Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

October 28, 2020

Contents

1 Relaciones binarias

Definición 1. Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto A sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de A^2.

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relacion sobre B. Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A, diremos aRb en lugar de $(a, b) \in R$

1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria R sobre un conjunto A son:

- Reflexividad: xRx, cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad: xRy y yRz implica xRz, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Simetria: xRy implica yRx, cualesquiera sean $x, y \in A$
- Antisimetria: xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

1.2 Relaciones de equivalencia

Definición 2. Sea A un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre* A entenderemos una relacion binaria sobre A la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a A.

Definición 3. Dada una funcion $F\colon A \to B$, definimos:

$$\ker F = \{(x, y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

Definición 4. Dada una relacion de equivalencia R sobre A y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto a/R sera llamado la *clase de equivalencia* de a, con respecto a R.

Observacion 1. $a \in a/R$, pues R es reflexiva, por lo tanto aRa.

Observacion 2. $aRb \iff a/R = b/R$, sencillo de demostrar con las propiedades

Observacion 3. $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$, sencillo de demostrar viendo que pasa si aRb y si no aRb

Definición 5. Dada una relacion de equivalencia R sobre A, definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que A/R es el cociente de A por R. Notese que A/R es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de A.

Observacion 4. Sea $F \colon A \to B$, entonces:

1. F es inyectiva $\iff$ $\ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$

2. Si F es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre $A/\ker F$

Definición 6. Si R es una relacion de equivalencia sobre A, definimos la funcion $\pi_R \colon A \to A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de R.

Observacion 5. Sea R una relacion de equivalencia sobre A. Entonces $\ker \pi_R = R$

1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

Definición 7. Dado un conjunto A, por una *particion de* A entenderemos a un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de A

- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

- $A = \displaystyle\bigcup_{S \in \mathcal{P}} S$

Observacion 6. Si $\mathcal{P}$ es una particion de A, entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$.

Definición 8. Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto A, podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

Teorema 1. *Sea A un conjunto cualquiera. Sean*

$$Part = \{\textit{particiones de } A\}$$

$$ReEq = \{\textit{relaciones de equivalencia sobre } A\}$$

Entonces, las funciones:

$$f : Part \to ReEq$$
$$\mathcal{P} \to R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \to Part$$
$$R \to A/R$$

son biyecciones una de la otra

Proof. Se acepta sin demostracion □

2 Ordenes parciales

Definición 9. Una relacion binaria sobre R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre* A, si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A.

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces:

1. Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de que $a < b$, diremos que *a es menor que b*, o que *b es mayor que a*
2. Denotaremos con $\prec$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$. Cuando se de que $a \prec b$, diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a a*.

Definición 10. Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre P. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto P sera llamado el *universo* de $(P, \leq)$.

2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset $(P, \leq)$. con P finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto p_a del plano
2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

   (a) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b

   (b) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de $\leq$ puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama. $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ o hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde p_a hasta p_b.

2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Definición 11. Sea $(P, \leq)$ un poset.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 1 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un maximo

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $b < a$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b$ para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 0 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un minimo

Observacion 7. Un poset $(P, \leq)$ tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

Observacion 8. Todo elemento maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de $(P, \leq)$

2.3 Supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior* de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota superior de S en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si b es cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$

2.4 Infimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior* de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota inferior de S en $(P, \leq)$
2. Para cada $b \in P$, si b es cota inferior de S en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$

Observacion 9. Si a es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$ y a' es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

Observacion 10. a es supremo (resp. infimo) de P en $(P, \leq)$ $\iff$ a es maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$

2.5 Homomorfismos de posets

Definición 12. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F\colon (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$

2.6 Isomorfismo de posets

Definición 13. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y F^{-1} es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son isomorfos.

Definición 14. Dada una funcion $F\colon A \to B$ y $S \subseteq A$, denotaremos con $F(S)$ al conjunto $\{F(a) : a \in S\}$

Lema 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$*

1. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. cota inferior) de $S \iff F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$*
2. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe $\sup(S) \iff$ existe $\sup(F(S))$, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$*

3. *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$*, se tiene que existe* $\inf(S) \iff$ *existe* $\inf(F(S))$*, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que* $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. *Para cada* $a \in P$*,* a *es maximo (resp. minimo)* $\iff$ $F(a)$ *es maximo (resp. minimo)*

5. *Para cada* $a \in P$*,* a *es maximal (resp. minimal)* $\iff$ $F(a)$ *es maximal (resp. minimal)*

6. *Para* $a, b \in P$*, tenemos* $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$

Proof. (a) Supongamos a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Como $s \leq a$, tenemos que $F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $s \in S$. Como $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Entonces por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S. Por lo tanto, $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$ y entonces $F(\sup(S)) \leq' b$. La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos $a \in P$ es maximo. Pero entonces $a = \sup(P)$, y entonces $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$. La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos $b \in P$ tal que no existe $a \in P$ tal que $b \leq a \Rightarrow a = b$. Sea $c \in P$ tal que $F(b) \leq' F(c)$, entonces $b \leq c$, y entonces $b = c$, $F(b) = F(c)$. Luego $F(b)$ es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean $a, b \in P$ tal que $a \prec b$. Luego tenemos que $F(a) \leq' F(b)$. Supongamos existe $z \in P$ tal que $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$, entonces tendriamos $a \leq z \leq b$. Como $a \prec b$, se sigue que $z = a$ o $z = b$. Luego $F(a) \prec' F(b)$. La *vuelta* es analoga. □

2.7 Reticulados

Definición 15. Diremos que un poset $(P, \leq)$ es un *reticulado* si para todo $a, b \in P$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$

Definición 16. Dado un reticulado $(P, \leq)$, definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \to P$$
$$(a, b) \to \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \to p$$
$$(a, b) \to \inf(\{a, b\})$$

Escribiremos a **s** b en lugar de $s(a,b)$ y a **i** b en lugar de $i(a,b)$

Lema 2. *Dado un reticulado $(L,\leq)$ y elementos $x,y\in L$, se cumplen:*

1. $x \leq x \ \boldsymbol{s}\ y$
2. $x \ \boldsymbol{i}\ y \leq x$
3. $x \ \boldsymbol{s}\ x = x \ \boldsymbol{i}\ x = x$
4. $x \ \boldsymbol{s}\ y = y \ \boldsymbol{s}\ x$
5. $x \ \boldsymbol{i}\ y = y \ \boldsymbol{i}\ x$

Proof. (1) Claramente (x **s** y) es cota superior de x. Por lo tanto $x \leq x \ \mathbf{s}\ y$

(2) Claramente (x **i** y) es cota inferior de x. Por lo tanto $x \ \mathbf{i}\ y \leq x$

(3) Supongamos $(x \ \mathbf{s}\ x) = z \neq x$. Tenemos que z es cota superior de x por lo tanto $x \leq z$. Pero tambien x es cota superior de x y por lo tanto z no puede ser la minima cota superior. El caso del infimo es analogo.

(4) $(x \ \mathbf{s}\ y) = \sup(\{x,y\}) = \sup(\{y,x\}) = (y \ \mathbf{s}\ x)$

(5) $(x \ \mathbf{i}\ y) = \inf(\{x,y\}) = \inf(\{y,x\}) = (y \ \mathbf{i}\ x)$ □

Lema 3. *Dado un reticulado $(L,\leq)$ y elementos $x,y\in L$, son equivalentes:*

1. $x \leq y$
2. $x \ \boldsymbol{s}\ y = y$
3. $x \ \boldsymbol{i}\ y = x$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Claramente y es cota superior de $\{x,y\}$ por (1). Y trivialmente es la minima ya que es igual a uno de sus elementos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Claremente y es cota superior de $\{x,y\}$, por lo tanto $x \leq y$. Luego se tiene que x es cota inferior de $\{x,y\}$. Trivialmente es la maxima.

