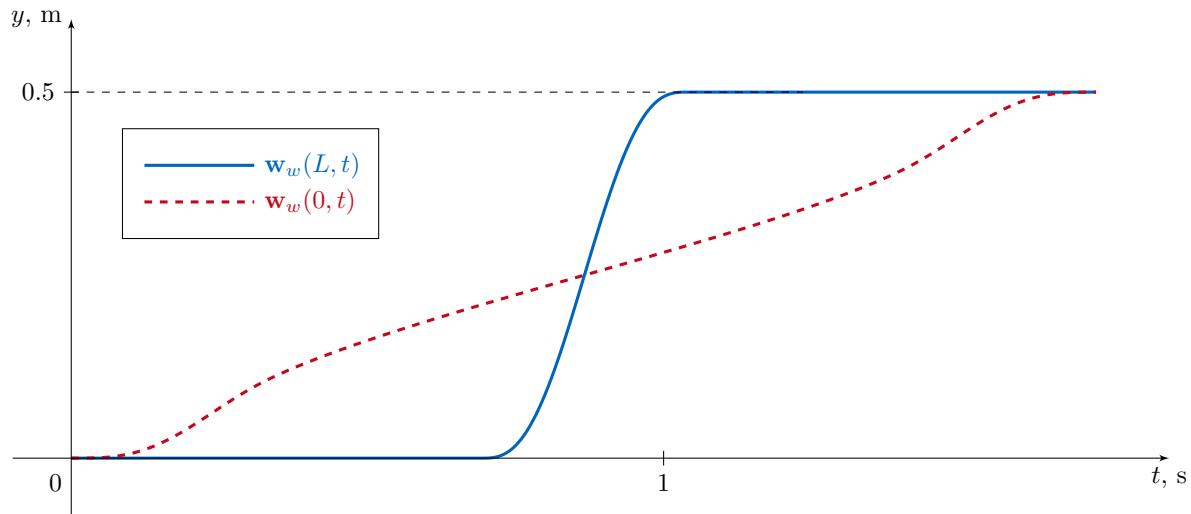


Abbildung 5: Wunschtrajektorien y_w für das freie Ketten Ende und $\mathbf{w}_w(0, t)$ die sich daraus ergebende Trajektorie für den Wagen

Die Konstante k wird dabei so gewählt, dass $\gamma(t_2) = h = 0.5 \text{ m}$ ist. Für die auftretenden Zeiten gilt

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + T \\ t_2 &= t_e - T \\ t_0 &= 0 \\ t_e &= 2.75T = 1.9 \text{ s} \\ T &= 2\sqrt{L/g} = 0.6995 \text{ s} \end{aligned}$$

Aus y_w kann mit Hilfe von (27) die Bewegung des Wagens bestimmt werden

$$\mathbf{w}_w(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_w(t + 2\sqrt{L/g} \sin \eta) \underbrace{d\eta}_T \quad (35)$$

Das Ergebnis ist ebenfalls in Abbildung 5 dargestellt.

Aufgabe 2:

Um hieraus die auf den Wagen wirkende Kraft $F_w(t)$ zu bestimmen, sollen folgende Punkte abgearbeitet werden:

1. Betrachten Sie die Randbedingung (18). Welche Signale müssen Sie bestimmen, um $F(t)$ berechnen zu können? Bestimmen Sie diese unter Verwendung von 27. Setzen Sie für y dabei nur symbolisch die Funktion y_w ein. Ziehen Sie auftretende Ableitungen in das Integral und führen Sie diese dort entsprechend der Kettenregel aus. (Hinweis $\frac{\partial y_w(t+f(x))}{\partial x} = \dot{y}_w \frac{\partial f}{\partial x}$) Setzen Sie erst am Ende $x = 0$ ein. (Andernfalls kann nicht nach x abgeleitet werden.) Im gesuchten Ergebnis darf demnach neben der Funktion y_w auch \dot{y}_w bzw. \ddot{y}_w auftreten.
2. Die in Abbildung 5 dargestellten Trajektorien wurden mit Hilfe des Matlab-Skripts `steuerung.m` und der Matlab Funktion `int_wagen_pos.m` erstellt. Ergänzen Sie die Funktionen `int_wagen_v.m`, `int_wagen_a.m` und `int_wagen_phi.m` entsprechend, so dass im Skript `steuerung.m` die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Wagens sowie der Kettenwinkel φ für die gewünschte Trajektorie y_w bestimmt werden. (Hinweis: in der Funktion `steuerung.m` sind bereits die Koeffizienten berechnet, welche sich bei der Integration der Funktion γ ergeben.)

