

# Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

October 6, 2020

## Contents

<b>1 Relaciones binarias</b>	<b>3</b>
1.1 Propiedades notables de relaciones binarias . . . . .	3
1.2 Relaciones de equivalencia . . . . .	3
1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones . . . . .	4
<b>2 Ordenes parciales</b>	<b>5</b>
2.1 Diagramas de Hasse . . . . .	5
2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos . . . . .	6
2.3 Supremos . . . . .	6
2.4 Infimos . . . . .	7
2.5 Homomorfismos de posets . . . . .	7
2.6 Isomorfismo de posets . . . . .	7
2.7 Reticulados . . . . .	8
<b>3 Version algebraica del concepto de reticulado</b>	<b>10</b>
<b>4 Reticulados acotados</b>	<b>13</b>
4.1 Subreticulados acotados . . . . .	13
4.2 Homomorfismo de reticulados acotados . . . . .	13
4.3 Congruencias de reticulados acotados . . . . .	14
<b>5 Reticulados complementados</b>	<b>15</b>
5.1 Subreticulados complementados . . . . .	15

5.2	Homomorfismo de reticulados complementados . . . . .	15
5.3	Congruencias de reticulados complementados . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Algebras de Boole</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Sintaxis de la logica de primer orden</b>	<b>19</b>
8.1	Variables . . . . .	19
8.2	Tipos . . . . .	20
8.3	Terminos . . . . .	20
8.3.1	Unicidad de la lectura de terminos . . . . .	21
8.4	Ocurrencias . . . . .	21
8.5	Subterminos . . . . .	22
8.6	Formulas . . . . .	22
8.7	Unicidad de la lectura de formulas . . . . .	23
8.8	Subformulas . . . . .	24

# 1 Relaciones binarias

**Definición 1.** Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto  $A$  sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de  $A^2$ .

Notese que si  $R$  es una relacion binaria sobre  $A$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $R$  es una relacion sobre  $B$ . Como es usual, cuando  $R$  sea una relacion binaria sobre un conjunto  $A$ , diremos  $aRb$  en lugar de  $(a, b) \in R$

## 1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria  $R$  sobre un conjunto  $A$  son:

- Reflexividad:  $xRx$ , cualesquiera sea  $x \in A$
- Transitividad:  $xRy$  y  $yRz$  implica  $xRz$ , cualesquiera sean  $x, y, z \in A$
- Simetria:  $xRy$  implica  $yRx$ , cualesquiera sean  $x, y \in A$
- Antisimetria:  $xRy$  y  $yRx$  implica  $x = y$ , cualesquiera sean  $x, y \in A$

## 1.2 Relaciones de equivalencia

**Definición 2.** Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre  $A$*  entenderemos una relacion binaria sobre  $A$  la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a  $A$ .

**Definición 3.** Dada una funcion  $F: A \rightarrow B$ , definimos:

$$\ker F = \{(x, y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

**Definición 4.** Dada una relacion de equivalencia  $R$  sobre  $A$  y  $a \in A$ , definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto  $a/R$  sera llamado la *clase de equivalencia* de  $a$ , con respecto a  $R$ .

*Observacion 1.*  $a \in a/R$ , pues  $R$  es reflexiva, por lo tanto  $aRa$ .

*Observacion 2.*  $aRb \iff a/R = b/R$ , sencillo de demostrar con las propiedades

*Observacion 3.*  $a/R \cap b/R = \emptyset$  o  $a/R = b/R$ , sencillo de demostrar viendo que pasa si  $aRb$  y si no  $aRb$

**Definición 5.** Dada una relacion de equivalencia  $R$  sobre  $A$ , definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que  $A/R$  es el cociente de  $A$  por  $R$ . Notese que  $A/R$  es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de  $A$ .

*Observacion 4.* Sea  $F: A \rightarrow B$ , entonces:

1.  $F$  es inyectiva  $\iff \ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$
2. Si  $F$  es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre  $A/\ker F$

**Definición 6.** Si  $R$  es una relacion de equivalencia sobre  $A$ , definimos la funcion  $\pi_R: A \rightarrow A/R$  por  $\pi_R(a) = a/R$ , para cada  $a \in A$ . Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de  $R$ .

*Observacion 5.* Sea  $R$  una relacion de equivalencia sobre  $A$ . Entonces  $\ker \pi_R = R$

### 1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

**Definición 7.** Dado un conjunto  $A$ , por una *particion de*  $A$  entenderemos a un conjunto  $\mathcal{P}$  tal que:

- Cada elemento de  $\mathcal{P}$  es un subconjunto no vacio de  $A$
- Si  $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$  y  $S_1 \neq S_2$ , entonces  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \bigcup_{S \in \mathcal{P}} S$

*Observacion 6.* Si  $\mathcal{P}$  es una particion de  $A$ , entonces para cada  $a \in A$  hay un unico  $S \in \mathcal{P}$  tal que  $a \in S$ .

