Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

October 9, 2020

Contents

1 Relaciones binarias

Definición 1. Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto A sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de A^2.

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relacion sobre B. Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A, diremos aRb en lugar de $(a,b) \in R$

1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria R sobre un conjunto A son:

- Reflexividad: xRx, cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad: xRy y yRz implica xRz, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Simetria: xRy implica yRx, cualesquiera sean $x, y \in A$
- Antisimetria: xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

1.2 Relaciones de equivalencia

Definición 2. Sea A un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre* A entenderemos una relacion binaria sobre A la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a A.

Definición 3. Dada una funcion $F \colon A \to B$, definimos:

$$\ker F = \{(x,y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

Definición 4. Dada una relacion de equivalencia R sobre A y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto a/R sera llamado la *clase de equivalencia* de a, con respecto a R.

Observacion 1. $a \in a/R$, pues R es reflexiva, por lo tanto aRa.

Observacion 2. $aRb \iff a/R = b/R$, sencillo de demostrar con las propiedades

Observacion 3. $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$, sencillo de demostrar viendo que pasa si aRb y si no aRb

Definición 5. Dada una relacion de equivalencia R sobre A, definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que A/R es el cociente de A por R. Notese que A/R es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de A.

Observacion 4. Sea $F \colon A \to B$, entonces:

1. F es inyectiva $\iff$ $\ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$
2. Si F es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre $A/\ker F$

Definición 6. Si R es una relacion de equivalencia sobre A, definimos la funcion $\pi_R \colon A \to A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de R.

Observacion 5. Sea R una relacion de equivalencia sobre A. Entonces $\ker \pi_R = R$

1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

Definición 7. Dado un conjunto A, por una *particion de* A entenderemos a un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de A
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{P}} S$

Observacion 6. Si $\mathcal{P}$ es una particion de A, entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$.

Definición 8. Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto A, podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

Teorema 1. *Sea A un conjunto cualquiera. Sean*

$$Part = \{particiones\ de\ A\}$$

$$ReEq = \{relaciones\ de\ equivalencia\ sobre\ A\}$$

Entonces, las funciones:

$$f : Part \to ReEq$$
$$\mathcal{P} \to R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \to Part$$
$$R \to A/R$$

son biyecciones una de la otra

Proof. Se acepta sin demostracion $\square$

2 Ordenes parciales

Definición 9. Una relacion binaria sobre R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre* A, si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A.

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces:

1. Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de que $a < b$, diremos que *a es menor que b*, o que *b es mayor que a*

2. Denotaremos con $\prec$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$. Cuando se de que $a \prec b$, diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a a*.

Definición 10. Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre P. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto P sera llamado el *universo* de $(P, \leq)$.

2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset $(P, \leq)$. con P finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto p_a del plano

2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

    (a) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b

    (b) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de $\leq$ puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama. $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ o hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde p_a hasta p_b.

2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Definición 11. Sea $(P, \leq)$ un poset.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 1 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un maximo

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $b < a$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b$ para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 0 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un minimo

Observacion 7. Un poset $(P, \leq)$ tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

Observacion 8. Todo elemento maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de $(P, \leq)$

2.3 Supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior* de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota superior de S en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si b es cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$

2.4 Infimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior* de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota inferior de S en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si b es cota inferior de S en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$

Observacion 9. Si a es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$ y a' es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

Observacion 10. a es supremo (resp. infimo) de P en $(P, \leq) \iff a$ es maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$

2.5 Homomorfismos de posets

Definición 12. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F\colon (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$

2.6 Isomorfismo de posets

Definición 13. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y F^{-1} es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son isomorfos.

Definición 14. Dada una funcion $F\colon A \to B$ y $S \subseteq A$, denotaremos con $F(S)$ al conjunto $\{F(a) : a \in S\}$

Lema 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$*

1. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. cota inferior) de $S \iff F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$*

2. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe $\sup(S) \iff$ existe $\sup(F(S))$, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$*

3. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe* $\inf(S) \iff$ *existe* $\inf(F(S))$*, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que* $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. *Para cada $a \in P$, a es maximo (resp. minimo) $\iff$ $F(a)$ es maximo (resp. minimo)*

5. *Para cada $a \in P$, a es maximal (resp. minimal) $\iff$ $F(a)$ es maximal (resp. minimal)*

6. *Para $a, b \in P$, tenemos $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$*

