# Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

October 7, 2020

## Contents

# 1 Relaciones binarias

**Definición 1.** Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto $A$ sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de $A^2$.

Notese que si $R$ es una relacion binaria sobre $A$ y $A \subseteq B$, entonces $R$ es una relacion sobre $B$. Como es usual, cuando $R$ sea una relacion binaria sobre un conjunto $A$, diremos $aRb$ en lugar de $(a, b) \in R$

## 1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria $R$ sobre un conjunto $A$ son:

- Reflexividad: $xRx$, cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad: $xRy$ y $yRz$ implica $xRz$, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Simetria: $xRy$ implica $yRx$, cualesquiera sean $x, y \in A$
- Antisimetria: $xRy$ y $yRx$ implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

## 1.2 Relaciones de equivalencia

**Definición 2.** Sea $A$ un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre* $A$ entenderemos una relacion binaria sobre $A$ la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a $A$.

**Definición 3.** Dada una funcion $F\colon A \to B$, definimos:

$$\ker F = \{(x, y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

**Definición 4.** Dada una relacion de equivalencia $R$ sobre $A$ y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto $a/R$ sera llamado la *clase de equivalencia* de $a$, con respecto a $R$.

*Observacion* 1. $a \in a/R$, pues $R$ es reflexiva, por lo tanto $aRa$.

*Observacion* 2. $aRb \iff a/R = b/R$, sencillo de demostrar con las propiedades

*Observacion* 3. $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$, sencillo de demostrar viendo que pasa si $aRb$ y si no $aRb$

**Definición 5.** Dada una relacion de equivalencia $R$ sobre $A$, definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que $A/R$ es el cociente de $A$ por $R$. Notese que $A/R$ es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de $A$.

*Observacion* 4. Sea $F \colon A \to B$, entonces:

1. $F$ es inyectiva $\iff$ $\ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$
2. Si $F$ es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre $A/\ker F$

**Definición 6.** Si $R$ es una relacion de equivalencia sobre $A$, definimos la funcion $\pi_R \colon A \to A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de $R$.

*Observacion* 5. Sea $R$ una relacion de equivalencia sobre $A$. Entonces $\ker \pi_R = R$

## 1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

**Definición 7.** Dado un conjunto $A$, por una *particion de* $A$ entenderemos a un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de $A$
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{P}} S$

*Observacion* 6. Si $\mathcal{P}$ es una particion de $A$, entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$.

**Definición 8.** Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto $A$, podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

**Teorema 1.** *Sea $A$ un conjunto cualquiera. Sean*

$$Part = \{\textit{particiones de } A\}$$
$$ReEq = \{\textit{relaciones de equivalencia sobre } A\}$$

*Entonces, las funciones:*

$$f : Part \to ReEq$$
$$\mathcal{P} \to R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \to Part$$
$$R \to A/R$$

*son biyecciones una de la otra*

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

# 2 Ordenes parciales

**Definición 9.** Una relacion binaria sobre $R$ sobre un conjunto $A$ sera llamada un *orden parcial sobre* $A$, si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de $A$.

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto $A$, entonces:

1. Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de que $a < b$, diremos que *$a$ es menor que $b$*, o que *$b$ es mayor que $a$*

2. Denotaremos con $\prec$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$. Cuando se de que $a \prec b$, diremos que *$a$ es cubierto por $b$* o que *$b$ cubre a $a$*.

**Definición 10.** Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par $(P, \leq)$, donde $P$ es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre $P$. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto $P$ sera llamado el *universo* de $(P, \leq)$.

## 2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset $(P, \leq)$. con $P$ finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto $p_a$ del plano

2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos $p_a$ y $p_b$, cada vez que $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

   (a) Si $a \prec b$, entonces $p_a$ esta por debajo de $p_b$

   (b) Si un punto $p_a$ ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de $\leq$ puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama. $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ o hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde $p_a$ hasta $p_b$.

