信号与系统作业
Homework

尹超

中国科学院大学，北京 100049

Carter Yin

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者信号与系统的作业。
望老师批评指正。

目录

Homework 1 2024.09.03

1.1 习题总结

$Ev\left\{\sin(4\pi t)u(t)\right\} = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)u(t) + \frac{1}{2}\sin(-4\pi t)u(-t) = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)u(t)$ $Od\left\{\sin(4\pi t)u(t)\right\} = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)u(t) - \frac{1}{2}\sin(-4\pi t)u(-t) = \frac{1}{2}\sin(4\pi t)u(t)$

求基波周期时，先假设一个周期 T，代入函数中，求解得到 T，或者无解。

Homework 2 2024.9.5

2.1 习题总结

一般复指数信号

$$C, a \text{ 分别写成} C = |C|e^{j\theta}, a = r + j\omega_0$$

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t} = |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)} = |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

- $|C|e^{rt}$ 提供包络线，显示变化趋势

周期性质（C, α 一般为复常数和连续时间复指数信号完全不同）

- 连续时间复指数信号 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 是以 $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$（s）为基波周期的信号，$\omega_0$ 越大周期越短，振荡越快
- 在频率上，显然有 $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2k\pi n} = e^{j(\omega_0+2k\pi)n}$，$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$，因此频率是以 2π 为周期的，低频部分在 0 和 2π 附近，高频部分在 π 附近；只需在任意的一个 2π 间隔内考虑 ω_0，一般取 $[0, 2\pi)$ 或者 $[-\pi, \pi)$
- 在（时间）周期上，假设周期为 N，那么有

  $$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0 N} \Rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Rightarrow \omega_0 N = 2\pi m \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

  当 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 为有理数，$e^{j\omega_0 n}$ 才是周期信号，其基波频率为（假设 N, m 无公因子）：

  $$\frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m} \quad \text{（不是 } \omega_0\text{）}$$

  基波周期为：$N = \frac{2\pi m}{|\omega_0|}$
  例：$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$，$\omega_0 = \frac{8\pi}{31}$，$m = 4$，$N = 31$；基波频率为：$\frac{2\pi}{31}$，样本每隔 31 个点才重复

2.2 系统及基本性质

- 连续时间系统：系统的输入和输出信号皆为连续时间信号，$x(t) \to y(t)$ 统一成一阶常系数线性微分方程的形式：

  $$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

- 离散时间系统：系统的输入和输出信号皆为离散时间信号，$x[n] \to y[n]$ 统一成一阶常系数线性差分方程的形式：

  $$y[n] - ay[n-1] = bx[n]$$

- 有记忆系统与无记忆系统一个系统的输出如果只取决于系统的当前输入，称为无记忆系统（又称即时系统）例如：

  $$y(t) = Rx(t) \quad \text{（电阻电路）}$$

  $$y(t) = x(t)$$

  $$y[n] = x[n] \quad \text{（恒等系统）}$$

  否则称为有记忆系统（动态系统）例如：

  $$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \text{（电容）}$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]+x[n]\Rightarrow y[n]-y[n-1]=x[n]\quad\text{（累加器）}$$

$$y[n]=x[n-1]\quad\text{（延时器）}$$

$$y[n]=x[n]-x[n-1]\quad\text{（差分器）}$$

- 可逆性与可逆系统
  一个系统如果输入不同则输出不同，那么系统就是可逆的；一个系统如果是可逆的，那么存在一个逆系统，级联原系统后的输出就等于原系统的输入
  - 乘法器 $y(t)=2x(t)$ 的逆系统为 $w(t)=0.5y(t)$
  - 累加器 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 逆系统为差分器 $w[n]=y[n]-y[n-1]$
  - $y(t)=x^2(t)$ 不是可逆的；通信中的编码器是一个典型的可逆系统，解码器是其逆系统
- 因果性
  如果一个系统在任何时刻的输出只取决于现在及过去的输入，就称为因果系统
  - 因果系统例子：累加器、（后向）差分器（$y[n]-y[n-1]$）、$y(t)=x(t)-\cos(t+1)$
  - 非因果系统例子：$y(t)=x(t)-x(t+1)$、$y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x[n-k]$
  - 一切以时间为自变量的可物理实现的系统都是因果的
  - 所有的无记忆系统都是因果的
- 稳定性
  一个系统如果输入信号是有界的，输出信号也是有界的，则称系统是稳定的。
  - 稳定系统例子：RC 电路、汽车系统（输入为力 $f(t)$，输出为速度 $v(t)$，平衡点为 $V=\frac{F}{\rho}$）、$y(t)=e^{x(t)}$
  - 不稳定系统例子：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]=(n+1)u[n]$、$y(t)=tx(t)$
  - 实际系统一般存在能量消耗，如电阻的耗能、摩擦的耗能；想象一下如果汽车的摩擦系数 $\rho=0$？
- 时不变性
  直观来讲，系统的特性和行为不随时间而改变的系统为时不变系统。
  - RC 电路中的 R 和 C 不随时间而变化
  - 汽车系统中的摩擦系数 ρ 和质量 m 不随时间而变化
  - 数学上：当输入信号有一个时移，在输出信号产生同样的时移，则为时不变系统
    * 如果 $x(t)\to y(t)$，则有 $x(t-t_0)\to y(t-t_0)$
    * 如果 $x[n]\to y[n]$，则有 $x[n-n_0]\to y[n-n_0]$