**Definición 8.** Dada una particion  $\mathcal{P}$  de un conjunto  $A$ , podemos definir una relacion binaria asociada a  $\mathcal{P}$  de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

**Teorema 1.** Sea  $A$  un conjunto cualquiera. Sean

$$Part = \{\text{particiones de } A\}$$

$$Req = \{\text{relaciones de equivalencia sobre } A\}$$

Entonces, las funciones:

$$f : Part \rightarrow ReEq$$

$$\mathcal{P} \rightarrow R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \rightarrow Part$$

$$R \rightarrow A/R$$

son biyecciones una de la otra

*Proof.* Se acepta sin demostracion

□

## 2 Ordenes parciales

**Definición 9.** Una relacion binaria sobre  $R$  sobre un conjunto  $A$  sera llamada un *orden parcial sobre  $A$* , si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de  $A$ .

Muchas veces denotaremos con  $\leq$  a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado  $\leq$  a cierto orden parcial sobre un conjunto  $A$ , entonces:

1. Denotaremos con  $<$  a la relacion binaria  $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$ . Cuando se de que  $a < b$ , diremos que  *$a$  es menor que  $b$* , o que  *$b$  es mayor que  $a$*
2. Denotaremos con  $\prec$  a la relacion binaria  $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$ . Cuando se de que  $a \prec b$ , diremos que  *$a$  es cubierto por  $b$*  o que  *$b$  cubre a  $a$* .

**Definición 10.** Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par  $(P, \leq)$ , donde  $P$  es un conjunto no vacio cualquiera y  $\leq$  es un orden parcial sobre  $P$ . Dado un poset  $(P, \leq)$ , el conjunto  $P$  sera llamado el *universo* de  $(P, \leq)$ .

### 2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset  $(P, \leq)$ . con  $P$  finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada  $a \in P$  un punto  $p_a$  del plano
2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos  $p_a$  y  $p_b$ , cada vez que  $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

- (a) Si  $a \prec b$ , entonces  $p_a$  esta por debajo de  $p_b$
- (b) Si un punto  $p_a$  ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de  $\leq$  puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama.  $a \leq b$  sucedera si y solo si  $p_a = p_b$  p hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde  $p_a$  hasta  $p_b$ .

## 2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

**Definición 11.** Sea  $(P, \leq)$  un poset.

Diremos que  $a \in P$  es un elemento maximal de  $(P, \leq)$ , si no existe un  $b \in P$  tal que  $a < b$ .

Diremos que  $a \in P$  es un elemento maximo de  $(P, \leq)$  si  $b \leq a$ , para todo  $b \in P$ . En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que  $(P, \leq)$  tiene un 1 para expresar que  $(P, \leq)$  tiene un maximo

Diremos que  $a \in P$  es un elemento minimal de  $(P, \leq)$ , si no existe un  $b \in P$  tal que  $b < a$ .

Diremos que  $a \in P$  es un elemento minimo de  $(P, \leq)$  si  $a \leq b$  para todo  $b \in P$ . En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que  $(P, \leq)$  tiene un 0 para expresar que  $(P, \leq)$  tiene un minimo

*Observacion 7.* Un poset  $(P, \leq)$  tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

*Observacion 8.* Todo elemento maximo (resp. minimo) de  $(P, \leq)$  es un elemento maximal (resp. minimal) de  $(P, \leq)$

## 2.3 Supremos

Sea  $(P, \leq)$  un poset. Dado  $S \subseteq P$ , diremos que un elemento  $a \in P$  es *cota superior* de  $S$  en  $(P, \leq)$  cuando  $b \leq a$ , para todo  $b \in S$ . Notese que todo elemento de  $P$  es cota superior de  $\emptyset$  en  $(P, \leq)$ . Un elemento  $a \in P$  sera llamado *supremo* de  $S$  en  $(P, \leq)$ , cuando se den las siguientes propiedades:

1.  $a$  es cota superior de  $S$  en  $(P, \leq)$
2. Para cada  $b \in P$ , si  $b$  es cota superior de  $S$  en  $(P, \leq)$ , entonces  $a \leq b$

## 2.4 Infimos

Sea  $(P, \leq)$  un poset. Dado  $S \subseteq P$ , diremos que un elemento  $a \in P$  es *cota inferior* de  $S$  en  $(P, \leq)$  cuando  $a \leq b$ , para todo  $b \in S$ . Notese que todo elemento de  $P$  es cota inferior de  $\emptyset$  en  $(P, \leq)$ . Un elemento  $a \in P$  sera llamado *infimo* de  $S$  en  $(P, \leq)$ , cuando se den las siguientes propiedades:

1.  $a$  es cota inferior de  $S$  en  $(P, \leq)$
2. Para cada  $b \in P$ , si  $b$  es cota inferior de  $S$  en  $(P, \leq)$ , entonces  $b \leq a$

*Observacion 9.* Si  $a$  es supremo (resp. infimo) de  $S$  en  $(P, \leq)$  y  $a'$  es supremo (resp. infimo) de  $S$  en  $(P, \leq)$ , entonces  $a = a'$

*Observacion 10.*  $a$  es supremo (resp. infimo) de  $P$  en  $(P, \leq) \iff a$  es maximo (resp. minimo) de  $(P, \leq)$

## 2.5 Homomorfismos de posets

**Definición 12.** Sea  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$  posets. Una funcion  $F: P \rightarrow P'$  sera llamada un *homomorfismo* de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$  si para todo  $x, y \in P$  se cumple que  $x \leq y$  implica  $F(x) \leq' F(y)$ . Escribiremos  $F: (P, \leq) \rightarrow (P', \leq')$  para expresar que  $F$  es un homomorfismo de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$

## 2.6 Isomorfismo de posets

**Definición 13.** Sea  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$  posets. Una funcion  $F: P \rightarrow P'$  sera llamada un *isomorfismo* de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$  si  $F$  es biyectiva,  $F$  es un homomorfismo de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$  y  $F^{-1}$  es un homomorfismo de  $(P', \leq')$  en  $(P, \leq)$ . Escribiremos  $(P, \leq) \cong (P', \leq')$  cuando exista un isomorfismo de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$  y en tal caso diremos que  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$  son isomorfos.