## 2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

**Definición 11.** Sea $(P, \leq)$ un poset.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 1 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un maximo

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $b < a$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b$ para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 0 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un minimo

*Observacion* 7. Un poset $(P, \leq)$ tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

*Observacion* 8. Todo elemento maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de $(P, \leq)$

## 2.3 Supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior* de $S$ en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de $P$ es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo* de $S$ en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. $a$ es cota superior de $S$ en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si $b$ es cota superior de $S$ en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$

## 2.4 Infimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior* de $S$ en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de $P$ es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo* de $S$ en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. $a$ es cota inferior de $S$ en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si $b$ es cota inferior de $S$ en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$

*Observacion* 9. Si $a$ es supremo (resp. infimo) de $S$ en $(P, \leq)$ y $a'$ es supremo (resp. infimo) de $S$ en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

*Observacion* 10. $a$ es supremo (resp. infimo) de $P$ en $(P, \leq) \iff a$ es maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$

## 2.5 Homomorfismos de posets

**Definición 12.** Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F\colon (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que $F$ es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$

## 2.6 Isomorfismo de posets

**Definición 13.** Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si $F$ es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y $F^{-1}$ es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son isomorfos.

**Definición 14.** Dada una funcion $F\colon A \to B$ y $S \subseteq A$, denotaremos con $F(S)$ al conjunto $\{F(a) : a \in S\}$

**Lema 1.** *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos $F$ es un isomorfismo de $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$*

1. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que $a$ es cota superior (resp. cota inferior) de $S \iff F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$*

2. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe* $\sup(S) \iff$ *existe* $\sup(F(S))$*, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que* $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$

3. *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$, *se tiene que existe* $\inf(S) \iff$ *existe* $\inf(F(S))$, *y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que* $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. *Para cada* $a \in P$, *a es maximo (resp. minimo)* $\iff$ $F(a)$ *es maximo (resp. minimo)*

5. *Para cada* $a \in P$, *a es maximal (resp. minimal)* $\iff$ $F(a)$ *es maximal (resp. minimal)*

6. *Para* $a, b \in P$, *tenemos* $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$

*Proof.* (a) Supongamos $a$ es cota superior de S. Sea $s \in S$. Como $s \leq a$, tenemos que $F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $s \in S$. Como $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Entonces por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos $b$ es cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de $S$. Por lo tanto, $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$ y entonces $F(\sup(S)) \leq' b$. La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos $a \in P$ es maximo. Pero entonces $a = \sup(P)$, y entonces $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$. La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos $b \in P$ tal que no existe $a \in P$ tal que $b \leq a \Rightarrow a = b$. Sea $c \in P$ tal que $F(b) \leq' F(c)$, entonces $b \leq c$, y entonces $b = c$, $F(b) = F(c)$. Luego $F(b)$ es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean $a, b \in P$ tal que $a \prec b$. Luego tenemos que $F(a) \leq' F(b)$. Supongamos existe $z \in P$ tal que $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$, entonces tendriamos $a \leq z \leq b$. Como $a \prec b$, se sigue que $z = a$ o $z = b$. Luego $F(a) \prec' F(b)$. La *vuelta* es analoga. □

## 2.7 Reticulados

**Definición 15.** Diremos que un poset $(P, \leq)$ es un *reticulado* si para todo $a, b \in P$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$

**Definición 16.** Dado un reticulado $(P, \leq)$, definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \to P$$
$$(a, b) \to \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \to p$$
$$(a, b) \to \inf(\{a, b\})$$

Escribiremos $a$ **s** $b$ en lugar de $s(a,b)$ y $a$ **i** $b$ en lugar de $i(a,b)$

**Lema 2.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se cumplen:*

1. $x \leq x \ \boldsymbol{s} \ y$
2. $x \ \boldsymbol{i} \ y \leq x$
3. $x \ \boldsymbol{s} \ x = x \ \boldsymbol{i} \ x = x$
4. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y \ \boldsymbol{s} \ x$
5. $x \ \boldsymbol{i} \ y = y \ \boldsymbol{i} \ x$

*Proof.* (1) Claramente $(x \ \mathbf{s} \ y)$ es cota superior de $x$. Por lo tanto $x \leq x \ \mathbf{s} \ y$

(2) Claramente $(x \ \mathbf{i} \ y)$ es cota inferior de $x$. Por lo tanto $x \ \mathbf{i} \ y \leq x$

(3) Supongamos $(x \ \mathbf{s} \ x) = z \neq x$. Tenemos que $z$ es cota superior de $x$ por lo tanto $x \leq z$. Pero tambien $x$ es cota superior de $x$ y por lo tanto $z$ no puede ser la minima cota superior. El caso del infimo es analogo.

