

# Práctica 1

## Índice Termodependiente de Refracción

Luis Arturo Ureña Casarrubias  
Alicia Aldana Pérez

Laboratorio de Óptica

6 de septiembre de 2024

### Resumen

El índice de refracción de un medio relaciona propiedades geométricas de la luz con su velocidad de propagación. Consideramos el caso sencillo de la propagación de la luz entre dos medios heterogéneos, cuestión estudiada desde la antigüedad, como un problema variacional y obtenemos la ley de Snell que relaciona la velocidad de la luz en un medio con su desviación al incidir en él. Estudiamos el comportamiento del índice de refracción de tres materiales cuando su temperatura cambia y comparamos con los valores reportados en la literatura.

### 1. Introducción

El fenómeno de refracción de la luz puede ser modelada como una consecuencia de las condiciones de frontera de las ondas electromagnéticas, cuyas ecuaciones son resultado del trabajo de Maxwell, quien recogió y unificó el conocimiento que se tenía en el siglo XIX de la electricidad y el magnetismo, y publicó con un formalismo puramente matemático en su artículo de 1865 *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (C. Maxwell & Davidson Niven, 1864).

Dos siglos antes del trabajo de Maxwell, Fermat y Huygens trataron a la refracción de manera geométrica; Huygens, empleando su modelo ondulatorio de la luz, visualizó un rayo de luz como la dirección de avance de los frentes de onda transmitidos en el éter.

Cada punto del frente de una onda es en sí mismo una fuente adicional de ondas esféricas (L. Pedrotti et al., s.f.).

Usando este principio, Huygens pudo demostrar las leyes de reflexión y refracción de la luz.

Fermat, por su parte, reformuló en su *Principio del Tiempo Mínimo* (1657) el problema variacional que Herón de Alejandría, quien vivió entre los años 150 a.C. y 250 d.C., propuso por primera vez:

La trayectoria tomada por la luz para ir de un punto  $S$  a un punto  $P$  a través de una superficie reflectora es la de longitud mínima (Hecht, 1999).

Este principio permitía deducir la ley de reflexión mas no la de refracción: cuando un haz de luz pasa de un medio a otro no sigue una trayectoria espacial mínima, es decir, una línea recta. Entonces, Fermat postuló que

La trayectoria real que adopta un haz de luz entre dos puntos es aquella recorrida en el tiempo mínimo.

Aunque esta permite obtener la ley de refracción, no refleja todas las trayectorias que sigue la luz. Considérese un espejo elipsoidal, donde en uno de sus focos  $S$  hay un fuente puntual de luz. Si  $Q$  es un punto sobre el perímetro y  $P$  es el otro foco del elipsoide, por construcción la longitud de la línea  $SQP$  será constante

y el tiempo que le tome a la luz recorrerla será igual, independiente de la elección de  $Q$ . Ha de entonces hacerse una modificación adicional en el principio de Fermat.

## 2. Marco Teórico

Para enunciar el principio de Fermat moderno, debemos definir primero la *longitud de camino óptico*. Es un hecho que cuando la luz se transmite por un material su velocidad se ve reducida: si  $v$  es la velocidad de la luz en el material y  $c$  es su velocidad en el vacío, entonces  $v = c/n$ , donde  $n \geq 1$  es denominado *índice de refracción del material* y puede no ser constante en el material.

Supongamos que un rayo de luz atraviesa un material estratificado formado por  $m$  capas, donde la luz recorre una recta de longitud  $s_i$  en la  $i$ -ésima capa con índice de refracción  $n_i$  constante. Entonces el tiempo que le tomará atravesar al material será

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \cdots + \frac{s_m}{v_m} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m n_i s_i.$$

La suma  $\sum_{i=1}^m n_i s_i$  es la longitud de camino óptico. Para un índice de refracción general  $n$  que varía en cada punto del espacio  $\mathbf{r}$ , el camino óptico para una trayectoria  $\gamma$  se define como

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{\gamma} n(\mathbf{r}) ds.$$

Podemos entonces enunciar el principio variacional de Fermat:

El camino que sigue la luz entre dos puntos es aquel que vuelve al camino óptico  $\mathcal{L}$  estacionario.