3.4 Bestimmung der Regelung

Für die Bestimmung einer Regelung, welche die Differenz zwischen der tatsächlichen Kettenauslenkung $\mathbf{w}(x, t)$ und der im Aufgabenteil 3.2 bestimmten, gewünschten Kettenauslenkung $\mathbf{w}_w(x, t)$ ausregelt, soll die Notation

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(x, t) &= \mathbf{w}(x, t) - \mathbf{w}_w(x, t) \\ \dot{\mathbf{e}}(x, t) &= \dot{\mathbf{w}}(x, t) - \dot{\mathbf{w}}_w(x, t) \\ \mathbf{e}_x(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}_w(x, t) \\ \varphi_e &= \mathbf{e}_x(0, t) \\ v_e &= \dot{\mathbf{e}}(0, t) \\ y_e &= \mathbf{e}(0, t)\end{aligned}$$

verwendet werden (v_e bzw. y_e bezeichnet demnach den Fehler in der Geschwindigkeit bzw. der Position des Wagens). Da sowohl die tatsächliche als auch die gewünschte Bewegung der Kette die partielle Differentialgleichung (17) mit den Randbedingungen (18) und (19) erfüllen, gilt für den Fehler $\mathbf{e}(x, t)$ ebenfalls

$$-\rho \ddot{\mathbf{e}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} \right) = 0 \quad (36)$$

$$F_e - M \ddot{\mathbf{e}}(0, t) + p(0) \mathbf{e}_x(0, t) = 0 \quad (37)$$

$$p(L) \mathbf{e}_x(L, t) = 0 \quad (38)$$

wobei $\ddot{\mathbf{e}}(0, t) = \dot{v}_e$ und $F_e = F - F_w$ entspricht.

Aufgabe 3:

1. Ausgangspunkt für die Regelung sei die Ljapunow-Funktion V_0 :

$$V_0 = \frac{1}{2} \left(\int_0^L \underbrace{\rho(\dot{\mathbf{w}} - \dot{\mathbf{w}}_w)^2}_{\dot{\mathbf{e}}} + p \underbrace{(\mathbf{w}_x - \mathbf{w}_{w,x})^2}_{\mathbf{e}_x} dx + c \underbrace{(\mathbf{w}(0, t) - \mathbf{w}_w(0, t))^2}_{y_e} \right). \quad (39)$$

Zeigen Sie, dass für die zeitliche Ableitung von V_0 gilt:

$$\dot{V}_0 = (-\rho g L \varphi_e + c y_e) v_e \quad (40)$$

2. Wie müßte die Geschwindigkeitsdifferenz v_e in (40) gewählt werden, damit gilt

$$\dot{V}_0 = -\alpha (-\rho g L \varphi_e + c y_e)^2 \leq 0. \quad (41)$$

3. Die in der vorigen Aufgabe bestimmte Geschwindigkeitsdifferenz kann nicht direkt vorgegeben werden. Sei $r(\varphi_e, y_e)$ die gewünschte Geschwindigkeitsdifferenz und v_e der tatsächliche Wert. Wie muss \dot{v}_e gewählt werden, damit für die Ljapunow-Funktion

$$V = V_0 + \frac{1}{2}(v_e - r)^2 \quad (42)$$

gilt

$$\dot{V} = -\alpha (-\rho g L \varphi_e + c y_e)^2 - \beta(v_e - r)^2. \quad (43)$$

Gehen Sie hierzu vor, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben.

4. Entsprechend der Randbedingung (37) gilt im System der Abweichungen:

$$M \ddot{v}_e = \underbrace{\frac{U_e - k \omega_e}{R} k \cdot i \cdot \frac{1}{r}}_{\text{Zusatzkraft aus E-Motor}} + \underbrace{gL\rho\varphi_e}_{\text{Kraft von Kette}}$$

Hierbei seien:

- M effektive bewegte Masse
- i Getriebeübersetzung zwischen Motor und Spannrolle
- r Radius der Spannrolle
- ω_e Differenz zwischen Ist- und Wunsch-Motordrehzahl
- k Motorkonstante
- L Länge der Kette
- ρ Masse der Kette pro Länge

Bestimmen Sie unter Verwendung von $\omega_e = iv_e/r$ die Zusatzspannung U_e in Abhängigkeit von v_e , \dot{v}_e und φ_e , welche Sie der Steuerung überlagern müssen, damit sich die gewünschte Beschleunigung \ddot{v}_e ergibt. (Setzen Sie keine Zahlenwerte ein!)