(4) $(x \ \mathbf{s} \ y) = \sup(\{x, y\}) = \sup(\{y, x\}) = (y \ \mathbf{s} \ x)$

(5) $(x \ \mathbf{i} \ y) = \inf(\{x, y\}) = \inf(\{y, x\}) = (y \ \mathbf{i} \ x)$ □

**Lema 3.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, son equivalentes:*

1. $x \leq y$
2. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y$
3. $x \ \boldsymbol{i} \ y = x$

*Proof.* (1) $\Rightarrow$ (2) Claramente $y$ es cota superior de $\{x, y\}$ por (1). Y trivialmente es la minima ya que es igual a uno de sus elementos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Claremente $y$ es cota superior de $\{x, y\}$, por lo tanto $x \leq y$. Luego se tiene que $x$ es cota inferior de $\{x, y\}$. Trivialmente es la maxima.

(3) $\Rightarrow$ (1) Claramente $x$ es cota inferior de $\{x, y\}$, por lo tanto $x \leq y$. □

**Lema 4** (Leyes de absorcion)**.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se tiene que:*

1. $x \ \boldsymbol{s} \ (x \ \boldsymbol{i} \ y) = x$
2. $x \ \boldsymbol{i} \ (x \ \boldsymbol{s} \ y) = x$

*Proof.* (1) Claramente $(x \textbf{ i } y) \leq x$, y por lo tanto $(x \textbf{ i } y) \textbf{ s } x = x$

(2) Claramente $x \leq (x \textbf{ s } y)$, y por lo tanto $x \textbf{ i } (x \textbf{ s } y) = x$ $\square$

**Lema 5.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que:*

1. $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$
2. $(x \textbf{ i } y) \textbf{ i } z = x \textbf{ i } (y \textbf{ i } z)$

*Proof.* (1) Notese que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$x \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$
$$y \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$
$$z \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$

En particular, tenemos que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, y entonces tenemos que $x \textbf{ s } y \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$. Es decir, $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x \textbf{ s } y, z\}$, y por lo tanto $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$.

Notese ahora que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$, ya que:

$$x \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$
$$y \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$
$$z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$

En particular, tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{y, z\}$, y por lo tanto $y \textbf{ s } z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$. Es decir, $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y \textbf{ s } z\}$, y por lo tanto $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$.

Luego tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$

(2) Es analoga, si alguien la quiere hacer $\square$

**Lema 6.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se tiene que si $x \leq z$ y $y \leq w$, entonces*

1. $x \textbf{ s } y \leq z \textbf{ s } w$
2. $x \textbf{ i } y \leq z \textbf{ i } w$

*Proof.* (1) Notese que

$$x \leq z \leq z \ \mathbf{s} \ w$$
$$y \leq w \leq z \ \mathbf{s} \ w$$

Luego $z \ \mathbf{s} \ w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y por lo tanto $x \ \mathbf{s} \ y \leq z \ \mathbf{s} \ w$

(2) Notese que

$$z \geq x \geq x \ \mathbf{i} \ y$$
$$w \geq y \geq x \ \mathbf{i} \ y$$

Luego $x \ \mathbf{i} \ y$ es cota inferior de $\{z, w\}$ y por lo tanto $x \ \mathbf{i} \ y \leq z \ \mathbf{i} \ w$ □

**Lema 7.** *Dado un reticulado* $(L, \leq)$ *y elementos* $x, y, z \in L$*, se tiene que* $(x \ \boldsymbol{i} \ y) \ \boldsymbol{s} \ (x \ \boldsymbol{i} \ z) \leq x \ \boldsymbol{i} \ (y \ \boldsymbol{s} \ z)$

*Proof.* Notese que

$$(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x$$
$$(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq y \ \mathbf{s} \ z$$

Tenemos entonces que $(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z)$ y por lo tanto $(x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z)$ □

**Lema 8.** *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado. Dados elementos* $x_1, \ldots, x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*, se tiene que:*

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{s} \ x_2) \ \boldsymbol{s} \ \ldots) \ \boldsymbol{s} \ x_n = \sup(\{x_1, \ldots, x_n\})$$
$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{i} \ x_2) \ \boldsymbol{i} \ \ldots) \ \boldsymbol{i} \ x_n = \inf(\{x_1, \ldots, x_n\})$$

