Resumen de Lógica

Uziel Ludueña

October 6, 2020

Contents

1 Relaciones binarias

Definición 1. Una *relacion binaria* sera un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Una relacion binaria sobre un conjunto A sera una relacion binaria, la cual es subconjunto de A^2.

Notese que si R es una relacion binaria sobre A y $A \subseteq B$, entonces R es una relacion sobre B. Como es usual, cuando R sea una relacion binaria sobre un conjunto A, diremos aRb en lugar de $(a, b) \in R$

1.1 Propiedades notables de relaciones binarias

Algunas propiedades que puede cumplir una relacion binaria R sobre un conjunto A son:

- Reflexividad: xRx, cualesquiera sea $x \in A$
- Transitividad: xRy y yRz implica xRz, cualesquiera sean $x, y, z \in A$
- Simetria: xRy implica yRx, cualesquiera sean $x, y \in A$
- Antisimetria: xRy y yRx implica $x = y$, cualesquiera sean $x, y \in A$

1.2 Relaciones de equivalencia

Definición 2. Sea A un conjunto cualquiera. Por una *relacion de equivalencia sobre* A entenderemos una relacion binaria sobre A la cual es reflexiva, transitiva y simetrica, con respecto a A.

Definición 3. Dada una funcion $F\colon A \to B$, definimos:

$$\ker F = \{(x, y) \in A^2 : F(x) = F(y)\}$$

Definición 4. Dada una relacion de equivalencia R sobre A y $a \in A$, definimos:

$$a/R = \{b \in A : aRb\}$$

El conjunto a/R sera llamado la *clase de equivalencia* de a, con respecto a R.

Observacion 1. $a \in a/R$, pues R es reflexiva, por lo tanto aRa.

Observacion 2. $aRb \iff a/R = b/R$, sencillo de demostrar con las propiedades

Observacion 3. $a/R \cap b/R = \emptyset$ o $a/R = b/R$, sencillo de demostrar viendo que pasa si aRb y si no aRb

Definición 5. Dada una relacion de equivalencia R sobre A, definimos:

$$A/R = \{a/R : a \in A\}$$

Diremos que A/R es el cociente de A por R. Notese que A/R es el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de A.

Observacion 4. Sea $F\colon A \to B$, entonces:

1. F es inyectiva $\iff$ $\ker F = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$
2. Si F es sobreyectiva, entonces hay una biyeccion entre $A/\ker F$

Definición 6. Si R es una relacion de equivalencia sobre A, definimos la funcion $\pi_R\colon A \to A/R$ por $\pi_R(a) = a/R$, para cada $a \in A$. Esta funcion es llamada la *proyeccion canonica* respecto de R.

Observacion 5. Sea R una relacion de equivalencia sobre A. Entonces $\ker \pi_R = R$

1.3 Correspondencia entre relaciones de equivalencia y particiones

Definición 7. Dado un conjunto A, por una *particion de* A entenderemos a un conjunto $\mathcal{P}$ tal que:

- Cada elemento de $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacio de A
- Si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$ y $S_1 \neq S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $A = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{P}} S$

Observacion 6. Si $\mathcal{P}$ es una particion de A, entonces para cada $a \in A$ hay un unico $S \in \mathcal{P}$ tal que $a \in S$.

Definición 8. Dada una particion $\mathcal{P}$ de un conjunto A, podemos definir una relacion binaria asociada a $\mathcal{P}$ de la siguiente manera:

$$R_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \in A^2 : a, b \in S, \text{ para algun } S \in \mathcal{P}\}$$

Teorema 1. *Sea A un conjunto cualquiera. Sean*

$$Part = \{\textit{particiones de } A\}$$

$$ReEq = \{\textit{relaciones de equivalencia sobre } A\}$$

Entonces, las funciones:

$$f : Part \rightarrow ReEq$$
$$\mathcal{P} \rightarrow R_{\mathcal{P}}$$

$$g : ReEq \rightarrow Part$$
$$R \rightarrow A/R$$

son biyecciones una de la otra

Proof. Se acepta sin demostracion $\square$

2 Ordenes parciales

Definición 9. Una relacion binaria sobre R sobre un conjunto A sera llamada un *orden parcial sobre* A, si es reflexiva, transitiva y antisimetrica respecto de A.