Nosotros consideraremos únicamente el caso donde un rayo de luz atraviesa dos materiales con índices de refracción respectivos constantes. En cada material un rayo de luz viaja en línea recta, por lo que la cantidad que debemos volver estacionaria es

$$\mathcal{L} = n_i s_1 + n_t s_2.$$

Consideremos la configuración mostrada en la figura 1, donde un rayo de luz emerge desde el punto  $P$ , llega a la interfaz entre los dos medios en el punto  $R$  y es transmitido al punto  $Q$ .

Si siguiendo la figura, observamos que  $s_1 = \overline{PR}$  y  $s_2 = \overline{RQ}$ .

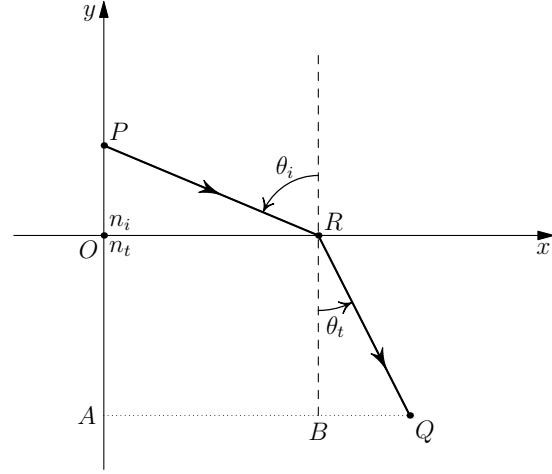


Figura 1: Trayectoria de un rayo de luz al pasar entre dos medios con distintos índices de refracción  $n_i$  y  $n_t$ .

La ubicación del punto  $R$ , las longitudes  $s_1$  y  $s_2$  y el ángulo  $\theta_t$  que forma el segmento  $RQ$  con la normal  $BR$  están todos determinados por el ángulo  $0 \leq \theta_i < \pi/2$  que forma el rayo de luz con  $BR$  al incidir sobre la interfaz. Explícitamente

$$\overline{PR} = \frac{\overline{OP}}{\cos \theta_i}, \quad \overline{RQ} = \frac{\overline{OA}}{\cos \theta_t},$$

$$\overline{AQ} = \overline{OR} + \overline{BQ} = \overline{OP} \tan \theta_i + \overline{OA} \tan \theta_t \quad (1)$$

La longitud de camino óptico es entonces

$$\mathcal{L}(\theta_i) = \frac{n_i}{\cos \theta_i} \overline{OP} + \frac{n_t}{\cos \theta_t} \overline{OA}. \quad (2)$$

Hacer estacionario a  $\mathcal{L}$  respecto a variaciones en  $\theta_i$  equivale a la condición

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta_i} = 0.$$

Derivando (2) respecto a  $\theta_i$  e igualando a cero,

$$n_i \overline{OP} \sec^2 \theta_i \sin \theta_i + n_t \overline{OA} \frac{d\theta_t}{d\theta_i} \sec^2 \theta_t \sin \theta_t = 0. \quad (3)$$

Empleamos (1) para calcular  $d\theta_t/d\theta_i$ .

$$\overline{OP} \sec^2 \theta_i + \overline{OA} \frac{d\theta_t}{d\theta_i} \sec^2 \theta_t = 0.$$

Entonces, sustituyendo en (3) obtenemos

$$n_i \overline{OP} \sec^2 \theta_i \sin \theta_i - n_t \overline{OP} \sec^2 \theta_t \sin \theta_t = 0,$$

que se simplifica a la condición

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t. \quad (4)$$

Como discutiremos más adelante, nosotros medimos el índice de refracción  $n_i$  de las muestras transmitiendo luz desde estas a un *prisma de refracción*, el cual tiene un índice de refracción  $n_t$  mayor.