*Proof.* TODO □

# 3 Version algebraica del concepto de reticulado

**Definición 17.** Una terna $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, donde $L$ es un conjunto y $\mathbf{s}$, $\mathbf{i}$ son dos operaciones binarias sobre $L$ sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1. $x \ \mathbf{s} \ x = x \ \mathbf{i} \ x = x$, cualesquiera sea $x \in L$
2. $x \ \mathbf{s} \ y = y \ \mathbf{s} \ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

3. $x \ \mathbf{i} \ y = y \ \mathbf{i} \ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

4. $(x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{s} \ z = x \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{s} \ z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

5. $(x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{i} \ z = x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{i} \ z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

6. $x \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

7. $x \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

En tal caso que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sea un reticulado, diremos que $L$ es el *universo* del reticulado.

**Teorema 2.** *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \iff x \ \boldsymbol{s} \ y = y$$

*es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:*

$$\sup(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{s} \ y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{i} \ y$$

*cualesquiera sean $x, y \in L$*

*Proof.* TODO □

**Definición 18.** Dados reticulados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un *subreticulado de* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$

2. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$

3. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

**Definición 19.** Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones $\mathbf{s}$ y $\mathbf{i}$

*Observacion* 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. $S$ es subuniverso de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

**Definición 20.** Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ reticulados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
F(x \ \mathbf{s} \ y) &= F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y) \\
F(x \ \mathbf{i} \ y) &= F(x) \ \mathbf{i'} \ F(y)
\end{aligned}
$$

Un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ sera llamada *isomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ cuando $F$ sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathrm{s}', \mathbf{i}')$

**Lema 9.** *Si $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces $F$ es un isomorfismo*

*Proof.* TODO □

**Lema 10.** *Sean $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ y $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ reticulados y sea $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ un homomorfismo. Entonces $I_F$ es un subuniverso de $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$. Es decir que $F$ es tambien un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F})$*

*Proof.* TODO □

**Lema 11.** *Sean $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ y $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F\colon L \to L'$ una funcion. Entonces $F$ es un isomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ $\iff$ $F$ es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

*Proof.* TODO □

**Definición 21.** Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera una relacion de equivalencia $\theta$ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \ \mathbf{s} \ y)\theta(x' \ \mathbf{s} \ y') \text{ y } (x \ \mathbf{i} \ y)\theta(x' \ \mathbf{i} \ y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre $L/\theta$ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathrm{i}}$

$$
\begin{aligned}
x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}} \ y/\theta &= (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta \\
x/\theta \ \widetilde{\mathbf{i}} \ y/\theta &= (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta
\end{aligned}
$$

**Definición 22.** La terna $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sobre $\theta$, y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

**Lema 12.** *$(L/\theta, \tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \,\tilde{\leq}\, y/\theta \iff y\theta(x \;\boldsymbol{s}\; y)$$

*Proof.* TODO □

**Lema 13.** *Si $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', s', i')$ es un* homomorfismo*, entonces ker $F$ es una* congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$

*Proof.* TODO □

**Lema 14.** *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado y sea $\theta$ una congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$. Entonces $\pi_\theta$ es un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L/\theta, \tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$. Ademas ker $\pi_\theta = \theta$.*

*Proof.* TODO □

# 4 Reticulados acotados

**Definición 23.** Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un reticulado, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes propiedades

1. $0 \;\mathbf{s}\; x = x$, para cada $x \in L$
2. $1 \;\mathbf{s}\; x = 1$, para cada $x \in L$

## 4.1 Subreticulados acotados

**Definición 24.** Dados reticulados acotados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado de* $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L \times L}$
4. $i = i'|_{L \times L}$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y $S$ es cerrado bajo las operaciones $s$ e $i$.