(3) $\Rightarrow$ (1) Claramente x es cota inferior de $\{x,y\}$, por lo tanto $x \leq y$. □

Lema 4 (Leyes de absorcion)**.** *Dado un reticulado $(L,\leq)$ y elementos $x,y\in L$, se tiene que:*

1. $x \ \boldsymbol{s}\ (x \ \boldsymbol{i}\ y) = x$
2. $x \ \boldsymbol{i}\ (x \ \boldsymbol{s}\ y) = x$

Proof. (1) Claramente $(x \textbf{ i } y) \leq x$, y por lo tanto $(x \textbf{ i } y) \textbf{ s } x = x$

(2) Claramente $x \leq (x \textbf{ s } y)$, y por lo tanto $x \textbf{ i } (x \textbf{ s } y) = x$ $\square$

Lema 5. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que:*

1. $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$

2. $(x \textbf{ i } y) \textbf{ i } z = x \textbf{ i } (y \textbf{ i } z)$

Proof. (1) Notese que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y, z\}$ ya que:

$$x \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$

$$y \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$

$$z \leq (y \textbf{ s } z) \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$$

En particular, tenemos que $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x, y\}$, y entonces tenemos que $x \textbf{ s } y \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$. Es decir, $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$ es cota superior de $\{x \textbf{ s } y, z\}$, y por lo tanto $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z \leq x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$.

Notese ahora que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y, z\}$, ya que:

$$x \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$

$$y \leq (x \textbf{ s } y) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$

$$z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$$

En particular, tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{y, z\}$, y por lo tanto $y \textbf{ s } z \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$. Es decir, $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$ es cota superior de $\{x, y \textbf{ s } z\}$, y por lo tanto $x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z) \leq (x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z$.

Luego tenemos que $(x \textbf{ s } y) \textbf{ s } z = x \textbf{ s } (y \textbf{ s } z)$

(2) Es analoga, si alguien la quiere hacer $\square$

Lema 6. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se tiene que si $x \leq z$ y $y \leq w$, entonces*

1. $x \textbf{ s } y \leq z \textbf{ s } w$

2. $x \textbf{ i } y \leq z \textbf{ i } w$

Proof. (1) Notese que

$$x \leq z \leq z \mathbf{s}\ w$$

$$y \leq w \leq z \mathbf{s}\ w$$

Luego $z \mathbf{s}\ w$ es cota superior de $\{x, y\}$ y por lo tanto $x \mathbf{s}\ y \leq z \mathbf{s}\ w$

(2) Notese que

$$z \geq x \geq x \mathbf{i}\ y$$

$$w \geq y \geq x \mathbf{i}\ y$$

Luego $x \mathbf{i}\ y$ es cota inferior de $\{z, w\}$ y por lo tanto $x \mathbf{i}\ y \leq z \mathbf{i}\ w$ □

Lema 7. *Dado un reticulado* $(L, \leq)$ *y elementos* $x, y, z \in L$*, se tiene que* $(x \ \boldsymbol{i}\ y)\ \boldsymbol{s}\ (x \ \boldsymbol{i}\ z) \leq x \ \boldsymbol{i}\ (y \ \boldsymbol{s}\ z)$

Proof. Notese que

$$(x \mathbf{i}\ y), (x \mathbf{i}\ z) \leq x$$

$$(x \mathbf{i}\ y), (x \mathbf{i}\ z) \leq y \mathbf{s}\ z$$

Tenemos entonces que $(x \mathbf{i}\ y), (x \mathbf{i}\ z) \leq x \mathbf{i}\ (y \mathbf{s}\ z)$ y por lo tanto $(x \mathbf{i}\ y) \mathbf{s}\ (x \mathbf{i}\ z) \leq x \mathbf{i}\ (y \mathbf{s}\ z)$ □

Lema 8. *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado. Dados elementos* $x_1, \ldots, x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*, se tiene que:*

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{s}\ x_2)\ \boldsymbol{s}\ \ldots)\ \boldsymbol{s}\ x_n = \sup(\{x_1, \ldots, x_n\})$$

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{i}\ x_2)\ \boldsymbol{i}\ \ldots)\ \boldsymbol{i}\ x_n = \inf(\{x_1, \ldots, x_n\})$$

Proof. TODO □

3 Version algebraica del concepto de reticulado

Definición 17. Una terna $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, donde L es un conjunto y $\mathbf{s}$, $\mathbf{i}$ son dos operaciones binarias sobre L sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1. $x \mathbf{s}\ x = x \mathbf{i}\ x = x$, cualesquiera sea $x \in L$

2. $x \mathbf{s}\ y = y \mathbf{s}\ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

3. $x \mathbf{\ i\ } y = y \mathbf{\ i\ } x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

4. $(x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

5. $(x \mathbf{\ i\ } y) \mathbf{\ i\ } z = x \mathbf{\ i\ } (y \mathbf{\ i\ } z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

6. $x \mathbf{\ s\ } (x \mathbf{\ i\ } y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

7. $x \mathbf{\ i\ } (x \mathbf{\ s\ } y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

En tal caso que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sea un reticulado, diremos que L es el *universo* del reticulado.

Teorema 2. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \iff x \ \boldsymbol{s}\ y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{s}\ y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{i}\ y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Proof. $\leq$ es reflexiva en L, pues $x \leq x \iff x \mathbf{\ s\ } x = x$

$\leq$ es antisimetrico en L, pues si $x \leq y$ tenemos que $x \mathbf{\ s\ } y = y$, y por otro lado, tenemos que $y \leq x$ y entonces $x \mathbf{\ s\ } y = x$. Luego $x = y$

$\leq$ es transitivo, pues si suponemos que $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces
$x \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z) = (x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = y \mathbf{\ s\ } z = z$. Luego $x \leq z$

Tenemos entonces que $\leq$ es un orden parcial sobre L.

Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \mathbf{\ s\ } y$. Es claro que $x \mathbf{\ s\ } y$ es cota superior de $\{x, y\}$. Supongamos que $x, y \leq z$, entonces:

$$(x \mathbf{\ s\ } y) \mathbf{\ s\ } z = x \mathbf{\ s\ } (y \mathbf{\ s\ } z) = x \mathbf{\ s\ } z = z$$

Luego $x \mathbf{\ s\ } y \leq z$ y por lo tanto $x \mathbf{\ s\ } y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \mathbf{\ i\ } y$, primero probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \iff u \mathbf{\ i\ } v = u$$

Supongamos $u \mathbf{\ s\ } v = v$, entonces $u \mathbf{\ i\ } v = u \mathbf{\ i\ } (u \mathbf{\ s\ } v) = u$

Ahora si veamos que $\inf(\{x,y\}) = x \ \mathbf{i} \ y$. Es claro que $x \ \mathbf{i} \ y$ es cota inferior de $\{x,y\}$. Supongamos que $z \leq x, y$, entonces:

$$(x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{i} \ z = x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = x \ \mathbf{i} \ z = z$$

Luego $z \leq x \ \mathbf{i} \ y$ y por lo tanto $x \ \mathbf{i} \ y$ es la mayor cota inferior. □

3.1 Subreticulados

Definición 18. Dados reticulados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un *subreticulado de* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
3. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

Definición 19. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones $\mathbf{s}$ y $\mathbf{i}$

Observacion 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. S es subuniverso de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

3.2 Homomorfismo de reticulados

Definición 20. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados. Una funcion $F \colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$\begin{aligned} F(x \ \mathbf{s} \ y) \ &= F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y) \\ F(x \ \mathbf{i} \ y) \ &= F(x) \ \mathbf{i'} \ F(y) \end{aligned}$$

Un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ sera llamada *isomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos $F \colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Lema 9. *Si $F \colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. Debemos probar que F^{-1} es tambien un homomorfismo, es decir que para todo $x, y \in L'$:

$$F^{-1}(x \text{ s' } y) = F^{-1}(x) \text{ s } F^{-1}(y)$$
$$F^{-1}(x \text{ i' } y) \ = F^{-1}(x) \text{ i } F^{-1}(y)$$