  判断一个系统是否时不变方法：
  - 直观判断方法: 若 $y(\cdot)$ 前出现变系数、或有反转、展缩变换，则系统为时变系统
  - 一般性步骤：
    (1) 令输入为 $x_1(t)=x(t-t_0)$，得到输出为 $y_1(t)$
    (2) 如果 $y(t-t_0)$ 与 $y_1(t)$ 相同，则为时不变系统
- 例 1：$y(t)=\sin[x(t)]$
  - 直观判断为时不变系统
  - 证明：
    * 步骤 1：$x_1(t)=x(t-t_0)\Rightarrow y_1(t)=\sin[x(t-t_0)]$
    * 步骤 2：$y(t-t_0)=\sin[x(t-t_0)]=y_1(t)$

    因此为时不变系统
- 例 2：$y[n]=nx[n]$

- 直观判断不是时不变系统
- 证明：
  - 步骤 1：$x_1[n] = x[n-n_0] \Rightarrow y_1[n] = nx[n-n_0]$
  - 步骤 2：$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0] \neq y_1[n]$

  因此不是时不变系统

• 线性

  满足可加性和齐次性的系统是线性系统
  - 可加性：$x_1 \to y_1, x_2 \to y_2$，则有 $x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$
  - 齐次性（比例性）：$x \to y$，则有 $ax \to ay$，a 为任意复常数
  - 零输入产生零输出（齐次性）

  两者组合得到线性系统的叠加性

  叠加性：如果系统对信号 $x_k(t)$ 的响应为 $y_k(t)$，$k = 1, 2, 3, \ldots$，那么系统对信号 $x(t) = \sum_k x_k(t)$ 的响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_k y_k(t)$$

  离散时间线性系统同上

  判断一个系统"$\to$"是否线性系统的一般性步骤（$a, b, x(t), y(t)$ 可为复数）：

  (1) $x_1(t) \to y_1(t)$，$x_2(t) \to y_2(t)$

  (2) 设 $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to y_3(t)$

  (3) 如果 $y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$，则系统为线性的

  本质利用"线性"的定义

• 例 1：证明系统 $y(t) = tx(t)$ 是线性的
  - 步骤 1：$y_1(t) = tx_1(t)$，$y_2(t) = tx_2(t)$
  - 步骤 2：$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow y_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)]$
  - 步骤 3：$ay_1(t) + by_2(t) = atx_1(t) + btx_2(t) = y_3(t)$
  - 因此系统是线性的

• 例 2：证明 $y(t) = x^2(t)$ 是非线性的
  - 步骤 1：$y_1(t) = x_1^2(t)$，$y_2(t) = x_2^2(t)$
  - 步骤 2：$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow y_3(t) = [ax_1(t) + bx_2(t)]^2$
  - 步骤 3：$ay_1(t) + by_2(t) = ax_1^2(t) + bx_2^2(t) \neq y_3(t)$
  - 因此系统不是线性的

• 例 3：判断 $y(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\}$ 是否为线性
  - 步骤 1：$y_1(t) = \mathrm{Re}\{x_1(t)\}$，$y_2(t) = \mathrm{Re}\{x_2(t)\}$
  - 步骤 2：$x_3(t) = jx_1(t) + jx_2(t) \Rightarrow y_3(t) = -\mathrm{Im}\{x_1(t) + x_2(t)\}$
  - 步骤 3：$j\mathrm{Re}\{x_1(t)\} + j\mathrm{Re}\{x_2(t)\} \neq y_3(t)$
  - 因此系统不是线性的

• 例 4
  - 例 4：$y[n] = 2x[n] + 3$
  - 容易验证系统不是线性的。但此系统输出信号的增量与输入信号的增量满足线性关系，此类系统称为增量线性系统
  - 当 $y_0 = 0$，系统输出 y 只取决于输入 x，称为系统的零状态响应（线性系统）
  - 当 $x = 0$，系统输出 y 只取决于 y_0，称为系统的零输入响应
  - 完全响应 = 零状态响应 + 零输入响应

考虑周期离散时间指数时间信号

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}$$

证明该信号的基波周期是

$$N_0 = N/\gcd(m, N)$$

其中 $\gcd(m, N)$ 是 m 和 N 的**最大公约数**(greatest common divisor),也就是将 m 和 N 都能约成整数的最大整数,例如

$$\gcd(2,3) = 1, \quad \gcd(2,4) = 2, \quad \gcd(8,12) = 4$$

注意:若 m, N 无公因子,则 $N_0 = N$。

1.35

证明: 设基波周期 N_0.

$$x[n] = x[n+N_0] = e^{jm(2\pi/N)(n+N_0)} = e^{jm(2\pi/N)n} e^{jm(2\pi/N)N_0}$$

$$2\pi \cdot \frac{m}{N} \cdot N_0 = k \cdot 2\pi$$

$$\frac{m}{N} \cdot N_0 = k$$

$$N_0 = k\frac{N}{m} \text{ 为整数}$$

若 $\gcd(N,m) = 1$, 则 $N_0 = N$

若 $\gcd(N,m) \neq 1$, 则 $N_0 = \frac{N}{\gcd(m,N)}$

Homework 3 2024.9.10

计算下列各对信号的卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$。

(a) $\left.\begin{array}{l} x[n]=\alpha^n u[n] \\ h[n]=\beta^n u[n] \end{array}\right\} \alpha \neq \beta$ (b) $x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

