

Práctica 8

Difracción de la Luz

Luis Arturo Ureña Casarrubias
Laboratorio de Óptica

2 de diciembre de 2024

Resumen

En la literatura se justifican los patrones de difracción como una consecuencia del principio de Huygens-Fresnel, el cual afirma que la luz se propaga porque en cada punto de un frente de onda se regenera una segunda onda, y que es entonces la interferencia de estas ondas las que generan los patrones mencionados. En este trabajo obtenemos naturalmente una expresión matemática que describe el principio de Huygens-Fresnel, pero que explica porque las nuevas ondas generadas no se propagan en la dirección opuesta, y obtenemos expresiones para los patrones de difracción en la aproximación de *campo lejano*.

1. Introducción



Figura 1: La sombra proyectada se difumina conforme el punto de proyección en el suelo se aleja del hombre que bloquea la luz. Imagen recuperada de (Hemsley, 2014).

La difracción, como consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la luz, está más difundida en el imaginario colectivo a través del experimento de la doble rendija de Young y su relación con la mecánica cuántica. Es más pro-

bable, sin embargo, que la difracción de la luz pase completamente desapercibida en la vida diaria, o cuando menos, no es nombrada como tal. Este fenómeno se presenta en las sombras difuminadas que proyecta un objeto sobre una superficie cuando hay una distancia considerable entre ellos, como se muestra en la figura 1.

El primer informe del cual se tiene registro sobre la difracción de la luz es el trabajo del sacerdote jesuita y físico-matemático Francesco Maria Grimaldi *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride aliisque adnexis* de 1665 («Francesco María Grimaldi», 2024), obra donde acuñó el término *difracción* y que fue posteriormente citado por personajes como Newton y Huygens.

La polémica entre las teorías corpusculares y ondulatorias sobre la luz de Newton y Huygens, respectivamente, es bien conocida. Menos conocidos son los conceptos ondulatorios en la óptica de Newton. En 1675 formuló una hipótesis consistente de seis puntos donde enumeraba algunas de las propiedades que debía poseer el éter, mas no identificaba a las vibraciones de este medio con la luz, sino que estos dos influían mutuamente entre sí: el primero refractaba al segundo y el segundo lo “calentaba” (Stuewer, 1970).

Otro físico contemporáneo y de renombre que apoyaba la teoría ondulatoria de la luz fue Robert Hooke, y a cuyos argumentos Newton respondía en parte con aprobación, ya que podría explicar entonces la sensación de color en el ojo como la recepción de ondas luminosas así como el oído capta ondas sonoras, en parte con desaprobación, pues la propagación de la luz como una onda no explicaría como podría ser entonces en línea recta y entonces no se podrían formar sombras.

Newton entonces propuso en 1675 que la difracción de la luz en el doblamiento hacia la sombra geométrica de un objeto era una forma de refracción continua provocada por un gradiente en el éter que rodeaba a los objetos. Sin embargo, hay evidencia para demostrar que no hasta después de 1678 que él mismo realizó experimentos sobre la difracción de la luz.

Un siglo después, en 1801, el físico inglés Thomas Young obtuvo nueva evidencia a favor del modelo ondulatorio de la luz en una época donde la teoría de Newton ya había sido ampliamente aceptada. Young reflejó con un espejo luz solar sobre un agujerito en una persiana para que atravesará horizontalmente un cuarto oscuro (Young, 1804). Despues dividió este rayo con un pedazo de papel con un grosor de 0.195 cm y observó la sombra proyectada, donde distinguió bandas de colores a cada lado de la sombra, pero más importante, bandas brillantes y oscuras, como se muestran en la figura 2.

2. Teorema Integral de Fresnel-Kirchoff

La difracción y los patrones de interferencia que produce pueden ser explicados a partir del *principio de Huygens-Fresnel*:

Cada punto en un frente de onda de luz puede ser tomado como una fuente secundaria de ondas esféricas, y el campo resultante más allá del frente es la superposición de estas ondas (L. Pedrotti et al., s.f.).

Sin embargo, el principio por sí solo no ofre-

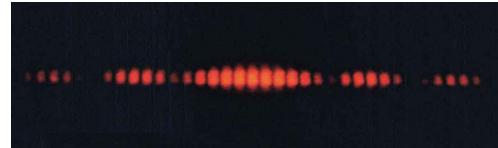


Figura 2: Patrón de difracción similar al que debió observar Thomas Young en su experimento de 1801. Imagen recuperada de (O., s.f.).

