

Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

September 22, 2020

Contents

1 Relaciones binarias	3
1.1 Propiedades notables de relaciones binarias	3
1.2 Relaciones de equivalencia	3
1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones	4
2 Ordenes parciales	5
2.1 Diagramas de Hasse	5
2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos	6
2.3 Supremos	6
2.4 Infimos	7
2.5 Homomorfismos de posets	7
2.6 Isomorfismo de posets	7
2.7 Reticulados	8
3 Version algebraica del concepto de reticulado	10
4 Reticulados acotados	13
4.1 Subreticulados acotados	13
4.2 Homomorfismo de reticulados acotados	13
4.3 Congruencias de reticulados acotados	14
5 Reticulados complementados	15
5.1 Subreticulados complementados	15

5.2	Homomorfismo de reticulados complementados	15
5.3	Congruencias de reticulados complementados	16

1 Relaciones binarias

Definición 1. Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto A sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de A^2 .

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relacion sobre B . Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A , diremos aRb en lugar de $(a, b) \in R$

1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria R sobre un conjunto A son:

- Reflexividad: xRx , cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad: xRy y yRz implica xRz , cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Simetria: xRy implica yRx , cualesquiera sean $x, y \in A$
- Antisimetria: xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

1.2 Relaciones de equivalencia

Definición 2. Sea A un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre A* entenderemos una relacion binaria sobre A la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a A .

Definición 3. Dada una funcion $F: A \rightarrow B$, definimos:

$$\ker F = \{(x, y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

Definición 4. Dada una relacion de equivalencia R sobre A y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto a/R sera llamado la *clase de equivalencia* de a , con respecto a R .

Observacion 1. $a \in a/R$, pues R es reflexiva, por lo tanto aRa .

Observacion 2. $aRb \iff a/R = b/R$, sencillo de demostrar con las propiedades

Observacion 3. $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$, sencillo de demostrar viendo que pasa si aRb y si no aRb

Definición 5. Dada una relacion de equivalencia R sobre A , definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que A/R es el cociente de A por R . Notese que A/R es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de A .

Observacion 4. Sea $F: A \rightarrow B$, entonces:

1. F es inyectiva $\iff \ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$
2. Si F es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre $A/\ker F$

Definición 6. Si R es una relacion de equivalencia sobre A , definimos la funcion $\pi_R: A \rightarrow A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de R .

Observacion 5. Sea R una relacion de equivalencia sobre A . Entonces $\ker \pi_R = R$

1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

Definición 7. Dado un conjunto A , por una *particion de* A entenderemos a un conjunto \mathcal{P} tal que:

- Cada elemento de \mathcal{P} es un subconjunto no vacio de A
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \bigcup_{S \in \mathcal{P}} S$

Observacion 6. Si \mathcal{P} es una particion de A , entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$.

Definición 8. Dada una particion \mathcal{P} de un conjunto A , podemos definir una relacion binaria asociada a \mathcal{P} de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

Teorema 1. Sea A un conjunto cualquiera. Sean

$$Part = \{\text{particiones de } A\}$$

$$Req = \{\text{relaciones de equivalencia sobre } A\}$$

Entonces, las funciones:

$$f : Part \rightarrow ReEq$$

$$\mathcal{P} \rightarrow R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \rightarrow Part$$

$$R \rightarrow A/R$$

son biyecciones una de la otra

Proof. Se acepta sin demostracion

□

2 Ordenes parciales

Definición 9. Una relacion binaria sobre R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre A* , si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A .

Muchas veces denotaremos con \leq a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado \leq a cierto orden parcial sobre un conjunto A , entonces:

1. Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de que $a < b$, diremos que *a es menor que b* , o que *b es mayor que a*
2. Denotaremos con \prec a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$. Cuando se de que $a \prec b$, diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a a* .

Definición 10. Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par (P, \leq) , donde P es un conjunto no vacio cualquiera y \leq es un orden parcial sobre P . Dado un poset (P, \leq) , el conjunto P sera llamado el *universo* de (P, \leq) .