Muchas veces denotaremos con $\leq$ a una relacion binaria que sea un orden parcial.

Ademas, si hemos denotado $\leq$ a cierto orden parcial sobre un conjunto A, entonces:

1. Denotaremos con $<$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a \leq b \text{ y } a \neq b\}$. Cuando se de que $a < b$, diremos que *a es menor que b*, o que *b es mayor que a*

2. Denotaremos con $\prec$ a la relacion binaria $\{(a, b) \in A^2 : a < b \text{ y no existe } z \text{ tal que } a < z < b\}$. Cuando se de que $a \prec b$, diremos que *a es cubierto por b* o que *b cubre a a*.

Definición 10. Un *conjunto* parcialmente ordenado o poset, es un par $(P, \leq)$, donde P es un conjunto no vacio cualquiera y $\leq$ es un orden parcial sobre P. Dado un poset $(P, \leq)$, el conjunto P sera llamado el *universo* de $(P, \leq)$.

2.1 Diagramas de Hasse

Dado un poset $(P, \leq)$. con P finito, podemos realizar un diagrama llamado *diagrama de Hasse*, siguiendo las siguientes instrucciones:

1. Asociar en forma inyectiva a cada $a \in P$ un punto p_a del plano

2. Trazar un segmento de recta uniendo los puntos p_a y p_b, cada vez que $a \prec b$

3. Realizar los antes dicho de tal forma que:

   (a) Si $a \prec b$, entonces p_a esta por debajo de p_b

   (b) Si un punto p_a ocurre en un segmento del diagrama, entonces lo hace en alguno de sus extremos

La relacion de $\leq$ puede ser reconstruida facilmente apartir del diagrama. $a \leq b$ sucedera si y solo si $p_a = p_b$ p hay una sucesion de caminos ascendentes de segmentos desde p_a hasta p_b.

2.2 Elementos maximales, maximos, minimales y minimos

Definición 11. Sea $(P, \leq)$ un poset.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $a < b$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento maximo de $(P, \leq)$ si $b \leq a$, para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 1, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 1 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un maximo

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimal de $(P, \leq)$, si no existe un $b \in P$ tal que $b < a$.

Diremos que $a \in P$ es un elemento minimo de $(P, \leq)$ si $a \leq b$ para todo $b \in P$. En caso de existir, sera denotado como 0, y muchas veces diremos que $(P, \leq)$ tiene un 0 para expresar que $(P, \leq)$ tiene un minimo

Observacion 7. Un poset $(P, \leq)$ tiene a lo sumo 1 maximo (resp. minimo)

Observacion 8. Todo elemento maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$ es un elemento maximal (resp. minimal) de $(P, \leq)$

2.3 Supremos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota superior* de S en $(P, \leq)$ cuando $b \leq a$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota superior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *supremo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota superior de S en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si b es cota superior de S en $(P, \leq)$, entonces $a \leq b$

2.4 Infimos

Sea $(P, \leq)$ un poset. Dado $S \subseteq P$, diremos que un elemento $a \in P$ es *cota inferior* de S en $(P, \leq)$ cuando $a \leq b$, para todo $b \in S$. Notese que todo elemento de P es cota inferior de $\emptyset$ en $(P, \leq)$. Un elemento $a \in P$ sera llamado *infimo* de S en $(P, \leq)$, cuando se den las siguientes propiedades:

1. a es cota inferior de S en $(P, \leq)$

2. Para cada $b \in P$, si b es cota inferior de S en $(P, \leq)$, entonces $b \leq a$

Observacion 9. Si a es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$ y a' es supremo (resp. infimo) de S en $(P, \leq)$, entonces $a = a'$

Observacion 10. a es supremo (resp. infimo) de P en $(P, \leq) \iff a$ es maximo (resp. minimo) de $(P, \leq)$

2.5 Homomorfismos de posets

Definición 12. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si para todo $x, y \in P$ se cumple que $x \leq y$ implica $F(x) \leq' F(y)$. Escribiremos $F\colon (P, \leq) \to (P', \leq')$ para expresar que F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$

2.6 Isomorfismo de posets

Definición 13. Sea $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Una funcion $F\colon P \to P'$ sera llamada un *isomorfismo de* $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ si F es biyectiva, F es un homomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y F^{-1} es un homomorfismo de $(P', \leq')$ en $(P, \leq)$. Escribiremos $(P, \leq) \cong (P', \leq')$ cuando exista un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$ y en tal caso diremos que $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ son isomorfos.