Proof. (a) Supongamos a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Como $s \leq a$, tenemos que $F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $s \in S$. Como $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Entonces por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S. Por lo tanto, $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$ y entonces $F(\sup(S)) \leq' b$. La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos $a \in P$ es maximo. Pero entonces $a = \sup(P)$, y entonces $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$. La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos $b \in P$ tal que no existe $a \in P$ tal que $b \leq a \Rightarrow a = b$. Sea $c \in P$ tal que $F(b) \leq' F(c)$, entonces $b \leq c$, y entonces $b = c$, $F(b) = F(c)$. Luego $F(b)$ es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean $a, b \in P$ tal que $a \prec b$. Luego tenemos que $F(a) \leq' F(b)$. Supongamos existe $z \in P$ tal que $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$, entonces tendriamos $a \leq z \leq b$. Como $a \prec b$, se sigue que $z = a$ o $z = b$. Luego $F(a) \prec' F(b)$. La *vuelta* es analoga. $\square$

2.7 Reticulados

Definición 15. Diremos que un poset $(P, \leq)$ es un *reticulado* si para todo $a, b \in P$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$

Definición 16. Dado un reticulado $(P, \leq)$, definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \to P$$
$$(a, b) \to \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \to p$$
$$(a, b) \to \inf(\{a, b\})$$

Escribiremos $a \ \mathbf{s} \ b$ en lugar de $s(a,b)$ y $a \ \mathbf{i} \ b$ en lugar de $i(a,b)$

Lema 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se cumplen:*

1. $x \leq x \ \boldsymbol{s} \ y$
2. $x \ \boldsymbol{i} \ y \leq x$
3. $x \ \boldsymbol{s} \ x = x \ \boldsymbol{i} \ x = x$
4. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y \ \boldsymbol{s} \ x$
5. $x \ \boldsymbol{i} \ y = y \ \boldsymbol{i} \ x$

Proof. (1) Claramente $(x \ \mathbf{s} \ y)$ es cota superior de x. Por lo tanto $x \leq x \ \mathbf{s} \ y$

(2) Claramente $(x \ \mathbf{i} \ y)$ es cota inferior de x. Por lo tanto $x \ \mathbf{i} \ y \leq x$

(3) Supongamos $(x \ \mathbf{s} \ x) = z \neq x$. Tenemos que z es cota superior de x por lo tanto $x \leq z$. Pero tambien x es cota superior de x y por lo tanto z no puede ser la minima cota superior. El caso del infimo es analogo.

(4) $(x \ \mathbf{s} \ y) = \sup(\{x, y\}) = \sup(\{y, x\}) = (y \ \mathbf{s} \ x)$

(5) $(x \ \mathbf{i} \ y) = \inf(\{x, y\}) = \inf(\{y, x\}) = (y \ \mathbf{i} \ x)$ □

Lema 3. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, son equivalentes:*

1. $x \leq y$
2. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y$
3. $x \ \boldsymbol{i} \ y = x$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Claramente y es cota superior de $\{x, y\}$ por (1). Y trivialmente es la minima ya que es igual a uno de sus elementos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Claremente y es cota superior de $\{x, y\}$, por lo tanto $x \leq y$. Luego se tiene que x es cota inferior de $\{x, y\}$. Trivialmente es la maxima.

(3) $\Rightarrow$ (1) Claramente x es cota inferior de $\{x, y\}$, por lo tanto $x \leq y$. □

Lema 4 (Leyes de absorcion)**.** *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se tiene que:*

1. $x \ \boldsymbol{s} \ (x \ \boldsymbol{i} \ y) = x$
2. $x \ \boldsymbol{i} \ (x \ \boldsymbol{s} \ y) = x$

Proof. (1) Claramente $(x \textbf{ i } y) \leq x$, y por lo tanto $(x \textbf{ i } y) \textbf{ s } x = x$

(2) Claramente $x \leq (x \textbf{ s } y)$, y por lo tanto $x \textbf{ i } (x \textbf{ s } y) = x$ $\square$

Lema 5. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que:*

1. $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$
2. $(x \textbf{ i } y) \textbf{ i } z = x \textbf{ i } (y \textbf{ i } z)$

Proof. (1) Notese que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$x \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$
$$y \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$
$$z \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$

En particular, tenemos que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, y entonces tenemos que $x \textbf{ s } y \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$. Es decir, $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x \textbf{ s } y, z\}$, y por lo tanto $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$.

Notese ahora que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$, ya que:

$$x \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$
$$y \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$
$$z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$

En particular, tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{y, z\}$, y por lo tanto $y \textbf{ s } z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$. Es decir, $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y \textbf{ s } z\}$, y por lo tanto $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$.