La observación de este comportamiento de la luz es irreconciliable con una descripción puramente corpuscular de ella, y aunado a la unificación matemática de la electricidad y magnetismo en la obra de 1865 de Maxwell, de la cual se puede obtener una ecuación de onda para los campos eléctricos y magnéticos que puede identificarse con la luz como lo hizo el físico Hertz, el modelo ondulatorio de la luz parecía definitiva.

Sin embargo, a inicios del siglo XX se admitió la naturaleza dual de onda-partícula de la luz en la explicación de 1905 del efecto fotoeléctrico por Albert Einstein (Hecht, 1999).

Como se mencionó, en su experimento de difracción, Young no empleó una doble rendija, sino que partió un rayo de luz en dos con una hoja de papel. Las versiones modernas de este experimento después involucraron una fuente de luz artificial monocromática para eliminar las bandas coloridas que atraviesa una primera rendija para simular el agujerito en la persiana, y posteriormente el rayo producido incide sobre una doble rendija que divide al rayo como el papel de Young. Con la invención del láser fue posible tener en un solo dispositivo una fuente aproximadamente puntual de luz monocromática.

ce una explicación a porque no hay propagación opuesta a partir de las fuentes secundarias.

Este principio, y la ausencia de propagación opuesta, pueden ser obtenidos a partir del *Teorema Integral de Kirchoff*. De este teorema no obtendremos una descripción completa del campo eléctrico difractado en un punto \mathcal{P} después de atravesar una apertura, sino que nos limitaremos a estudiar la magnitud del campo eléctrico en \mathcal{P} . A esta aproximación se le conoce como la *aproximación escalar* (Fowles, 1989).

Partimos de una de las identidades de Green: sea Ω un subconjunto acotado de \mathbb{R}^3

y $\psi, \varphi \in C^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} \\ = \int_{\Omega} (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV. \end{aligned}$$

Como nos interesa estudiar ondas esféricas, resulta apropiado tomar a ψ y φ como ecuaciones de onda, es decir, que satisfacen

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) f = 0.$$

Sustituyendo en la lado derecho de la identidad de Green

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (\psi \partial_t^2 \varphi - \varphi \partial_t^2 \psi) dV. \quad (2.1)$$

Como en este trabajo empleamos ondas monocromáticas, podemos asumir que ambas funciones son separables como

$$\psi(r, t) = \Psi(r)e^{i\omega t}, \quad \varphi(r, t) = \Phi(r)e^{i\omega t}.$$

Sustituyendo en (2.1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (\psi(r)\Phi(r) \cdot -\omega^2 e^{i\omega t} \\ - \Phi(r)\psi(r) \cdot -\omega^2 e^{i\omega t}) dV = 0. \end{aligned}$$

Es decir, si ψ y φ son funciones de onda monocromáticas, entonces

$$\int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.2)$$

Para considerar a las ondas esféricas en \mathcal{P} , simplificamos los cálculos tomando a \mathcal{P} como el origen de coordenadas y tomamos

$$\varphi(r, t) = \varphi_0 \frac{e^{i(kr + \omega t)}}{r}.$$

Aunque φ representa ahora ondas esféricas convergentes en \mathcal{P} , hay que aclarar que no tienen una realidad física en el fenómeno de difracción y solo resultan un artificio matemático útil para llegar a una expresión para ψ , que tomaremos como la *perturbación óptica* en \mathcal{P} .

Antes de sustituir en (2.2), debemos tomar una consideración extra a raíz de la forma de φ : como esta diverge en \mathcal{P} , debemos tomar a Ω como un sobconjunto acotado de \mathbb{R}^3 que no incluye al origen, como se muestra en la figura 3.

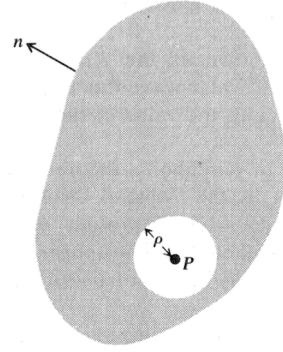


Figura 3: Se integra en una región que no contiene al punto \mathcal{P} . Imagen tomada de (Fowles, 1989).