Primero consideraremos el caso opuesto, cuando la luz pasa de un medio con mayor índice de refracción a uno con menor índice. Reescribiendo la relación (4) como

$$\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i,$$

concluimos que en este caso  $\sin \theta_i < \sin \theta_t$ . Por construcción,  $\theta_i$  y  $\theta_t$  pueden tomar valores en el intervalo  $[0, \pi/2]$ . El extremo superior lo toman cuando los rayos de luz son paralelos a la superficie de separación de los medios. Como la función seno es creciente en dicho intervalo, entonces  $\theta_i < \theta_t$ . Podemos entonces inferir que existe un ángulo  $\theta_i$  para el cual  $\theta_t = \pi/2$ . En esta situación no hay luz transmitida, sino que esta es paralela a la superficie de separación. Este valor de  $\theta_i$  se le denomina *ángulo crítico* y satisface

$$\sin \theta_c = \frac{n_t}{n_i} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{n_t}{n_i} < 1.$$

### 3. Metodología Experimental

#### 3.1. Dispositivo Experimental

Para la medición de los índices de refracción de las muestras líquidas se empleó un refractómetro de Abbe analógico AR4 con una precisión de 0.0002, y para regular su temperatura en el rango 17.0 °C a 27.0 °C con una precisión de 0.2 °C se empleó un termostato de circulación PT31 («AR4 - Accurate analogue Abbe refractometer with wide measuring range», 2023).

Las mediciones en el refractómetro AR4 se realizan usando la expresión derivada de (5)

$$n_i = n_t \sin \theta_c.$$

El índice de refracción varía con la temperatura y la longitud de onda de la luz empleada; la primera variable es controlada con el termostato PT31 y la segunda se mantiene fija usando un LED emisor con una longitud de onda de 589 nm («A.KRÜSS Optronic Analogue Abbe

Cuando  $\theta_i \geq \theta_c$ , ocurre la *reflexión total interna*.

Consideramos ahora el caso relevante a nuestra práctica, donde la luz pasa de un medio con menor índice a uno de mayor. Específicamente, si la luz incide sobre la superficie en ángulo rasante, es decir,  $\theta_i \approx \pi/2$ , entonces la luz se refractará en el medio de mayor índice con el ángulo crítico. Esto se puede deducir de la ley de Snell y del principio de Fermat que usamos para deducirlo. Como la luz sigue un camino óptico minimizante, debe recorrerlo independiente de la dirección en que lo haga. Entonces, si intercambiamos los papeles de los medios y un rayo de luz pasa del medio anteriormente transmisor al medio anteriormente incidente, entonces

$$\sin \theta_c = \frac{n_i}{n_t} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{n_i}{n_t}. \quad (5)$$

A su vez, este ángulo crítico define el mayor ángulo de refracción, por lo que marca la frontera entre una región iluminada, donde inciden los rayos refractados, y una región oscura, a donde ya no llegan rayos de luz.

Este es el principio bajo el cual actúa el refractómetro de Abbe.

Refractometer AR4», s.f.). Con esta longitud de onda se mide el índice de refracción  $n_D$ . El nombre  $n_D$  proviene del estándar para medir el índice usando la línea D del espectro de emisión de las lámparas de sodio (E., 2023).

El refractómetro de Abbe cuenta con dos prismas: uno de iluminación y uno de refracción, los cuales se pueden apreciar en la figura 2. El de iluminación tiene una superficie rugosa a fin de que desde ella se emita luz en todas las direcciones y así se puedan conseguir los rayos rasantes descritos en la sección 2. El prisma de refracción tiene una superficie pulida y está hecho de *vidrio óptico*, “que es un material de una gran calidad y pureza con propiedades refractivas muy bien definidas, para lo cual debe ser química y físicamente lo más uniforme posible.” (E., 2023)



Figura 2: Refr  ctmetro de Abbe AR4 y su termostato PT31 empleados en la práctica. En imagen derecha se observa el prisma de iluminación levantado. Cuando este se hace descender, coincide con el prisma de refracción sobre el cual se coloca la muestra.