**Definición 14.** Dada una funcion  $F: A \rightarrow B$  y  $S \subseteq A$ , denotaremos con  $F(S)$  al conjunto  $\{F(a) : a \in S\}$

**Lema 1.** Sean  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$  posets. Supongamos  $F$  es un isomorfismo de  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$

1. Para cada  $S \subseteq P$  y cada  $a \in P$ , se tiene que  $a$  es cota superior (resp. cota inferior) de  $S \iff F(a)$  es cota superior (resp. inferior) de  $F(S)$
2. Para cada  $S \subseteq P$  y cada  $a \in P$ , se tiene que existe  $\sup(S) \iff$  existe  $\sup(F(S))$ , y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que  $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$

3. Para cada  $S \subseteq P$  y cada  $a \in P$ , se tiene que existe  $\inf(S) \iff$  existe  $\inf(F(S))$ , y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que  $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. Para cada  $a \in P$ ,  $a$  es maximo (resp. minimo)  $\iff F(a)$  es maximo (resp. minimo)

5. Para cada  $a \in P$ ,  $a$  es maximal (resp. minimal)  $\iff F(a)$  es maximal (resp. minimal)

6. Para  $a, b \in P$ , tenemos  $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$

*Proof.* (a) Supongamos  $a$  es cota superior de  $S$ . Sea  $s \in S$ . Como  $s \leq a$ , tenemos que  $F(s) \leq' F(a)$ . Supongamos ahora que  $F(a)$  es cota superior de  $F(S)$ . Sea  $s \in S$ . Como  $F(s) \leq' F(a)$ , tenemos que  $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$ .

(b) Supongamos que existe  $\sup(S)$ . Entonces por (a)  $F(\sup(S))$  es cota superior de  $F(S)$ . Supongamos  $b$  es cota superior de  $F(S)$ , entonces  $F^{-1}(b)$  es cota superior de  $S$ . Por lo tanto,  $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$  y entonces  $F(\sup(S)) \leq' b$ . La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos  $a \in P$  es maximo. Pero entonces  $a = \sup(P)$ , y entonces  $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$ . La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos  $b \in P$  tal que no existe  $a \in P$  tal que  $b \leq a \Rightarrow a = b$ . Sea  $c \in P$  tal que  $F(b) \leq' F(c)$ , entonces  $b \leq c$ , y entonces  $b = c$ ,  $F(b) = F(c)$ . Luego  $F(b)$  es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean  $a, b \in P$  tal que  $a \prec b$ . Luego tenemos que  $F(a) \leq' F(b)$ . Supongamos existe  $z \in P$  tal que  $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$ , entonces tendríamos  $a \leq z \leq b$ . Como  $a \prec b$ , se sigue que  $z = a$  o  $z = b$ . Luego  $F(a) \prec' F(b)$ . La *vuelta* es analoga.  $\square$

## 2.7 Reticulados

**Definición 15.** Diremos que un poset  $(P, \leq)$  es un *reticulado* si para todo  $a, b \in P$ , existen  $\sup(\{a, b\})$  e  $\inf(\{a, b\})$

**Definición 16.** Dado un reticulado  $(P, \leq)$ , definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \rightarrow P$$

$$(a, b) \rightarrow \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \rightarrow P$$

$$(a, b) \rightarrow \inf(\{a, b\})$$



Escribiremos  $a \mathbf{s} b$  en lugar de  $s(a, b)$  y  $a \mathbf{i} b$  en lugar de  $i(a, b)$

**Lema 2.** *Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y \in L$ , se cumplen:*

1.  $x \leq x \mathbf{s} y$
2.  $x \mathbf{i} y \leq x$
3.  $x \mathbf{s} x = x \mathbf{i} x = x$
4.  $x \mathbf{s} y = y \mathbf{s} x$
5.  $x \mathbf{i} y = y \mathbf{i} x$

*Proof.* TODO

□

**Lema 3.** *Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y \in L$ , son equivalentes:*

1.  $x \leq y$
2.  $x \mathbf{s} y = y$
3.  $x \mathbf{i} y = x$

*Proof.* TODO

□

**Lema 4.** *Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y \in L$ , se tiene que:*

1.  $x \mathbf{s} (x \mathbf{i} y) = x$
2.  $x \mathbf{i} (x \mathbf{s} y) = x$

*Proof.* TODO

□

**Lema 5.** *Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y, z \in L$ , se tiene que:*

1.  $(x \mathbf{s} y) \mathbf{s} z = x \mathbf{s} (y \mathbf{s} z)$
2.  $(x \mathbf{i} y) \mathbf{i} z = x \mathbf{i} (y \mathbf{i} z)$