Definición 14. Dada una funcion $F\colon A \to B$ y $S \subseteq A$, denotaremos con $F(S)$ al conjunto $\{F(a) : a \in S\}$

Lema 1. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$*

1. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. cota inferior) de $S \iff F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$*

2. *Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que existe $\sup(S) \iff$ existe $\sup(F(S))$, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que $F(\sup(S)) = \sup(F(S))$*

3. *Para cada* $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$*, se tiene que existe* $\inf(S) \iff$ *existe* $\inf(F(S))$*, y en el caso de que existan tales elementos, se tiene que* $F(\inf(S)) = \inf(F(S))$

4. *Para cada* $a \in P$*,* a *es maximo (resp. minimo)* $\iff$ $F(a)$ *es maximo (resp. minimo)*

5. *Para cada* $a \in P$*,* a *es maximal (resp. minimal)* $\iff$ $F(a)$ *es maximal (resp. minimal)*

6. *Para* $a, b \in P$*, tenemos* $a \prec b \iff F(a) \prec' F(b)$

Proof. (a) Supongamos a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Como $s \leq a$, tenemos que $F(s) \leq' F(a)$. Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $s \in S$. Como $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que $s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a$.

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Entonces por (a) $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos b es cota superior de $F(S)$, entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S. Por lo tanto, $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$ y entonces $F(\sup(S)) \leq' b$. La *vuelta* es analoga.

(c) La prueba es analoga a (b)

(d) Supongamos $a \in P$ es maximo. Pero entonces $a = \sup(P)$, y entonces $F(a) = \sup(F(P)) = \sup(P')$. La *vuelta* es analoga.

(e) Supongamos $b \in P$ tal que no existe $a \in P$ tal que $b \leq a \Rightarrow a = b$. Sea $c \in P$ tal que $F(b) \leq' F(c)$, entonces $b \leq c$, y entonces $b = c$, $F(b) = F(c)$. Luego $F(b)$ es maximal. La *vuelta* es analoga.

(f) Sean $a, b \in P$ tal que $a \prec b$. Luego tenemos que $F(a) \leq' F(b)$. Supongamos existe $z \in P$ tal que $F(a) \leq' F(z) \leq' F(b)$, entonces tendriamos $a \leq z \leq b$. Como $a \prec b$, se sigue que $z = a$ o $z = b$. Luego $F(a) \prec' F(b)$. La *vuelta* es analoga. □

2.7 Reticulados

Definición 15. Diremos que un poset $(P, \leq)$ es un *reticulado* si para todo $a, b \in P$, existen $\sup(\{a, b\})$ e $\inf(\{a, b\})$

Definición 16. Dado un reticulado $(P, \leq)$, definimos 2 operacion binarias:

$$s : P^2 \to P$$
$$(a, b) \to \sup(\{a, b\})$$

$$i : P^2 \to p$$
$$(a, b) \to \inf(\{a, b\})$$

Escribiremos $a \ \mathbf{s} \ b$ en lugar de $s(a,b)$ y $a \ \mathbf{i} \ b$ en lugar de $i(a,b)$

Lema 2. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se cumplen:*

1. $x \leq x \ \boldsymbol{s} \ y$

2. $x \ \boldsymbol{i} \ y \leq x$

3. $x \ \boldsymbol{s} \ x = x \ \boldsymbol{i} \ x = x$

4. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y \ \boldsymbol{s} \ x$

5. $x \ \boldsymbol{i} \ y = y \ \boldsymbol{i} \ x$

Proof. TODO □

Lema 3. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, son equivalentes:*

1. $x \leq y$

2. $x \ \boldsymbol{s} \ y = y$

3. $x \ \boldsymbol{i} \ y = x$

Proof. TODO □

Lema 4. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y \in L$, se tiene que:*