Procedemos entonces con una deducción similar a la de la ley de Gauss, es decir, en el interior de Ω colocamos una cavidad esférica de radio $\epsilon > 0$ centrada en el origen, a su superficie la denotamos por $\partial\Omega'$ mientras que a la superficie externa la seguimos tomando como $\partial\Omega$.

Como estas dos superficies son disjuntas, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} \\ + \int_{\partial\Omega'} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.3) \end{aligned}$$

En $\partial\Omega'$, $\nabla = \hat{\mathbf{r}} \partial r$ para ψ, φ . Calculamos $\nabla \varphi$.

$$\nabla \varphi = \varphi_0 e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \varphi \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.4)$$

La segunda integral de (2.3) se vuelve entonces

$$- \int_{\partial\Omega'} \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) \psi - \frac{\partial}{\partial r} \psi \right] \Big|_{r=\epsilon} \varphi \epsilon^2 d\Omega$$

donde ha aparecido el signo negativo porque la normal a $\partial\Omega'$ es antiparalela a $\hat{\mathbf{r}}$, y $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Si permitimos que $\epsilon \rightarrow 0$, entonces en el límite el único término que no se anula es

$$\varphi_0 e^{i(k\epsilon + \omega t)} \int_{\partial\Omega'} \psi|_{r=\epsilon} d\Omega,$$

y la integral converge a $4\pi\psi_{\mathcal{P}}$, es decir, el valor de ψ en \mathcal{P} .

Sustituyendo en (2.3),

$$\int_{\partial\Omega} (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S} + 4\pi \varphi_0 e^{i\omega t} \psi_{\mathcal{P}} = 0,$$

de lo que se obtiene inmediatamente, eliminando el factor común $\varphi_0 e^{i\omega t}$, que

$$\psi_{\mathcal{P}} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\psi \nabla \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \psi \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.5)$$

Esta expresión permite, así como la fórmula integral de Cauchy en variable compleja, calcular el valor de ψ en un punto interior a una región Ω a partir de sus valores y los de su derivada en la frontera.

(Fowles, 1989) aclara que ψ no representa al campo eléctrico, como lo habíamos mencionado, por ser una cantidad escalar, y que $|\psi|^2$ es una medida de la irradiancia I . Pero como en ondas monocromáticas $I \propto \|\mathbf{E}\|^2$, podemos identificar entonces a ψ con la magnitud del campo eléctrico en un punto dado.

Para aplicar (2.5) para estudiar la difracción en aperturas arbitrarias, tomamos a $\partial\Omega$ como una superficie ubicada totalmente en el lado opuesto de la barrera a la fuente S y que incluye a la apertura (ver figura 4).

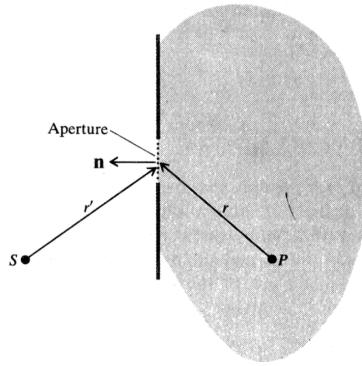


Figura 4: Ondas emitidas desde S atraviesan una apertura en una barrera y son transmitidas hasta el punto \mathcal{P} . Imagen tomada de (Fowles, 1989).

Además, como consideramos que la barrera es opaca y que no transmite luz, podemos tomar que las ondas y sus derivadas que llegan a la apertura se anulan en toda la superficie $\partial\Omega$ exceptuando en la apertura \mathcal{A} . En la apertura, la onda ψ es

$$\psi = \psi_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{P}} = \frac{\psi_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} & \left(\frac{e^{ikr}}{r} \nabla \frac{e^{ikr'}}{r'} \right. \\ & \left. - \frac{e^{ikr'}}{r'} \nabla \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Al calcular los gradientes en la integral obtenemos un resultado con la misma forma que en (2.4), solo sin la fase $i\omega t$. Cuando r y r' son mucho mayores que las longitudes de onda el término ψ/r es despreciable y

$$\psi_{\mathcal{P}} = \frac{ik\psi_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{\mathbf{r}}' - \hat{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{S}.$$

O en términos de la onda en \mathcal{A}

$$\psi_{\mathcal{P}} = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) \psi(r', t) dS. \quad (2.6)$$

Esta integral puede entonces interpretarse como la suma ponderada de las contribuciones de ondas secundarias generadas en \mathcal{A} , es decir, es el enunciado matemático del principio de Huygens-Fresnel.