2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset (P, \leq) . con P finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto p_a del plano
2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b , cada vez que $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

- (a) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b
- (b) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de \leq puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama. $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ p hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde p_a hasta p_b .

2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Definición 11. Sea (P, \leq) un poset.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de (P, \leq) , si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximo de (P, \leq) si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que (P, \leq) tiene un 1 para expresar que (P, \leq) tiene un maximo

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimal de (P, \leq) , si no existe un $b \in P$ tal que $b < a$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimo de (P, \leq) si $a \leq b$ para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que (P, \leq) tiene un 0 para expresar que (P, \leq) tiene un minimo

Observacion 7. Un poset (P, \leq) tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

Observacion 8. Todo elemento maximo (resp. minimo) de (P, \leq) es un elemento maximal (resp. minimal) de (P, \leq)

2.3 Supremos

Sea (P, \leq) un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior* de S en (P, \leq) cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de \emptyset en (P, \leq) . Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo* de S en (P, \leq) , cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota superior de S en (P, \leq)
2. Para cada $b \in P$, si b es cota superior de S en (P, \leq) , entonces $a \leq b$

2.4 Infimos

Sea (P, \leq) un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior* de S en (P, \leq) cuando $a \leq b$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de \emptyset en (P, \leq) . Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo* de S en (P, \leq) , cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota inferior de S en (P, \leq)
2. Para cada $b \in P$, si b es cota inferior de S en (P, \leq) , entonces $b \leq a$

Observacion 9. Si a es supremo (resp. infimo) de S en (P, \leq) y a' es supremo (resp. infimo) de S en (P, \leq) , entonces $a = a'$

Observacion 10. a es supremo (resp. infimo) de P en $(P, \leq) \iff a$ es maximo (resp. minimo) de (P, \leq)

2.5 Homomorfismos de posets

Definición 12. Sea (P, \leq) y (P', \leq') posets. Una funcion $F: P \rightarrow P'$ sera llamada un *homomorfismo* de (P, \leq) en (P', \leq') si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F: (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq')

2.6 Isomorfismo de posets

Definición 13. Sea (P, \leq) y (P', \leq') posets. Una funcion $F: P \rightarrow P'$ sera llamada un *isomorfismo* de (P, \leq) en (P', \leq') si F es biyectiva, F es un homomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') y F^{-1} es un homomorfismo de (P', \leq') en (P, \leq) . Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') y en tal caso diremos que (P, \leq) y (P', \leq') son isomorfos.

Definición 14. Dada una funcion $F: A \rightarrow B$ y $S \subseteq A$, denotaremos con $F(S)$ al conjunto $\{F(a) : a \in S\}$

Lema 1. Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets. Supongamos F es un isomorfismo de (P, \leq) y (P', \leq')

1. Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. cota inferior) de $S \iff F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$
2. Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe $\sup(S) \iff$ existe $\sup(F(S))$, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$

3. Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que $\text{existe } \inf(S) \iff \text{existe } \inf(F(S))$, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. Para cada $a \in P$, a es maximo (resp. minimo) $\iff F(a)$ es maximo (resp. minimo)

5. Para cada $a \in P$, a es maximal (resp. minimal) $\iff F(a)$ es maximal (resp. minimal)

6. Para $a, b \in P$, tenemos $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$

Proof. (a) Supongamos a es cota superior de S . Sea $s \in S$. Como $s \leq a$, tenemos que $F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $s \in S$. Como $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Entonces por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S . Por lo tanto, $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$ y entonces $F(\sup(S)) \leq' b$. La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos $a \in P$ es maximo. Pero entonces $a = \sup(P)$, y entonces $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$. La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos $b \in P$ tal que no existe $a \in P$ tal que $b \leq a \Rightarrow a = b$. Sea $c \in P$ tal que $F(b) \leq' F(c)$, entonces $b \leq c$, y entonces $b = c$, $F(b) = F(c)$. Luego $F(b)$ es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean $a, b \in P$ tal que $a \prec b$. Luego tenemos que $F(a) \leq' F(b)$. Supongamos existe $z \in P$ tal que $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$, entonces tendríamos $a \leq z \leq b$. Como $a \prec b$, se sigue que $z = a$ o $z = b$. Luego $F(a) \prec' F(b)$. La *vuelta* es analoga. \square