Versuchsdurchführung

Lesen Sie sich die Aufgabe vor dem Versuchstermin aufmerksam durch. Nach Ende des Versuchstermins fertigen Sie ein Protokoll an, das für jede der nachfolgenden Aufgaben alle relevanten Aspekte, Ideen, Beobachtungen, Maßnahmen, Besonderheiten etc. beinhaltet. Ergänzen Sie Ihr Protokoll um Plots von repräsentativen Messungen. Benennen Sie dabei die einzelnen Signale und Achsen und markieren Sie wichtige Stellen. Bitte geben Sie Ihr Protokoll zu den Präsenzaufgaben innerhalb von zwei Wochen nach Durchführung des Versuchs bei Ihrem Betreuer ab.

Aufgabe 4:

1. Kopieren Sie alle Files im Ordner E:\Versuch_Kette in ein Verzeichnis Ihrer Wahl auf Ihrem Home-Laufwerk Z:\. Legen Sie dort auch die von Ihnen vorbereiteten Matlab-Funktionen `int_wagen_v.m`, `int_wagen_a.m` und `int_wagen_phi.m` ab.
2. Starten Sie das Matlab-Skript `initialisierung.m`. Ihr Betreuer wird Ihnen erklären, welche Schritte zum Aufbau der Verbindung zum xPC-Target System nötig sind.
3. Öffnen Sie das Simulink-File `Template\Regelung.slx` und ergänzen Sie die rot markierten Blöcke entsprechend den Ergebnissen aus Ihrer Hausaufgabe.
4. Compilieren und Testen Sie Ihre Regelung. Prüfen Sie die Qualität dieses und der folgenden Ergebnisse mithilfe der Kameraauswertung. Ihr Betreuer wird Sie in die Bedienung einweisen.
5. Untersuchen Sie, wie sich eine Veränderung des Parameters α auf die Regelung auswirkt. (Testen Sie z.B. $\alpha = 3$ und $\alpha = 0.1$)
6. Untersuchen Sie, wie sich eine Veränderung des Parameters c auf die Regelung auswirkt. (Testen Sie z.B. $c = 50$ und $c = 5$.)
7. Verändern Sie die Zeit t_{ende} für das Verfahren der Kette im Matlab-Skript `steuerung.m`. (Testen Sie z.B. $t_{ende} = 2.3 T$, $t_{ende} = 2.5 T$ und $t_{ende} = 3 T$) Wieso verschlechtern sich die Ergebnisse für kürzere Zeiten?

Daten, Konstanten, Zusätzliche Herleitungen

Beschreibung	Wert	Einheit
Masse des Wagens	0.94	kg
Masse des Aufbaus	0.45	kg
Übersetzung zwischen Motor und Spannrolle	3	-
Trägheitsmoment des Motors	$25 \cdot 10^{-5}$	kg m ²
Vorschub des Riementriebs pro Umdrehung	0.15	m
Motorkonstante	0.268	Nm/A
Masse der Kette pro Länge	2.3	kg/m
Länge der Kette	1.2	m

Herleitung der potentiellen Energie von Kette mit Wagen

(wird nicht abgefragt)

Die potentielle Energie der Kette ergibt sich daraus, dass durch die Auslenkung der Kette die Kettenglieder angehoben werden. Der Zusammenhang zwischen der Auslenkung $\mathbf{w}(x)$ und dem Versatz u in Richtung von x kann aus Abbildung 6 hergeleitet werden. Hierzu lassen sich folgende Zusammenhänge angeben:

$$\begin{aligned} u(x + dx) &= u(x) + u' dx \\ \mathbf{w}(x + dx) &= \mathbf{w}(x) + \mathbf{w}' dx \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} (dx - u' dx)^2 + (\mathbf{w}' dx)^2 &= dx^2 \\ \Rightarrow u' &= 1 - \sqrt{1 - (\mathbf{w}')^2} \end{aligned}$$

Der Zusammenhang geht aus der Ausrichtung des Elements der Länge dx hervor. Dieses wird durch Projektion auf die beiden Koordinatenachsen in seinen vertikalen und horizontalen Anteil aufgeteilt. Für kleine Werte von \mathbf{w}' kann u' über eine Taylorentwicklung um $\mathbf{w}' = 0$ approximiert werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (\mathbf{w}')^2} &= 1 + 0 \cdot \mathbf{w}' - 1 \cdot \frac{(\mathbf{w}')^2}{2} + \dots \\ \Rightarrow u' &= 1 - \sqrt{1 - (\mathbf{w}')^2} \approx \frac{(\mathbf{w}')^2}{2} \end{aligned}$$