En nuestros experimentos, al estar la fuente alineada con el centro de la apertura $\hat{\mathbf{r}}'$ y $\hat{\mathbf{n}}$ apuntan siempre a lados opuestos de \mathcal{A} y $\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$, mientras que $\hat{\mathbf{r}}$ apunta al mismo lado que $\hat{\mathbf{n}}$. Es decir, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}$ puede alcanzar su valor máximo.

Podemos considerar al punto \mathcal{P} del mismo lado que S sin alterar el análisis y como en este caso $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\mathbf{r}}'$ pueden apuntar en la misma dirección opuesta respecto a $\hat{\mathbf{n}}$, el término $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}$ puede anularse, por lo que $\psi_{\mathcal{P}} = 0$ y no se mediría una perturbación óptica. Esto explica por qué no hay una onda regresiva hacia la fuente.

Una observación adicional es que el término $-i$ produce un desfase de $\pi/2$ entre la onda incidente y la onda refractada.

2.1. Difracción de Fraunhofer

Por las simplificaciones matemáticas que implica considerar a las ondas incidentes sobre la apertura y a las que provienen de ella como planas, (Hecht, 1999) hace dos distinciones: cuando tanto la fuente como el punto de observación \mathcal{P} están lo suficientemente alejados

como para tomarlas como plana, se habla de *difracción de Fraunhofer*, pero cuando ambos están tan cerca que se debe tomar en cuenta la curvatura de las ondas esféricas, se habla de *difracción de Fresnel*. Nosotros estudiaremos la difracción de Fraunhofer.

En esta aproximación, (Fowles, 1989) toma las siguientes consideraciones: la distribución angular de la luz difractada es lo suficientemente pequeña para tomar a $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}$ como constante. Al estar la fuente lo suficientemente alejada podemos tomar $\psi(r', t)$ como constante respecto a r' , y finalmente, la variación en e^{ikr}/r se debe principalmente al factor exponencial, así que sustituimos en $1/r$ el valor medio r_0 de r .

Así, reuniendo en una constante C las constantes obtenidas, la ecuación (2.6) se simplifica como

$$\psi_{\mathcal{P}} = C \int_{\mathcal{A}} e^{ikr} dS.$$

Esta es la misma expresión que usa (Hecht, 1999), aunque por un procedimiento menos formal.

2.2. Difracción de una Rendija

Tomamos primero el caso sencillo de una rendija de longitud L a lo largo del eje y y grosor b a lo largo del eje x . Si x es la distancia entre el centro de la rendija r_0 y un punto en ella, entonces $r = r_0 + x \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre el centro del plano de observación y el punto de medición \mathcal{P} . Entonces

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{P}} &= Ce^{ikr_0} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{ikx \operatorname{sen} \theta} dy dx \\ &= CL e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \operatorname{sen} \theta} dx \\ &= \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \operatorname{sen} \theta} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \\ &= CL b e^{ikr_0} \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Donde hemos tomado $\beta = kb \operatorname{sen} \theta/2$. Definido $I_0 = |CLb|^2$, calculamos la irradiancia en \mathcal{P} como

$$I(\theta) = |\psi_{\mathcal{P}}|^2 = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right]^2.$$

Esta ecuación describe entonces bandas oscuras en

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{kb} n\pi = \frac{n}{b} \lambda, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

y como $\operatorname{sen} \alpha/\alpha \rightarrow 1$ cuando $\alpha \rightarrow 0$, en $\theta = 0$ existe la banda más brillante en lugar de una oscura.