Sean $z, w \in L$ los unicos elementos de L tal que cumplen que $F(z) = x$ y $F(w) = y$. Estos elementos existen y son unicos pues F es biyectiva. Entonces, tenemos que:

$$F^{-1}(F(z) \text{ s' } F(w)) = F^{-1}(F(z)) \text{ s } F^{-1}(F(w))$$
$$F^{-1}(F(z) \text{ i' } F(w)) \ = F^{-1}(F(z)) \text{ i } F^{-1}(F(w))$$

Y por propiedades de homomorfismo y de funciones con inversa tenemos que:

$$F^{-1}(F(z \text{ s } w)) = z \text{ s } w$$
$$F^{-1}(F(z \text{ i } w)) \ = z \text{ i } w$$

$\square$

Lema 10. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *y* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F})$

Proof. Ya que L no es vacio tenemos que I_F tambien es no vacio. Sean $a, b \in I_F$. Sean $x, y \in L$ tales que $F(x) = a$ y $F(y) = b$. Se tiene que:

$$a \text{ s' } b = F(x) \text{ s' } F(y) = F(x \text{ s } y) \in I_F$$
$$a \text{ i' } b = F(x) \text{ i' } F(y) \ = F(x \text{ i } y) \in I_F$$

Por lo tanto I_F es cerrado bajo **s'** y **i'** $\square$

Lema 11. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *y* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *reticulados y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados. Sea* $F\colon L \to L'$ *una funcion. Entonces* F *es un isomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ $\iff$ F *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$

Proof.

$\Rightarrow$

Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = x \ \mathbf{s} \ y$, por lo cual $F(y) = F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y)$, produciendo $F(x) \leq' F(y)$.

Ahora sean $x, y \in L'$ tales que $x \leq' y$. Tenemos que $y = x \ \mathbf{s'} \ y$, por lo cual $F^{-1}(y) = F^{-1}(x \ \mathbf{s'} \ y) = F^{-1}(x) \ \mathbf{s} \ F^{-1}(y)$ produciendo $F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$.

$\Leftarrow$

Supongamos F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$. Sean $x, y \in L$ tales que $y = x \ \mathbf{s} \ y$. Tenemos entonces que $x \leq y$ y por lo tanto $F(x) \leq' F(y)$, produciendo $F(y) = F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y)$

Ahora sean $x, y \in L'$ tales que $y = x \ \mathbf{s'} \ y$. Tenemos entonces que $x \leq' y$ y por lo tanto $F^{-1}(x) \leq F^{-1}(y)$, produciendo $F^{-1}(y) = F^{-1}(x \ \mathbf{s'} \ y) = F^{-1}(x) \ \mathbf{s} \ F^{-1}(y)$

□

3.3 Congruencia de reticulados

Definición 21. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera una relacion de equivalencia θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \ \mathbf{s} \ y)\theta(x' \ \mathbf{s} \ y') \text{ y } (x \ \mathbf{i} \ y)\theta(x' \ \mathbf{i} \ y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta$$
$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{i}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta$$

Definición 22. La terna $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}})$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sobre θ, y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

Lema 12. *$(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}})$ es un reticulado. El orden parcial $\widetilde{\leq}$ asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \ \widetilde{\leq} \ y/\theta \iff y\theta(x \ \mathbf{s} \ y)$$

Proof. TODO □

Lema 13. *Si $F \colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', s', i')$ es un* homomorfismo*, entonces ker F es una* congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

Proof. Ya sabemos que $\ker F$ es una relacion de equivalencia, veamos que en este caso cumple la propiedad para ser congruencia.

Sean $x, x', y, y' \in L$ tal que $x\theta x'$ y $y\theta y'$. Luego, tenemos que $F(x) = F(x')$ y $F(y) = F(y')$. Entonces claramente $F(x \textbf{ s } y) = F(x) \textbf{ s' } F(y) = F(x') \textbf{ s' } F(y') = F(x' \textbf{ s } y')$, y por lo tanto $(x \textbf{ s } y)\theta(x' \textbf{ s } y')$

Claramente tambien $F(x \textbf{ i } y) = F(x) \textbf{ i' } F(y) = F(x') \textbf{ i' } F(y') = F(x' \textbf{ i } y')$, y por lo tanto $(x \textbf{ i } y)\theta(x' \textbf{ i } y')$ $\square$

Lema 14. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$*. Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}})$*. Ademas ker* $\pi_\theta = \theta$*.*

Proof. Sean $x, y \in L$. Tenemos que

$$\pi_\theta(x \textbf{ s } y) = (x \textbf{ s } y)/\theta = x/\theta \;\widetilde{\textbf{s}}\; y/\theta = \pi_\theta(x) \;\widetilde{\textbf{s}}\; \pi_\theta(y)$$

$$\pi_\theta(x \textbf{ i } y) = (x \textbf{ i } y)/\theta = x/\theta \;\widetilde{\textbf{i}}\; y/\theta = \pi_\theta(x) \;\widetilde{\textbf{i}}\; \pi_\theta(y)$$

Por lo tanto π_θ conserva la operacion supremo e infimo.

$\square$

4 Reticulados acotados

Definición 23. Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un reticulado, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes propiedades

1. $0 \textbf{ s } x = x$, para cada $x \in L$

2. $1 \textbf{ s } x = 1$, para cada $x \in L$

4.1 Subreticulados acotados

Definición 24. Dados reticulados acotados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado de* $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$

2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$

3. $s = s'|_{L \times L}$

4. $i = i'|_{L\times L}$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s e i.

4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

Definición 25. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x)s'F(y)$$
$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x)i'F(y)$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Lema 15. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 16. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', s', i', 0', 1')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F\times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F\times I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

4.3 Congruencias de reticulados acotados

Definición 26. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sera una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Tenemos definidas sobre

L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathrm{i}}$

$$x/\theta \; \widetilde{\mathbf{s}} \; y/\theta = (x \; \mathbf{s} \; y)/\theta$$
$$x/\theta \; \widetilde{\mathbf{i}} \; y/\theta = (x \; \mathbf{i} \; y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathrm{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathrm{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathrm{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

Lema 17. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado acotado*

2. π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ

Proof. (1) Cuando hablemos de $z, w \in L/\theta$, automaticamente tendremos definidos $x, y \in L$ tal que $x/\theta = z$ y $y/\theta = w$. Demostraremos una a una las propiedades que se deben cumplir:

- $z \; \widetilde{\mathbf{s}} \; z = z \; \widetilde{\mathbf{i}} \; z = z$, cualesquiera sea $z \in L/\theta$, pues $x \; \mathbf{s} \; x = x \; \mathbf{i} \; x = x$
- $z \; \widetilde{\mathbf{s}} \; w = w \; \widetilde{\mathbf{s}} \; z$, cualesquiera sean $z, w \in L/\theta$, pues $x \; \mathbf{s} \; y = y \; \mathbf{s} \; x$
- $z \; \widetilde{\mathbf{i}} \; w = w \; \widetilde{\mathbf{i}} \; z$, cualesquiera sean $z, w \in L/\theta$, pues $x \; \mathbf{i} \; y = y \; \mathbf{i} \; x$
- ... Faciles de demostrar ...
- $0/\theta \; \widetilde{\mathbf{s}} \; z = z$, para cada $z \in L/\theta$, pues $0 \; \mathbf{s} \; x = x$
- $1/\theta \; \widetilde{\mathbf{s}} \; z = 1$, para cada $z \in L/\theta$, pues $1 \; \mathbf{s} \; x = 1$

(2) Es directo de su analogo para reticulados ternas. Capaz en un futuro lo hago □

Lema 18. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces ker* F *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$

Proof. Es directo de su analogo para reticulados ternas. Capaz en un futuro lo hago □

5 Reticulados complementados

Definición 27. Sea $(L, \mathrm{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de* a) tal que:

$$a \; \mathbf{s} \; b = 1$$
$$a \; \mathbf{i} \; b = 0$$

Definición 28. Entonderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ^{c} es una operacion unaria sobre L tal que:

1. $x \mathbf{\ s\ } x^c = 1$, para cada $x \in L$

2. $x \mathbf{\ i\ } x^c = 0$, para cada $x \in L$

5.1 Subreticulados complementados

Definición 29. Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado de* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$

2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$

3. $s = s'|_{L \times L}$

4. $i = i'|_{L \times L}$

5. ${}^c = {}^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}.