Die Kraft, welche dem Anheben an der Stelle x entgegen wirkt, ist die Gewichtskraft der restlichen Kette $p(x) = (L - x)g\rho$. Folglich bestimmt sich die potentielle Energie eines infinitesimal kleinen Kettengliedes zu:

$$dE = pdu = pu' dx = p \frac{(\mathbf{w}')^2}{2} dx$$

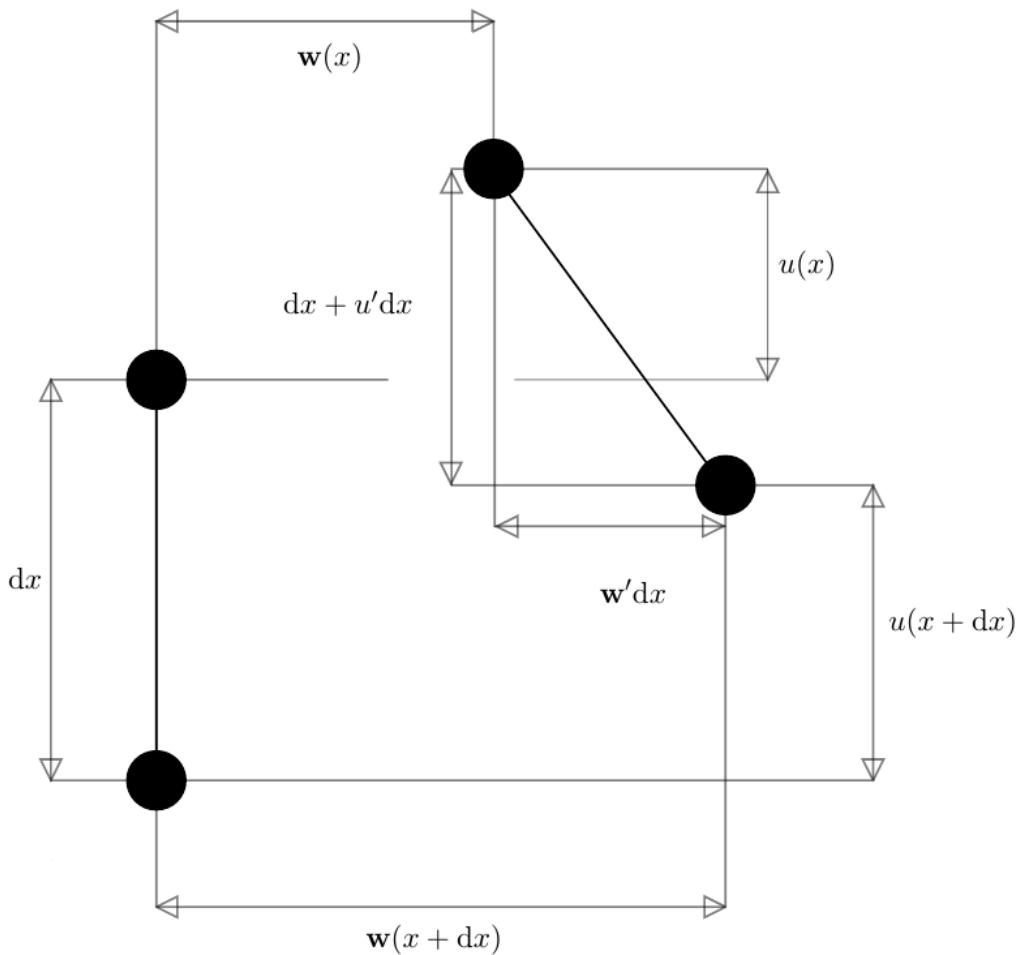


Abbildung 6: Anheben eines infinitesimalen Elements

Werden diese Energien über die Länge der Kette integriert, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$E = \int_0^L p \frac{(\mathbf{w}')^2}{2} \, dx. \quad (44)$$

Um die Bewegung bzw. die Ableitung der Zustände zu einem Zeitpunkt zu bestimmen, ist nur der Zustand des Systems und die zu diesem Zeitpunkt von außen angreifenden Kräfte relevant. Folglich bewirkt eine zeitvariante äußere Kraft zu einem Zeitpunkt die gleichen Ableitungen der Zustände wie eine konstante Kraft mit gleicher Amplitude. Eine konstante äußere Kraft würde im vorliegenden Fall bezüglich des Punktes $\mathbf{w}(0, t) = 0$ zu einem Potential von $-F\mathbf{w}(0, t)$ führen. Folglich kann auch die äußere Kraft $F = F(t)$ über den Term $-F(t)\mathbf{w}(0, t)$ berücksichtigt werden.