*Proof.* TODO

□

**Lema 6.** *Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y, z, w \in L$ , se tiene que si  $x \leq z$  y  $y \leq w$ , entonces*

$$1. x \textbf{s} y \leq z \textbf{s} w$$

$$2. x \textbf{i} y \leq z \textbf{i} w$$

*Proof.* TODO

□

**Lema 7.** Dado un reticulado  $(L, \leq)$  y elementos  $x, y, z \in L$ , se tiene que

$$(x \textbf{i} y) \textbf{s} (x \textbf{i} z) \leq x \textbf{i} (y \textbf{s} z)$$

*Proof.* TODO

□

**Lema 8.** Sea  $(L, \leq)$  un reticulado. Dados elementos  $x_1, \dots, x_n \in L$ , con  $n \geq 2$ , se tiene que:

$$(\dots (x_1 \textbf{s} x_2) \textbf{s} \dots) \textbf{s} x_n = \sup(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (1)$$

$$(\dots (x_1 \textbf{i} x_2) \textbf{i} \dots) \textbf{i} x_n = \inf(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (2)$$

*Proof.* TODO

□

### 3 Version algebraica del concepto de reticulado

**Definición 17.** Una terna  $(L, \textbf{s}, \textbf{i})$ , donde  $L$  es un conjunto y  $\textbf{s}, \textbf{i}$  son dos operaciones binarias sobre  $L$  sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1.  $x \textbf{s} x = x \textbf{i} x = x$ , cualesquiera sea  $x \in L$
2.  $x \textbf{s} y = y \textbf{s} x$ , cualesquiera sean  $x, y \in L$
3.  $x \textbf{i} y = y \textbf{i} x$ , cualesquiera sean  $x, y \in L$
4.  $(x \textbf{s} y) \textbf{s} z = x \textbf{s} (y \textbf{s} z)$ , cualesquiera sean  $x, y, z \in L$
5.  $(x \textbf{i} y) \textbf{i} z = x \textbf{i} (y \textbf{i} z)$ , cualesquiera sean  $x, y, z \in L$
6.  $x \textbf{s} (x \textbf{i} y) = x$ , cualesquiera sean  $x, y \in L$
7.  $x \textbf{i} (x \textbf{s} y) = x$ , cualesquiera sean  $x, y \in L$

En tal caso que  $(L, \textbf{s}, \textbf{i})$  sea un reticulado, diremos que  $L$  es el *universo* del reticulado.

**Teorema 2.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  un reticulado. La relacion binaria definida por:

$$x \leq y \iff x \mathbf{s} y = y$$

es un orden parcial sobre  $L$  para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \mathbf{s} y$$

$$\inf(\{x, y\}) = x \mathbf{i} y$$

cualesquiera sean  $x, y \in L$

**Definición 18.** Dados reticulados  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  diremos que  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  es un *subreticulado* de  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  si se dan las siguientes condiciones:

1.  $L \subseteq L'$
2.  $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
3.  $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

**Definición 19.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  un reticulado. Un conjunto  $S \subseteq L$  es llamado *subuniverso* de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  si es no vacio y cerrado bajo las operaciones  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{i}$

*Observacion 11.* Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  un reticulado.  $S$  es subuniverso de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$  es un subreticulado de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

**Definición 20.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  reticulados. Una funcion  $F: L \rightarrow L'$  sera llamada un *homomorfismo* de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  si para todo  $x, y \in L$  se cumple que:

$$F(x \mathbf{s} y) = F(x) \mathbf{s}' F(y)$$

$$F(x \mathbf{i} y) = F(x) \mathbf{i}' F(y)$$

Un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  sera llamada *isomorfismo* de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  cuando  $F$  sea un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  cuando exista un isomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

**Lema 9.** Si  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  es un homomorfismo biyectivo, entonces  $F$  es un isomorfismo

*Proof.* TODO □

**Lema 10.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  reticulados y sea  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  un homomorfismo. Entonces  $I_F$  es un subuniverso de  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ . Es decir que  $F$  es tambien un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(I_F, \mathbf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathbf{i}'|_{I_F \times I_F})$

*Proof.* TODO □

**Lema 11.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  reticulados y sean  $(L, \leq)$  y  $(L', \leq')$  los posets asociados. Sea  $F: L \rightarrow L'$  una funcion. Entonces  $F$  es un isomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$   $\iff F$  es un isomorfismo de  $(L, \leq)$  en  $(L', \leq')$

*Proof.* TODO □

**Definición 21.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  un reticulado. Una *congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$*  sera una relacion de equivalencia  $\theta$  la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \mathbf{s} y)\theta(x' \mathbf{s} y') \text{ y } (x \mathbf{i} y)\theta(x' \mathbf{i} y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre  $L/\theta$  dos operaciones binarias  $\tilde{\mathbf{s}}$  y  $\tilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{s}} y/\theta = (x \mathbf{s} y)/\theta$$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{i}} y/\theta = (x \mathbf{i} y)/\theta$$

**Definición 22.** La terna  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$  es llamada *cociente de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  sobre  $\theta$* , y la denotaremos con  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

**Lema 12.**  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$  es un reticulado. El orden parcial  $\tilde{\leq}$  asociado a este reticulado cumple:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \iff y\theta(x \mathbf{s} y)$$

*Proof.* TODO □

**Lema 13.** Si  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \rightarrow (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$  es un homomorfismo, entonces  $\ker F$  es una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

*Proof.* TODO □

**Lema 14.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  un reticulado y sea  $\theta$  una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ . Entonces  $\pi_\theta$  es un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  en  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}})$ . Ademias  $\ker \pi_\theta = \theta$ .