5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

Definición 30. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F \colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \mathbf{\ s\ } y) = F(x) s' F(y)$$
$$F(x \mathbf{\ i\ } y) = F(x) i' F(y)$$
$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1) \cong (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$

Lema 19. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 20. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F}, ^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

5.3 Congruencias de reticulados complementados

Definición 31. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

1. θ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$

2. $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$ y una operacion binaria $\widetilde{^c}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{i}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{i}\; y)/\theta$$
$$(x/\theta)^{\widetilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, ^{\widetilde{c}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

Lema 21. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado*

2. π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ

Proof. (1) Por un lema anterior, ya sabemos que $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado. Osea solo nos falta ver que $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ satisface las propiedades de reticulado complementado. Sea $x/\theta \in L/\theta$. Sabemos que $x \ \mathbf{s}\ x^c = 1$ y por lo tanto $x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}}\ x^c/\theta = (x \ \mathbf{s}\ x^c)/\theta = 1/\theta$. Similarmente, sabemos que $x \ \mathbf{i}\ x^c = 0$ y por lo tanto $x \ \widetilde{\mathbf{i}}\ x^c = 0/\theta$

(2) Por lema anterior tenemos que π_θ es un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ. Notese que por definicion de $\widetilde{^c}$ tenemos que $x^c/\theta = (x/\theta)^{\widetilde{c}}$, y por lo tanto $\pi_\theta(x^c) = (\pi_\theta(x))^{\widetilde{c}}$, cualquiera sea $x \in L$.

□

Lema 22. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces ker* F *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$

Proof. Se acepta sin demostracion □

6 Algebras de Boole

Definición 32. Un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente propiedad

$$Dis_1 \quad x \ \mathbf{i}\ (y \ \mathbf{s}\ z) = (x \ \mathbf{i}\ y) \ \mathbf{s}\ (x \ \mathbf{i}\ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ lo sea.

Consideremos la distributividad dual a Dis_1, es decir:

$$Dis_2 \quad x \ \mathbf{s}\ (y \ \mathbf{i}\ z) = (x \ \mathbf{s}\ y) \ \mathbf{i}\ (x \ \mathbf{s}\ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Lema 23. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado. Entonces* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* $Dis_1 \iff (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* Dis_2

Proof. Supongamos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ satisface Dis_1. Notese que

$$\begin{aligned}
(x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ z) &= ((x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ ((x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ z) && (Dis_1 + idempotencia) \\
&= x \ \mathbf{s} \ (z \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ y)) && (Dis_1) \\
&= x \ \mathbf{s} \ ((z \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ (z \ \mathbf{i} \ y)) && (Conmutatividad) \\
&= (z \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ ((z \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ x) && (idempotencia) \\
&= (z \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ x
\end{aligned}$$

Por lo tanto cumple Dis_2.

Supongamos ahora $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ satisface Dis_2. Notese que

$$\begin{aligned}
(x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ z) &= ((x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ x) \ \mathbf{i} \ ((x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ z) && (Dis_2 + idempotencia) \\
&= x \ \mathbf{i} \ (z \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ y)) && (Dis_2) \\
&= x \ \mathbf{i} \ ((z \ \mathbf{s} \ x) \ \mathbf{i} \ (z \ \mathbf{s} \ y)) && (Conmutatividad) \\
&= (z \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ ((z \ \mathbf{s} \ x) \ \mathbf{i} \ x) && (idempotencia) \\
&= (z \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ x
\end{aligned}$$

Por lo tanto cumple Dis_1. □

Definición 33. Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado distributivo.

Lema 24. *Si $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. Supongamos $x \in L$ tiene complementos y, z. Se tiene que:

$$y = y \ \mathbf{i} \ 1 = y \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ z) = (y \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = 0 \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = y \ \mathbf{i} \ z$$

$$z = z \ \mathbf{i} \ 1 = z \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ y) = (z \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ (z \ \mathbf{i} \ y) = 0 \ \mathbf{s} \ (z \ \mathbf{i} \ y) = z \ \mathbf{i} \ y$$

Por lo tanto $y \leq z$ y $z \leq y$, entonces $y = z$. □

Lema 25. *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole, y sean $x, y \in B$. Se tiene que $y = (y \ \boldsymbol{i} \ x) \ \boldsymbol{s} \ (y \ \boldsymbol{i} \ x^c)$*

Proof. Se tiene que:

$$y = y \ \mathbf{i} \ 1 = y \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ x^c) = (y \ \mathbf{i} \ x) \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ x^c)$$

□

Teorema 3. *Sea* $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole.*

1. $(x \ \boldsymbol{i} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{s} \ y^c$

2. $(x \ \boldsymbol{s} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{i} \ y^c$

3. $x^{cc} = x$

4. $x \ \boldsymbol{i} \ y = 0 \iff y \leq x^c$

5. $x \leq y \iff y^c \leq x^c$

Proof. TODO □

7 Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski

Definición 34. Un *filtro* de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$

2. $x, y \in F \Rightarrow x \ \mathbf{i} \ y \in F$

3. $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$

Definición 35. Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conunto:

$$\{y \in L : y \geq s_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

Lema 26. *Supongamos que* S *es no vacio. Entonces* $[S)$ *es un filtro. Mas aun, si* F *es un filtro y* $S \subseteq F$*, entonces* $[S) \subseteq F$*. Es decir,* $[S)$ *es el menor filtro que contiene a* S*.*

Proof. Ya que $S \subseteq [S)$, tenemos que $[S) \neq \emptyset$.

Claramente $[S)$ cumple la propiedad (3), pues $x \in [S), x \leq y \Rightarrow y \in [S)$

Veamos que cumple la 2. Sean $y, z \in S$, entonces tenemos que $y \geq s_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ s_n$ y $z \geq t_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ t_m$, con $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m \in S$. Claramente $y \ \mathbf{i} \ z >= s_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ s_n \ \mathbf{i} \ t_1 \ \mathbf{i} \ \ldots \ \mathbf{i} \ t_m$

Dado este resultado, diremos que $[S)$ es el *filtro generado por S.* □

Definición 36. Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

Lema 27 (Zorn). *Sea* $(P, \leq)$ *un poset y supogamos cada cadena de* $(P, \leq)$ *tiene cota superior. Entonces hay un elemento maximal en* $(P, \leq)$

Proof. Supongamos que el lema es falso, es decir, tenemos un poset $(P, \leq)$ tal que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene cota superior, pero para cada $x \in P$, se tiene que existe un $y \in P$ tal que $x < y$.

Por definicion $P \neq \emptyset$, (en caso de que se permitiese $P = \emptyset$, de todas formas la cadena vacia debe tener cota superior, y por lo tanto $P \neq \emptyset$)

Sea $z \in P$ un elemento cualquiera, y sea b una funcion que asigna a cada cadena de P un elemento mayor a su cota superior (cota superior estricta). En particular elegimos b tal que $b(\{\}) = z$

Definimos una cadena $A \subseteq P$ como *valida* cuando se cumpla la siguiente propiedad:

- Para todo $x \in A$, se tiene que $x = b(\{y \in A : y < x\})$

Es facil ver que si A y B son dos cadenas *validas* distintas, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$

Con esta ultima afirmacion, si tenemos una cadena valida A y un $x \in A$, siempre que exista un $y < x$, se tiene que o $y \in A$ o y no esta en ninguna cadena valida.