(c) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$, $h[n]=4^n u[2-n]$ (d) $x[n]$和$h[n]$如图 P2.21 所示。

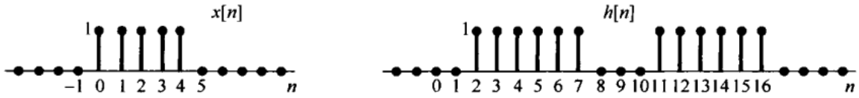

图 P2.21

计算下列各对信号的卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$。

(a) $x[n]=\alpha^n u[n], h[n]=\beta^n u[n], \alpha \neq \beta$

卷积的定义为：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

代入 $x[n]=\alpha^n u[n]$ 和 $h[n]=\beta^n u[n]$，得到：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k}$$

因为 $\alpha \neq \beta$，使用几何级数的求和公式：

$$y[n]=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}u[n]$$

(b) $x[n]=h[n]=\alpha^n u[n]$

这时，两个信号相同，代入卷积公式：

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \alpha^{n-k}$$

$$y[n]=\alpha^n \sum_{k=0}^{n} 1=(n+1)\alpha^n u[n]$$

(c) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4], h[n]=4^n u[2-n]$

首先，将卷积定义代入：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

对于 $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$ 和 $h[n]=4^n u[2-n]$，我们可以观察到它们的支持范围并计算卷积。由于 $x[n]$ 和 $h[n]$ 都是有限支持的，非零的卷积求和范围可以限制在有效值上。

(d) 如图 P2.21 所示的卷积

给定图 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的信号，我们通过使用卷积的定义：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

可以看到，$x[n]$ 从 $n=0$ 到 $n=5$ 有值，而 $h[n]$ 从 $n=9$ 到 $n=16$ 有值，因此可以手动计算每一个 n 值下的卷积结果。注意，$y[n]$ 只在 $n=9$ 到 $n=21$ 之间有非零值。

通过图像上的卷积积分计算，我们得到 $y[n]$ 在每个 n 值下的精确值。

Homework 4 2024.9.19

4.1 习题 2.22

2.22 对以下各对波形求单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$，并概略画出结果。

(a) $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$，$h(t)=e^{-\beta t}u(t)$（分别在 $\alpha\neq\beta$ 和 $\alpha=\beta$ 时完成）

(b) $x(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-5)$，$h(t)=e^{2t}u(1-t)$

(c) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(a) 所示。

(d) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(b) 所示。

(e) $x(t)$ 和 $h(t)$ 如图 P2.22(c) 所示。

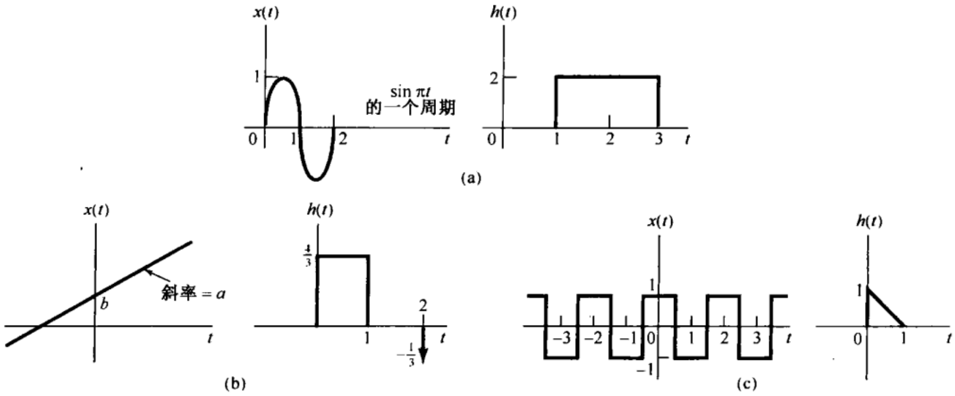

图 P2.22

题目: 对以下各对波形求单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统对输入 $x(t)$ 的响应 $y(t)$

(a) $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ 和 $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$ 的卷积

卷积公式为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

带入 $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ 和 $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$，卷积式变为：

$$y(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau$$

化简为：

$$y(t)=e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}d\tau$$

分为两种情况：

- 当 $\alpha\neq\beta$ 时：

$$y(t)=e^{-\beta t}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t)$$

- 当 $\alpha=\beta$ 时：

$$y(t)=e^{-\alpha t}\int_0^t 1d\tau=te^{-\alpha t}u(t)$$

因此卷积的结果为：

$$y(t)=\begin{cases}\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}u(t), & \alpha\neq\beta\\ te^{-\alpha t}u(t), & \alpha=\beta\end{cases}$$

(b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$ 和 $h(t) = e^{2t}u(1-t)$ 的卷积

首先，分段定义 $x(t)$：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而 $h(t) = e^{2t}u(1-t)$ 仅在 $t \leq 1$ 时非零。

卷积公式为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

在 $t \leq 1$ 的区间内，卷积积分为：

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{2(t-\tau)}x(\tau)d\tau$$

根据 $x(t)$ 的分段定义，可以分别计算不同区间内的积分，结合 $h(t)$ 的支撑区域，得出分段结果。

(c) 如图 P2.22(a) 所示的卷积

$x(t)$ 是一个周期为 2 的正弦波，$h(t)$ 是一个方波，支持范围在 $1 \leq t \leq 3$。

卷积公式为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由于 $h(t)$ 的支持范围为 $1 \leq t \leq 3$，在此区间内对正弦波进行卷积，计算重叠区域内的积分，得到结果。

