

Práctica 7

Polarización de la Luz

Luis Arturo Ureña Casarrubias
Laboratorio de Óptica

21 de noviembre de 2024

Resumen

La polarización de la luz es una propiedad fundamental de la luz como onda electromagnética y que el ser humano le ha encontrado diversos usos a lo largo de la historia. Nuestro objetivo fue obtener una ley de la intensidad medida de un láser rojo de 632 nm, linealmente polarizado, al pasar por un polarizador, partiendo de las ecuaciones de Maxwell y empleando el cálculo matricial de Jones.

1. Introducción

La aplicación más cotidiana del concepto de *polarización de la luz* está en las gafas para sol polarizadas, donde un químico es aplicado verticalmente a los cristales, lo que permite que solamente luz “polarizada verticalmente” los atraviese y llegue hasta los ojos (Bedinghaus, 2024). Esto evita que los usuarios sean deslumbrados por la luz reflejada del sol.

Históricamente, aunque inicialmente no se tuvo una explicación, la polarización de la luz fue observada a través de la doble refracción de la luz en cristales de calcita CaCO_3 , como se muestra en la figura 1.



Figura 1: El cristal de calcita separa los rayos de luz provenientes de la superficie sobre la que se encuentra el cristal de acuerdo a su polarización, lo que origina un doble cuadrículado.

Incluso, se hipotetiza que los vikingos usaron estos cristales en sus navegaciones a Groenlandia, que ellos llamaban *piedras solares* en sus relatos, para ubicar y orientarse con el sol incluso cuando estaba oculto en un día nublado (Bohannon, 2011).

En el siglo XVII el físico neerlandés Christian Huygens describió la doble refracción de la calcita usando su modelo ondulatorio de la luz, escribiendo:

Como hay dos diferentes refracciones, concebí también que hay dos diferentes emanaciones de las ondas de luz [...] (Hecht, 1999).

En la actualidad la polarización de la luz se entiende concibiendo a la luz como una onda electromagnética, en la cual los campos eléctrico y magnético oscilan en direcciones perpendiculares a su dirección de propagación, y cuando las oscilaciones del campo eléctrico están restringidas a un solo plano se dice que la luz está *polarizada*, y su polarización se define como la dirección de vibración del campo eléctrico.

En general las fuentes de luz emiten ondas electromagnéticas con polarizaciones aleatorias, a la que llamamos luz no polarizada. Esta luz puede ser polarizada con sistemas ópticos que solo permiten la transmisión de luz con una polarización específica, como es el caso de las gafas polarizadas discutidas al inicio.

La polarización de la luz puede no solo ser aislada, sino que también puede ser alterada, girando el plano de oscilación del campo eléctrico o incluso haciendo que este gire constantemente. En esta práctica nos restringimos a estudiar polarización lineal de la luz.

2. Polarización: una descripción matemática

Para estudiar la propagación de la luz como una onda electromagnética consideramos el caso especial de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin fuentes.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}$$

Al desacoplarlas obtenemos que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfacen ecuaciones de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B}.$$

Lejos de las fuentes, podemos aproximar a estas ondas como ondas planas con frecuencia angular ω que se propagan en la dirección \mathbf{k} .

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),\end{aligned}$$

donde $\|\mathbf{E}\| = c\|\mathbf{B}\|$.

Para estudiar la polarización de la luz, como esta está definida en términos del campo eléctrico, reescribimos la ecuación de onda para el campo eléctrico en notación compleja

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

donde $\tilde{\mathbf{E}}_0$ es un vector complejo. En esta ecuación el campo eléctrico físico se obtiene tomando la parte real de $\tilde{\mathbf{E}}$.