1. $x \ \boldsymbol{s} \ (x \ \boldsymbol{i} \ y) = x$

2. $x \ \boldsymbol{i} \ (x \ \boldsymbol{s} \ y) = x$

Proof. TODO □

Lema 5. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z \in L$, se tiene que:*

1. $(x \ \boldsymbol{s} \ y) \ \boldsymbol{s} \ z = x \ \boldsymbol{s} \ (y \ \boldsymbol{s} \ z)$

2. $(x \ \boldsymbol{i} \ y) \ \boldsymbol{i} \ z = x \ \boldsymbol{i} \ (y \ \boldsymbol{i} \ z)$

Proof. TODO □

Lema 6. *Dado un reticulado $(L, \leq)$ y elementos $x, y, z, w \in L$, se tiene que si $x \leq z$ y $y \leq w$, entonces*

1. $x \ \boldsymbol{s}\ y \leq z \ \boldsymbol{s}\ w$

2. $x \ \boldsymbol{i}\ y \leq z \ \boldsymbol{i}\ w$

Proof. TODO □

Lema 7. *Dado un reticulado* $(L, \leq)$ *y elementos* $x, y, z \in L$*, se tiene que*
$(x \ \boldsymbol{i}\ y) \ \boldsymbol{s}\ (x \ \boldsymbol{i}\ z) \leq x \ \boldsymbol{i}\ (y \ \boldsymbol{s}\ z)$

Proof. TODO □

Lema 8. *Sea* $(L, \leq)$ *un reticulado. Dados elementos* $x_1, \ldots, x_n \in L$*, con* $n \geq 2$*, se tiene que:*

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{s}\ x_2) \ \boldsymbol{s}\ \ldots) \ \boldsymbol{s}\ x_n = \sup(\{x_1, \ldots, x_n\}) \tag{1}$$

$$(\ldots(x_1 \ \boldsymbol{i}\ x_2) \ \boldsymbol{i}\ \ldots) \ \boldsymbol{i}\ x_n = \inf(\{x_1, \ldots, x_n\}) \tag{2}$$

Proof. TODO □

3 Version algebraica del concepto de reticulado

Definición 17. Una terna $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$, donde L es un conjunto y $\mathbf{s}$, $\mathbf{i}$ son dos operaciones binarias sobre L sera llamada *reticulado* cuando cumpla:

1. $x \ \mathbf{s}\ x = x \ \mathbf{i}\ x = x$, cualesquiera sea $x \in L$

2. $x \ \mathbf{s}\ y = y \ \mathbf{s}\ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

3. $x \ \mathbf{i}\ y = y \ \mathbf{i}\ x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

4. $(x \ \mathbf{s}\ y) \ \mathbf{s}\ z = x \ \mathbf{s}\ (y \ \mathbf{s}\ z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

5. $(x \ \mathbf{i}\ y) \ \mathbf{i}\ z = x \ \mathbf{i}\ (y \ \mathbf{i}\ z)$, cualesquiera sean $x, y, z \in L$

6. $x \ \mathbf{s}\ (x \ \mathbf{i}\ y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

7. $x \ \mathbf{i}\ (x \ \mathbf{s}\ y) = x$, cualesquiera sean $x, y \in L$

En tal caso que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sea un reticulado, diremos que L es el *universo* del reticulado.

Teorema 2. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado. La relacion binaria definida por:*

$$x \leq y \iff x \ \boldsymbol{s} \ y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{s} \ y$$
$$\inf(\{x, y\}) = x \ \boldsymbol{i} \ y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$

Definición 18. Dados reticulados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un *subreticulado de* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'|_{L \times L}$
3. $\mathbf{i} = \mathbf{i}'|_{L \times L}$

Definición 19. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado *subuniverso de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ si es no vacio y cerrado bajo las operaciones $\mathbf{s}$ y $\mathbf{i}$

Observacion 11. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. S es subuniverso de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \iff (S, \mathbf{s}|_{S \times S}, \mathbf{i}|_{S \times S})$ es un subreticulado de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$

Definición 20. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ y $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ reticulados. Una funcion $F \colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x) \ \mathbf{s'} \ F(y)$$
$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x) \ \mathbf{i'} \ F(y)$$

Un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ sera llamada *isomorfismo* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ *en* $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando sea biyectivo, y su inversa sea tambien un homomorfismo.