A su vez, las bandas brillantes están localizadas en los extremos de la función $\operatorname{sen} \alpha/\alpha$, es decir, cuando se satisface

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\alpha^2} = 0.$$

La condición para los máximos es entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2}{kb} \tan \left(\frac{1}{2} kb \operatorname{sen} \theta \right).$$

Entonces, la irradiancia disminuye entre máximos como

$$\begin{aligned} &\frac{I(\theta_{n+1})}{I(\theta_n)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2(\beta_{n+1}) / (\beta_{n+1})^2}{\operatorname{sen}^2 \beta_n / \beta_n^2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \beta_n}{\operatorname{sen}^2 \beta_{n+1}} \frac{\beta_{n+1}^2 \cos^2(\beta_{n+1})}{\beta_n^2 \cos^2 \beta_n} \\ &= \frac{\cos^2 \beta_{n+1}}{\cos^2 \beta_n}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el primer máximo secundario ocurre cuando $\alpha = 1.43\pi$.

$$\frac{I(\theta_1)}{I_0} = \cos^2(1.43\pi) = 0.0476 = 4.76\%.$$

Y está localizado en

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1.43}{b} \lambda.$$

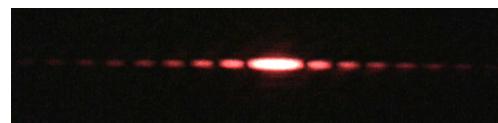


Figura 5: Patrón de difracción de una sola rendija. Notése que, a diferencia de la figura 2, las bandas brillantes no están subdivididas. Imagen recuperada de («Diffraction pattern single slit», s.f.).

2.3. Difracción Circular

En esta situación tomamos una apertura circular de radio R . La integral a resolver es

$$\psi_P = 2Ce^{ikr_0} \int_{-R}^R e^{ikx \sen \theta} \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Simplificamos la expresión usando el cambio de variable $x = Ru$ y con la cantidad $\rho = kR \sen \theta$

a

$$R^2 \int_{-1}^1 e^{i\rho u} \sqrt{1 - u^2} du = \frac{\pi J_1(\rho)}{\rho},$$

donde J_1 es la función de Bessel de la primera especia, que satisface $\rho \rightarrow 0$ $J_1 \rightarrow 1/2$. Si definimos ahora $I_0 = (\pi CR^2)^2$,

$$I(\theta) = I_0 \left[\frac{2J_1(kR \sen \theta)}{kR \sen \theta} \right]^2.$$

$$\sum_{r=1}^{N/2} \left(\int_{-(2r-1)a+b]/2}^{-[(2r-1)a-b]/2} e^{ikx \sen \theta} dx + \int_{[(2r-1)a-b]/2}^{[(2r-1)a+b]/2} e^{ikx \sen \theta} dx \right). \quad (2.9)$$

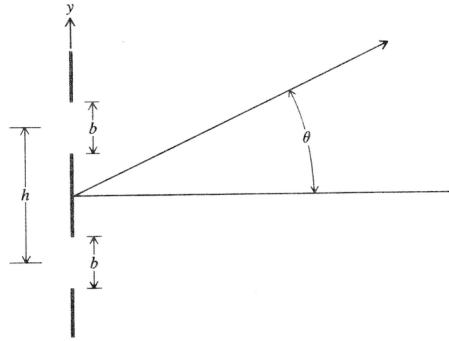


Figura 6: El ángulo θ ahora se mide como la separación angular entre el punto P y el centro del arreglo de N rendijas. Imagen tomada de (Fowles, 1989).

Manipulamos la primera integral para obtener

$$\int_{-(2r-1)a+b]/2}^{-[(2r-1)a-b]/2} e^{ikx \sen \theta} dx = - \int_{[(2r-1)a+b]/2}^{[(2r-1)a-b]/2} e^{-ikx \sen \theta} dx = \int_{[(2r-1)a-b]/2}^{[(2r-1)a+b]/2} e^{-ikx \sen \theta} dx.$$

Sustituyendo en (2.9)

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{N/2} \int_{[(2r-1)a-b]/2}^{[(2r-1)a+b]/2} (e^{ikx \sen \theta} + e^{-ikx \sen \theta}) dx = 2 \sum_{r=1}^{N/2} \int_{[(2r-1)a-b]/2}^{[(2r-1)a+b]/2} \cos(kx \sen \theta) dx \\ & = \frac{2}{k \sen \theta} \sum_{r=1}^{N/2} \left[\sen \left(\frac{(2r-1)a+b}{2} k \sen \theta \right) - \sen \left(\frac{(2r-1)a-b}{2} k \sen \theta \right) \right]. \end{aligned}$$

El primer cero de J_1 ocurre en $kR \sen \theta = 3.8317$. Esto nos da una expresión para la región circular más brillante, conocido como *círculo de Airy*. Su apertura angular θ es

$$\sen \theta = \frac{3.8317}{kR} = \frac{3.8317}{2\pi R} \lambda = \frac{1.22}{D} \lambda, \quad (2.8)$$

donde $D = 2R$ es el diámetro de la apertura circular.