Luego tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$

(2) Es analoga, si alguien la quiere hacer $\square$

Lema 6. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se tiene que si $x \leq z$ y $y \leq w$, entonces*

1. $x \textbf{ s } y \leq z \textbf{ s } w$
2. $x \textbf{ i } y \leq z \textbf{ i } w$

Proof. (1) Notese que

$$x \leq z \leq z \ \mathbf{s} \ w$$
$$y \leq w \leq z \ \mathbf{s} \ w$$

Luego $z \ \mathbf{s} \ w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y por lo tanto $x \ \mathbf{s} \ y \leq z \ \mathbf{s} \ w$

(2) Notese que

$$z \geq x \geq x \ \mathbf{i} \ y$$
$$w \geq y \geq x \ \mathbf{i} \ y$$

Luego $x \ \mathbf{i} \ y$ es cota inferior de $\{z, w\}$ y por lo tanto $x \ \mathbf{i} \ y \leq z \ \mathbf{i} \ w$ □

Lema 7. *Dado un reticulado* $(L, \leq)$ *y elementos* $x, y, z \in L$*, se tiene que* $(x \ \boldsymbol{i} \ y) \ \boldsymbol{s} \ (x \ \boldsymbol{i} \ z) \leq x \ \boldsymbol{i} \ (y \ \boldsymbol{s} \ z)$

Proof. Notese que

$$(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x$$
$$(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq y \ \mathbf{s} \ z$$

Tenemos entonces que $(x \ \mathbf{i} \ y), (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z)$ y por lo tanto $(x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ z) \leq x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z)$ □

Lema 8. *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado. Dados elementos* $x_1, \ldots, x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*, se tiene que:*

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{s} \ x_2) \ \boldsymbol{s} \ \ldots) \ \boldsymbol{s} \ x_n = \sup(\{x_1, \ldots, x_n\})$$
$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{i} \ x_2) \ \boldsymbol{i} \ \ldots) \ \boldsymbol{i} \ x_n = \inf(\{x_1, \ldots, x_n\})$$

Proof. TODO □

3 Version algebraica del concepto de reticulado

Definición 17. Una terna $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, donde L es un conjunto y $\mathbf{s}$, $\mathbf{i}$ son dos operaciones binarias sobre L sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1. $x \ \mathbf{s} \ x = x \ \mathbf{i} \ x = x$, cualesquiera sea $x \in L$
2. $x \ \mathbf{s} \ y = y \ \mathbf{s} \ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

3. $x \mathbf{\ i\ } y = y \mathbf{\ i\ } x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

4. $(x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

5. $(x \mathbf{\ i\ } y) \mathbf{\ i\ } z = x \mathbf{\ i\ } (y \mathbf{\ i\ } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

6. $x \mathbf{\ s\ } (x \mathbf{\ i\ } y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

7. $x \mathbf{\ i\ } (x \mathbf{\ s\ } y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

En tal caso que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sea un reticulado, diremos que L es el *universo* del reticulado.

Teorema 2. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \iff x \boldsymbol{\ s\ } y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \boldsymbol{\ s\ } y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \boldsymbol{\ i\ } y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Proof. $\leq$ es reflexiva en L, pues $x \leq x \iff x \mathbf{\ s\ } x = x$

$\leq$ es antisimetrico en L, pues si $x \leq y$ tenemos que $x \mathbf{\ s\ } y = y$, y por otro lado, tenemos que $y \leq x$ y entonces $x \mathbf{\ s\ } y = x$. Luego $x = y$

$\leq$ es transitivo, pues si suponemos que $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces
$x \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z) = (x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = y \mathbf{\ s\ } z = z$. Luego $x \leq z$

Tenemos entonces que $\leq$ es un orden parcial sobre L.

Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathbf{\ s\ } y$. Es claro que $x \mathbf{\ s\ } y$ es cota superior de $\{x, y\}$. Supongamos que $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z) = x \mathbf{\ s\ } z = z$$

Luego $x \mathbf{\ s\ } y \leq z$ y por lo tanto $x \mathbf{\ s\ } y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathbf{\ i\ } y$, primero probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \iff u \mathbf{\ i\ } v = u$$

Supongamos $u \mathbf{\ s\ } v = v$, entonces $u \mathbf{\ i\ } v = u \mathbf{\ i\ } (u \mathbf{\ s\ } v) = u$

Ahora si veamos que $\inf(\{x,y\}) = x \textbf{ i } y$. Es claro que $x \textbf{ i } y$ es cota inferior de $\{x,y\}$. Supongamos que $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \textbf{ i } y) \textbf{ i } z = x \textbf{ i } (y \textbf{ i } z) = x \textbf{ i } z = z$$

Luego $z \leq x \textbf{ i } y$ y por lo tanto $x \textbf{ i } y$ es la mayor cota inferior. $\square$

3.1 Subreticulados

Definición 18. Dados reticulados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un *subreticulado de* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
3. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

Definición 19. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones $\mathbf{s}$ y $\mathbf{i}$

Observacion 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. S es subuniverso de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