Si tomamos al eje z como la dirección de propagación de la onda, entonces podemos escribir

$$\tilde{\mathbf{E}} = e^{i(kz - \omega t)} (\tilde{E}_{0x} \mathbf{i} + \tilde{E}_{0y} \mathbf{j}), \quad (2.1)$$

y al expresar a las componentes en forma polar

$$\tilde{E}_{0x} = E_{0x} e^{i\phi_x}, \quad \tilde{E}_{0y} = E_{0y} e^{i\phi_y}, \quad (2.2)$$

podemos obtener los distintos tipos de polarización. Si $\phi_x = \phi_y = \phi$, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= e^{i(kz - \omega t + \phi)} (E_{0x} \mathbf{i} + E_{0y} \mathbf{j}), \\ \mathbf{E} &= \cos(kz - \omega t + \phi) (E_{0x} \mathbf{i} + E_{0y} \mathbf{j}),\end{aligned}$$

es decir, \mathbf{E} oscila en una sola dirección y decimos entonces que está *linealmente polarizada*.

Si $\phi_y = \phi_x - \pi/2$,

$$\tilde{\mathbf{E}} = e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} (E_{0x} \mathbf{i} - iE_{0y} \mathbf{j}), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_{0x} \cos(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{i} \\ &\quad + E_{0y} \sin(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{j},\end{aligned}$$

y el campo eléctrico rota en sentido antihorario sobre una elipse y decimos que tiene una *polarización elíptica izquierda*; la polarización elíptica derecha se obtiene cuando $\phi_y = \phi_x + \pi/2$, y si a la vez $E_{0x} = E_{0y} = E_0$,

$$\mathbf{E} = E_0 (\cos(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{i} + \sin(kz - \omega t + \phi_x) \mathbf{j}),$$

y en este caso el campo eléctrico rota sobre una circunferencia y decimos que tiene una polarización *circular*.

Experimentalmente no se mide como varía el campo eléctrico, pues para el espectro visible las frecuencias ω son del orden de 1×10^{15} Hz. Entonces, al hacer una medición lo que se está midiendo es el promedio de la potencia por unidad de área que transmite la onda, o *irradiancia* I que se calcula como

$$I = \langle S \rangle,$$

donde S es la magnitud del vector de Poynting

$$\mathbf{S} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Para ondas monocromáticas, como las del láser rojo que empleamos,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{c\mu_0} E^2 \mathbf{k} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi) \mathbf{k}.$$

Entonces

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2. \quad (2.4)$$

2.1. Ley de Malus

En la primera parte de la práctica introducimos un polarizador lineal entre la fuente, el láser rojo, y el medidor de potencia. Un polarizador lineal es un elemento óptico que, a través de diversos mecanismos como sería el *dicroísmo*, la reflexión, la dispersión o la doble reflexión, separa las polarizaciones de la onda eléctrica y transmite solamente una de ellas (Hecht, 1999). Esta separación se observa en que existe una dirección preferencial del polarizador que permite la máxima transmisión de luz polarizada lineal incidente en él; esta dirección se denomina *eje de transmisión* (Fowles, 1989). Un polarizador ideal es uno que transmite totalmente a luz polarizada paralelamente a su eje de transmisión y que absorbe totalmente luz polarizada perpendicularmente a su eje.

Este eje de transmisión define el subespacio unidimensional $U = \text{span } \hat{\mathbf{n}}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario paralelo al eje de transmisión del polarizador lineal. Podemos entonces separar al espacio \mathbb{R}^3 como la suma directa $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, es decir, existen vectores únicos y ortogonales entre sí $\mathbf{E}_1 \in U$ y $\mathbf{E}_2 \in U^\perp$ tales que

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

El vector \mathbf{E}_1 se obtiene como

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} = E \cos \phi \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.5)$$

donde ϕ es el ángulo que forma \mathbf{E}_0 con $\hat{\mathbf{n}}$. Este es el campo eléctrico que será detectado después de que haya atravesado al polarizador lineal. Sustituyendo en la ecuación (2.4)

$$I(\theta) = \frac{1}{2} c\epsilon_0 (E_0 \cos \phi)^2 = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \phi.$$

Si definimos $I_0 = c\epsilon_0 E_0^2/2$, entonces obtenemos la *Ley de Malus*

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \phi. \quad (2.6)$$

Con esta ecuación podemos determinar, hasta un múltiplo entero de π , el eje de transmisión de un polarizador lineal, siempre y cuando la luz incidente esté polarizada linealmente.