*Proof.* TODO □

## 4 Reti culados acotados

**Definición 23.** Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ , tal que  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$  es un reticulado,  $0, 1 \in L$ , y adem as se cumplen las siguientes propiedades

1.  $0 \mathbf{s} x = x$ , para cada  $x \in L$
2.  $1 \mathbf{s} x = 1$ , para cada  $x \in L$

### 4.1 Subreticulados acotados

**Definición 24.** Dados reticulados acotados  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  y  $(L', s', i', 0', 1')$  diremos que  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  es un *subreticulado acotado de*  $(L', s', i', 0', 1')$  si se dan las siguientes condiciones:

1.  $L \subseteq L'$
2.  $0 = 0'$  y  $1 = 1'$
3.  $s = s'|_{L \times L}$
4.  $i = i'|_{L \times L}$

Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  un reticulado acotado. Un conjunto  $S \subseteq L$  es llamado un *subuniverso* de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  si  $0, 1 \in S$ , y  $S$  es cerrado bajo las operaciones  $s$  e  $i$ .

### 4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

**Definición 25.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  y  $(L', s', i', 0', 1')$  reticulados acotados. Una funci on  $F: L \rightarrow L'$  sera llamada un *homomorfismo de*  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(L', s', i', 0', 1')$  si para todo  $x, y \in L$  se cumple que:

$$F(x \mathbf{s} y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \mathbf{i} y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(L', s', i', 0', 1')$  sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambi en sea un homomorfismo.

Escribiremos  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$  cuando  $F$  sea un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$  cuando exista un isomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(L', s', i', 0', 1')$

**Lema 15.** Si  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$  es un homomorfismo biyectivo, entonces  $F$  es un isomorfismo.

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

**Lema 16.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  y  $(L', s', i', 0', 1')$  reticulados y sea  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$  un homomorfismo. Entonces  $I_F$  es un subuniverso de  $(L', s', i', 0', 1')$ . Es decir que  $F$  es tambien un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(I_F, s'|_{I_F \times I_F}, i'|_{I_F \times I_F}, 0', 1')$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

### 4.3 Congruencias de reticulados acotados

**Definición 26.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  un reticulado acotado. Una *congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$*  sera una relacion de equivalencia  $\theta$  la cual sera una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ . Tenemos definidas sobre  $L/\theta$  dos operaciones binarias  $\tilde{\mathbf{s}}$  y  $\tilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{s}} y/\theta = (x \mathbf{s} y)/\theta$$

$$x/\theta \tilde{\mathbf{i}} y/\theta = (x \mathbf{i} y)/\theta$$

La 5-upla  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$  es llamada *cociente de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  sobre  $\theta$*  y la denotaremos con  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

**Lema 17.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  un reticulado acotado y  $\theta$  una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ .

1.  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$  es un reticulado acotado
2.  $\pi_\theta$  es un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  en  $(L/\theta, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$  cuyo nucleo es  $\theta$

*Proof.* TODO □

**Lema 18.** Si  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', 0', 1')$  es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces  $\ker F$  es una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$

*Proof.* TODO □

## 5 Reticulados complementados

**Definición 27.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  un reticulado acotado. Dado  $a \in L$ , diremos que  $a$  es *complementado* cuando exista un elemento  $b \in L$  (llamado *complemento de  $a$* ) tal que:

$$a \mathbf{s} b = 1$$

$$a \mathbf{i} b = 0$$

**Definición 28.** Entenderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  tal que  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$  es un reticulado acotado y  $^c$  es una operacion unaria sobre  $L$  tal que:

1.  $x \mathbf{s} x^c = 1$ , para cada  $x \in L$
2.  $x \mathbf{i} x^c = 0$ , para cada  $x \in L$

### 5.1 Subreticulados complementados

**Definición 29.** Dados reticulados complementados  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$  diremos que  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  es un *subreticulado complementado de  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$*  si se dan las siguientes condiciones:

1.  $L \subseteq L'$
2.  $0 = 0'$  y  $1 = 1'$
3.  $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
4.  $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$
5.  $^c = ^{c'}|_L$

Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  un reticulado complementado. Un conjunto  $S \subseteq L$  es llamado un *subuniverso* de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  si  $0, 1 \in S$ , y  $S$  es cerrado bajo las operaciones  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{i}$  y  $^c$ .

### 5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

**Definición 30.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  y  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$  reticulados complementados. Una funcion  $F: L \rightarrow L'$  sera llamada un *homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$  en  $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}', ^{c'}, 0', 1')$*  si para todo

$x, y \in L$  se cumple que:

$$F(x \text{ s } y) = F(x)s'F(y)$$

$$F(x \text{ i } y) = F(x)i'F(y)$$

$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$

$$F(0) = 0'$$

$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  en  $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  cuando  $F$  sea un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  en  $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \cong (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  cuando exista un isomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  en  $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$

**Lema 19.** Si  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  es un homomorfismo biyectivo, entonces  $F$  es un isomorfismo.