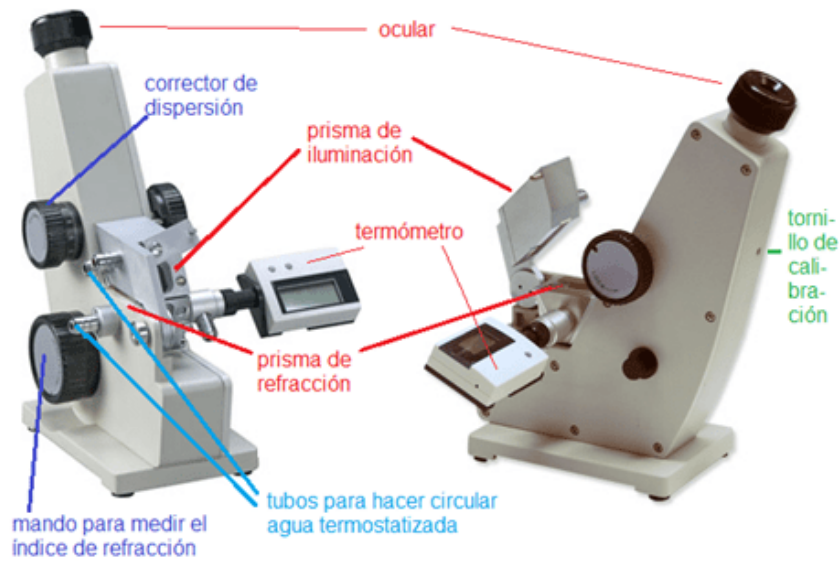


Figura 3: Componentes externas del refr  ctmetro. Imagen tomada de (E., 2023).

Para poder medir el índice de refracción  $n_D$  de las muestras se necesita que el índice de refracción del prisma de refracción sea mayor. El dispositivo empleado puede tomar mediciones en el rango 1.3000 a 1.7200 con una precisión de  $2 \times 10^{-4}$ .

Como se muestra en los diagramas 4, entre los dos prismas se forma una película del líquido muestra a través de la cual la luz pasa refractándose. Por la delgadez de la película, existe al menos un rayo de luz rasante que se refracta en el prisma de refracción con el ángulo crítico. Este ángulo define las regiones que se observan a través del ocular del refractómetro, como se muestra en la figura 5.

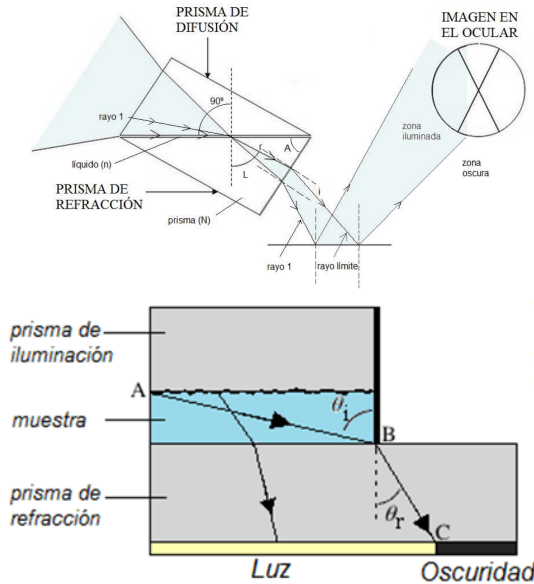


Figura 4: Las dos imágenes presentan el funcionamiento de los prismas del refractómetro e indican cómo se forman las regiones iluminadas y oscuras. Imágenes tomadas de («El refractómetro de Abbe: Ajuste y Preparación», s.f.) y (E., 2023), respectivamente.