Si la luz incidente no está polarizada linealmente, o tiene una polarización circular, entonces todos los valores de θ ocurren con igual probabilidad y lo que se mide es el promedio sobre todos los ángulos. Como $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$, entonces la ley de Malus es

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2}.$$

2.2. Cálculo de Jones: Álgebra Lineal en la Óptica

Tomando nuevamente una onda electromagnética que se propaga en la dirección z , y usando la descripción compleja, es apropiado entonces usar el espacio vectorial \mathbb{C}^2 con su base canónica y el producto interno Euclídeo para describir las ondas y su polarización en el plano.

Cuando obtuvimos las expresiones para las polarizaciones lineales, elípticas y circulares obtuvimos que, al pasar al campo real \mathbf{E} , el estado de polarización estaba determinado en $\tilde{\mathbf{E}}$ por las amplitudes y sus fases en la ecuaciones (2.2). Esto, aunado a que en la expresión (2.1) podemos separar el vector de amplitudes del factor $e^{i(kz - \omega t)}$, nos lleva a la representación

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En una onda polarizada linealmente es la condición sobre las fases es $\phi_x = \phi_y = \phi$ y su representación matricial es

$$e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}.$$

Estas componentes las podemos expresar como $E_{0x} = E_0 \cos \theta$ y $E_{0y} = E_0 \sin \theta$ y

$$e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = E_0 e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Como solo el tipo de polarización es de interés y E_0 es arbitrario, podemos representar el estado

de polarización lineal como un vector normalizado

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la expresión anterior podemos identificar los vectores de la base canónica con los estados de polarización lineal horizontal y vertical (usando la notación *ket*) $|H\rangle$ y $|V\rangle$

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si la polarización es lineal con un ángulo de $\pi/4$, su representación es

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle,$$

donde la D se refiere a que el vector \mathbf{E}_0 es diagonal.

La representación de la polarización elíptica izquierda se obtiene inmediatamente de (2.3):

$$\begin{pmatrix} E_{0x} \\ -iE_{0y} \end{pmatrix}.$$

Por convención $E_{0x} = A$ y $E_{0y} = B$, y su forma normalizada es

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{pmatrix} A \\ -iB \end{pmatrix} = \frac{A|H\rangle - iB|V\rangle}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

En las polarizaciones elípticas que hemos descrito los ejes de la elipse están alineados con los ejes x y y , lo cual ocurre porque la diferencia de fases es $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$. Si permitimos que $\Delta\phi$ sea un número arbitrario, la representación de Jones es

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} A \\ be^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

por la identidad de Euler $be^{i\Delta\phi} = b \cos \Delta\phi + ib \sin \Delta\phi$ y tomando $B = b \cos \Delta\phi$, $C = b \sin \Delta\phi$

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} A \\ B + iC \end{pmatrix}.$$

Normalizando

$$|E\rangle = \frac{A|H\rangle + (B + iC)|V\rangle}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

La polarización circular izquierda se obtiene tomando $\Delta\phi = -\pi/2$ y $A = b$ en (2.8)

$$Ae^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = Ae^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Normalizando

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |V\rangle.$$

2.3. Matrices de Jones

Para pasar al cálculo matricial de Jones de la luz polarizada, daremos por hecho que los efectos de elementos ópticos sobre la luz, como son polarizadores lineales, rotadores y retardadores de fase por mencionar los relevantes a esta práctica, son lineales. Podemos entonces extender el uso de álgebra lineal de la deducción de la ley de Malus a describir las transformaciones que sufre el campo eléctrico al atravesar los elementos ópticos mencionados.