Herleitung für den Zusammenhang zwischen dem flachen Ausgang und der Auslenkung der Kette

(wird nicht abgefragt)

Zunächst wird die beschreibende Differentialgleichung folgender Koordinatentransformation unterzogen:

$$z = 2\sqrt{\frac{L-x}{g}} \quad (45)$$

Hieraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen nach x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\dots) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(\dots) = -\frac{2}{gz} \frac{\partial}{\partial z}(\dots) \quad (46)$$

Wird dies in die partielle Differentialgleichung eingesetzt

$$-\rho \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\underbrace{g\rho(L-x)}_{p(x)} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{0}$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\ddot{\mathbf{w}} + \left(-\frac{2}{gz}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{z^2 g}{4} \left(-\frac{2}{gz}\right) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}\right) &= \mathbf{0} \\ -\ddot{\mathbf{w}} + \frac{1}{z} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (47)$$

Die transformierte partielle DGL (47) wird nun unter der Annahme homogener Anfangsbedingungen $\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{0}$ einer Laplace-Transformation unterzogen ($\mathbf{w}(z, t) \rightarrow \mathbf{W}(z, s)$) und mit z^2 multipliziert:

$$-z^2 s^2 \mathbf{W} + z \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} + z^2 \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial z^2} = \mathbf{0} \quad (48)$$

Durch eine weitere Variablentransformation

$$\hat{z} = jsz \quad (49)$$

ergibt sich in Analogie zu der in Gleichung (46) gegebenen Vorschrift zur Transformation der Ableitungen aus (48) folgende Gleichung:

$$\hat{z} \mathbf{W}(\hat{z}, s) + \frac{\partial \mathbf{W}(\hat{z}, s)}{\partial \hat{z}} + \hat{z} \frac{\partial^2 \mathbf{W}(\hat{z}, s)}{\partial \hat{z}^2} = \mathbf{0} \quad (50)$$

Dies ist eine Bessel-Differentialgleichung 0-ter Ordnung in \hat{z} . Die Lösung dieser DGL setzt sich zusammen aus den Bessel-Funktionen 1. Art $J_0(\hat{z})$ und 2. Art $Y_0(\hat{z})$:

$$\mathbf{W}(\hat{z}, s) = A J_0(\hat{z}) + B Y_0(\hat{z}) \quad (51)$$

mit

$$\begin{aligned} J_0(\hat{z}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\hat{z} \sin \eta} d\eta \\ Y_0(\hat{z}) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{J_p(\hat{z}) \cos(p\pi) - J_{-p}(\hat{z})}{\sin(p\pi)} \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass Y_0 für $\hat{z} \rightarrow 0$ gegen ∞ geht, während $J_0(0) = 1$ ist. Daraus kann gefolgert werden, dass $B = 0$ und $A = \mathbf{W}(0, s)$. Die Lösung verkürzt sich damit auf:

$$\mathbf{W}(\hat{z}, s) = \mathbf{W}(0, s)J_0(\hat{z}). \quad (52)$$

Durch die Rücktransformation

$$\hat{z} = 2js\sqrt{\frac{L-x}{g}}$$

ergibt sich für die Lösung im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(x, s) &= \mathbf{W}(L, s)J_0(2js\sqrt{(L-x)/g}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{W}(L, s) \exp\left(-2s\sqrt{\frac{L-x}{g}} \sin \eta\right) d\eta \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, dass $\mathbf{W}(L, s)$ die Laplace-Transformierte der Auslenkung an der Stelle $x = L$, damit genau der Laplace-Transformierte des flachen Ausgangs $y(t)$ entspricht und dass $\exp(-Ts)$ ein Totzeitglied darstellt, so ergibt sich für die Lösung im Zeitbereich:

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \left(t - 2\sqrt{\frac{L-x}{g}} \sin \eta \right) d\eta \quad (53)$$

Aufgrund des \sin im Argument von y und der symmetrischen Integrationsgrenzen, lässt sich alternativ angeben:

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \left(t + 2\sqrt{\frac{L-x}{g}} \sin \eta \right) d\eta \quad (54)$$

Literatur

Backstepping

H.K. Khalil: Nonlinear Systems. Prentice-Hall, 2000.

Regelung (energiebasierter Ansatz + Backstepping)

D. Thull, D. Wild, A. Kugi: Infinit-dimensionale Regelung eines Brückenkrans mit schweren Ketten. Automatisierungstechnik S.400-410 8/2005.

Flacher Ausgang

N. Petit, P. Rouchon: Flatness of heavy chain systems. Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2002.