Laboratorio Avanzado: Lista 3

Luis Arturo Ureña Casarrubias

6 de diciembre de 2024

Ejercicio 1

Solución del ejercicio 1

Se nos pide demostrar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$ definida por $f : x \mapsto x^3$. Es decir, que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow \left|x^3 - x_0^3\right| < \varepsilon.$$

Si $x_0 = 0$, entonces podemos tomar $\delta = \epsilon$. Tomamos entonces el caso no evidente con x_0 diferente de cero. Podemos factorizar $x^3 - x_0^3$ como

$$x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2).$$

El factor $x^2 + x_0 x + x_0^2$ es siempre positivo y no tiene raíces reales si $x_0 \neq 0$, pues la fórmula cuadrática da

$$x = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 4x_0^2}}{2} = \frac{-x_0 \pm i\sqrt{3}|x_0|}{2}.$$

Podemos entonces tomar $\delta = \varepsilon/(x^2 + x_0 x + x_0^2)$ y obtener

$$\left|x^3 - x_0^3\right| = |x - x_0|(x^2 + x_0 x + x_0^2) < \frac{\varepsilon}{x^2 + x_0 x + x_0^2}(x^2 + x_0 x + x_0^2) < \varepsilon.$$

Luego, $f(x) = x^3$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2

Solución del ejercicio 2

Lema 1. *Las transformaciones lineales $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ son acotadas.*

Demostración. Recordemos que la $m \times n$ matriz (A_{ij}) de una transformación lineal $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ actuando sobre un vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ genera un vector $A\mathbf{x}$ cuya i-ésima entrada es

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j.$$

Podemos notar a su vez que

$$|(A\mathbf{x})_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}||x_j|,$$

y por definición de $\|\mathbf{x}\|_\infty$,

$$|(A\mathbf{x})_i| \leq \sum_{j=1}^{n}|A_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{x}\|_\infty \sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|.$$

Entonces

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=\overline{1,m}}|(A\mathbf{x})_i| \leq \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\|\mathbf{x}\|_\infty \sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\} = \|\mathbf{x}\|_\infty \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\}. \tag{1}$$

Y como $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ es arbitrario, la transformación lineal A es acotada. ∎

Teorema 1. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, donde $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ son espacios normados con la norma del máximo. Entonces $A \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ y su norma* "del máximo" *puede obtenerse como*

$$\|A\|_\infty = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)} = \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\}.$$

Demostración. Del lema anterior podemos afirmar que una transformación lineal A tiene una norma $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)}$, y que esta satisface

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\}$$

La igualdad se cumple si $A = 0$. Consideramos entonces el caso no evidente donde $A \neq 0$.

La desigualdad (1) es una que satisfacen todas las normas, por lo que es tentador afirmar que

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)} = \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\}.$$

Denotemos por el momento $\|A\|_\infty := \max_{i=\overline{1,m}}\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\}$.

Consideremos ahora la matriz $(|A_{ij}|)$. Al multiplicarla por un vector $\mathbf{x}$ obtenemos un vector con entradas $\sum_{j=1}^{m}|A_{ij}|x_j, i = \overline{1,n}$. Sea $1 \leq k \leq m$ tal que $\sum_{j=1}^{n}|A_{kj}| = \|A\|_\infty$. Podemos obtener de la sumatoria $\sum_{j=1}^{n} A_{kj}$ del k-ésimo renglón a $\|A\|_\infty$ si elegimos

$$\mathbf{y} := (\operatorname{sign}(A_{k1}), \ldots, \operatorname{sign}(A_{kn}))\,,$$

pues

$$(A\mathbf{y})_k = \sum_{j=1}^{m}\operatorname{sign}(A_{kj})A_{kj} = \sum_{j=1}^{m}|A_{kj}| = \|A\|_\infty.$$

Consideremos ahora $i = \overline{1,n}$ arbitrario.