3.2 Homomorfismo de reticulados

Definición 20. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \textbf{ s } y) &= F(x) \textbf{ s' } F(y) \\ F(x \textbf{ i } y) &= F(x) \textbf{ i' } F(y) \end{aligned}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ sera llamada *isomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Lema 9. *Si $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es tambien un homomorfismo, es decir que para todo $x, y \in L'$:

$$F^{-1}(x \text{ \textbf{s'} } y) = F^{-1}(x) \text{ \textbf{s} } F^{-1}(y)$$
$$F^{-1}(x \text{ \textbf{i'} } y) \ = F^{-1}(x) \text{ \textbf{i} } F^{-1}(y)$$

Sean $z, w \in L$ los unicos elementos de L tal que cumplen que $F(z) = x$ y $F(w) = y$. Estos elementos existen y son unicos pues F es biyectiva. Entonces, tenemos que:

$$F^{-1}(F(z) \text{ \textbf{s'} } F(w)) = F^{-1}(F(z)) \text{ \textbf{s} } F^{-1}(F(w))$$
$$F^{-1}(F(z) \text{ \textbf{i'} } F(w)) \ = F^{-1}(F(z)) \text{ \textbf{i} } F^{-1}(F(w))$$

Y por propiedades de homomorfismo y de funciones con inversa tenemos que:

$$F^{-1}(F(z \text{ \textbf{s} } w)) = z \text{ \textbf{s} } w$$
$$F^{-1}(F(z \text{ \textbf{i} } w)) \ = z \text{ \textbf{i} } w$$

□

Lema 10. *Sean $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ y $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ reticulados y sea $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F})$*

Proof. Ya que L no es vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$a \text{ \textbf{s'} } b = F(x) \text{ \textbf{s'} } F(y) = F(x \text{ \textbf{s} } y) \in I_F$$
$$a \text{ \textbf{i'} } b = F(x) \text{ \textbf{i'} } F(y) \ = F(x \text{ \textbf{i} } y) \in I_F$$

Por lo tanto I_F es cerrado bajo **s'** y **i'** □

Lema 11. *Sean $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ y $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ reticulados y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F\colon L \to L'$ una funcion. Entonces F es un isomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ $\iff$ F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$*

Proof.

$\Rightarrow$

Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \ \mathbf{s} \ y$, por lo cual $F(y) = F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$.

Ahora sean $x, y \in L'$ tales que $x \leq' y$. Tenemos que $y = x \ \mathbf{s'} \ y$, por lo cual $F^{-1}(y) = F^{-1}(x \ \mathbf{s'} \ y) = F^{-1}(x) \ \mathbf{s} \ F^{-1}(y)$ produciendo $F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$.

$\Leftarrow$

Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Sean $x, y \in L$ tales que $y = x \ \mathbf{s} \ y$. Tenemos entonces que $x \leq y$ y por lo tanto $F(x) \leq' F(y)$, produciendo $F(y) = F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y)$

Ahora sean $x, y \in L'$ tales que $y = x \ \mathbf{s'} \ y$. Tenemos entonces que $x \leq' y$ y por lo tanto $F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$, produciendo $F^{-1}(y) = F^{-1}(x \ \mathbf{s'} \ y) = F^{-1}(x) \ \mathbf{s} \ F^{-1}(y)$

□

3.3 Congruencia de reticulados

Definición 21. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera una relacion de equivalencia θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \ \mathbf{s} \ y)\theta(x' \ \mathbf{s} \ y') \text{ y } (x \ \mathbf{i} \ y)\theta(x' \ \mathbf{i} \ y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathrm{i}}$

$$x/\theta \ \tilde{\mathbf{s}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta$$
$$x/\theta \ \tilde{\mathbf{i}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta$$

Definición 22. La terna $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sobre θ, y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

Lema 12. *$(L/\theta, \tilde{\boldsymbol{s}}, \tilde{\boldsymbol{i}})$ es un reticulado. El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \ \tilde{\leq} \ y/\theta \iff y\theta(x \ \boldsymbol{s} \ y)$$

Proof. TODO □

Lema 13. *Si $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', s', i')$ es un* homomorfismo*, entonces ker F es una* congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$

Proof. Ya sabemos que $\ker F$ es una relacion de equivalencia, veamos que en este caso cumple la propiedad para ser congruencia.