2.4. Difracción por Múltiples Rendijas

Consideramos ahora una situación similar a la difracción en una rendija de la subsección 2.2, donde tomamos ahora N rendijas con una separación a entre sus centros. La integral de la segunda igualdad de (2.7) se sustituye por

Definimos $\alpha = ka \sen \theta / 2$.

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{\beta} \sum_{r=1}^{N/2} \left[\sen \left(\frac{(2r-1)a+b}{2} k \sen \theta \right) - \sen \left(\frac{(2r-1)a-b}{2} k \sen \theta \right) \right] \\
&= \frac{b}{\beta} \sum_{r=1}^{N/2} [\sen((2r-1)\alpha + \beta) - \sen((2r-1)\alpha - \beta)] \\
&= \frac{b}{\beta} \sum_{r=1}^{N/2} 2 \cos((2r-1)\alpha) \sen \beta = \frac{2b \sen \beta}{\beta} \sum_{r=1}^{N/2} \cos[(2r-1)\alpha] \\
&= \frac{2b \sen \beta}{\beta} \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^{N/2-1} e^{i(2r+1)\alpha} \right) = \frac{2b \sen \beta}{\beta} \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} \sum_{r=0}^{N/2-1} (e^{2i\alpha})^r \right] \\
&= \frac{2b \sen \beta}{\beta} \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} \frac{1 - e^{iN\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} \right] = \frac{2b \sen \beta}{\beta} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \right] \\
&= \frac{2b \sen \beta}{\beta} \operatorname{Re} \left[\frac{\cos(N\alpha) - 1 + i \sen(N\alpha)}{2i \sen \alpha} \right] \\
&= b \frac{\sen \beta \sen(N\alpha)}{\beta \sen \alpha}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\psi_{\mathcal{P}} = CL e^{ikr_0} b \frac{\sen \beta \sen(N\alpha)}{\beta \sen \alpha}.$$

Definiendo $I_0 = |CLb|^2$,

$$I_N(\theta) = I_0 \left(\frac{\sen \beta}{\beta} \right)^2 \left[\frac{\sen(N\alpha)}{\sen \alpha} \right]^2. \quad (2.10)$$

Si tomamos $N = 1$ recuperamos la ecuación (2.7), por lo que podemos identificar a $(\sen \beta / \beta)^2$ como el factor de difracción causado por cada rendija, mientras que $[\sen(N\alpha) / \sen \alpha]^2$ debe entonces representar la interferencia de las N rendijas.

De (2.10) podemos obtener inmediatamente

la irradiancia para una doble rendija

$$\begin{aligned}
I_2(\theta) &= I_0 \left(\frac{\sen \beta}{\beta} \right)^2 \left[\frac{\sen(2\alpha)}{\sen \alpha} \right]^2 \\
&= 4I_0 \left(\frac{\sen \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha.
\end{aligned}$$

Notamos que la irradiancia máxima para la doble rendija es cuatro veces la de una individual. A su vez, el factor de interferencia $\cos^2 \alpha$ explica porque en la imagen 2 las bandas brillantes están subdivididas mientras que en la figura 5 no lo están.

En el laboratorio nosotros medimos la distancia entre los centros de las bandas brillantes, por lo que la expresión útil para nuestros objetivos es

$$\sen \theta = \frac{2n\pi}{ka} = \frac{n}{a} \lambda. \quad (2.11)$$

3. Metodología Experimental

3.1. Doble Rendija y Anillo de Airy

Nuestro primer objetivo fue comparar las mediciones hechas en el laboratorio sobre las dimensiones de los patrones de difracción provocados por una doble rendija y por una perforación circular con las expresiones respectivas

(2.8) y (2.11).