Un resultado de álgebra lineal es que, dada una base $\{|\mu\rangle_V\}_{\mu=1}^n$ de un espacio vectorial V y un conjunto de vectores $\{|\mu\rangle_W\}_{\mu=1}^n$ en el espacio vectorial W , existe una transformación lineal única $T \in \mathcal{L}(V; W)$ tal que $T|\mu\rangle_V = |\mu\rangle_W$ para $\mu = 1, n$ (Axler, 2023). Es decir, una transformación lineal está totalmente determinada por sus efectos sobre la base.

En la matriz $m \times n$ de la transformación T respecto a las bases $\{|\mu\rangle_V\}_{\mu=1}^n$ de V y $\{|\mu\rangle_W\}_{\mu=1}^m$ de W , las columnas son las matrices de coeficientes del vector $T|\mu\rangle_V$ respecto a la base $\{|\mu\rangle_W\}_{\mu=1}^m$. Hemos de recordar que las transformaciones para los elementos ópticos lineales son operadores del espacio \mathbb{C}^2 , y que hemos tomado su base canónica.

En la discusión que nos llevó a la ley de Malus mencionamos que un polarizador lineal absorbe la componente perpendicular del campo eléctrico a su eje de transmisión y permite el paso de la componente paralela. No fue mencionado explícitamente, pero en la ecuación (2.5) la componente \mathbf{E}_1 es la proyección ortogonal de \mathbf{E} sobre el subespacio $\text{span } \hat{\mathbf{n}}$, y es obtenida como sigue: sea U un subespacio de V de dimensión finita; la *proyección ortogonal de V sobre U* es el operador P_U definido como

$$P_U(|\mu\rangle + |\mu\rangle^\perp) := |\mu\rangle, \quad |\mu\rangle \in U, \quad |\mu\rangle^\perp \in U^\perp.$$

Dada una base $\{|\mu\rangle\}_{\mu=1}^m$ ortonormal de U ,

$$\begin{aligned} P_U |\lambda\rangle &= \sum_{\mu} \langle\mu|\lambda\rangle |\mu\rangle = \sum_{\mu} |\mu\rangle \langle\mu|\lambda\rangle \\ &= \left(\sum_{\mu} |\mu\rangle \langle\mu| \right) |\lambda\rangle. \end{aligned}$$

Entonces, a un polarizador lineal le corresponde la transformación P . Si el eje de transmisión forma un ángulo θ con el eje x , paralelo al vector $|H\rangle$, su matriz es ($\hat{n} \mapsto |n\rangle = \cos\theta |H\rangle + \sin\theta |V\rangle$)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \langle H|P|H\rangle & \langle H|P|V\rangle \\ \langle V|P|H\rangle & \langle V|P|V\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle H|n\rangle \langle n|H\rangle & \langle H|n\rangle \langle n|V\rangle \\ \langle V|n\rangle \langle n|H\rangle & \langle V|n\rangle \langle n|V\rangle \end{pmatrix} \quad (2.9) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ \sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si luz con polarización $-\sin\theta |H\rangle + \cos\theta |V\rangle$ (perpendicular al eje de transmisión) incide sobre el polarizador lineal, la polarización posterior será

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ \sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin\theta \cos^2\theta + \sin\theta \cos^2\theta \\ -\sin^2\theta \cos\theta + \sin^2\theta \cos\theta \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Es decir, la luz es extinguida por el polarizador, como se buscaba.