(d) 如图 P2.22(b) 所示的卷积

$x(t)$ 是一个斜坡函数：

$$x(t) = at + b, \quad t \geq 0$$

而 $h(t)$ 是一个宽度为 1，高度为 $\frac{1}{3}$ 的矩形脉冲，定义为：

$$h(t) = \frac{1}{3}u(t) - \frac{1}{3}u(t-1)$$

卷积公式为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

将 $h(t)$ 的定义带入后，可以分区间对斜坡函数和矩形脉冲进行卷积计算，最终得出卷积结果。

(e) 如图 P2.22(c) 所示的卷积

$x(t)$ 是一个阶跃信号，而 $h(t)$ 是一个从 1 线性下降到 0 的三角脉冲，定义为：

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

卷积公式为：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由于 $h(t)$ 是分段函数，卷积将分段进行计算。结合 $x(t)$ 的分段定义，计算每个区间的重叠区域，得出卷积结果。

有记忆和无记忆系统

2.28 下面均为离散时间线性时不变系统的单位脉冲响应，试判定每一系统是否是因果和/或稳定的。陈述理由。

(a) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ (b) $h[n]=(0.8)^n u[n+2]$ (c) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

(d) $h[n]=(5)^n u[3-n]$ (e) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(1.01)^n u[n-1]$

(f) $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(1.01)^n u[1-n]$ (g) $h[n]=n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

2.29 下面均为连续时间线性时不变系统的单位冲激响应，试判定每一系统是否是因果和/或稳定的。陈述理由。

(a) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$ (b) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$ (c) $h(t)=e^{-2t}u(t+50)$

(d) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$ (e) $h(t)=e^{-6|t|}$ (f) $h(t)=te^{-t}u(t)$

- 一个系统的输出如果只取决于系统的当前输入，称为无记忆系统（又称即时系统），否则称为有记忆系统
- 对于离散 LTI 系统，$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$，无记忆意味着对于 $k\neq 0$ 有 $h[k]=0$，即 $y[n]=h[0]x[n]=Kx[n]$，$K=h[0]$ 为常数；令 $x[n]=\delta[n]$，得到 $h[n]=K\delta[n]$
- 无记忆 LTI 系统的单位脉冲响应为脉冲函数
- 对于连续 LTI 系统，$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$，无记忆意味着对于 $\tau\neq t$ 有 $h(t-\tau)=0$，也即 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)h(0)d\tau=Kx(t)$，$K=\int_{-\infty}^{\infty}h(0)d\tau$ 为常数；令输入为 $\delta(t)$，得到 $h(t)=K\delta(t)$
- 系统的单位冲激响应为冲激函数
- 令 $K=1$，得到 $y[n]=x[n]=x[n]*\delta[n]$，$y(t)=x(t)=x(t)*\delta(t)$
- 信号与单位冲激（脉冲）函数卷积得到自身，也即单位冲激（脉冲）函数的筛选性质

可逆性

- 一个系统如果是可逆的，那么存在一个逆系统，级联原系统后的输出就等于原系统的输入，也即级联后的系统冲激响应为 $\delta(t)$，也即

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad \text{或} \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

- 例 1 $y(t)=x(t-t_0)$，求其逆系统。
  令 $x(t)=\delta(t)$，得到 $h(t)=\delta(t-t_0)$，有 $y(t)=x(t-t_0)=x(t)*h(t)=x(t)*\delta(t-t_0)$。
  一个信号与时移冲激（脉冲）信号的卷积就是信号的时移：

$$\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)\Rightarrow h_1(t)=\delta(t+t_0)$$

- 例 2 $h[n]=u[n]$，求其逆系统。
  有 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$。
  一个信号与阶跃脉冲（冲激）函数的卷积是信号的累加（积分）。
  已知：$u[n]-u[n-1]=\delta[n]$，

$$h[n]*h_1[n]=u[n]-u[n-1]=u[n]*\delta[n]-u[n]*\delta[n-1]=u[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])$$

  因此，$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$。

因果性

一个因果系统的输出只取决于系统的过去和现在的输入。

对于离散时间因果 LTI 系统，

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

(g) $h(t)=(2e^{-t}-e^{(t-100)/100})u(t)$

意味着当 $k>n$，必有 $h[n-k]=0$，因此当 $n<0$，有 $h[n]=0$（激励出现之前，响应为零），也即

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]h[n-k] \quad \text{或} \quad y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

一个因果系统的输出只取决于系统的过去和现在的输入。

对于一个连续时间因果 LTI 系统，类似也有当 $t<0$，有 $h(t)=0$，

$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{或} \quad y(t)=\int_{\tau=0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

一个因果系统的输入在某个时刻前为 0，则系统的响应在那个时刻之前也必为 0，这就是系统的初始松弛条件；对于线性系统，因果性等价初始松弛条件；也就是系统只有零状态响应。

因果性是系统的性质，但一般也将 $n<0$ 或 $t<0$ 时为零的信号也称为因果信号，经常表示为 $x(t)u(t)$ 或者 $x[n]u[n]$：一个 LTI 系统的因果性等价于系统的冲激（脉冲）响应是一个因果信号。