$$(A\mathbf{y})_i = \sum_{j=1}^{m}\operatorname{sign}(A_{kj})A_{ij} \leq \left|\sum_{j=1}^{m}\operatorname{sign}(A_{kj})A_{ij}\right| \leq \sum_{j=1}^{m}|\operatorname{sign}(A_{kj})||A_{ij}|.$$

Como $|\text{sign}(A_{kj})|$ puede ser solo nulo o unitario, en la última suma algunos términos de la suma $\sum_{j=1}^{m}|A_{ij}|$ pueden estar omitidos, y como esta crece monotónicamente con cada término adicional,

$$(A\mathbf{y})_i \leq \sum_{j=1}^{m}|\text{sign}(A_{kj})||A_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{m}|A_{ij}| \leq (A\mathbf{y})_k.$$

Por otra parte

$$(A\mathbf{y})_i \geq -\sum_{j=1}^{m}|\text{sign}(A_{kj})||A_{ij}| \geq -(A\mathbf{y})_k.$$

Luego $|(A\mathbf{y})_i| \leq (A\mathbf{y})_k \leq |(A\mathbf{y})_k|$ para toda $i = \overline{1,n}$ y $\|A\mathbf{y}\|_\infty = \|A\|_\infty$

Podemos estar seguros que $\|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, pues, como ya mencionamos, $|\text{sign}(A_{kj})|$ puede ser solo nulo o unitario, y si $\|\mathbf{y}\|_\infty = 0$ eso implicaría que

$$\text{sign}(A_{kj}) = 0 \quad \forall j = \overline{1,n},$$

y entonces $A_{kj} = 0 \implies A = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces

$$\|A\|_\infty = \frac{\|A\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)}.$$

Por lo tanto, podemos calcular la norma de una transformación lineal con su matriz (A_{ij}) como

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)} = \max_{i=\overline{1,m}}\left\{\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|\right\}.$$

■

Corolario 1. *Si tomamos $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^m = \mathbb{R}^N$ en el teorema anterior, de inmediato obtenemos que*

$$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,N}}\left\{\sum_{j=1}^{N}|A_{ij}|\right\}.$$

Ejercicio 5

Solución del ejercicio 5

Lema 2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que, para algún $z_0 \in \Omega$, existe el límite*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0.$$

Entonces

$$\lim_{z\to z_0} \bar{f}(z) = \bar{w}_0.$$

Demostración. Por la existencia del límite, tenemos los límites

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0, \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad w_0 = u_0 + iv_0.$$

Entonces

$$\lim_{z\to z_0} \bar{f}(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) - i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = u_0 - iv_0 = \bar{w}_0.$$

■

Corolario 2. *Sea ahora $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diferenciable en $t_0 \in I$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}\bar{f}(t_0) = \bar{f}'(t_0).$$

Demostración. Como f es diferenciable en t_0, entonces existe el límite

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\bar{f}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \overline{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}} = \bar{f}'(t_0).$$

$\blacksquare$

Calculamos ahora $\overline{\mathcal{L}y(x)}$.

$$\overline{\mathcal{L}y(x)} = \overline{a_2(x)y''(x)} + \overline{a_1(x)y'(x)} + \overline{a_0(x)y(x)} = a_2(x)\bar{y}''(x) + a_1(x)\bar{y}'(x) + a_0(x)\bar{y}(x) = \mathcal{L}[\bar{y}](x).$$

Ejercicio 6

Solución del ejercicio 6

Omitiendo el parámetro x, derivamos $W[u, v]$.

$$\frac{d}{dx}W[u, v] = uv'' - u''v = (-u'' + qu)v - u(-v'' + qv) = (\mathcal{S}u)v - u(\mathcal{S}v).$$

Y como las segundas derivadas de u y v son continuas en $[a, b]$, podemos hacer la integración

$$\int_a^b \big(v(x)\mathcal{S}u(x) - u(x)\mathcal{S}v(x)\big)\, dx = \int_a^b \frac{d}{dx}W[u, v]\, dx,$$

y por el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b \big(v(x)\mathcal{S}u(x) - u(x)\mathcal{S}v(x)\big)\, dx = W[u, v]\big|_a^b.$$