Se sigue que $U =$ "union de todas las cadenas *validas* posibles", es tambien, una cadena *valida*.

Sea $x = b(U)$. Pero entonces $U \cup \{x\}$ es una *cadena* valida tambien. Ademas $U = U \cup \{x\}$ por definicion de U, y por lo tanto $x \in U$. ***Abs!***, pues x deberia ser cota superior estricta de U □

Definición 37. Un filtro F de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \mathbf{\ s\ } y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$

Teorema 4 (Teorema del Filtro Primo). *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado distributivo y* F *un filtro. Supongamos* $x_0 \in L - F$. *Entonces hay un filtro primo* P *tal que* $x_0 \notin P$ *y* $F \subseteq P$

Proof. Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro}, x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}$$

Notese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \emptyset$. Sea

$$G = \{x \in L : x \in F_1, \text{ para algun } F_1 \in C\}$$

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacio. Supongamos $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces ya que F_2 es un filtro, tenemos que $x \mathbf{\ i\ } y \in F2 \subseteq G$.

Similarmente, si $F_2 \subseteq F_1$, entonces $x \mathbf{i} y \in F_1 \subseteq G$. No es necesario ver que pasa si $F_1 \nsubseteq F_2$ y $F_2 \nsubseteq F_1$ ya que C es una cadena.

Por otro lado, sean $x \in G$ e y tal que $x \leq y$. Dado que $x \in G$, tenemos que $x \in F_1$ para algun $F_1 \in C$. Como F_1 es un filtro, tenemos que $y \in F_1$, y por lo tanto $y \in G$. Hemos demostrado que G es un filtro.

Ademas, $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C. Por lema de Zorn, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un filtro primo. Supongamos $x \mathbf{s} y \in P$ y $x, y \notin P$. Notese que $[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a P. Entonces ya que P es maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que $x_0 \in [P \cup \{x\})$. Analogamente tenemos que $x_0 \in [P \cup \{y\})$. Por lo tanto, tenemos elementos $p_1, \dots, p_n \in P$ tal que:

$$x_0 \geq p_1 \mathbf{i} \dots \mathbf{i} p_n \mathbf{i} x$$

Identicamente tenemos elementos $q_1, \dots, q_m \in P$ tales que:

$$x_0 \geq q_1 \mathbf{i} \dots \mathbf{i} q_m \mathbf{i} y$$

Sea $p = p_1 \mathbf{i} \dots \mathbf{i} p_n \mathbf{i} q_1 \mathbf{i} \dots \mathbf{i} q_m$, tenemos que $x_0 \geq p \mathbf{i} x$ y $x_0 \geq p \mathbf{i} y$. Se tiene entonces que $x_0 \geq (p \mathbf{i} x) \mathbf{s} (p \mathbf{i} y) = p \mathbf{i} (x \mathbf{s} y) \in P$. ***Abs!*** pues $x_0 \notin P$ □

Teorema 5 (Rasiova y Sikorski)**.** *Sea $(B, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B, x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \dots)$ es un infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\inf(A_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots$. Entonces hay un filtro primo P el cual cumple:*

1. *$x \in P$*
2. *$A_j \subseteq P \Rightarrow \inf(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, \dots$*

Proof. Se acepta sin demostracion □

8 Sintaxis de la logica de primer orden

8.1 Ocurrencias

Definición 38. Dadas palabras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, con $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, y un natural $i \in \{1, \dots, |\beta|\}$, se dice que *$\alpha$ ocurre a partir de i en β* cuandos se de que existan palabras δ, γ tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$ y $|\delta| = i - 1$

Notese que una palabra α puede ocurrir en β a partir de i y tambien a partir de j, con $i \neq j$. Por ejemplo, *aba* ocurre dos veces en la palabra

$$abacaba$$

Cuando dos ocurrencias no se superpongan en alguna posicion, se las llamara *disjuntas*

A veces, diremos que una ocurrencia esta *contenida* o *sucede* dentro de otra. Por ejemplo, la segunda ocurrencia de b esta contenida en la segunda ocurrencia de *aba*

Tambien se podra hablar de *reemplazos* de ocurrencias por palabras. Por ejemplo, podriamos reemplazar las ocurrencias de *aca* por *abacaba*, dando como resultado

$$ababacababa$$

En algunos casos, se debera especificar que los reemplazos se haran *simultaneamente* en vez de *secuencialmente*. Por ejemplo, no es lo mismo primero reemplazar *aca* por d y luego d por bb

$$abbbba$$

Que hacerlo simultaneamente dando como resultado

$$abdba$$

Definición 39. Diremos que α es subpalabra (propia) de β cuando ($\alpha \notin \{\epsilon, \beta\}$ y) existan palabras δ, γ, tales que $\beta = \delta\alpha\gamma$

Definición 40. Diremos que β es un *tramo inicial* (*propio*) de α si hay una palabra de γ tal que $\alpha = \beta\gamma$ (y $\beta \notin \{\epsilon, \alpha\}$). En forma similar se define *tramo final* (*propio*)

8.2 Variables

Definición 41. Sea Var el siguiente conjunto de palabras del alfabeto $\{\mathrm{X}, \mathit{0}, \mathit{1}, \dots, \mathit{9}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{9}\}$:

$$Var = \{\mathrm{X}\mathbf{0}, \dots, \mathrm{X}\mathbf{9}, \mathrm{X}\mathit{1}\mathbf{0}, \dots, \mathrm{X}\mathit{2}\mathbf{0}, \dots, \mathrm{X}\mathit{10}\mathbf{0}, \dots\}$$

Es decir, el n-esimo elemento de Var sera la palabra de la forma $\mathrm{X}\alpha$, donde α es el resultado de reemplazar en la representacion decimal de n su ultimo simbolo por el numeral en bold, y el resto por sus numerales en italics.

A los elementos de Var se los llamara *variables*.

Denotaremos con x_i al i-esimo elemento de Var, para cada $i \in \mathbf{N}$.

8.3 Tipos

Definición 42. Por un tipo (de primer orden) entenderemos una 4-upla $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ tal que:

1. Hay alfabetos finitos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ tales:
   (a) $\mathcal{C} \subseteq \Sigma_1^+, \mathcal{F} \subseteq \Sigma_2^+, \mathcal{R} \subseteq \Sigma_3^+$
   (b) $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ son disjuntos de a pares
   (c) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ no contiene ningun simbolo de la lista: $\forall$ $\exists$ $\neg$ $\vee$ $\wedge$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ ( ) , $\equiv$ X *0* *1* ... *9* **0** **1** ... **9**
2. $a\colon \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{N}$ es una funcion que a cada $p \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ le asocia un numero natural $a(p)$, llamado la *aridad* de p
3. Ninguna palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) es subpalabra propia de otra palabra de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$)

A los elementos de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{F}, \mathcal{R}$) los llamaremos *nombres de constante* (resp. *nombres de funcion*, *nombres de relacion*) de tipo τ

Dado $n \geq 1$, definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \{f \in \mathcal{F} : a(f) = n\} \\ \mathcal{R}_n &= \{r \in \mathcal{R} : a(r) = n\} \end{aligned}$$

8.4 Terminos

Dado un tipo τ, definamos recursivamente los conjuntos de palabras T_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_0^\tau &= Var \cup \mathcal{C} \\ T_{k+1}^\tau &= T_k^\tau \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_k^\tau)\} \end{aligned}$$

Sea

$$T^\tau = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau$$

Los elementos de T^τ seran llamados *terminos de tipo* τ. Un termino t es llamado *cerrado* si x_i no ocurre en t, para cada $i \in \mathbf{N}$.