稳定性

- 如果一个系统的输入是有界的，那么输出也是有界的，该系统就是稳定的。

  对于离散时间 LTI 系统，

  $$|y[n]|=|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]|\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\leq B\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

  因此，$|y[n]|<\infty$ 意味着 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty$，称系统的单位脉冲响应绝对可和，这个条件是离散时间 LTI 系统稳定的充要条件。

  对于连续时间 LTI 系统，类似可以得到

  $$\int_{t=-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$$

  称系统的单位冲激响应绝对可积，这个条件是连续时间 LTI 系统稳定的充要条件。

- 例 1

  纯时移系统，$h[n]=\delta[n-n_0]$ 或 $h(t)=\delta(t-t_0)$

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\delta[n-n_0]|=1$$

  $$\int_{t=-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}|\delta(t-t_0)|dt=1$$

  因此，纯时移系统是稳定系统。

- 例 2

  累加器或积分器，$h[n]=u[n]$ 或 $h(t)=u(t)$

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u[n]|=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$$

  $$\int_{t=-\infty}^{\infty}|h(t)|dt=\int_{t=-\infty}^{\infty}|u(t)|dt=\int_{t=0}^{\infty}u(t)dt=\infty$$

  因此，累加器或积分器不是稳定系统。

Homework 5 2024.9.23

5.1 习题 2.18

- 考虑一个因果线性时不变系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 之间的关系由下面的差分方程给出：

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

  若 $x[n] = \delta[n-1]$，求 $y[n]$ 的表达式。
- 要解决这个问题，我们可以利用差分方程的递推关系。我们从给定的输入 $x[n] = \delta[n-1]$ 开始，逐步计算输出 $y[n]$。

1. 确定初始条件

由于系统是因果的，我们通常假设 $y[n] = 0$ 对于 $n < 0$。

2. 计算输出

使用给定的差分方程：

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n] \tag{5.1}$$

当 $n = 0$

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{1}{4}y[-1] + x[0] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

当 $n = 1$

$$\begin{aligned} y[1] &= \frac{1}{4}y[0] + x[1] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

当 $n = 2$

$$\begin{aligned} y[2] &= \frac{1}{4}y[1] + x[2] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

当 $n = 3$

$$
\begin{aligned}
y[3] &= \frac{1}{4}y[2] + x[3] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 0 \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

当 $n = 4$

$$
\begin{aligned}
y[4] &= \frac{1}{4}y[3] + x[4] \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + 0 \\
&= \frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

3. 归纳出一般形式

可以观察到，输出 $y[n]$ 在每一步中都在乘以 $\frac{1}{4}$。所以我们可以归纳出：

$$
y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad 对于 \quad n \geq 1 \tag{5.2}
$$

而对于 $n < 1$，输出仍然为 0。因此可以总结为：

$$
y[n] = \begin{cases} 0 & n < 1 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} & n \geq 1 \end{cases} \tag{5.3}
$$

4. 最终结果

输出 $y[n]$ 的表达式为：

$$
y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{5.4}
$$

其中 $u[n-1]$ 是单位阶跃函数。

5.2 习题 2.24

- 考虑图中的三个因果线性时不变系统的级联，单位脉冲响应 $h_2[n]$ 为

$$
h_2[n] = u[n] - u[n-2] \tag{5.5}
$$

- 整个系统的单位脉冲响应如图所示。

(a) 求 $h_1[n]$.

(b) 求整个系统对输入 $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ 的响应.

解答

(a) 求 $h_1[n]$

已知整个系统是由三级子系统串联组成的，系统的单位脉冲响应为：

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * h_3[n]$$

其中，$h_2[n] = h_3[n] = u[n] - u[n-2]$，因此可以写作：

$$h_2[n] = h_3[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这表示 $h_2[n]$ 和 $h_3[n]$ 都是一个有限长为 2 的 FIR 滤波器。
整个系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 已知为：

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 5, & n = 1 \\ 10, & n = 2 \\ 11, & n = 3 \\ 8, & n = 4 \\ 4, & n = 5 \\ 1, & n = 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现在，我们首先计算 $h_2[n] * h_3[n]$。

1. 计算 $h_2[n] * h_3[n]$

由于 $h_2[n]$ 和 $h_3[n]$ 都是有限长的脉冲响应，我们可以直接进行卷积：

$$h_{23}[n] = h_2[n] * h_3[n]$$

计算卷积：

$$h_{23}[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此，$h_{23}[n] = [1, 2, 1]$。

2. 计算 $h_1[n]$

现在，我们有：

$$h[n] = h_1[n] * h_{23}[n]$$

设 $h_1[n] = [h_1[0], h_1[1], h_1[2], \dots]$，根据卷积定义，可以得到以下方程：

$$h[0] = h_1[0] \cdot h_{23}[0]$$
$$h[1] = h_1[1] \cdot h_{23}[0] + h_1[0] \cdot h_{23}[1]$$
$$h[2] = h_1[2] \cdot h_{23}[0] + h_1[1] \cdot h_{23}[1] + h_1[0] \cdot h_{23}[2]$$
$$h[3] = h_1[3] \cdot h_{23}[0] + h_1[2] \cdot h_{23}[1] + h_1[1] \cdot h_{23}[2]$$