Escribiremos $F \colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \to (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}) \cong (L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ en $(L', \mathbf{s}', \mathbf{i}')$

Lema 9. *Si $F \colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ es un homomorfismo biyectivo, entonces F es un isomorfismo*

Proof. TODO $\square$

Lema 10. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *y* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F})$

Proof. TODO $\square$

Lema 11. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *y* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}')$ *reticulados y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq')$ *los posets asociados. Sea* $F\colon L \to L'$ *una funcion. Entonces* F *es un isomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(L', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{i}') \iff F$ *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$

Proof. TODO $\square$

Definición 21. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ un reticulado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera una relacion de equivalencia θ la cual cumpla:

$$x\theta x' \text{ y } y\theta y' \Rightarrow (x \ \mathbf{s} \ y)\theta(x' \ \mathbf{s} \ y') \text{ y } (x \ \mathbf{i} \ y)\theta(x' \ \mathbf{i} \ y')$$

Gracias a tal propiedad podemos definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathrm{i}}$

$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta$$
$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{i}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta$$

Definición 22. La terna $(L/\theta, \widetilde{\mathrm{s}}, \widetilde{\mathbf{i}})$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sobre θ, y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})/\theta$

Lema 12. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}})$ *es un reticulado. El orden parcial* $\widetilde{\leq}$ *asociado a este reticulado cumple:*

$$x/\theta \ \widetilde{\leq} \ y/\theta \iff y\theta(x \ \boldsymbol{s} \ y)$$

Proof. TODO $\square$

Lema 13. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}) \to (L', s', i')$ *es un* homomorfismo*, entonces* $\mathit{ker}\ F$ *es una* congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$

Proof. TODO $\square$

Lema 14. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado y sea* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$*. Entonces* π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}})$*. Ademas* $\mathit{ker}\ \pi_\theta = \theta$*.*

Proof. TODO $\square$

4 Reticulados acotados

Definición 23. Por un *reticulado acotado* entenderemos una 5-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$, tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ es un reticulado, $0, 1 \in L$, y ademas se cumplen las siguientes propiedades

1. $0 \mathbf{\ s\ } x = x$, para cada $x \in L$
2. $1 \mathbf{\ s\ } x = 1$, para cada $x \in L$

4.1 Subreticulados acotados

Definición 24. Dados reticulados acotados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un *subreticulado acotado de* $(L', s', i', 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L \times L}$
4. $i = i'|_{L \times L}$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s e i.

4.2 Homomorfismo de reticulados acotados

Definición 25. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados acotados. Una funcion $F\colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ si para todo $x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \mathbf{\ s\ } y) = F(x) s' F(y)$$
$$F(x \mathbf{\ i\ } y) = F(x) i' F(y)$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1) \cong (L', s', i', 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ en $(L', s', i', 0', 1')$

Lema 15. *Si $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ es un* homomorfismo biyectivo*, entonces F es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 16. *Sean $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ y $(L', s', i', 0', 1')$ reticulados y sea $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ un homomorfismo. Entonces I_F es un subuniverso de $(L', s', i', 0', 1')$. Es decir que F es tambien un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ en $(I_F, \boldsymbol{s}'|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i}'|_{I_F \times I_F}, 0', 1')$*

Proof. Se acepta sin demostracion □

4.3 Congruencias de reticulados acotados

Definición 26. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ la cual sera una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$. Tenemos definidas sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$

$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{s}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{s}\; y)/\theta$$
$$x/\theta \;\widetilde{\mathbf{i}}\; y/\theta = (x \;\mathbf{i}\; y)/\theta$$

La 5-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)/\theta$

Lema 17. *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado y θ una congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$.*

1. *$(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ es un reticulado acotado*
2. *π_θ es un homomorfismo de $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ en $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, 0/\theta, 1/\theta)$ cuyo nucleo es θ*

Proof. TODO □

Lema 18. *Si $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1) \to (L', s', i', 0', 1')$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces ker F es una congruencia sobre $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$*