Sean $x, x', y, y' \in L$ tal que $x\theta x'$ y $y\theta y'$. Luego, tenemos que $F(x) = F(x')$ y $F(y) = F(y')$. Entonces claramente $F(x \mathbf{\ s\ } y) = F(x) \mathbf{\ s'\ } F(y) = F(x') \mathbf{\ s'\ } F(y') = F(x' \mathbf{\ s\ } y')$, y por lo tanto $(x \mathbf{\ s\ } y)\theta(x' \mathbf{\ s\ } y')$

Claramente tambien $F(x \mathbf{\ i\ } y) = F(x) \mathbf{\ i'\ } F(y) = F(x') \mathbf{\ i'\ } F(y') = F(x' \mathbf{\ i\ } y')$, y por lo tanto $(x \mathbf{\ i\ } y)\theta(x' \mathbf{\ i\ } y')$ □

Lema 14. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado y sea θ una congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$. Entonces π_θ es un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ en $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}})$. Ademas ker $\pi_\theta = \theta$.*

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que

$$\pi_\theta(x \mathbf{\ s\ } y) = (x \mathbf{\ s\ } y)/\theta = x/\theta \mathbf{\ \widetilde{s}\ } y/\theta = \pi_\theta(x) \mathbf{\ \widetilde{s}\ } \pi_\theta(y)$$

$$\pi_\theta(x \mathbf{\ i\ } y) = (x \mathbf{\ i\ } y)/\theta = x/\theta \mathbf{\ \widetilde{i}\ } y/\theta = \pi_\theta(x) \mathbf{\ \widetilde{i}\ } \pi_\theta(y)$$

Por lo tanto π_θ conserva la operacion supremo e infimo.

□

4 Reticulados acotados

Definición 23. Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un reticulado, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes propiedades

1. $0 \mathbf{\ s\ } x = x$, para cada $x \in L$
2. $1 \mathbf{\ s\ } x = 1$, para cada $x \in L$

4.1 Subreticulados acotados

Definición 24. Dados reticulados acotados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado de* $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L \times L}$

4. $i = i'|_{L\times L}$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s e i.

4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

Definición 25. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x)s'F(y)$$
$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x)i'F(y)$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Lema 15. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 16. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', s', i', 0', 1')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s'}|_{I_F\times I_F}, \boldsymbol{i'}|_{I_F\times I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

4.3 Congruencias de reticulados acotados

Definición 26. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sera una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Tenemos definidas sobre

L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \; \widetilde{\mathbf{s}} \; y/\theta = (x \; \mathbf{s} \; y)/\theta$$
$$x/\theta \; \widetilde{\mathbf{i}} \; y/\theta = (x \; \mathbf{i} \; y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

Lema 17. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado*

2. π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ

Proof. TODO $\square$

Lema 18. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces ker* F *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$

Proof. TODO $\square$

5 Reticulados complementados

Definición 27. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de* a) tal que:

$$a \; \mathbf{s} \; b = 1$$
$$a \; \mathbf{i} \; b = 0$$

Definición 28. Entonderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ^{c} es una operacion unaria sobre L tal que:

1. $x \; \mathbf{s} \; x^c = 1$, para cada $x \in L$

2. $x \; \mathbf{i} \; x^c = 0$, para cada $x \in L$

5.1 Subreticulados complementados

Definición 29. Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado de* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L\times L}$
4. $i = i'|_{L\times L}$
5. ${}^c = {}^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}.

5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

Definición 30. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x)s'F(y)$$
$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x)i'F(y)$$
$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \to (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \cong (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Lema 19. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 20. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F}, ^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

5.3 Congruencias de reticulados complementados

Definición 31. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

1. θ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$
2. $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$ y una operacion binaria $\widetilde{c}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta$$
$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{i}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta$$
$$(x/\theta)^{\widetilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, ^{\widetilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

Lema 21. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$*.*

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, ^{\widetilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado*
2. π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, ^{\widetilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ

Proof. TODO □

Lema 22. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces ker* F *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$

Proof. Se acepta sin demostracion □

6 Algebras de Boole

Definición 32. Un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente propiedad

$$Dis_1 \quad x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z) = (x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ lo sea.

Consideremos la distributividad dual a Dis_1, es decir:

$$Dis_2 \quad x \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = (x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Lema 23. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado. Entonces $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ satisface $Dis_1 \iff (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ satisface Dis_2*

Proof. TODO □

Definición 33. Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado distributivo.

Lema 24. *Si $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. TODO □

Lema 25. *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole, y sean $x, y \in B$. Se tiene que $y = (y \ \boldsymbol{i} \ x) \ \boldsymbol{s} \ (y \ \boldsymbol{i} \ x^c)$*

Proof. TODO □

Teorema 3. *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole.*

1. $(x \ \boldsymbol{i} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{s} \ y^c$
2. $(x \ \boldsymbol{s} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{i} \ y^c$
3. $x^{cc} = x$
4. $x \ \boldsymbol{i} \ y = 0 \iff y \leq x^c$
5. $x \leq y \iff y^c \leq x^c$

Proof. TODO □

7 Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski

Definición 34. Un *filtro* de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \ \mathbf{i} \ y \in F$
3. $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$