依此类推。
将 $h_{23}[n] = [1, 2, 1]$ 和 $h[n] = [1, 5, 10, 11, 8, 4, 1]$ 代入，逐项解出 $h_1[n]$：

$$h[0] = 1 = h_1[0] \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad h_1[0] = 1$$
$$h[1] = 5 = h_1[1] \cdot 1 + h_1[0] \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 5 = h_1[1] + 2 \times 1 \quad \Rightarrow \quad h_1[1] = 3$$
$$h[2] = 10 = h_1[2] \cdot 1 + h_1[1] \cdot 2 + h_1[0] \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 10 = h_1[2] + 2 \times 3 + 1 \times 1 \quad \Rightarrow \quad h_1[2] = 3$$
$$h[3] = 11 = h_1[3] \cdot 1 + h_1[2] \cdot 2 + h_1[1] \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 11 = h_1[3] + 2 \times 3 + 3 \quad \Rightarrow \quad h_1[3] = 2$$

结论

因此，$h_1[n]$ 的解为：

$$h_1[n] = [1, 3, 3, 2]$$

(b) 求整个系统对输入 $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ 的响应

输入信号为：

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

整个系统的输出为：

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] - h[n-1]$$

将 $h[n]$ 代入：

$$y[0] = h[0] = 1$$
$$y[1] = h[1] - h[0] = 5 - 1 = 4$$
$$y[2] = h[2] - h[1] = 10 - 5 = 5$$
$$y[3] = h[3] - h[2] = 11 - 10 = 1$$

$$y[4] = h[4] - h[3] = 8 - 11 = -3$$

$$y[5] = h[5] - h[4] = 4 - 8 = -4$$

$$y[6] = h[6] - h[5] = 1 - 4 = -3$$

$$y[7] = h[7] - h[6] = 0 - 1 = -1$$

因此，系统的输出响应为：

$$y[n] = [1, 4, 5, 1, -3, -4, -3, -1]$$

Homework 6 2024.10.8

6.1 习题 3.23

给出下面周期为 4 的各连续时间信号的傅里叶级数系数，求每一个 $x(t)$ 信号：
对于周期为 T 的周期信号 $x(t)$，傅里叶级数逆变换为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi kt}{T}}$$

(a) 系数：

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (j)^k \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}, & \text{其他} \end{cases}$$

信号 $x(t)$ 的重建公式为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{\pi kt}{2}}$$

(b) 系数：

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{16}, & k = 0 \\ (-1)^k \frac{\sin(k\pi/8)}{2k\pi}, & \text{其他} \end{cases}$$

信号 $x(t)$ 的重建公式为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{\pi kt}{2}}$$

(c) 系数（第一种）：

$$a_k = \begin{cases} jk, & |k| < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

信号 $x(t)$ 的重建公式为：

$$x(t) = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{j\frac{\pi kt}{2}}$$

(d) 系数（第二种）：

$$a_k = \begin{cases} 1, & k\text{为偶数} \\ 2, & k\text{为奇数} \end{cases}$$

该信号的傅里叶级数重建公式为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{\pi kt}{2}}$$

6.2 习题 3.25

下面三个连续时间周期信号的基波周期 $T = 1/2$:

$$x(t) = \cos(4\pi t), \quad y(t) = \sin(4\pi t), \quad z(t) = x(t)y(t)$$

(a) 求 $x(t)$ 的傅里叶级数系数。
(b) 求 $y(t)$ 的傅里叶级数系数。
(c) 利用 (a) 和 (b) 的结果，按照连续时间傅里叶级数的相乘性质，求 $z(t) = x(t)y(t)$ 的傅里叶级数系数。

(a) 求 $x(t)=\cos(4\pi t)$ 的傅里叶级数系数

由于 $\cos(4\pi t)$ 是一个正弦信号，频率为 4（基波频率的 2 倍）。其傅里叶级数表达式为：

$$x(t)=\cos(4\pi t)=\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)$$

因此，傅里叶级数系数 a_k 为：

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=2\\ \frac{1}{2}, & k=-2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(b) 求 $y(t)=\sin(4\pi t)$ 的傅里叶级数系数

同样，$\sin(4\pi t)$ 是一个正弦信号，频率也是 4。其傅里叶级数表达式为：

$$y(t)=\sin(4\pi t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}\right)$$

因此，傅里叶级数系数 b_k 为：

$$b_k=\begin{cases}-\frac{j}{2}, & k=2\\ \frac{j}{2}, & k=-2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(c) 利用 (a) 和 (b) 的结果，按照傅里叶级数的乘积性质，求 $z(t)=x(t)y(t)$ 的傅里叶级数系数

根据傅里叶级数的卷积性质，两个信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的乘积 $z(t)=x(t)y(t)$ 的傅里叶级数系数是 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶系数的卷积。

设 $z(t)$ 的傅里叶系数为 c_k，则有：

$$c_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m b_{k-m}$$

其中 a_m 是 $x(t)$ 的傅里叶系数，b_m 是 $y(t)$ 的傅里叶系数。

由于 a_k 和 b_k 的非零项只在 $k=\pm 2$，我们只需要考虑这些项的卷积：

$$c_4=a_2b_2=\frac{1}{2}\times-\frac{j}{2}=-\frac{j}{4}$$

$$c_0=a_2b_{-2}+a_{-2}b_2=\frac{1}{2}\times\frac{j}{2}+\frac{1}{2}\times-\frac{j}{2}=0$$

$$c_{-4}=a_{-2}b_{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{j}{2}=\frac{j}{4}$$