Un rotador, como su nombre lo indica, rota la dirección de polarización de luz linealmente polarizada incidente sobre él. La matriz que le corresponde es, evidentemente, la conocida matriz de rotación por un ángulo β

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Un retardador de fase altera la fase de cada componente en (2.7), sin alterar las magnitudes de las componentes. Es decir, buscamos una transformación R que actúe como

$$\begin{aligned} R : \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\phi_x + \epsilon_x)} \\ E_{0y} e^{i(\phi_y + \epsilon_y)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\epsilon_x} E_{0x} e^{i\phi_x} \\ e^{i\epsilon_y} E_{0y} e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$R : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\epsilon_x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\epsilon_y} \end{pmatrix}.$$

Y su matriz es

$$\begin{pmatrix} e^{i\epsilon_x} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_y} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

En los casos especiales en que la diferencia de fases inducida por el retardador sea $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ sea $\pi/2$ o π , la placa que los produce se les denomina *retardadores de cuarto de longitud de onda* y de *media longitud de onda*, respectivamente.

Las diferencias de fase se producen porque los retardadores tienen dos índices de refracción: la componente del campo eléctrico paralela al eje óptico se propaga con velocidad $v_o = c/n_o$ y la componente perpendicular con $v_e = c/n_e$. La dirección en la cual el índice de refracción es menor se le denomina *eje rápido*, y la otra dirección es el *eje lento* (L., 2022). Esta diferencia en los índices de refracción produce que las componentes del campo eléctrico recorran distintos caminos ópticos, y esta diferencia en los caminos ópticos Δ se relaciona con la diferencia de fases a través de

$$\Delta = \frac{\Delta\phi}{k} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \lambda.$$

Entonces, si $\Delta\phi = \pi/2$, $\Delta = \lambda/4$, y si $\Delta\phi = \pi$, $\Delta = \lambda/2$.

3. Metodología Experimental

3.1. Polarizador Lineal

Nuestro primer objetivo fue identificar la polarización de un láser rojo 632nm de longitud de onda, haciéndolo incidir sobre un polarizador lineal que fue rotado 36 veces, para obtener una separación angular de 5° entre medición, y midiendo la potencia transmitida con un potenciómetro. Si el láser estaba polarizado linealmente, entonces al rotar el polarizador lineal observaríamos un comportamiento obediente a la ley de Malus (2.6). En cambio, si la luz tiene una polarización circular o no está polarizada mediremos una potencia constante.

3.2. Retardador de Fase

Posteriormente, colocamos entre la fuente y el polarizador lineal un retardador de media longitud de onda con su eje rápido inclinado a 30° respecto a la vertical, como se muestra en la figura 2.

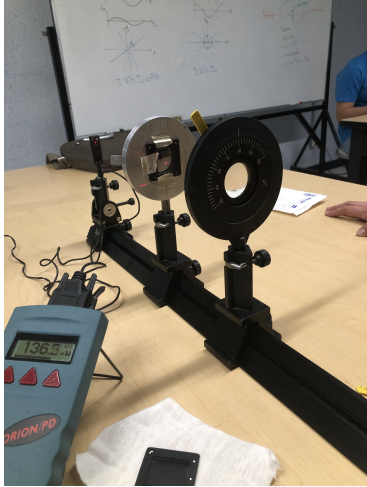


Figura 2: Antes de incidir sobre el polarizador lineal (disco plateado), se introduce una diferencia de fases en el láser con un retardador de fase (disco negro).

Posteriormente reemplazamos el retardador de $\lambda/2$ por uno de $\lambda/4$ con su eje rápido a 45° y repetimos las 36 mediciones. Finalmente repetimos las mediciones con el retardador de un cuarto de longitud de onda a -50° .