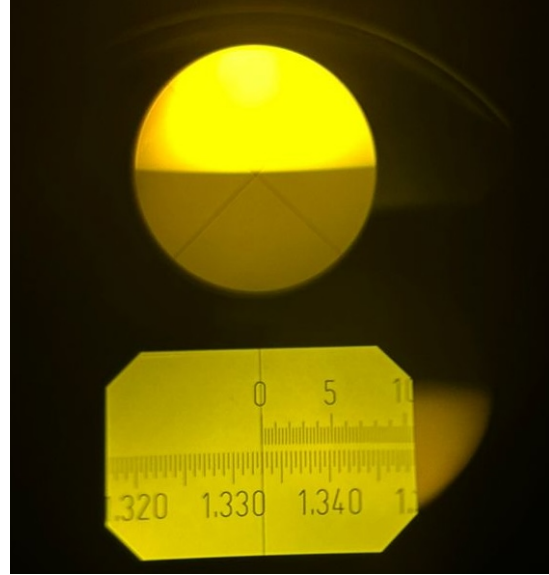


Figura 5: Imagen observada a través del ocular del refractómetro. La medición del índice  $n_D$  se toma usando escala inferior.

### 3.2. Procedimiento Experimental

Se determinó como objetivo medir los índices de refracción  $n_D$  de agua destilada, vinagre y alcohol 96° G.L. en el rango de temperaturas 17.0 °C a 27.0 °C, variando entre cada medición la temperatura por 0.5 °C.

Se observó que el termostato tardaba más en enfriar la muestra que en calentarla, por lo que se optó por medir las tres muestras una tras otra a la misma temperatura, aumentar la temperatura y repetir.

El procedimiento detallado fue el siguiente.

1. Se levantó el prisma de iluminación y sobre el prisma de refracción se colocó una pequeña cantidad de líquido usando una pipeta milimétrica, con cuidado de no rayar el prisma de refracción.
2. Se bajó el prisma de iluminación sobre la muestra y se aseguró.
3. Con el mando para medir el índice de refracción, indicado en la figura 3, se alineó el límite de las regiones iluminadas y oscuras con la cruz mostrada en la figura 5.
4. Se tomó la medición de  $n_D$  usando la escala inferior mostrada en la figura 5.

5. Después de levantar el prisma de iluminación se limpió este y el prisma de refracción para colocar otro líquido y repetir desde el paso 2.
6. Si ya se habían medido los tres líquidos a una temperatura determinada, se elevó la temperatura 0.5 °C y se repite nuevamente desde el paso 2.

## 4. Resultados

Las gráficas de los índices de refracción  $n_D$  en función de la temperatura de los líquidos se muestran en las figura 6 y 7.

**Vinagre** :  $n_D = (-8.9 \pm 1.7) \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}T + 1.33911 \pm 0.00037$ ,  $r = -0.78$

**Alcohol** :  $n_D = (-51.4 \pm 3.0) \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}T + 1.37498 \pm 0.00066$ ,  $r = -0.97$ .

**Agua** :  $n_D = (-17.4 \pm 2.2) \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}T + 1.33690 \pm 0.00049$ ,  $r = -0.87$ .

De acuerdo a los coeficientes  $r$  de Pearson obtenidos para cada ajuste, hay una fuerte correlación negativa entre la temperatura y los índices  $n_D$  de los tres líquidos. Sin embargo, la pendiente del ajuste del vinagre y del alcohol son pequeñas respecto a sus valores, por lo que se podría considerar que sus índices  $n_D$  son constantes en el rango de 17.0 a 27.0 °C. Cuantitativamente, la variación relativa de los

Se consideró apropiado realizarle a las mediciones de los tres líquidos un ajuste lineal, obteniendo por ecuaciones las siguientes.