Para esto empleamos un láser rojo con una longitud de onda de 633 nm, apuntando sobre una rejilla de doble rendija con parámetros $a = 0.2$ mm, 0.3 mm y 0.45 mm y $b = 0.05$ mm, y con apertura circular con diámetros $D = 0.2$ mm, 0.3 mm y 0.4 mm. La luz transmitida fue después proyectada sobre una tapa de cartón a una distancia $r_0 = (114.00 \pm 0.05)$ cm

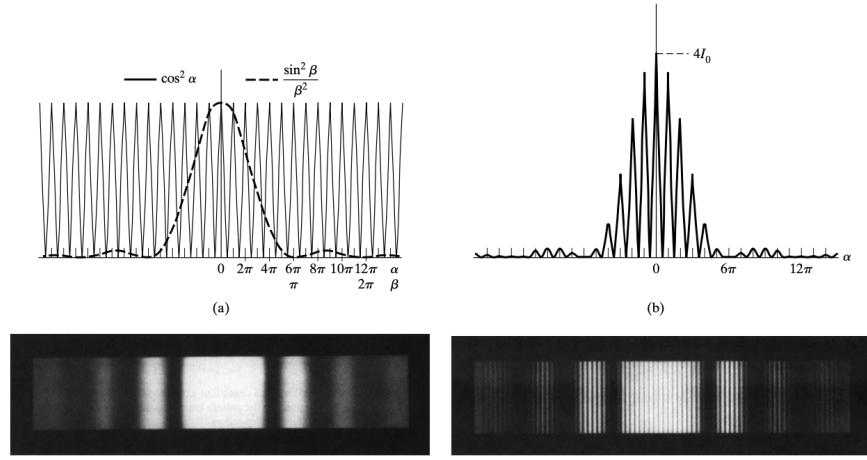


Figura 7: Las dos imágenes superiores ilustran la irradiancia producida por una doble rendija, y las dos imágenes inferiores comparan los patrones de difracción de una sola rendija y de dos rendijas. Imagen recuperada de (L. Pedrotti et al., s.f.).

de las rejillas. El arreglo experimental se muestra en la figura 8.



Figura 8: Para tener una mejor apreciación entre las bandas brillantes al momento de medir sus separaciones se colocó la superficie de proyección a una distancia considerable y se disminuyó la intensidad de la iluminación en el laboratorio.

Las dimensiones relevantes se midieron con un vernier, asegurando así una presición de 0.001 cm en las mediciones.

3.2. Grosor del Cabello

Para medir el grosor de un cabello sustituimos la rejilla por un cabello tenso, sujetado a un marco con cinta masking, como se muestra

en la figura 9.

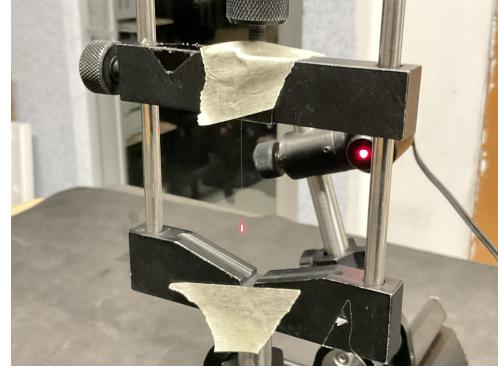


Figura 9

En esta ocasión la pantalla de proyección fue una hoja de papel colocada a una distancia $r_0 = 278.3$ cm del cabello.



Figura 10

4. Resultados

4.1. Doble Rendija

Para la doble rendija con $a = 0.2 \text{ mm}$ obtuvimos una distancia promedio entre los centros de las primera y segunda banda brillante de $\Delta x = 0.255 \text{ cm}$. Usando la ecuación (2.11) con $n = 1$, donde $\operatorname{sen} \theta = \Delta x / r_0$, obtenemos un valor para a de

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_0}{\Delta x} \lambda = \frac{(114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.255 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.283 \pm 0.002) \text{ mm}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para $a = 0.3 \text{ mm}$, $\Delta x = 0.174 \text{ cm}$ y

$$\begin{aligned} a &= \frac{(114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.174 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.415 \pm 0.003) \text{ mm}. \end{aligned}$$

Para las mediciones $a = 0.45 \text{ mm}$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{(114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.106 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.681 \pm 0.007) \text{ mm}. \end{aligned}$$

4.2. Anillo de Airy

Ahora comparamos el diámetro especificado de la apertura circular con el valor calculado

con (2.8). Para $D = 0.2 \text{ mm}$, el diámetro medido del anillo de Airy fue $D_A = (0.57 \pm 0.01) \text{ cm}$, por lo que $\operatorname{sen} \theta = D_A / 2r_0$ y

$$D = \frac{2.44r_0}{D_A} \lambda.$$

Entonces

$$\begin{aligned} D &= \frac{2.44 \times (114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.570 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.309 \pm 0.001) \text{ mm}. \end{aligned}$$