## 4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

**Definición 25.** Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s}\ y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \ \mathbf{i}\ y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ cuando $F$ sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

**Lema 15.** *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* $F$ *es un isomorfismo.*

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

**Lema 16.** *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* $I_F$ *es un subuniverso de* $(L', s', i', 0', 1')$*. Es decir que* $F$ *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s'}|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i'}|_{I_F \times I_F}, 0', 1')$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

## 4.3 Congruencias de reticulados acotados

**Definición 26.** Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia $\theta$ la cual sera una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Tenemos definidas sobre $L/\theta$ dos operaciones binarias $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathrm{i}}$

$$x/\theta \ \tilde{\mathbf{s}}\ y/\theta = (x \ \mathbf{s}\ y)/\theta$$

$$x/\theta \ \tilde{\mathbf{i}}\ y/\theta = (x \ \mathbf{i}\ y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sobre $\theta$ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

**Lema 17.** *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* $\theta$ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado*

2. $\pi_\theta$ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* $\theta$

*Proof.* TODO □

**Lema 18.** *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces ker* $F$ *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$

*Proof.* TODO □

# 5 Reticulados complementados

**Definición 27.** Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que $a$ es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de* $a$) tal que:

$$a \ \mathbf{s} \ b = 1$$
$$a \ \mathbf{i} \ b = 0$$

**Definición 28.** Entonderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ${}^c$ es una operacion unaria sobre $L$ tal que:

1. $x \ \mathbf{s} \ x^c = 1$, para cada $x \in L$

2. $x \ \mathbf{i} \ x^c = 0$, para cada $x \in L$

## 5.1 Subreticulados complementados

**Definición 29.** Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado de* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$

2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$

3. $s = s'|_{L\times L}$

4. $i = i'|_{L\times L}$

5. ${}^c = {}^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y $S$ es cerrado bajo las operaciones $s$, $i$ y ${}^c$.

## 5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

**Definición 30.** Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F \colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F \colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando $F$ sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \cong (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

**Lema 19.** *Si* $F \colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* $F$ *es un isomorfismo.*

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

**Lema 20.** *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ *reticulados y sea* $F \colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* $I_F$ *es un subuniverso de* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$*. Es decir que* $F$ *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F}, {}^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

### 5.3 Congruencias de reticulados complementados

**Definición 31.** Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia $\theta$ sobre $L$ la cual cumpla:

1. $\theta$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$

2. $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre $L/\theta$ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$ y una operacion binaria $\widetilde{^c}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{i}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{i}\; y)/\theta$$
$$(x/\theta)^{\widetilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sobre $\theta$ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

**Lema 21.** *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y* $\theta$ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado*

2. $\pi_\theta$ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* $\theta$

*Proof.* TODO □

**Lema 22.** *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces ker* $F$ *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

## 6 Algebras de Boole

**Definición 32.** Un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente propiedad

$$Dis_1 \quad x \;\mathbf{i}\; (y \;\mathbf{s}\; z) = (x \;\mathbf{i}\; y) \;\mathbf{s}\; (x \;\mathbf{i}\; z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ lo sea.

Consideremos la distributividad dual a $Dis_1$, es decir:

$$Dis_2 \quad x \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = (x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

**Lema 23.** *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado. Entonces* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* $Dis_1 \iff (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* $Dis_2$

*Proof.* TODO □

**Definición 33.** Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado distributivo.

**Lema 24.** *Si* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

*Proof.* TODO □

**Lema 25.** *Sea* $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole, y sean* $x, y \in B$*. Se tiene que* $y = (y \ \boldsymbol{i} \ x) \ \boldsymbol{s} \ (y \ \boldsymbol{i} \ x^c)$

*Proof.* TODO □

**Teorema 3.** *Sea* $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole.*

1. $(x \ \boldsymbol{i} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{s} \ y^c$
2. $(x \ \boldsymbol{s} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{i} \ y^c$
3. $x^{cc} = x$
4. $x \ \boldsymbol{i} \ y = 0 \iff y \leq x^c$
5. $x \leq y \iff y^c \leq x^c$

*Proof.* TODO □

# 7 Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski

**Definición 34.** Un *filtro* de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \ \mathbf{i} \ y \in F$
3. $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$

**Definición 35.** Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conunto:

$$\{y \in L : y \geq s_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

**Lema 26.** *Supongamos que $S$ es no vacio. Entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun, si $F$ es un filtro y $S \subseteq F$, entonces $[S) \subseteq F$. Es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a $S$.*

*Proof.* TODO □

**Definición 36.** Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

**Lema 27** (Zorn)**.** *Sea $(P, \leq)$ un poset y supogamos cada cadena de $(P, \leq)$ tiene cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$*