Definición 35. Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conunto:

$$\{y \in L : y \geq s_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

Lema 26. *Supongamos que S es no vacio. Entonces $[S)$ es un filtro. Mas aun, si F es un filtro y $S \subseteq F$, entonces $[S) \subseteq F$. Es decir, $[S)$ es el menor filtro que contiene a S.*

Proof. TODO □

Definición 36. Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

Lema 27 (Zorn)**.** *Sea $(P, \leq)$ un poset y supogamos cada cadena de $(P, \leq)$ tiene cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$*

Proof. TODO □

Definición 37. Un filtro F de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \ \mathbf{s} \ y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$

Teorema 4 (Teorema del Filtro Primo)**.** *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$*

Proof. TODO □

Teorema 5 (Rasiova y Sikorski)**.** *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B, x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \ldots)$ es un infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2, \ldots$. Entonces hay un filtro primo P el cual cumple:*

1. $x \in P$

2. $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$, *para cada* $j = 1, 2, \ldots$

Proof. Se acepta sin demostracion □

8 Sintaxis de la logica de primer orden

8.1 Ocurrencias

Definición 38. Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, \ldots, |\beta|\}$, se dice que α *ocurre a partir de* i *en* β cuandos se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$

Notese que una palabra α puede ocurrir en β a partir de i y tambien a partir de j, con $i \neq j$. Por ejemplo, *aba* ocurre dos veces en la palabra

$$abacaba$$

Cuando dos ocurrencias no se superpongan en alguna posicion, se las llamara *disjuntas*

A veces, diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo, la segunda ocurrencia de b esta contenida en la segunda ocurrencia de *aba*

Tambien se podra hablar de *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo, podriamos reemplazar las ocurrencias de *aca* por *abacaba*, dando como resultado

$$ababacababa$$

En algunos casos, se debera especificar que los reemplazos se haran *simultaneamente* en vez de *secuencialmente*. Por ejemplo, no es lo mismo primero reemplazar *aca* por d y luego d por *bb*

$$abbbba$$

Que hacerlo simultaneamente dando como resultado

$$abdba$$

8.2 Variables

Definición 39. Sea Var el siguiente conjunto de palabras del alfabeto $\{\mathrm{X}, \mathit{0}, \mathit{1}, \ldots, \mathit{9}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{9}\}$:

$$Var = \{\mathrm{X}\mathbf{0}, \ldots, \mathrm{X}\mathbf{9}, \mathrm{X}\mathit{1}\mathbf{0}, \ldots, \mathrm{X}\mathit{2}\mathbf{0}, \ldots, \mathrm{X}\mathit{10}\mathbf{0}, \ldots\}$$

Es decir, el n-esimo elemento de Var sera la palabra de la forma Xα, donde α es el resultado de reemplazar en la representacion decimal de n su ultimo simbolo por el numeral en bold, y el resto por sus numerales en italics.

A los elementos de Var se los llamara *variables*.

Denotaremos con x_i al i-esimo elemento de Var, para cada $i \in \mathbf{N}$.

8.3 Tipos

Definición 40. Diremos que α es subpalabra (propia) de β cuando ($\alpha \notin \{\epsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ, tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$

Definición 41. Por un tipo (de primer orden) entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

1. Hay alfabetos finitos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tales:
   (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+, \mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$
   (b) $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ son disjuntos de a pares
   (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningun simbolo de la lista: $\forall$ $\exists$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ ( ) , $\equiv$ X *0* *1* ... *9* **0** **1** ... **9**
2. $a \colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$ es una funcion que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un numero natural $a(p)$, llamado la *aridad* de p
3. Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$)

A los elementos de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion*, *nombres de relacion*) de tipo τ

Dado $n \geq 1$, definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\} \\ \mathcal{R}_n &= \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\} \end{aligned}$$

8.4 Terminos

Dado un tipo τ, definamos recursivamente los conjuntos de palabras T_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_0^\tau &= Var \cup \mathcal{C} \\ T_{k+1}^\tau &= T_k^\tau \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau)\} \end{aligned}$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de T^τ seran llamados *terminos de tipo* τ. Un termino t es llamado *cerrado* si x_i no ocurre en t, para cada $i \in \mathbf{N}$.

Definimos tambien:

$$T_c^\tau = \{t \in T^\tau : t \text{ es cerrado}\}$$

Lema 28. *Supongamos $t \in T_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces ya sea $t \in Var \cup \mathcal{C}$ o $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$*

Proof. TODO □

8.4.1 Unicidad de la lectura de terminos

Definición 42. Diremos que β es un *tramo inicial* (*propio*) de α si hay una palabra de γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\epsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final* (*propio*)

Lema 29 (Mordizqueo de Terminos)**.** *Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \epsilon$ tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \epsilon$ o $s, t \in \mathcal{C}$. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Teorema 6 (Lectura unica de terminos)**.** *Dado $t \in T^\tau$ se da una de las siguientes:*

1. *$t \in Var \cup \mathcal{C}$*

2. *Hay unicos $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*

Proof. TODO □

8.4.2 Subterminos

Definición 43. Sean $s, t \in T^\tau$. Diremos que s es *subtermino* (*propio*) de t si (no es igual a t y) s es subpalabra de t.