índices, que calculamos como

$$\frac{n_{D,\text{máx}} - n_{D,\text{mín}}}{\bar{n}_D},$$

para cada uno de los materiales fue

**Vinagre** : 0.075 %,

**Alcohol** : 0.403 %,

**Agua** : 0.150 %.

En la figura 6 se da una visión más detallada de las mediciones por muestra.

En el libro *Introduction to Modern Optics* de G. R. Fowles se reporta que el agua y el alcohol etílico tienen un índice de refracción de 1.33 y 1.36, respectivamente (Fowles, 1989). Como se muestra en las gráficas 6 y 7, tales valores están dentro del rango que nosotros reportamos.

Se reporta que el ácido acético, a 20 °C, tiene un índice de refracción de 1.3720 («Refractive Index of Liquids - Table», s.f.). Este ácido se encuentra en una concentración de 3 % a 6 % en agua en el vinagre, para el cual nosotros obtuvimos un índice  $n_D$  de 1.33, que es más cercano al agua. Esto último está de acuerdo con lo es-

perado dada su concentración en agua.

**Table 1.2.** INDEX OF REFRACTION VERSUS THE SQUARE ROOT OF THE STATIC PERMITTIVITY [14]

Substance	$n$ (Yellow Light)	$\sqrt{\epsilon}$
Air (1 atm)	1.0002926	1.000295
CO <sub>2</sub> (1 atm)	1.00045	1.0005
Polystyrene	1.59	1.60
Glass*	1.5–1.7	2.0–3.0
Fused quartz	1.46	1.94
Water	1.33	9.0
Ethyl alcohol	1.36	5.0

\* Approximate values.

Figura 8: Tabla de índices de refracción obtenida de *Introduction to Modern Optics*.

## 5. Conclusiones

Empleando la existencia del ángulo crítico de refracción como consecuencia de la ley de Snell obtuvimos mediciones de los índices de refracción de tres líquidos variando sus temperaturas. En los tres encontramos una fuerte correlación negativa entre la temperatura de la muestra y su



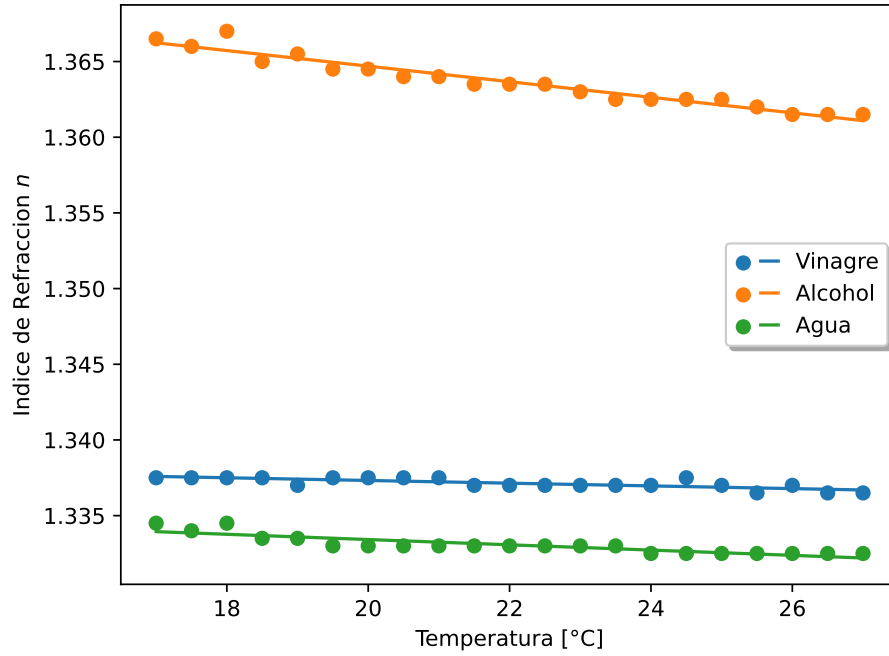


Figura 6: Los puntos representan las mediciones y las líneas correspondientes representan los ajustes lineales. Las incertidumbres en los índices  $n_D$  y en la temperatura, de 0.0002 y 0.2 °C no se muestran por ser despreciables respecto a las escalas mostradas.