因此，信号 $z(t)=x(t)y(t)$ 的傅里叶级数系数为：

$$c_k=\begin{cases}-\frac{j}{4}, & k=4\\ 0, & k=0\\ \frac{j}{4}, & k=-4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Homework 7 2024.10.15

7.1 习题 3.28

对下面每一个离散时间周期信号，求其傅里叶级数系数，并画出每一组系数 a_k 的模和相位。

(a) 图 P3.28(a) 至图 P3.28(c) 中的每一个 $x[n]$。

对图 (a)，周期 $N=7$，

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 4\\ 0, & 5\le n\le 6\end{cases}$$

傅里叶级数系数 a_k 的计算公式为：

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{7}}$$

代入 $x[n]$ 的值：

$$a_k=\frac{1}{7}\frac{e^{-jk\frac{4\pi}{7}}\sin\left(\frac{5\pi k}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{7}\right)}$$

对图 (b)，周期 $N=6$，

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3\\ 0, & 4\le n\le 5\end{cases}$$

傅里叶级数系数 a_k 的计算公式为：

$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{6}}$$

代入 $x[n]$ 的值：

$$a_k=\frac{1}{6}\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)}$$

对图 (c)，周期 $N=6$，

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n=3\\ -1, & n=2,4\\ 2, & n=-1,1\end{cases}$$

傅里叶级数系数 a_k 的计算公式为：

$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=-1}^{4}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{6}}$$

代入 $x[n]$ 的值：

$$a_k=\frac{1}{6}\left[1+4\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)-2\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

(b) $x[n]=\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$。

$$\begin{aligned}x[n]=\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)&=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi n}{3}}-e^{-j\frac{2\pi n}{3}}\right)\times\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right)\\&=\frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{7\pi n}{6}}+e^{j\frac{\pi n}{6}}-e^{-j\frac{7\pi n}{6}}-e^{-j\frac{\pi n}{6}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{j7\frac{2\pi}{12}n}\right) - \frac{1}{4j}\left(e^{-j7\frac{2\pi}{12}n}\right) + \frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{2\pi}{12}n} - e^{-j\frac{2\pi}{12}n}\right)$$

即 x[n] 的周期为 12，非零的傅里叶级数系数为：

$$a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{4j} = -\frac{1}{4}j, \quad a_7 = a_{-7}^* = \frac{1}{4j} = -\frac{1}{4}j$$

(c) $x[n]$ 的周期为 4，且有 $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$，$0 \le n \le 3$。
由于 $x[n]$ 的周期为 4，我们可以写出傅里叶级数：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi kn}{4}}$$

计算傅里叶系数 a_k：

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{4}}$$

代入 $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ 计算每个 a_k。

$$a_k = \frac{1}{4}\left[1 + (2 - \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{2}k))\right]$$

(d) $x[n]$ 的周期为 12，且有 $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$，$0 \le n \le 11$。
由于 $x[n]$ 的周期为 12，我们可以写出傅里叶级数：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi kn}{12}}$$

计算傅里叶系数 a_k：

$$a_k = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{11} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{12}}$$

代入 $x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ 计算每个 a_k。

$$a_k = \frac{1}{12}\left[1 + (2-\sqrt{2})\cos(\frac{k\pi}{6}) + (2-\sqrt{2})\cos(\frac{k\pi}{2}) + (2+\sqrt{2})\cos(\frac{5k\pi}{6}) + 2\cos(\frac{2k\pi}{3}) + 2(-1)^k\right]$$

7.2 习题 3.36

考虑一个因果离散时间线性时不变系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下列差分方程所关联：

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$$

在下面两种输入下，求输出 $y[n]$ 的傅里叶级数表示：

(1) $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$

(2) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

解答

(a) 先求系统响应 $H(e^{j\omega})$。
对于 LTI 系统，当输入 $x[n] = e^{j\omega n}$ 时，输出为 $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$，其中 $H(e^{j\omega})$ 为系统的频率响应。
将 $x[n]$ 和 $y[n]$ 代入差分方程，得到：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

对于输入 $x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$，其傅里叶级数表示为：

$$\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\pi}{4}n} - e^{-j\frac{3\pi}{4}n}\right)$$

对于 $x[n]$，其 $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$，非零的傅里叶级数系数为：

$$a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = -\frac{1}{2j}$$

故 $y[n]$ 中非零的傅里叶级数系数为：

$$b_3 = a_3 H(e^{j\frac{3\pi}{4}}) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{3\pi}{4}}}$$

$$b_{-3} = a_{-3} H(e^{-j\frac{3\pi}{4}}) = -\frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}}}$$

(b) 对于输入 $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$，其傅里叶级数表示为：

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{4}} + e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{4}} + e^{-j\frac{\pi n}{2}}$$

对于 $x[n]$，其 $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$，非零的傅里叶级数系数为：

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_{-2} = 1$$

故 $y[n]$ 中非零的傅里叶级数系数为：

$$b_1 = a_1 H(e^{j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

$$b_{-1} = a_{-1} H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

$$b_2 = a_2 H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

$$b_{-2} = a_{-2} H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

Homework 8 2024.10.17

8.1 习题 3.42

令 $x(t)$ 是一个基波周期为 T，傅里叶级数系数为 a_k 的实值信号。
(a) 证明：$a_k = a^*_{-k}$，并且 a_0 一定为实数。

证明. 由于 $x(t)$ 是实值信号，其傅里叶级数表示为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