*Proof.* TODO □

**Definición 37.** Un filtro $F$ de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \ \mathbf{s} \ y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$

**Teorema 4** (Teorema del Filtro Primo)**.** *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado distributivo y $F$ un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo $P$ tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$*

*Proof.* TODO □

**Teorema 5** (Rasiova y Sikorski)**.** *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B, x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \ldots)$ es un infinitupla de subconjuntos de $B$ tal que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2, \ldots$. Entonces hay un filtro primo $P$ el cual cumple:*

1. *$x \in P$*
2. *$A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, \ldots$*

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

# 8 Sintaxis de la logica de primer orden

## 8.1 Variables

**Definición 38.** Sea $Var$ el siguiente conjunto de palabras del alfabeto $\{\text{X}, \mathit{0}, \mathit{1}, \ldots, \mathit{9}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{9}\}$:

$$Var = \{\text{X}\mathbf{0}, \ldots, \text{X}\mathbf{9}, \text{X}\mathit{1}\mathbf{0}, \ldots, \text{X}\mathit{2}\mathbf{0}, \ldots, \text{X}\mathit{10}\mathbf{0}, \ldots\}$$

Es decir, el n-esimo elemento de $Var$ sera la palabra de la forma X$\alpha$, donde $\alpha$ es el resultado de reemplazar en la representacion decimal de $n$ su ultimo simbolo por el numeral en bold, y el resto por sus numerales en italics.

A los elementos de $Var$ se los llamara *variables*.

Denotaremos con $x_i$ al i-esimo elemento de $Var$, para cada $i \in \mathbf{N}$.

## 8.2 Tipos

**Definición 39.** Diremos que $\alpha$ es subpalabra (propia) de $\beta$ cuando ($\alpha \notin \{\epsilon, \beta\}$ y) existan palabras $\delta, \gamma$, tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$

**Definición 40.** Por un tipo (de primer orden) entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

1. Hay alfabetos finitos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tales:
   (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+, \mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$
   (b) $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ son disjuntos de a pares
   (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningun simbolo de la lista: $\forall$ $\exists$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ ( ) , $\equiv$ X $\mathit{0}$ $\mathit{1}$ ... $\mathit{9}$ $\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$ ... $\mathbf{9}$
2. $a\colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$ es una funcion que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un numero natural $a(p)$, llamado la *aridad* de $p$
3. Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$)

A los elementos de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion*, *nombres de relacion*) de tipo $\tau$

Dado $n \geq 1$, definamos

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\}$$
$$\mathcal{R}_n = \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\}$$

## 8.3 Terminos

Dado un tipo $\tau$, definamos recursivamente los conjuntos de palabras $T_k^\tau$, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_0^\tau &= Var \cup \mathcal{C} \\ T_{k+1}^\tau &= T_k^\tau \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau)\} \end{aligned}$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de $T^\tau$ seran llamados *terminos de tipo* $\tau$. Un termino $t$ es llamado *cerrado* si $x_i$ no ocurre en $t$, para cada $i \in \mathbf{N}$.

Definimos tambien:

$$T_c^\tau = \{t \in T^\tau : t \text{ es cerrado}\}$$

**Lema 28.** *Supongamos* $t \in T_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*. Entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *o* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$

*Proof.* TODO □

### 8.3.1 Unicidad de la lectura de terminos

**Definición 41.** Diremos que $\beta$ es un *tramo inicial* (*propio*) de $\alpha$ si hay una palabra de $\gamma$ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\epsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final* (*propio*)

**Lema 29** (Mordizqueo de Terminos)**.** *Sean* $s, t \in T^\tau$ *y supongamos que hay palabras* $x, y, z$*, con* $y \neq \epsilon$ *tales que* $s = xy$ *y* $t = yz$*. Entonces* $x = z = \epsilon$ *o* $s, t \in \mathcal{C}$*. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

**Teorema 6** (Lectura unica de terminos)**.** *Dado* $t \in T^\tau$ *se da una de las siguientes:*

1. $t \in Var \cup \mathcal{C}$
2. *Hay unicos* $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$