2.7 Reticulados

Definición 15. Diremos que un poset (P, \leq) es un *reticulado* si para todo $a, b \in P$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$

Definición 16. Dado un reticulado (P, \leq) , definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \rightarrow P$$

$$(a, b) \rightarrow \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \rightarrow P$$

$$(a, b) \rightarrow \inf(\{a, b\})$$

Escribiremos $a \mathbf{s} b$ en lugar de $s(a, b)$ y $a \mathbf{i} b$ en lugar de $i(a, b)$

Lema 2. *Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y \in L$, se cumplen:*

1. $x \leq x \mathbf{s} y$
2. $x \mathbf{i} y \leq x$
3. $x \mathbf{s} x = x \mathbf{i} x = x$
4. $x \mathbf{s} y = y \mathbf{s} x$
5. $x \mathbf{i} y = y \mathbf{i} x$

Proof. TODO

□

Lema 3. *Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y \in L$, son equivalentes:*

1. $x \leq y$
2. $x \mathbf{s} y = y$
3. $x \mathbf{i} y = x$

Proof. TODO

□

Lema 4. *Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y \in L$, se tiene que:*

1. $x \mathbf{s} (x \mathbf{i} y) = x$
2. $x \mathbf{i} (x \mathbf{s} y) = x$

Proof. TODO

□

Lema 5. *Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que:*

1. $(x \mathbf{s} y) \mathbf{s} z = x \mathbf{s} (y \mathbf{s} z)$
2. $(x \mathbf{i} y) \mathbf{i} z = x \mathbf{i} (y \mathbf{i} z)$

Proof. TODO

□

Lema 6. *Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y, z, w \in L$, se tiene que si $x \leq z$ y $y \leq w$, entonces*

$$1. x \textbf{s} y \leq z \textbf{s} w$$

$$2. x \textbf{i} y \leq z \textbf{i} w$$

Proof. TODO

□

Lema 7. Dado un reticulado (L, \leq) y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que

$$(x \textbf{i} y) \textbf{s} (x \textbf{i} z) \leq x \textbf{i} (y \textbf{s} z)$$

Proof. TODO

□

Lema 8. Sea (L, \leq) un reticulado. Dados elementos $x_1, \dots, x_n \in L$, con $n \geq 2$, se tiene que:

$$(\dots (x_1 \textbf{s} x_2) \textbf{s} \dots) \textbf{s} x_n = \sup(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (1)$$

$$(\dots (x_1 \textbf{i} x_2) \textbf{i} \dots) \textbf{i} x_n = \inf(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (2)$$

Proof. TODO

□

3 Version algebraica del concepto de reticulado

Definición 17. Una terna $(L, \textbf{s}, \textbf{i})$, donde L es un conjunto y \textbf{s}, \textbf{i} son dos operaciones binarias sobre L sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1. $x \textbf{s} x = x \textbf{i} x = x$, cualesquiera sea $x \in L$
2. $x \textbf{s} y = y \textbf{s} x$, cualesquiera sean $x, y \in L$
3. $x \textbf{i} y = y \textbf{i} x$, cualesquiera sean $x, y \in L$
4. $(x \textbf{s} y) \textbf{s} z = x \textbf{s} (y \textbf{s} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$
5. $(x \textbf{i} y) \textbf{i} z = x \textbf{i} (y \textbf{i} z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$
6. $x \textbf{s} (x \textbf{i} y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$
7. $x \textbf{i} (x \textbf{s} y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

En tal caso que $(L, \textbf{s}, \textbf{i})$ sea un reticulado, diremos que L es el *universo* del reticulado.