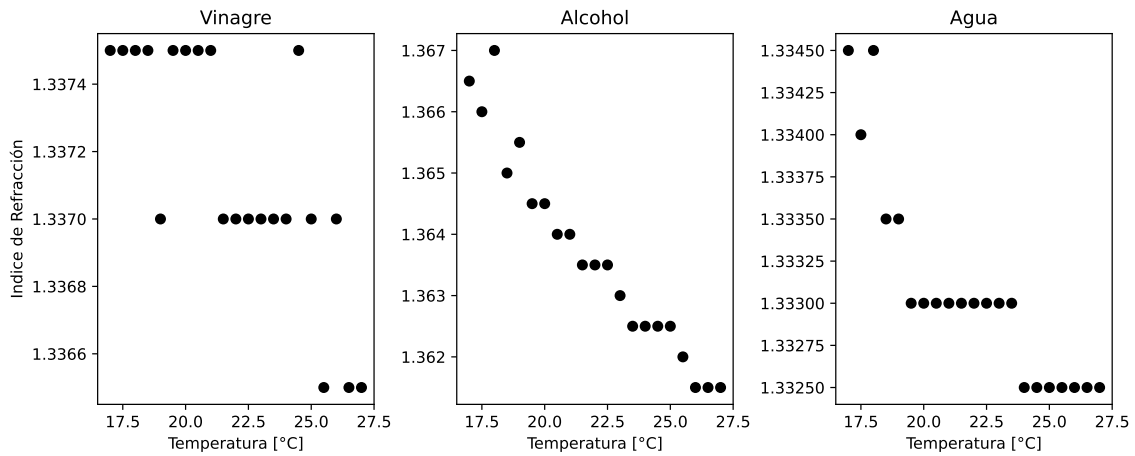


Figura 7: Al graficar por separado los índices de refracción de cada material se aprecia que el índice del alcohol tuvo una variación más apreciable respecto a la temperatura.

índice de refracción, aunque esta variación puede considerarse despreciable dentro del rango de temperatura medido.

Encontramos también que nuestros resultados están de acuerdo con los índices reportados en la literatura.

## Referencias

- A.KRÜSS *Optronic Analogue Abbe Refractometer AR4*. (s.f.). Consultado el 5 de septiembre de 2024, desde <https://profilab24.com/en/laboratory/analytical-devices/akruess-optronic-analogue-abbe-refractometer-ar4>
- AR4 - *Accurate analogue Abbe refractometer with wide measuring range*. (2023, 8 de febrero). <https://www.kruess.com/en/produkte/refractometers/abbe-refractometers/ar4-analog/>
- C. Maxwell, J., & Davidson Niven, W. (1864, 8 de diciembre). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell: A dynamical theory of the electromagnetic field*.
- , E. (2023, 7 de agosto). *Refractometría (II): El refractómetro de Abbe*. <https://triplenlace.com/2012/11/13/refraccion-ii-como-funciona-un-refractometro-de-abbe-2/>
- El refráctometro de Abbe: Ajuste y Preparación*. (s.f.). Consultado el 5 de septiembre de 2024, desde <https://laboratoriosuperior.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/10/tema-8a-refractometrc3ada.pdf>
- Fowles, G. R. (1989, 1 de enero). *Introduction to Modern Optics*. Courier Corporation.
- Hecht, E. (1999, 1 de enero). *Óptica* (3.<sup>a</sup> ed.). ADDISON WESLEY.
- L. Pedrotti, F., M. Pedrotti, L., & S. Pedrotti, L. (s.f.). *Introduction to Optics* (3.<sup>a</sup> ed.). *Refractive Index of Liquids - Table*. (s.f.). <https://matmake.com/properties/refractive-index-of-liquids.html>