*Proof.* Se acepta sin demostracion

□

**Lema 20.** Sean  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  y  $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  reticulados y sea  $F: (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1) \rightarrow (L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$  un homomorfismo. Entonces  $I_F$  es un subuniverso de  $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ . Es decir que  $F$  es tambien un homomorfismo de  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  en  $(I_F, \mathbf{s}'|_{I_F \times I_F}, \mathbf{i}'|_{I_F \times I_F}, {}^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

*Proof.* Se acepta sin demostracion

□

### 5.3 Congruencias de reticulados complementados

**Definición 31.** Sea  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  un reticulado complementado. Una *congruencia sobre*  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$  sera una relacion de equivalencia  $\theta$  sobre  $L$  la cual cumpla:

1.  $\theta$  es una congruencia sobre  $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$
2.  $x/\theta = y/\theta$  implica  $x^c/\theta = y^c/\theta$



Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre  $L/\theta$  dos operaciones binarias  $\tilde{s}$  y  $\tilde{i}$  y una operacion binaria  $\tilde{c}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x/\theta \tilde{s} y/\theta &= (x \text{ s } y)/\theta \\x/\theta \tilde{i} y/\theta &= (x \text{ i } y)/\theta \\(x/\theta)^{\tilde{c}} &= x^c/\theta\end{aligned}$$

La 6-upla  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$  es llamada *cociente de*  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$  sobre  $\theta$  y la denotaremos con  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

**Lema 21.** Sea  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$  un reticulado complementado y  $\theta$  una congruencia sobre  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$ .

1.  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$  es un reticulado complementado
2.  $\pi_\theta$  es un homomorfismo de  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$  en  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i}, \tilde{c}, 0/\theta, 1/\theta)$  cuyo nucleo es  $\theta$

*Proof.* TODO □

**Lema 22.** Si  $F: (L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1) \rightarrow (L', \text{s}', \text{i}', ^{c'}, 0', 1')$  es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces  $\ker F$  es una congruencia sobre  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

## 6 Algebras de Boole

**Definición 32.** Un reticulado  $(L, \text{s}, \text{i})$  se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente propiedad

$$Dis_1 \quad x \text{ i } (y \text{ s } z) = (x \text{ i } y) \text{ s } (x \text{ i } z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado  $(L, \text{s}, \text{i}, 0, 1)$  (resp. complementado  $(L, \text{s}, \text{i}, ^c, 0, 1)$ ) es *distributivo* cuando  $(L, \text{s}, \text{i})$  lo sea.

Consideremos la distributividad dual a  $Dis_1$ , es decir:

$$Dis_2 \quad x \text{ s } (y \text{ i } z) = (x \text{ s } y) \text{ i } (x \text{ s } z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

**Lema 23.** Sea  $(L, \text{s}, \text{i})$  un reticulado. Entonces  $(L, \text{s}, \text{i})$  satisface  $Dis_1 \iff (L, \text{s}, \text{i})$  satisface  $Dis_2$

*Proof.* TODO □

**Definición 33.** Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado distributivo.

**Lema 24.** Si  $(L, s, i, 0, 1)$  un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.

*Proof.* TODO □

**Lema 25.** Sea  $(B, s, i, ^c, 0, 1)$  un algebra de Boole, y sean  $x, y \in B$ . Se tiene que  $y = (y \ i \ x) \ s \ (y \ i \ x^c)$

*Proof.* TODO □

**Teorema 3.** Sea  $(B, s, i, ^c, 0, 1)$  un algebra de Boole.

$$1. (x \ i \ y)^c = x^c \ s \ y^c$$

$$2. (x \ s \ y)^c = x^c \ i \ y^c$$

$$3. x^{cc} = x$$

$$4. x \ i \ y = 0 \iff y \leq x^c$$

$$5. x \leq y \iff y^c \leq x^c$$

*Proof.* TODO □

## 7 Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski

**Definición 34.** Un *filtro* de un reticulado  $(L, s, i)$  sera un subconjunto  $F \subseteq L$  tal que:

$$1. F \neq \emptyset$$

$$2. x, y \in F \Rightarrow x \ i \ y \in F$$

$$3. x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$$

**Definición 35.** Dado un conjunto  $S \subseteq L$ , denotemos con  $[S]$  el siguiente conjunto:

$$\{y \in L : y \geq s_1 \ i \ \dots \ i \ s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

**Lema 26.** Supongamos que  $S$  es no vacio. Entonces  $[S]$  es un filtro. Mas aun, si  $F$  es un filtro y  $S \subseteq F$ , entonces  $[S] \subseteq F$ . Es decir,  $[S]$  es el menor filtro que contiene a  $S$ .