Teorema 2. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:

$$x \leq y \iff x \mathbf{s} y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathbf{s} y$$

$$\inf(\{x, y\}) = x \mathbf{i} y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Definición 18. Dados reticulados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un *subreticulado* de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
3. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

Definición 19. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones \mathbf{s} y \mathbf{i}

Observacion 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. S es subuniverso de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

Definición 20. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados. Una funcion $F: L \rightarrow L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \mathbf{s} y) = F(x) \mathbf{s}' F(y)$$

$$F(x \mathbf{i} y) = F(x) \mathbf{i}' F(y)$$

Un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ sera llamada *isomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Lema 9. Si $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo

Proof. TODO □

Lema 10. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados y sea $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(I_F, \mathbf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathbf{i}'|_{I_F \times I_F})$

Proof. TODO □

Lema 11. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados y sean (L, \leq) y (L', \leq') los posets asociados. Sea $F: L \rightarrow L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ $\iff F$ es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq')

Proof. TODO □

Definición 21. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$* sera una relacion de equivalencia θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \mathbf{s} y)\theta(x' \mathbf{s} y') \text{ y } (x \mathbf{i} y)\theta(x' \mathbf{i} y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{s}} y/\theta = (x \mathbf{s} y)/\theta$$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{i}} y/\theta = (x \mathbf{i} y)/\theta$$

Definición 22. La terna $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ es llamada *cociente de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sobre θ* , y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

Lema 12. $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \iff y\theta(x \mathbf{s} y)$$

Proof. TODO □

Lema 13. Si $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ es un homomorfismo, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

Proof. TODO □

Lema 14. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado y sea θ una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Entonces π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$. Ademias $\ker \pi_\theta = \theta$.

Proof. TODO □

4 Retiulados acotados

Definición 23. Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un reticulado, $0, 1 \in L$, y ademias se cumplen las siguientes propiedades

1. $0 \mathbf{s} x = x$, para cada $x \in L$
2. $1 \mathbf{s} x = 1$, para cada $x \in L$

4.1 Subreticulados acotados

Definición 24. Dados reticulados acotados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado de* $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L \times L}$
4. $i = i'|_{L \times L}$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s e i .

4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

Definición 25. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F: L \rightarrow L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \mathbf{s} y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \mathbf{i} y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Lema 15. Si $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 16. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados y sea $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(I_F, s'|_{I_F \times I_F}, i'|_{I_F \times I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

4.3 Congruencias de reticulados acotados

Definición 26. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$* sera una relacion de equivalencia θ la cual sera una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{s}} y/\theta = (x \mathbf{s} y)/\theta$$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{i}} y/\theta = (x \mathbf{i} y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sobre θ* y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

Lema 17. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado
2. π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ

Proof. TODO □

Lema 18. Si $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$

Proof. TODO □

5 Reticulados complementados

Definición 27. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de a*) tal que:

$$a \mathbf{s} b = 1$$

$$a \mathbf{i} b = 0$$

Definición 28. Entenderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y c es una operacion unaria sobre L tal que:

1. $x \mathbf{s} x^c = 1$, para cada $x \in L$
2. $x \mathbf{i} x^c = 0$, para cada $x \in L$

5.1 Subreticulados complementados

Definición 29. Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado de $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$* si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
4. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$
5. $^c = ^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones \mathbf{s} , \mathbf{i} y c .

5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

Definición 30. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F: L \rightarrow L'$ sera llamada un *homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$* si para todo

$x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \text{ s } y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \text{ i } y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \cong (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Lema 19. Si $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo.

Proof. Se acepta sin demostracion

□

Lema 20. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ reticulados y sea $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(I_F, \mathbf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathbf{i}'|_{I_F \times I_F}, {}^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion

□

5.3 Congruencias de reticulados complementados

Definición 31. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$* sera una relacion de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

1. θ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$
2. $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias \tilde{s} y \tilde{i} y una operacion binaria \tilde{c} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \\(x/\theta)^{\tilde{c}} &= x^c/\theta\end{aligned}$$

La 6-upla $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

Lema 21. Sea $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado y θ una congruencia sobre $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado complementado
2. π_θ es un homomorfismo de $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ

Proof. TODO □

Lema 22. Si $F: (L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1) \rightarrow (L', \text{s}', \text{i}', ^{c'}, 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces $\ker F$ es una congruencia sobre $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$

Proof. Se acepta sin demostracion □