4. Resultados

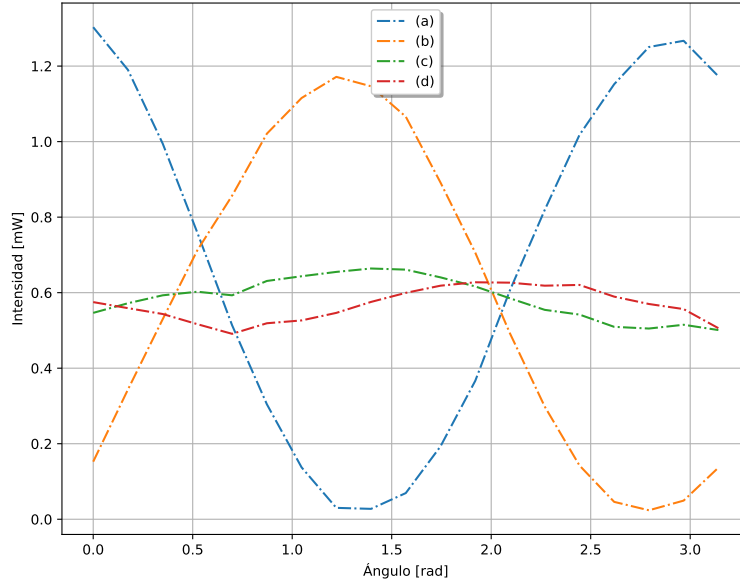


Figura 3: (a) Intensidad al pasar por el polarizador lineal. (b) Intensidad al pasar por el retardador de $\lambda/2$ con 30° de inclinación. (c) Intensidad al pasar por el retardador de $\lambda/4$ con 35° de inclinación. (d) Intensidad al pasar por el retardador de $\lambda/4$ con -50° de inclinación.

En la figura 3 comparamos las intensidades del láser en cada etapa del experimento. Notamos que después de pasar por los retardadores de fase su intensidad máxima disminuye.

Cuantificamos la polarización lineal del láser por el ángulo que forma su campo eléctrico con la horizontal. Para lograr esto a través de las mediciones de su intensidad después de incidir sobre el polarizador lineal, debemos recordar que en la ecuación (2.6), el ángulo ϕ es el que hay entre el eje de transmisión y la polarización del láser. Es decir, si el eje forma un ángulo β con la horizontal y la polarización un ángulo θ , entonces $\phi = \beta - \theta$ y

$$I(\beta) = I_0 \cos^2(\beta - \theta). \quad (4.1)$$

La intensidad máxima ocurrirá I_0 cuando $\beta - \theta = 0$ y entonces la polarización del láser será β .

En la figura 4 comparamos las mediciones con las intensidades predichas por (4.1) con $\theta = 2.967 \text{ rad} = 170^\circ$.

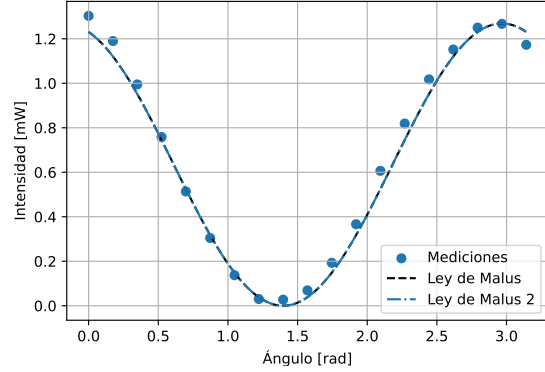


Figura 4: Vemos que la curva formada por los datos se aproxima al coseno cuadrado predicho por la ley de Malus (2.6)

Para considerar el retardador de fase, hay que la matriz (2.10) corresponde a un retardador con su rápido paralelo al eje y , es decir, formando un ángulo de $\alpha = \pi/2$ con la horizontal. Como queremos conservar esta forma sencilla de la matriz, tendremos que pasar a un sistema de coordenadas ortonormal de tal ma-

nera que al rotar el retardador, su eje rápido siga alineado con el eje y' .