Lema 30. *Sean $r, s, t \in T^\tau$*

1. *Si $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ y s ocurre en t, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun $t_j,\ j = 1, \ldots, n$*
2. *Si r, s ocurren en t, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular las distintas ocurrencias de r en t son disjuntas*
3. *Si t' es el resultado de reemplazar una ocurrencia de s en t por r, entonces $t' \in T^\tau$*

Proof. TODO □

8.5 Formulas

Definición 44. Sea τ un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas:

$$(t \equiv s),\ \text{con } t, s \in T^\tau$$
$$r(t_1, \ldots, t_n),\ \text{con } r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1,\ \text{y } t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo τ*

Definición 45. Dado un tipo τ definamos recursivamente los conjuntos de palabras F_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_0^\tau &= \{\text{formulas atomicas}\} \\
F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\
&\quad \cup \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\
&\quad \cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \cup \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\}
\end{aligned}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de F^τ seran llamados *formulas de tipo τ*

Lema 31. *Supongamos $\varphi \in F_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces φ es de alguna de las siguientes formas:*

- $(t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau_{k-1}$
- $\neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$
- $Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau_{k-1}$

Proof. TODO □

8.5.1 Unicidad de la lectura de formulas

Proposicion 1 (Mordizqueo de formulas)**.** *Si* $\varphi, \psi \in F^\tau$ *y* x, y, z *son tales que* $\varphi = xy$, $\psi = yz$ *y* $y \neq \epsilon$, *entonces* $z = \epsilon$ *y* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\}$ *y* $v \in Var\})^*$. *En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Teorema 7 (Lectura unica de formulas)**.** *Dada* $\varphi \in F^\tau$ *se da una y solo una de las siguientes:*

- $(t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$, *con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$, *con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
- $\neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$
- $Qv\varphi_1$, *con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$

Proof. TODO □

8.5.2 Subformulas

Definición 46. Una formula φ sera llamada una *subformula (propia)* de una formula ψ, cuando φ (sea no igual a ψ y) tenga alguna ocurrencia en ψ.

Lema 32. *Sea* τ *un tipo*

1. *Las formulas atomicas no tienen subformulas propias*

2. *Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\phi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ o en ϕ*

3. *Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ*

4. *Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ*

5. *Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra*

6. *Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$*

Proof. Se acepta sin demostracion □

8.6 Variables libres

Definición 47. Definimos recursivamente la relacion *"v ocurre libremente en φ a partir de i"*, donde $v \in Var, \varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, \ldots, |\varphi|\}$ de la siguiente manera:

1. Si φ es atomica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre en φ a partir de i

2. Si $\varphi = (\varphi_1\eta\varphi_2)$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre libremente en φ_1 a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1\eta|$

3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre libremente en φ_1 a partir de $i-1$

4. Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

Dados $v \in Var, \varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, \ldots, |\varphi|\}$, diremos que *"v ocurre acotadamente en φ a partir de* i cuando v ocurre en φ a partir de i y v no ocurre libremente en φ a partir de i

Definición 48. Dada una formula φ, sea

$$Li(\varphi) = \{v \in Var : \text{ hay un } i \text{ tal que } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i\}$$

Los elementos de $Li(\varphi)$ seran llamados *variables libres de φ*. Una *sentencia* sera una formula φ tal que $Li(\varphi) = \emptyset$. Usaremos S^τ para denotar el conjunto de las sentencias de tipo τ.

Lema 33. *Sea τ un tipo*

1. *$Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ ocurre en t o v ocurre en $s\}$*

2. $Li(r(t_1, \ldots, t_n)) = \{v \in Var : v$ *ocurre en algun* $t_i\}$

3. $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$

4. $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

5. $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$

Proof. TODO □

9 Semantica de la logica de primer orden

9.1 Estructuras de tipo τ

Definición 49. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{N}$. Por una *operacion n-aria sobre* A, entenderemos una funcion cuyo dominio es A^n y cuya imagen esta contenida en A.

Definición 50. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{N}$. Por una *relacion n-aria sobre* A entenderemos un subconjunto de A^n.