Proof. TODO □

5 Reticulados complementados

Definición 27. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ un reticulado acotado. Dado $a \in L$, diremos que a es *complementado* cuando exista un elemento $b \in L$ (llamado *complemento de* a) tal que:

$$a \mathbf{\ s\ } b = 1$$

$$a \mathbf{\ i\ } b = 0$$

Definición 28. Entonderemos por *reticulado complementado* a una 6-upla $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ tal que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ es un reticulado acotado y ^{c} es una operacion unaria sobre L tal que:

1. $x \mathbf{\ s\ } x^c = 1$, para cada $x \in L$
2. $x \mathbf{\ i\ } x^c = 0$, para cada $x \in L$

5.1 Subreticulados complementados

Definición 29. Dados reticulados complementados $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ diremos que $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ es un *subreticulado complementado de* $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si se dan las siguientes condiciones:

1. $L \subseteq L'$
2. $0 = 0'$ y $1 = 1'$
3. $s = s'|_{L \times L}$
4. $i = i'|_{L \times L}$
5. ${}^c = {}^{c'}|_L$

Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Un conjunto $S \subseteq L$ es llamado un *subuniverso* de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ si $0, 1 \in S$, y S es cerrado bajo las operaciones s, i y ^{c}.

5.2 Homomorfismo de reticulados complementados

Definición 30. Sean $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ y $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ reticulados complementados. Una funcion $F \colon L \to L'$ sera llamada un *homomorfismo de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, {}^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', {}^{c'}, 0', 1')$ si para todo

$x, y \in L$ se cumple que:

$$F(x \ \mathbf{s} \ y) = F(x)s'F(y)$$
$$F(x \ \mathbf{i} \ y) = F(x)i'F(y)$$
$$F(x^c) = F(x)^{c'}$$
$$F(0) = 0'$$
$$F(1) = 1'$$

Un homomorfismo $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ sera llamado *isomorfismo* cuando sea biyectivo y su inversa tambien sea un homomorfismo.

Escribiremos $F\colon (L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ cuando F sea un homomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$

Escribiremos $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1) \cong (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ cuando exista un isomorfismo de $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ en $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$

Lema 19. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un* homomorfismo biyectivo*, entonces* F *es un isomorfismo.*

Proof. Se acepta sin demostracion □

Lema 20. *Sean* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *y* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *reticulados y sea* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *un homomorfismo. Entonces* I_F *es un subuniverso de* $(L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$*. Es decir que* F *es tambien un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(I_F, \boldsymbol{s'}|_{I_F \times I_F}, \boldsymbol{i'}|_{I_F \times I_F}, ^{c'}|_{I_F}, 0', 1')$

Proof. Se acepta sin demostracion □

5.3 Congruencias de reticulados complementados

Definición 31. Sea $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ un reticulado complementado. Una *congruencia sobre* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sera una relacion de equivalencia θ sobre L la cual cumpla:

1. θ es una congruencia sobre $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$
2. $x/\theta = y/\theta$ implica $x^c/\theta = y^c/\theta$

Las condiciones anteriores nos permiten definir sobre L/θ dos operaciones binarias $\widetilde{\mathbf{s}}$ y $\widetilde{\mathbf{i}}$ y una operacion binaria $\widetilde{^c}$ de la siguiente manera:

$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{s}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{s} \ y)/\theta$$

$$x/\theta \ \widetilde{\mathbf{i}} \ y/\theta = (x \ \mathbf{i} \ y)/\theta$$

$$(x/\theta)^{\widetilde{c}} = x^c/\theta$$

La 6-upla $(L/\theta, \widetilde{\mathbf{s}}, \widetilde{\mathbf{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ es llamada *cociente de* $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$ sobre θ y la denotaremos con $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)/\theta$

Lema 21. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un reticulado complementado y* θ *una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$.

1. $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *es un reticulado complementado*

2. π_θ *es un homomorfismo de* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *en* $(L/\theta, \widetilde{\boldsymbol{s}}, \widetilde{\boldsymbol{i}}, \widetilde{^c}, 0/\theta, 1/\theta)$ *cuyo nucleo es* θ

Proof. TODO □

Lema 22. *Si* $F\colon (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1) \to (L', s', i', ^{c'}, 0', 1')$ *es un homomorfismo de reticulados complementados, entonces ker* F *es una congruencia sobre* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$

Proof. Se acepta sin demostracion □

6 Algebras de Boole

Definición 32. Un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ se llamara *distributivo* cuando cumpla la siguiente propiedad

$$Dis_1 \quad x \ \mathbf{i} \ (y \ \mathbf{s} \ z) = (x \ \mathbf{i} \ y) \ \mathbf{s} \ (x \ \mathbf{i} \ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Diremos que un reticulado acotado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, 0, 1)$ (resp. complementado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i}, ^c, 0, 1)$) es *distributivo* cuando $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ lo sea.