En el lenguaje de álgebra lineal, esto lo podemos lograr con una transformación de la base. Como el eje y' forma un ángulo α con la horizontal, es apropiado elegir como base

$$\begin{aligned} |\bar{H}\rangle &= \sin \alpha |H\rangle + \cos \alpha |V\rangle, \\ |\bar{V}\rangle &= -\cos \alpha |V\rangle + \sin \alpha |V\rangle. \end{aligned}$$

La transformación de componentes de un vector es la matriz

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Sin embargo, podemos aprovechar que la base $|\bar{H}\rangle, |\bar{V}\rangle$ es ortonormal y hacer las mismas operaciones que en (2.9) para obtener

$$\begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

$$e^{i(kz - \omega t + \epsilon_x)} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \theta) \\ \cos(\alpha - \theta) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

donde $\Delta = \epsilon_y - \epsilon_x$ es el desfase introducido por el retardador. Posteriormente habría que extraer la parte real del vector y calcular su magnitud cuadrada y promediarla en el tiempo. Este proceso laborioso lo realizamos en un cuaderno de *Jupyter* usando la librería *Sympy*.

Cuando $\Delta = \pi$, es decir, cuando el empleamos el retardador de media longitud de onda, la expresión para $\langle E^2 \rangle$ obtenida fue

$$\frac{E_0^2 [\sin(\beta + \theta - 3\alpha) - \sin(\beta + \theta - \alpha)]^2}{8 \sin^2 \alpha},$$

que se simplifica a

$$\begin{aligned} &\frac{E_0^2 [2 \cos(2\alpha - \beta - \theta) \sin \alpha]^2}{8 \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} E_0^2 \cos^2(2\alpha - \beta - \theta). \end{aligned}$$

Entonces la intensidad medida debe obedecer

$$I(\beta) = I_0 \cos^2 \left(\beta + \theta - \frac{\pi}{3} \right). \quad (4.4)$$

Es decir, vuelve a ser acorde a la ley de Malus, como se muestra en la gráfica 5. Para obtener la línea correspondiente a (4.1) empleamos

Entonces el vector de componentes de un campo eléctrico polarizado linealmente en esta base es

$$\begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha - \theta) \\ \cos(\alpha - \theta) \end{pmatrix}.$$

Para calcular la matriz del polarizador lineal cuyo eje de transmisión forma un ángulo β con la horizontal con la matriz de cambio de base habría que hacer la multiplicación de matrices (4.2).

Entonces, para calcular el campo eléctrico resultante hay que realizar las operaciones (4.3).

$\theta = 70^\circ$, correspondiente a la intensidad máxima. Las curvas para (4.1) y (4.4) coinciden porque la primera alcanza su máximo en $\beta = 70^\circ$, y la segunda en $\beta = 60^\circ - 170^\circ = 70^\circ - 180^\circ$; es decir, $\cos^2(70^\circ - 180^\circ) = \cos^2(70^\circ)$.

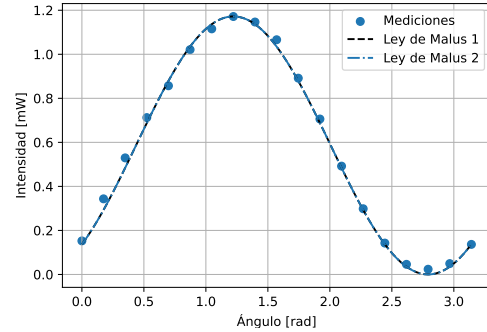


Figura 5: Comparamos las mediciones con las predicciones de las ecuaciones (4.1) (*Ley de Malus 1*) y (4.4) (*Ley de Malus 2*).

Sin embargo, esta regularidad no se presentó con el retardador de $\lambda/4$ en ninguna de las dos inclinaciones, como se muestra en la figura 6. La principal diferencia es que la ley de

Malus corregida, obtenida en el cuaderno de Jupyter, su mínimo es mayor a cero.