Definimos tambien:

$$T_c^\tau = \{t \in T^\tau : t \text{ es cerrado}\}$$

Lema 28. *Supongamos* $t \in T_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*. Entonces ya sea* $t \in Var \cup \mathcal{C}$ *o* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$

Proof. TODO □

8.4.1 Unicidad de la lectura de terminos

Lema 29 (Mordizqueo de Terminos)**.** *Sean* $s, t \in T^\tau$ *y supongamos que hay palabras* x, y, z*, con* $y \neq \epsilon$ *tales que* $s = xy$ *y* $t = yz$*. Entonces* $x = z = \epsilon$ *o* $s, t \in \mathcal{C}$*. En particular si un termino es tramo inicial o final de otro termino, entonces dichos terminos son iguales.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Teorema 6 (Lectura unica de terminos)**.** *Dado* $t \in T^\tau$ *se da una de las siguientes:*

1. $t \in Var \cup \mathcal{C}$
2. *Hay unicos* $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$

Proof. TODO □

8.4.2 Subterminos

Definición 43. Sean $s, t \in T^\tau$. Diremos que s es *subtermino* (*propio*) de t si (no es igual a t y) s es subpalabra de t.

Lema 30. *Sean* $r, s, t \in T^\tau$

1. *Si* $s \neq t = f(t_1, \ldots, t_n)$ *y* s *ocurre en* t*, entonces dicha ocurrencia sucede dentro de algun* t_j*,* $j = 1, \ldots, n$
2. *Si* r, s *ocurren en* t*, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una ocurre dentro de otra. En particular las distintas ocurrencias de* r *en* t *son disjuntas*
3. *Si* t' *es el resultado de reemplazar una ocurrencia de* s *en* t *por* r*, entonces* $t' \in T^\tau$

Proof. TODO □

8.5 Formulas

Definición 44. Sea τ un tipo. Las palabras de alguna de las siguientes dos formas:

$$(t \equiv s), \text{ con } t, s \in T^\tau$$
$$r(t_1, \ldots, t_n), \text{ con } r \in \mathcal{R}_n, n \geq 1, \text{ y } t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$$

seran llamadas *formulas atomicas de tipo* τ

Definición 45. Dado un tipo τ definamos recursivamente los conjuntos de palabras F_k^τ, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_0^\tau &= \{\text{formulas atomicas}\} \\
F_{k+1}^\tau &= F_k^\tau \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\
&\cup \{(\varphi \to \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau\} \\
&\cup \{\forall v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\} \cup \{\exists v\varphi : \varphi \in F_k^\tau, v \in Var\}
\end{aligned}$$

Sea

$$F^\tau = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau$$

Los elementos de F^τ seran llamados *formulas de tipo* τ

Lema 31. *Supongamos* $\varphi \in F_k^\tau$*, con* $k \geq 1$*. Entonces* φ *es de alguna de las siguientes formas:*

- $(t \equiv s)$*, con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$
- $\neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$
- $Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$

Proof. TODO □

8.5.1 Unicidad de la lectura de formulas

Proposicion 1 (Mordizqueo de formulas)**.** *Si* $\varphi, \psi \in F^\tau$ *y* x, y, z *son tales que* $\varphi = xy$*,* $\psi = yz$ *y* $y \neq \epsilon$*, entonces* $z = \epsilon$ *y* $x \in (\{\neg\} \cup \{Qv : Q \in \{\forall, \exists\} \text{ y } v \in Var\})^*$*. En particular ningun tramo inicial propio de una formula es una formula*

Proof. Se acepta sin demostracion ∎

Teorema 7 (Lectura unica de formulas)**.** *Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y solo una de las siguientes:*

- $(t \equiv s)$*, con* $t, s \in T^\tau$
- $r(t_1, \ldots, t_n)$*, con* $r \in \mathcal{R}_n, t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$
- $(\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, con* $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*,* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$
- $\neg\varphi_1$*, con* $\varphi_1 \in F^\tau$
- $Qv\varphi_1$*, con* $Q \in \{\forall, \exists\}, v \in Var$ *y* $\varphi_1 \in F^\tau$

Proof. TODO ∎

8.5.2 Subformulas

Definición 46. Una formula φ sera llamada una *subformula (propia)* de una formula ψ, cuando φ (sea no igual a ψ y) tenga alguna ocurrencia en ψ.

Lema 32. *Sea τ un tipo*

1. *Las formulas atomicas no tienen subformulas propias*
2. *Si φ ocurre propiamente en $(\psi\eta\phi)$, entonces tal ocurrencia es en ψ o en ϕ*
3. *Si φ ocurre propiamente en $\neg\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ*
4. *Si φ ocurre propiamente en $Qx_k\psi$, entonces tal ocurrencia es en ψ*
5. *Si φ_1, φ_2 ocurren en φ, entonces dichas ocurrencias son disjuntas o una contiene a la otra*
6. *Si λ' es el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de φ en λ por ψ, entonces $\lambda' \in F^\tau$*

Proof. Se acepta sin demostracion ∎

8.6 Variables libres

Definición 47. Definimos recursivamente la relacion *"v ocurre libremente en φ a partir de i"*, donde $v \in Var, \varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, \ldots, |\varphi|\}$ de la siguiente manera:

1. Si φ es atomica, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre en φ a partir de i

2. Si $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre libremente en φ_1 a partir de $i-1$ o v ocurre libremente en φ_2 a partir de $i - |(\varphi_1 \eta|$

3. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v$ ocurre libremente en φ_1 a partir de $i-1$

4. Si $\varphi = Qw\varphi_1$, entonces v ocurre libremente en φ a partir de $i \iff v \neq w$ y v ocurre libremente en φ_1 a partir de $i - |Qw|$

Dados $v \in Var, \varphi \in F^\tau$ y $i \in \{1, \ldots, |\varphi|\}$, diremos que *"v ocurre acotadamente en φ a partir de i* cuando v ocurre en φ a partir de i y v no ocurre libremente en φ a partir de i

Definición 48. Dada una formula φ, sea

$$Li(\varphi) = \{v \in Var : \text{ hay un } i \text{ tal que } v \text{ ocurre libremente en } \varphi \text{ a partir de } i\}$$

Los elementos de $Li(\varphi)$ seran llamados *variables libres de φ*. Una *sentencia* sera una formula φ tal que $Li(\varphi) = \emptyset$. Usaremos S^τ para denotar el conjunto de las sentencias de tipo τ.

Lema 33. *Sea τ un tipo*

1. $Li((t \equiv s)) = \{v \in Var : v$ *ocurre en* t *o* v *ocurre en* $s\}$

2. $Li(r(t_1, \ldots, t_n)) = \{v \in Var : v$ *ocurre en algun* $t_i\}$

3. $Li(\neg\varphi) = Li(\varphi)$

4. $Li((\varphi\eta\psi)) = Li(\varphi) \cup Li(\psi)$

5. $Li(Qx_j\varphi) = Li(\varphi) - \{x_j\}$

Proof. TODO □

9 Semantica de la logica de primer orden

9.1 Estructuras de tipo τ

Definición 49. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{N}$. Por una *operacion n-aria sobre A*, entenderemos una funcion cuyo dominio es A^n y cuya imagen esta contenida en A.

Definición 50. Sea A un conjunto y sea $n \in \mathbf{N}$. Por una *relacion n-aria sobre* A entenderemos un subconjunto de A^n.