*Proof.* TODO □

## 8.4 Ocurrencias

**Definición 42.** Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, \ldots, |\beta|\}$, se dice que $\alpha$ *ocurre a partir de* $i$ *en* $\beta$ cuandos se de que existan palabras $\delta, \gamma$ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$

Notese que una palabra $\alpha$ puede ocurrir en $\beta$ a partir de $i$ y tambien a partir de $j$, con $i \neq j$. Por ejemplo, *aba* ocurre dos veces en la palabra

*abacaba*

Cuando dos ocurrencias no se superpongan en alguna posicion, se las llamara *disjuntas*

A veces, diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo, la segunda ocurrencia de *b* esta contenida en la segunda ocurrencia de *aba*

Tambien se podra hablar de *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo, podriamos reemplazar las ocurrencias de *aca* por *abacaba*, dando como resultado

*ababacababa*

En algunos casos, se debera especificar que los reemplazos se haran *simultaneamente* en vez de *secuencialmente*. Por ejemplo, no es lo mismo primero reemplazar *aca* por *d* y luego *d* por *bb*

*abbbba*

Que hacerlo simultaneamente dando como resultado

*abdba*

## 8.5 Subterminos

**Definición 43.** Sean $s, t \in T^\tau$. Diremos que $s$ es *subtermino* (*propio*) de $t$ si (no es igual a $t$ y) $s$ es subpalabra de $t$.

**Lema 30.** *Sean* $r, s, t \in T^\tau$

1. *Si* $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ *y* $s$ *ocurre en* $t$*, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun* $t_j,\ j = 1, \ldots, n$

2. *Si* $r, s$ *ocurren en* $t$*, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular las distintas ocurrencias de* $r$ *en* $t$ *son disjuntas*

3. *Si* $t'$ *es el resultado de reemplazar una ocurrencia de* $s$ *en* $t$ *por* $r$*, entonces* $t' \in T^\tau$

*Proof.* TODO □

## 8.6 Formulas

**Definición 44.** Sea $\tau$ un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas:

$$(t \equiv s), \text{ con } t, s \in T^\tau$$
$$r(t_1, \ldots, t_n), \text{ con } r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, \text{ y } t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo* $\tau$

**Definición 45.** Dado un tipo $\tau$ definamos recursivamente los conjuntos de palabras $F_k^\tau$, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_0^\tau &= \{\text{formulas atomicas}\} \\ F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\ &\cup \{(\varphi \to \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\ &\cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \cup \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \end{aligned}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de $F^\tau$ seran llamados *formulas de tipo* $\tau$

**Lema 31.** *Supongamos* $\varphi \in F_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*. Entonces* $\varphi$ *es de alguna de las siguientes formas:*

- $(t \equiv s)$*, con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$
- $\neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$
- $Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$

*Proof.* TODO □

## 8.7 Unicidad de la lectura de formulas

**Proposicion 1** (Mordizqueo de formulas)**.** *Si* $\varphi, \psi \in F^\tau$ *y* $x, y, z$ *son tales que* $\varphi = xy$*,* $\psi = yz$ *y* $y \neq \epsilon$*, entonces* $z = \epsilon$ *y* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\} \text{ y } v \in Var\})^*$*. En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula*

*Proof.* Se acepta sin demostracion $\square$

**Teorema 7** (Lectura unica de formulas)**.** *Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

- $(t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
- $\neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$
- $Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$

*Proof.* TODO $\square$

## 8.8 Subformulas

**Definición 46.** Una formula $\varphi$ sera llamada una *subformula (propia)* de una formula $\psi$, cuando $\varphi$ (sea no igual a $\psi$ y) tenga alguna ocurrencia en $\psi$.

**Lema 32.** *Sea $\tau$ un tipo*

1. *Las formulas atomicas no tienen subformulas propias*
2. *Si $\varphi$ ocurre propiamente en $(\psi\eta\phi)$, entonces tal ocurrencia es en $\psi$ o en $\phi$*
3. *Si $\varphi$ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en $\psi$*
4. *Si $\varphi$ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en $\psi$*
5. *Si $\varphi_1, \varphi_2$ ocurren en $\varphi$, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra*
6. *Si $\lambda'$ es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de $\varphi$ en $\lambda$ por $\psi$, entonces $\lambda' \in F^\tau$*

*Proof.* Se acepta sin demostracion $\square$