取复共轭：

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}$$

由于 $x(t)$ 是实值信号，$x^*(t) = x(t)$，所以：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

令 $k \to -k$，得到：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{j\frac{2\pi k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

因此，$a_k = a^*_{-k}$。特别地，当 $k = 0$ 时，$a_0 = a_0^*$，所以 a_0 一定为实数。 □

(b) 证明：若 $x(t)$ 为偶函数，则它的傅里叶级数系数一定为实偶函数。

证明. 若 $x(t)$ 为偶函数，则 $x(t) = x(-t)$。其傅里叶级数表示为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

由于 $x(t)$ 为偶函数，$x(-t) = x(t)$，所以：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

令 $k \to -k$，得到：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

因此，$a_k = a_{-k}$，并且 a_k 为实数。 □

(c) 证明：若 $x(t)$ 为奇函数，则它的傅里叶级数系数是虚数且为奇函数，$a_0 = 0$。

证明. 若 $x(t)$ 为奇函数，则 $x(t) = -x(-t)$。其傅里叶级数表示为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

由于 $x(t)$ 为奇函数，$x(-t) = -x(t)$，所以：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

令 $k \to -k$，得到：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

因此，$a_k = -a_{-k}$，并且 a_k 为虚数。特别地，当 $k=0$ 时，$a_0 = -a_0$，所以 $a_0 = 0$。 □

(d) 证明：$x(t)$ 偶部的傅里叶系数等于 $\mathrm{Re}\{a_k\}$。

证明. 设 $x(t)$ 的偶部为 $x_e(t)$，则：

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

其傅里叶级数系数为：

$$a_k^e = \frac{a_k + a_{-k}}{2} = \mathrm{Re}\{a_k\}$$

□

(e) 证明：$x(t)$ 奇部的傅里叶系数等于 $j\mathrm{Im}\{a_k\}$。

证明. 设 $x(t)$ 的奇部为 $x_o(t)$，则：

$$x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

其傅里叶级数系数为：

$$a_k^o = \frac{a_k - a_{-k}}{2} = j\mathrm{Im}\{a_k\}$$

□

8.2 习题 3.47

考虑信号 $x(t)$：

$$x(t) = \cos(2\pi t)$$

因为 $x(t)$ 是周期的，基波周期为 1，因此对任意正整数 N，该信号也是周期的。若将 $x(t)$ 看成周期为 3 的周期信号，那么 $x(t)$ 的傅里叶级数系数是什么？

解答

考虑信号 $x(t) = \cos(2\pi t)$。将其视为周期为 3 的周期信号，我们计算其傅里叶级数系数。傅里叶级数的表达式为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k t}{T}} \tag{8.1}$$

其中 $T=3$ 为信号的周期，c_k 是傅里叶级数系数，计算公式为：

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi k t}{T}}\,dt \tag{8.2}$$

对于周期为 3 的情况，即 $T=3$，我们代入 $x(t)=\cos(2\pi t)$：

$$c_k = \frac{1}{3}\int_0^3 \cos(2\pi t) e^{-j\frac{2\pi k t}{3}}\,dt \tag{8.3}$$

使用欧拉公式 $\cos(2\pi t) = \frac{e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}}{2}$，我们可以将傅里叶系数展开为两个积分：

$$c_k = \frac{1}{6}\left(\int_0^3 e^{j2\pi t} e^{-j\frac{2\pi kt}{3}}\,dt + \int_0^3 e^{-j2\pi t} e^{-j\frac{2\pi kt}{3}}\,dt\right) \tag{8.4}$$

计算第一个积分
第一个积分为：

$$\int_0^3 e^{j2\pi t(1-\frac{k}{3})}\,dt = \frac{e^{j2\pi(1-\frac{k}{3})3} - 1}{j2\pi(1-\frac{k}{3})} \tag{8.5}$$

注意到 $e^{j2\pi n} = 1$ 对于任意整数 n，因此该积分为：

$$\frac{1-1}{j2\pi(1-\frac{k}{3})} = 0 \quad 当 \quad k \neq 3 \tag{8.6}$$

如果 $k = 3$，则该积分为：

$$\int_0^3 e^{j2\pi t(1-1)}\,dt = \int_0^3 1\,dt = 3 \tag{8.7}$$

计算第二个积分
第二个积分为：

$$\int_0^3 e^{-j2\pi t(1+\frac{k}{3})}\,dt = \frac{e^{-j2\pi(1+\frac{k}{3})3} - 1}{-j2\pi(1+\frac{k}{3})} \tag{8.8}$$

同样，由于 $e^{-j6\pi(1+\frac{k}{3})} = 1$，因此该积分为 0，除非 $k = -3$。当 $k = -3$ 时，积分为：

$$\int_0^3 e^{-j2\pi t(1-1)}\,dt = \int_0^3 1\,dt = 3 \tag{8.9}$$

总结傅里叶级数系数
结合以上结果：

- 当 $k = 3$ 时，$c_3 = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$；
- 当 $k = -3$ 时，$c_{-3} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$；
- 对于其他 k，$c_k = 0$。

因此，傅里叶级数系数为：

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 3 \text{ 或} k = -3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{8.10}$$

这表明，信号 $x(t) = \cos(2\pi t)$ 的傅里叶级数系数只有在 $k = 3$ 和 $k = -3$ 时为非零，且值为 $\frac{1}{2}$。