Definición 51. Sea A un conjunto, $n \in \mathbf{N}$ y τ un tipo. Una *estructura o modelo de tipo* τ sera un par $\mathbf{A} = (A, i)$ tal que:

1. A es un conjunto no vacio llamado el *universo* de $\mathbf{A}$
2. i es una funcion con dominio $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ tal que:
   (a) para cada $c \in \mathcal{C}$, $i(c)$ es un elemento de A
   (b) para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $i(f)$ es un elemento de A
   (c) para cada $r \in \mathcal{R}_n$, $i(r)$ es un elemento de A

Lema 34. *Dados* A, B *conjuntos finitos no vacios, hay* $|B|^{|A|}$ *funciones tales que su dominio es* A *y su imagen esta contenida en* B*.*

Proof. TODO □

9.2 El valor de un termino de una estructura

Definición 52. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Una *asignacion* de $\mathbf{A}$ sera un elemento de $A^{\mathbf{N}} = \{\text{infinituplas de elementos de } A\}$. Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ es una asignacion, entonces diremos que a_j es *el valor que $\vec{a}$ le asigna a la variable x_j*

Definición 53. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, $t \in T^\tau$ y $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion, definimos recursivamente $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$:

1. Si $t = x_i \in Var$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i$
2. Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c)$
3. Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$

El elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ sera llamado el *valor de t en la estructura $\mathbf{A}$ para la asignacion $\vec{a}$*

Lema 35. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{B}}[\vec{b}]$*

Proof. TODO □

9.3 El valor de verdad de una formula en un estructura

Definición 54. Sea $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion y $a \in A$, denotaremos con $\downarrow_i^a (\vec{a})$ a la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a.

Definición 55. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion y $\varphi \in F^\tau$, definimos entonces recursivamente la relacion $A \models \varphi[\vec{a}]$ (escribiremos $A \not\models \varphi[\vec{a}]$ cuando no se de $A \models \varphi[\vec{a}]$):

1. Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$
2. Si $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$
3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
5. Si $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$

7. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{A}]$

8. Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entocnes $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ para cada $a \in A$, se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

9. Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a (\vec{a})]$

Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la *estructura* $\mathbf{A}$ *satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es verdadera en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$.

Cuando se de $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la *estructura* $\mathbf{A}$ *no satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es falsa en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$.

Tambien hablaremos del *valor de verdad de* φ *en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$ el cual sera igual a 1 si se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y 0 en caso contrario.

Lema 36. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*

Proof. TODO □

Corolario 1. *Si φ es una sentencia, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, cualesquiera sean las asignaciones $\vec{a}, \vec{b}$*

Definición 56. Dada una sentencia φ, diremos que φ es *verdadera* en $\mathbf{A}$ cuando su valor de verdad sea 1, y, en caso de que su valor de verdad sea 0, diremos que es *falsa*

Ademas una sentencia de tipo τ sera llamada *universalmente valida* si es verdadera en cada modelo de tipo τ

9.4 Equivalencia de formulas

Definición 57. Dadas $\varphi, \psi \in F^\tau$ diremos que φ y ψ son *equivalentes* cuande se de la siguiente condicion:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \psi[\vec{a}], \text{ para cada modelo de tipo } \tau, \mathbf{A} \text{ y cada } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$$

Escribiremos $\varphi \sim \psi$ cuando φ y ψ sean equivalentes. Notese que $\sim$ es una relacion de equivalencia.

Lema 37. *Son validas las siguientes propiedades:*

1. *Si $Li(\phi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces $\phi \sim \psi \iff$ la sentencia $\forall x_{i_1}, \ldots, \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida*

2. Si $\phi_i \sim \psi_i$, $i = 1, 2$, entonces $\neg\phi_1 \sim \neg\psi_1, (\phi_1 \eta \phi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\phi_1 \sim Qv\psi_1$

3. Si $\phi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de ϕ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$

Proof. TODO □

9.5 Homomorfismos

Definición 58. Dado un modelo de tipo τ, $\mathbf{A} = (A, i)$, para cada $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, usaremos $s^{\mathbf{A}}$ para denotar a $i(s)$.

Definición 59. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ modelos de tipo τ. Una funcion $F\colon A \to B$ sera un *homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ si se cumplen las siguientes:

1. $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$
2. $F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n, a_1, \ldots, a_n \in A$
3. $a_1, \ldots, a_n \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \in r^{\mathbf{B}}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n, a_1, \ldots, a_n \in A$

Un *isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ sera un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ el cual sea biyectivo y cuya inversa sea un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Diremos que los modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos* (en simbolos: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$) cuando haya un isomorfismo F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Diremos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un *homomorfismo* para expresar que F es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$

Diremos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* para expresar que F es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$

Lema 38. *Sea $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfismo. Entonces*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \ldots)]) = t^{\mathbf{B}}[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $t \in T^{\tau}, (a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathbf{N}}$

Lema 39. *Supongamos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^{\tau}$. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \iff \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^{\mathbf{N}}$. En particular $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Proof. TODO □