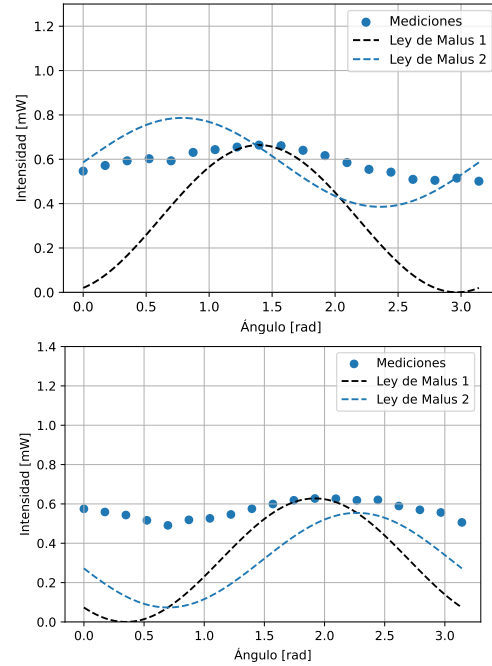


Figura 6: (Superior) Intensidad con el retardador $\lambda/4$ a 45° . (Inferior) Intensidad con el retardador $\lambda/4$ a -50° .

5. Conclusiones

El físico Christian Huygens fue el primero en tener la visión para explicar la doble refracción de la luz usando su modelo ondulatorio de la luz y observando que esta, al ser una onda transversal, debería poder tener más de un modo de oscilación: su polarización. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío nos llevan a obtener que los campos eléctricos y magnéticos satisfacen ecuaciones de onda. Más específicamente, cada una de sus componentes se comporta como una onda. Esto y el principio de superposición nos lleva directamente a que el vector del campo eléctrico no necesariamente oscila en un plano, sino que ahora su vector de polarización puede rotar y trazar elipses y círculos en su avance.

Expresar el estado de la polarización de la luz se vuelve más sencilla usando un espacio vectorial complejo, lo que a su vez nos permite tener acceso a expresar el efecto de polarizadores y retardadores en la luz como transformaciones lineales sobre su vector complejo de polarización. Con estas podemos obtener naturalmente la ley de Malus, que describe como podemos modular la intensidad de la luz rotando un polarizador.

En el laboratorio pudimos confirmar la ecuación (2.6) en el caso donde solo consideramos un polarizador lineal en el sistema, y pudimos tomar en cuenta el efecto del retardador de fase de $\lambda/2$ haciendo uso del álgebra lineal. Sin embargo, las predicciones fallaron al emplear un retardador de $\lambda/4$, lo que sugiere que hay que realizar modificaciones a nuestros procedimientos presentados.

Referencias

Axler, S. (2023, 28 de octubre). *Linear algebra done right* (4.^a ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-41026-0>

- Bedinghaus, T., OD. (2024, 20 de agosto). *Polarized Sunglasses: Meaning and Advantages*. <https://www.verywellhealth.com/polarized-sunglasses-3422163#citation-5>
- Bohannon, J. (2011). The Viking Sunstone Revealed? Consultado el 16 de noviembre de 2024, desde https://www.science.org/content/article/viking-sunstone-revealed?adobe_mc=MC MID%3D06826161331442717874061466732478561166%7CMCORGID%3D242B6472541199F70A4C98A6%2540AdobeOrg%7CTS%3D1731800198
- Fowles, G. R. (1989, 1 de enero). *Introduction to Modern Optics*. Courier Corporation.
- Hecht, E. (1999, 1 de enero). *Óptica* (3.^a ed.). ADDISON WESLEY.
- , L. (2022, 16 de septiembre). *4.3: Creating and Manipulating Polarisation States*. [http://phys.libretexts.org/Bookshelves/Optics/BSc_Optics_\(Konijnenberg_Adam_and_Urbach\)/04%3APolarization/4.03%3A_Creating_and_Manipulating_Polarisation_States](http://phys.libretexts.org/Bookshelves/Optics/BSc_Optics_(Konijnenberg_Adam_and_Urbach)/04%3APolarization/4.03%3A_Creating_and_Manipulating_Polarisation_States)