Definición 51. Sea A un conjunto, $n \in \mathbf{N}$ y τ un tipo. Una *estructura o modelo de tipo* τ sera un par $\mathbf{A} = (A, i)$ tal que:

1. A es un conjunto no vacio llamado el *universo* de $\mathbf{A}$
2. i es una funcion con dominio $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ tal que:
   (a) para cada $c \in \mathcal{C}$, $i(c)$ es un elemento de A
   (b) para cada $f \in \mathcal{F}_n$, $i(f)$ es un elemento de A
   (c) para cada $r \in \mathcal{R}_n$, $i(r)$ es un elemento de A

Lema 34. *Dados A, B conjuntos finitos no vacios, hay $|B|^{|A|}$ funciones tales que su dominio es A y su imagen esta contenida en B.*

Proof. TODO □

9.2 El valor de un termino de una estructura

Definición 52. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Una *asignacion* de $\mathbf{A}$ sera un elemento de $A^{\mathbf{N}} = \{\text{infinituplas de elementos de } A\}$. Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots)$ es una asignacion, entonces diremos que a_j es *el valor que $\vec{a}$ le asigna a la variable x_j*

Definición 53. Sea $\mathbf{A} = (A, i)$ una estructura de tipo τ, $t \in T^\tau$ y $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion, definimos recursivamente $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$:

1. Si $t = x_i \in Var$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = a_i$
2. Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(c)$
3. Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ con $f \in \mathcal{F}_n, n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$, entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = i(f)(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \dots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}])$

El elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ sera llamado el *valor de t en la estructura $\mathbf{A}$ para la asignacion $\vec{a}$*

Lema 35. *Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ y sea $t \in T^\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$, cada vez que x_i ocurra en t. Entonces $t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = t^{\mathbf{B}}[\vec{b}]$*

Proof. TODO □

9.3 El valor de verdad de una formula en un estructura

Definición 54. Sea $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion y $a \in A$, denotaremos con $\downarrow_i^a(\vec{a})$ a la asignacion que resulta de reemplazar en $\vec{a}$ el i-esimo elemento por a.

Definición 55. Sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ, $\vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$ una asignacion y $\varphi \in F^{\tau}$, definimos entonces recursivamente la relacion $A \models \varphi[\vec{a}]$ (escribiremos $A \not\models \varphi[\vec{a}]$ cuando no se de $A \models \varphi[\vec{a}]$):

1. Si $\varphi = (t \equiv s)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$
2. Si $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff (t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in i(r)$
3. Si $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
4. Si $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$
5. Si $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$
6. Si $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ ya sea se dan $\mathbf{A} \models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$ o se dan $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{a}]$ y $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[\vec{a}]$
7. Si $\varphi = \neg\varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \not\models \varphi_1[\vec{A}]$
8. Si $\varphi = \forall x_i \varphi_1$, entocnes $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ para cada $a \in A$, se da que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$
9. Si $\varphi = \exists x_i \varphi_1$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff$ hay un $a \in A$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi_1[\downarrow_i^a(\vec{a})]$

Cuando se de $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la *estructura* $\mathbf{A}$ *satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es verdadera en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$.

Cuando se de $\mathbf{A} \not\models \varphi[\vec{a}]$ diremos que la *estructura* $\mathbf{A}$ *no satisface* φ *en la asignacion* $\vec{a}$ y en tal caso diremos que φ *es falsa en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$.

Tambien hablaremos del *valor de verdad de* φ *en* $\mathbf{A}$ *para la asignacion* $\vec{a}$ el cual sera igual a 1 si se da $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}]$ y 0 en caso contrario.

Lema 36. *Supongamos que* $\vec{a}, \vec{b}$ *son asignaciones tales que si* $x_i \in Li(\varphi)$*, entonces* $a_i = b_i$*. Entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$

Proof. TODO □

Corolario 1. *Si* φ *es una sentencia, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$*, cualesquiera sean las asignaciones* $\vec{a}, \vec{b}$

Definición 56. Dada una sentencia φ, diremos que φ es *verdadera* en $\mathbf{A}$ cuando su valor de verdad sea 1, y, en caso de que su valor de verdad sea 0, diremos que es *falsa*

Ademas una sentencia de tipo τ sera llamada *universalmente valida* si es verdadera en cada modelo de tipo τ

9.4 Equivalencia de formulas

Definición 57. Dadas $\varphi, \psi \in F^\tau$ diremos que φ y ψ son *equivalentes* cuande se de la siguiente condicion:

$$\mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \psi[\vec{a}], \text{ para cada modelo de tipo } \tau, \mathbf{A} \text{ y cada } \vec{a} \in A^{\mathbf{N}}$$

Escribiremos $\varphi \sim \psi$ cuando φ y ψ sean equivalentes. Notese que $\sim$ es una relacion de equivalencia.

Lema 37. *Son validas las siguientes propiedades:*

1. *Si $Li(\phi) \cup Li(\psi) \subseteq \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$, entonces $\phi \sim \psi \iff$ la sentencia $\forall x_{i_1}, \ldots, \forall x_{i_n}(\phi \leftrightarrow \psi)$ es universalmente valida*

2. *Si $\phi_i \sim \psi_i$, $i = 1, 2$, entonces $\neg\phi_1 \sim \neg\psi_1, (\phi_1 \eta \phi_2) \sim (\psi_1 \eta \psi_2)$ y $Qv\phi_1 \sim Qv\psi_1$*

3. *Si $\phi \sim \psi$ y α' es el resultado de reemplazar en una formula α algunas (posiblemente 0) ocurrencias de ϕ por ψ, entonces $\alpha \sim \alpha'$*

Proof. TODO □

9.5 Homomorfismos

Definición 58. Dado un modelo de tipo τ, $\mathbf{A} = (A, i)$, para cada $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, usaremos $s^{\mathbf{A}}$ para denotar a $i(s)$.

Definición 59. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ modelos de tipo τ. Una funcion $F \colon A \to B$ sera un *homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ si se cumplen las siguientes:

1. $F(c^{\mathbf{A}}) = c^{\mathbf{B}}$, para todo $c \in \mathcal{C}$

2. $F(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathbf{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n))$, para cada $f \in \mathcal{F}_n, a_1, \ldots, a_n \in A$

3. $a_1, \ldots, a_n \in r^{\mathbf{A}}$ implica $(F(a_1), \ldots, F(a_n)) \in r^{\mathbf{B}}$, para todo $r \in \mathcal{R}_n, a_1, \ldots, a_n \in A$

Un *isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ sera un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ el cual sea biyectivo y cuya inversa sea un homomorfismo de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Diremos que los modelos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfos* (en simbolos: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$) cuando haya un isomorfismo F de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Diremos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un *homomorfismo* para expresar que F es un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$

Diremos que $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un *isomorfismo* para expresar que F es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$

Lema 38. *Sea* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfismo. Entonces*

$$F(t^{\mathbf{A}}[(a_1, a_2, \dots)]) = t^{\mathbf{B}}[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $t \in T^\tau, (a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbf{N}}$

Lema 39. *Supongamos que* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi \in F^\tau$*. Entonces*

$$\mathbf{A} \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \iff \mathbf{B} \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbf{N}}$*. En particular* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *satisfacen las mismas sentencias de tipo* τ*.*

Proof. TODO $\square$

10 Notacion declaratoria para terminos

Definición 60. Sea t un termino de tipo τ, entonces escribiremos $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$ para declarar que $v_1, \dots, v_n$ son variables distintas tales que toda variable que ocurre en t pertenece a $\{v_1, \dots, v_n\}$

Convencion 1. Cuando hayamos hecho la declaracion $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$, si $P_1, \dots, P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $t(P_1, \dots, P_n)$ denotara la palabra que resulta de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia de v_1 por P_1, ..., cada ocurrencia de v_n por P_n

Convencion 2. Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, \dots, a_n \in A$, entonces con $t^{\mathbf{A}}[a_1, \dots, a_n]$ denotaremos al elemento $t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i

Lema 40. *Sea* τ *un tipo cualquiera y supongamos* $t \in T^\tau$*. Si* $t =_d t(v_1, \dots, v_n)$*, entonces se da alguna de las siguientes:*

1. $t = c$*, para algun* $c \in \mathcal{C}$

2. $t = v_j$, *para algun* j

3. $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $f \in \mathcal{F}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$ *tales que las variables que ocurren en cada uno de ellos estan en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$