Con $D = 0.3 \text{ mm}$,

$$\begin{aligned} D &= \frac{2.44 \times (114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.520 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.339 \pm 0.002) \text{ mm}. \end{aligned}$$

Y cuando $D = 0.4 \text{ mm}$.

$$\begin{aligned} D &= \frac{2.44 \times (114.00 \pm 0.05) \text{ cm}}{(0.436 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.404 \pm 0.002) \text{ mm}. \end{aligned}$$

4.3. Grosor del Cabello

El cabello descrito en la subsección 3.2 crea un obstáculo equivalente a una doble rendija “negativa”, por lo que podemos emplear nuevamente la ecuación (4.1). En promedio medimos una distancia entre los centros de las primeras dos bandas brillantes de $\Delta x = (3.164 \pm 0.001) \text{ cm}$. Entonces el grosor del cabello es

$$\begin{aligned} a &= \frac{278.3 \text{ cm}}{(3.164 \pm 0.001) \text{ cm}} \times 633 \text{ nm} \\ &= (0.0557 \pm 0.0001) \text{ mm} = (55.7 \pm 0.1) \mu\text{m}. \end{aligned}$$

En la práctica 4 medimos cabellos con un microscopio con grosores de $77.8 \mu\text{m}$, $82.2 \mu\text{m}$ y $93.3 \mu\text{m}$, por lo que esta nueva medición parece ser un resultado aceptable.

5. Conclusiones

En el siglo XIX la descripción de un patrón de difracción, que solo se observa en movimientos ondulatorios, generado con luz pareció poner fin al debate respecto a si la luz es una onda o una partícula. Aunque en el siguiente siglo se aceptó que la naturaleza de la luz es dual, en el régimen macróscopico una descripción ondulatoria de la luz es adecuada para describir las observaciones.

Partiendo de un teorema integral fuimos capaces de obtener una expresión de la cual se desprende el principio de Huygens-Fresnel junto con detalles que su enunciado original no incluye. De él, tomando la aproximación de campo lejano, describimos la difracción de Fraunhofer a través de aperturas circulares y rendijas.

De sus consecuencias pudimos obtener una medida de la validez de la aproximación de campo lejano, comparando las dimensiones de las aperturas reportadas con las calculadas, y concluimos que la aproximación es aceptable. La medición que resulta más llamativa por su simplicidad fue la del cabello humano, mostrando así que no se precisa de más que un láser, cinta y una regla para realizarla.

Referencias

- Diffraction pattern single slit.* (s.f.). <https://ar.inspiredpencil.com/pictures-2023/diffraction-pattern-single-slit>
- Fowles, G. R. (1989, 1 de enero). *Introduction to Modern Optics*. Courier Corporation.
- Francesco María Grimaldi.* (2024). Consultado el 1 de diciembre de 2024, desde <https://academia-lab.com/enciclopedia/francesco-maria-grimaldi/>
- Hecht, E. (1999, 1 de enero). *Óptica* (3.^a ed.). ADDISON WESLEY.
- Hemsley, A. (2014, 6 de julio). *Towards The Sun*. Consultado el 1 de diciembre de 2024, desde <https://uk.pinterest.com/pin/i-quite-like-this-for-the-blurry-shadow-i-dont-think-i-want-the-texture-to-be-quite-as-grainy-though-i-think-essentially-i--296111744223100531/>
- L. Pedrotti, F., M. Pedrotti, L., & S. Pedrotti, L. (s.f.). *Introduction to Optics* (3.^a ed.), O. (s.f.). *27.3 Young's double slit experiment*. <https://pressbooks.online.ucf.edu/phy2053bc/chapter/youngs-double-slit-experiment/>
- Stuewer, R. (1970). A Critical Analysis of Newton's Work on Diffraction. *www.jstor.org*, 61(2). <https://www.jstor.org/stable/229974>
- Young, T. (1804). I. The Bakerian Lecture. Experiments and calculations relative to physical optics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 94, 1-16. <https://doi.org/10.1098/rstl.1804.0001>