*Proof.* TODO □

**Definición 36.** Sea  $(P, \leq)$  un poset. Un subconjunto  $C \subseteq P$  sera llamado una *cadena* si para cada  $x, y \in C$  se tiene que  $x \leq y$  o  $y \leq x$

**Lema 27** (Zorn). Sea  $(P, \leq)$  un poset y supongamos cada cadena de  $(P, \leq)$  tiene cota superior. Entonces hay un elemento maximal en  $(P, \leq)$

*Proof.* TODO □

**Definición 37.** Un filtro  $F$  de un reticulado  $(L, s, i)$  sera llamado *primo* cuando se cumplan:

1.  $F \neq L$
2.  $x \text{ s } y \in F \Rightarrow x \in F \text{ o } y \in F$

**Teorema 4** (Teorema del Filtro Primo). Sea  $(L, s, i)$  un reticulado distributivo y  $F$  un filtro. Supongamos  $x_0 \in L - F$ . Entonces hay un filtro primo  $P$  tal que  $x_0 \notin P$  y  $F \subseteq P$

*Proof.* TODO □

**Teorema 5** (Rasiova y Sikorski). Sea  $(B, s, i, ^c, 0, 1)$  un algebra de Boole. Sea  $x \in B, x \neq 0$ . Supongamos que  $(A_1, A_2, \dots)$  es un infinitupla de subconjuntos de  $B$  tal que existe  $\inf(A_j)$ , para cada  $j = 1, 2, \dots$ . Entonces hay un filtro primo  $P$  el cual cumple:

1.  $x \in P$
2.  $A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$ , para cada  $j = 1, 2, \dots$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

## 8 Sintaxis de la logica de primer orden

### 8.1 Variables

**Definición 38.** Sea  $Var$  el siguiente conjunto de palabras del alfabeto  $\{X, 0, 1, \dots, 9, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{9}\}$ :

$$Var = \{X\mathbf{0}, \dots, X\mathbf{9}, X1\mathbf{0}, \dots, X2\mathbf{0}, \dots, X10\mathbf{0}, \dots\}$$

Es decir, el  $n$ -esimo elemento de  $Var$  sera la palabra de la forma  $X\alpha$ , donde  $\alpha$  es el resultado de reemplazar en la representacion decimal de  $n$  su ultimo simbolo por el numeral en bold, y el resto por sus numerales en italics.

A los elementos de  $Var$  se los llamara *variables*.

Denotaremos con  $x_i$  al  $i$ -esimo elemento de  $Var$ , para cada  $i \in \mathbf{N}$ .

## 8.2 Tipos

**Definición 39.** Diremos que  $\alpha$  es subpalabra (propia) de  $\beta$  cuando  $(\alpha \notin \{\epsilon, \beta\})$  y existan palabras  $\delta, \gamma$ , tales que  $\beta = \delta\alpha\gamma$

**Definición 40.** Por un tipo (de primer orden) entenderemos una 4-upla  $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$  tal que:

1. Hay alfabetos finitos  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  tales:

$$(a) \mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+, \mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$$

(b)  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  son disjuntos de a pares

(c)  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$  no contiene ningun simbolo de la lista:  $\forall \exists \neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow ( ) , \equiv$   
 $X 0 1 \dots 9 \mathbf{0} \mathbf{1} \dots \mathbf{9}$

2.  $a: \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$  es una funcion que a cada  $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$  le asocia un numero natural  $a(p)$ , llamado la *aridad* de  $p$

3. Ninguna palabra de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{F}, \mathcal{R}$ ) es subpalabra propia de otra palabra de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{F}, \mathcal{R}$ )

A los elementos de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{F}, \mathcal{R}$ ) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion, nombres de relacion*) de tipo  $\tau$

Dado  $n \geq 1$ , definamos

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\}$$

$$\mathcal{R}_n = \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\}$$

## 8.3 Terminos

Dado un tipo  $\tau$ , definamos recursivamente los conjuntos de palabras  $T_k^\tau$ , con  $k \geq 0$ , de la siguiente manera:

$$T_0^\tau = Var \cup \mathcal{C}$$

$$T_{k+1}^\tau = T_k^\tau \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau\}$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de  $T^\tau$  seran llamados *terminos de tipo  $\tau$* . Un termino  $t$  es llamado *cerrado* si  $x_i$  no ocurre en  $t$ , para cada  $i \in \mathbf{N}$ .

Definimos tambien:

$$T_c^\tau = \{t \in T^\tau : t \text{ es cerrado}\}$$

**Lema 28.** Supongamos  $t \in T_k^\tau$ , con  $k \geq 1$ . Entonces ya sea  $t \in \text{Var} \cup \mathcal{C}$  o  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , con  $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T_{k-1}^\tau$

*Proof.* TODO □

### 8.3.1 Unicidad de la lectura de terminos

**Definición 41.** Diremos que  $\beta$  es un *tramo inicial (propio)* de  $\alpha$  si hay una palabra de  $\gamma$  tal que  $\alpha = \beta\gamma$  (y  $\beta \notin \{\epsilon, \alpha\}$ ). En forma similar se define *tramo final (propio)*

**Lema 29** (Mordizqueo de Terminos). Sean  $s, t \in T^\tau$  y supongamos que hay palabras  $x, y, z$ , con  $y \neq \epsilon$  tales que  $s = xy$  y  $t = yz$ . Entonces  $x = z = \epsilon$  o  $s, t \in \mathcal{C}$ . En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.