Convencion 3. Cuando hayamos declarado $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$ y se de el caso (3) del lema anterior, tendremos hechas las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_m =_d t_m(v_1, \ldots, v_n)$

Lema 41. *Sea* τ *un tipo cualquiera y* $t \in T^\tau$. *Supongamos* $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$. *Sea* $\mathbf{A}$ *un modelo de tipo* τ. *Sean* $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Se tiene que:*

1. *Si* $t = c$, *entonces* $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = c^{\mathbf{A}}$

2. *Si* $t = v_j$, *entonces* $t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = a_j$

3. *Si* $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $f \in \mathcal{F}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$, *entonces*

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$$

11 Notacion declaratoria para formulas

Definición 61. Si φ es una formula de tipo τ, entonces escribiremos $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ para declarar que $v_1, \ldots, v_n$ son variables distintas tales que $Li(\varphi) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Convencion 4. Cuando hayamos hecho la declaracion $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, si $P_1, \ldots, P_n$ son palabras cualesquiera, entonces $\varphi(P_1, \ldots, P_n)$ denotaria la palabra que resulta de reemplazar simultaneamente cada ocurrencia libre de v_1 en φ por P_1, ..., cada ocurrencia libre de v_n en φ por P_n

Convencion 5. Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, si $\mathbf{A}$ es un modelo de tipo τ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significara que $\mathbf{A} \models \varphi[\vec{b}]$, donde $\vec{b}$ es una asignacion tal que a cada v_i le asigna el valor a_i. En general, $\mathbf{A} \not\models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ significara que no sucede $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

Lema 42. *Sea* τ *un tipo cualquiera y* $\varphi \in F^\tau$. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$, *entonces se cumple una y solo una de las siguientes:*

1. $\varphi = (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau$, *unicos y tales que las variables que ocurren en* t *o en* s *estan todas en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$

2. $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, *con* $r \in \mathcal{R}_m$ *y* $t_1, \ldots, t_m \in T^\tau$, *unicos y tales que las variables que ocurren en cada* t_i *estan todas en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$

3. $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

4. $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

5. $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

6. $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, *con* $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, *unicas y tales que* $Li(\varphi_1) \cup Li(\varphi_2) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

7. $\varphi = \neg\varphi_1$, *con* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

8. $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

9. $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$, *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, v\}$

10. $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$

11. $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, *con* $v_j \in Var - \{v_1, \ldots, v_n\}$, *y* $\varphi_1 \in F^\tau$, *unica y tal que* $Li(\varphi_1) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n, v\}$

Proof. TODO □

Convencion 6. Cuando hayamos declarado $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ entonces:

- Si se da el caso (1) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t =_d t(v_1, \ldots, v_n)$ y $s =_d s(v_1, \ldots, v_n)$

- Si se da el caso (2) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $t_1 =_d t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_m =_d t_m(v_1, \ldots, v_n)$

- Si se da alguno de los casos (3), (4), (5) o (6) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho las declaraciones $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n)$ y $\varphi_2(v_1, \ldots, v_n)$

- Si se da alguno de los casos (7), (8) o (10) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n)$

- Si se da alguno de los casos (9) u (11) del lema anterior, supondremos tacitamente que tambien hemos hecho la declaracion $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$

Lema 43. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. *Sea* $\mathbf{A} = (A, i)$ *un modelo de tipo* τ *y sean* $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Entonces:*

1. *Si* $\varphi = (t \equiv s)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$

2. *Si* $\varphi = r(t_1, \ldots, t_m)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff (t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \in r^{\mathbf{A}}$

3. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ *y* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$

4. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ *o* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$

5. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$ *o* $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$

6. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff$ *ya sea se dan* $\mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ *y* $\mathbf{A} \models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$, *o se dan* $\mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$ *y* $\mathbf{A} \not\models \varphi_2[a_1, \ldots, a_n]$

7. *Si* $\varphi = \neg\varphi_1$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \not\models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$

8. *Si* $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n]$, *para todo* $a \in A$

9. *Si* $\varphi = \forall v \varphi_1$, *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$, *entonces*

   $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a]$, *para todo* $a \in A$

10. *Si* $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, *entonces*

    $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n]$, *para algun* $a \in A$

11. *Si* $\varphi = \exists v \varphi_1$, *con* $v \notin \{v_1, \ldots, v_n\}$ *y* $\varphi_1 =_d \varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$, *entonces*

    $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff \mathbf{A} \models \varphi_1[a_1, \ldots, a_n, a]$, *para algun* $a \in A$

Proof. Se acepta sin demostracion $\square$

Dos teoremas de reemplazo

Teorema 8 (De reemplazo para terminos)**.**
Supongamos $t =_d t(w_1, \ldots, w_k), s_1 =_d s_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, s_k =_d s_k(v_1, \ldots, v_n)$*. Todas las variables de* $t(s_1, \ldots, s_k)$ *estan en* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *y si declaramos* $t(s_1, \ldots, s_k) =_d t(s_1, \ldots, s_k)(v_1, \ldots, v_n)$*, entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *se tiene que:*

$$t(s_1, \ldots, s_k)^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathbf{A}}[s_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, s_k^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]]$$

Proof. Se acepta sin demostracion □

Definición 62. Sea $\varphi \in F^\tau$, $v, w \in Var$. Diremos que v es *sustituible por* w *en* φ cuando ninguna ocurrencia libre de v en φ sucede dentro de una ocurrencia de una subformula de la forma $Qw\psi$ en φ.

Lema 44. *Sea* $\varphi \in F^\tau$*,* $v, w \in Var$*. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si* φ *es atomica, entonces* v *es sustituible por* w *en* φ
2. *Si* $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$*, entonces* v *es sustituible por* w *en* $\varphi \iff v$ *es sustituible por* w *en* φ_1 *y* φ_2
3. *Si* $\varphi = \neg\varphi_1$*, entonces* v *es sustituible por* w *en* $\varphi \iff v$ *es sustituible por* w *en* φ_1
4. *Si* $\varphi = Qv\varphi_1$*, entonces* v *es sustituible por* w *en* φ
5. *Si* $\varphi = Qw\varphi_1$ *y* $v \in Li(\varphi_1)$*, entonces* v *no es sustituible por* w *en* φ
6. *Si* $\varphi = Qw\varphi_1$ *y* $v \notin Li(\varphi_1)$*, entonces* v *es sustituible por* w *en* φ
7. *Si* $\varphi = Qu\varphi_1$*, con* $u \neq v, w$*, entonces* v *es sustituible por* w *en* $\varphi \iff v$ *es sustituible por* w *en* φ_1

Proof. TODO □

Teorema 9. *Supongamos* $\varphi =_d \varphi(w_1, \ldots, w_k), t_1 =_d t_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, t_k =_d t_k(v_1, \ldots, v_n)$ *y supongamos ademas que cada* w_j *es sustituible por* t_j *en* φ*. Entonces:*

1. $Li(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$
2. *Si declaramos* $\varphi(t_1, \ldots, t_k) =_d \varphi(t_1, \ldots, t_k)(v_1, \ldots, v_n)$*, entonces para cada estructura* $\mathbf{A}$ *y* $\vec{a} \in A^n$ *se tiene*
$$\mathbf{A} \models \varphi(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \iff \mathbf{A} \models \varphi[t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]]$$

Proof. Se acepta sin demostracion □

Elementos definibles

Definición 63. Sea $\mathbf{A}$ un modelo de tipo τ. Diremos que un elemento de a de A es *definible* en $\mathbf{A}$ si hay una formula $\varphi =_d \varphi(v)$ tal que $\mathbf{A} \models \varphi[a]$ y para cada $b \in A - \{a\}$ se tiene que $A \not\models \varphi[b]$. Es decir, a es el unico elemento de A que cumple $\mathbf{A} \models \varphi[a]$. En tal caso tambien diremos que φ *define* a en $\mathbf{A}$.