Consideremos la distributividad dual a Dis_1, es decir:

$$Dis_2 \quad x \ \mathbf{s} \ (y \ \mathbf{i} \ z) = (x \ \mathbf{s} \ y) \ \mathbf{i} \ (x \ \mathbf{s} \ z) \text{ cualesquiera sean } x, y, z \in L$$

Lema 23. *Sea* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *un reticulado. Entonces* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* $Dis_1 \iff (L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ *satisface* Dis_2

Proof. TODO □

Definición 33. Por un *Algebra de Boole* entenderemos un reticulado complementado distributivo.

Lema 24. *Si* $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, 0, 1)$ *un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento.*

Proof. TODO $\square$

Lema 25. *Sea* $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole, y sean* $x, y \in B$. *Se tiene que* $y = (y \ \boldsymbol{i} \ x) \ \boldsymbol{s} \ (y \ \boldsymbol{i} \ x^c)$

Proof. TODO $\square$

Teorema 3. *Sea* $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole.*

1. $(x \ \boldsymbol{i} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{s} \ y^c$
2. $(x \ \boldsymbol{s} \ y)^c = x^c \ \boldsymbol{i} \ y^c$
3. $x^{cc} = x$
4. $x \ \boldsymbol{i} \ y = 0 \iff y \leq x^c$
5. $x \leq y \iff y^c \leq x^c$

Proof. TODO $\square$

7 Teoremas del filtro primo y de Rasiova Sikorski

Definición 34. Un *filtro* de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera un subconjunto $F \subseteq L$ tal que:

1. $F \neq \emptyset$
2. $x, y \in F \Rightarrow x \ \mathbf{i} \ y \in F$
3. $x \in F, x \leq y \Rightarrow y \in F$

Definición 35. Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conunto:

$$\{y \in L : y \geq s_1 \ \mathbf{i} \ \dots \ \mathbf{i} \ s_n, \text{ para algunos } s_1, \dots, s_n \in S, n \geq 1\}$$

Lema 26. *Supongamos que* S *es no vacio. Entonces* $[S)$ *es un filtro. Mas aun, si* F *es un filtro y* $S \subseteq F$, *entonces* $[S) \subseteq F$. *Es decir,* $[S)$ *es el menor filtro que contiene a* S.

Proof. TODO $\square$

Definición 36. Sea $(P, \leq)$ un poset. Un subconjunto $C \subseteq P$ sera llamado una *cadena* si para cada $x, y \in C$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

Lema 27 (Zorn). *Sea $(P, \leq)$ un poset y supogamos cada cadena de $(P, \leq)$ tiene cota superior. Entonces hay un elemento maximal en $(P, \leq)$*

Proof. TODO □

Definición 37. Un filtro F de un reticulado $(L, \mathbf{s}, \mathbf{i})$ sera llamado *primo* cuando se cumplan:

1. $F \neq L$
2. $x \;\mathbf{s}\; y \in F \Rightarrow x \in F$ o $y \in F$

Teorema 4 (Teorema del Filtro Primo). *Sea $(L, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i})$ un reticulado distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que $x_0 \notin P$ y $F \subseteq P$*

Proof. TODO □

Teorema 5 (Rasiova y Sikorski). *Sea $(B, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{i}, {}^c, 0, 1)$ un algebra de Boole. Sea $x \in B, x \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \dots)$ es un infinitupla de subconjuntos de B tal que existe inf(A_j), para cada $j = 1, 2, \dots$. Entonces hay un filtro primo P el cual cumple:*

1. $x \in P$
2. $A_j \subseteq P \Rightarrow inf(A_j) \in P$, *para cada* $j = 1, 2, \dots$

Proof. Se acepta sin demostracion □