*Proof.* Se acepta sin demostracion □

**Teorema 6** (Lectura unica de terminos). Dado  $t \in T^\tau$  se da una de las siguientes:

1.  $t \in \text{Var} \cup \mathcal{C}$
2. Hay unicos  $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, t_1, \dots, t_n \in T^\tau$  tales que  $t = f(t_1, \dots, t_n)$

*Proof.* TODO □

## 8.4 Ocurrencias

**Definición 42.** Dadas palabras  $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ , con  $|\alpha|, |\beta| \geq 1$ , y un natural  $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$ , se dice que  $\alpha$  *ocurre a partir de  $i$  en  $\beta$*  cuando se de que existan palabras  $\delta, \gamma$  tales que  $\beta = \delta\alpha\gamma$  y  $|\delta| = i - 1$

Notese que una palabra  $\alpha$  puede ocurrir en  $\beta$  a partir de  $i$  y tambien a partir de  $j$ , con  $i \neq j$ . Por ejemplo, *aba* ocurre dos veces en la palabra

*abacaba*

Cuando dos ocurrencias no se superpongan en alguna posicion, se las llamara *disjuntas*

A veces, diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo, la segunda ocurrencia de *b* esta contenida en la segunda ocurrencia de *aba*

Tambien se podra hablar de *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo, podriamos reemplazar las ocurrencias de *aca* por *abacaba*, dando como resultado

*ababacababa*

En algunos casos, se debera especificar que los reemplazos se haran *simultaneamente* en vez de *secuencialmente*. Por ejemplo, no es lo mismo primero reemplazar *aca* por *d* y luego *d* por *bb*

*abbbba*

Que hacerlo simultaneamente dando como resultado

*abdba*

## 8.5 Subterminos

**Definición 43.** Sean  $s, t \in T^\tau$ . Diremos que  $s$  es *subtermino (propio)* de  $t$  si (no es igual a  $t$  y)  $s$  es subpalabra de  $t$ .

**Lema 30.** Sean  $r, s, t \in T^\tau$

1. Si  $s \neq t = f(t_1, \dots, t_n)$  y  $s$  ocurre en  $t$ , entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, n$
2. Si  $r, s$  ocurren en  $t$ , entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular las distintas ocurrencias de  $r$  en  $t$  son disjuntas
3. Si  $t'$  es el resultado de reemplazar una ocurrencia de  $s$  en  $t$  por  $r$ , entonces  $t' \in T^\tau$

*Proof.* TODO

□

## 8.6 Formulas

**Definición 44.** Sea  $\tau$  un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas:

$$(t \equiv s), \text{ con } t, s \in T^\tau$$

$$r(t_1, \dots, t_n), \text{ con } r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, \text{ y } t_1, \dots, t_n \in T^\tau$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo  $\tau$*

**Definición 45.** Dado un tipo  $\tau$  definamos recursivamente los conjuntos de palabras  $F_k^\tau$ , con  $k \geq 0$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_0^\tau &= \{\text{formulas atómicas}\} \\ F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\ &\quad \cup \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\ &\quad \cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in \text{Var}\} \cup \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in \text{Var}\} \end{aligned}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de  $F^\tau$  serán llamados *formulas de tipo  $\tau$*

**Lema 31.** Supongamos  $\varphi \in F_k^\tau$ , con  $k \geq 1$ . Entonces  $\varphi$  es de alguna de las siguientes formas:

- $(t \equiv s)$ , con  $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \dots, t_n)$ , con  $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \dots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$ , con  $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$
- $\neg\varphi_1$ , con  $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$
- $Qv\varphi_1$ , con  $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in \text{Var}$  y  $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$

*Proof.* TODO □

## 8.7 Unicidad de la lectura de formulas

**Proposición 1** (Mordizqueo de formulas). Si  $\varphi, \psi \in F^\tau$  y  $x, y, z$  son tales que  $\varphi = xy$ ,  $\psi = yz$  y  $y \neq \epsilon$ , entonces  $z = \epsilon$  y  $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\} \text{ y } v \in \text{Var}\})^*$ . En particular ningún tramo inicial propio de una formula es una formula

*Proof.* Se acepta sin demostración □

**Teorema 7** (Lectura única de formulas). Dada  $\varphi \in F^\tau$  se da una y solo una de las siguientes:

- $(t \equiv s)$ , con  $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \dots, t_n)$ , con  $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \dots, t_n \in T^\tau$

- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$ , con  $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
- $\neg \varphi_1$ , con  $\varphi_1 \in F^\tau$
- $Qv\varphi_1$ , con  $Q \in \{\forall, \exists\}$ ,  $v \in Var$  y  $\varphi_1 \in F^\tau$

*Proof.* TODO □

## 8.8 Subformulas

**Definición 46.** Una formula  $\varphi$  sera llamada una *subformula (propia)* de una formula  $\psi$ , cuando  $\varphi$  (sea no igual a  $\psi$  y) tenga alguna ocurrencia en  $\psi$ .

**Lema 32.** Sea  $\tau$  un tipo

1. Las formulas atomicas no tienen subformulas propias
2. Si  $\varphi$  ocurre propiamente en  $(\psi\eta\phi)$ , entonces tal ocurrencia es en  $\psi$  o en  $\phi$
3. Si  $\varphi$  ocurre propiamente en  $\neg\psi$ , entonces tal ocurrencia es en  $\psi$
4. Si  $\varphi$  ocurre propiamente en  $Qx_k\psi$ , entonces tal ocurrencia es en  $\psi$
5. Si  $\varphi_1, \varphi_2$  ocurren en  $\varphi$ , entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra
6. Si  $\lambda'$  es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de  $\varphi$  en  $\lambda$  por  $\psi$ , entonces  $\lambda' \in F^\tau$

*Proof.* Se acepta sin demostracion □