5.01 Demostreu la no-regularitat dels següents llenguatges:
Pumping Lemma:
si L es regular entonces $\exists$N tal que $\forall\omega$ que $\omega \in L \wedge |\omega| \geq$ N entonces $\omega = xyz$

$$\begin{cases} |y| > 0 \\ |xy| \leq \mathrm{N} \\ \forall k \geq 0 \rightarrow xy^k z \in \mathrm{L} \end{cases}$$

m) $L = \{a^{2^n} | n \geq 0\}$
$\omega = a^{2^N} = \underbrace{a^i}_{x} \underbrace{a^j}_{y} \underbrace{a^{2^N-i-j}}_{z}$

$$\begin{cases} |a^j| > 0 & \rightarrow j > 0 \\ |a^i a^j| \leq \mathrm{N} & \rightarrow |i+j| \leq \mathrm{N} \\ \forall k \geq 0 & \rightarrow a^i a^{jk} a^{2^N-i-j} \in \mathrm{L} \end{cases} \tag{1}$$

Procedemos a desarroyar el *pumping*:

$$\begin{aligned} a^i a^{jk} a^{2^N-i-j} &= a^{2^N-i-j+i+jk} \\ &= a^{2^N-j+jk} \\ &= a^{2^N+j(k-1)} \end{aligned}$$

Para $a^{2^N+j(k-1)}$ existe un valor de k para el cual $\omega \notin$ L
Además $j(k-1)$ no es nulo para $\forall k$
Demostración:

$$j(k-1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} j = 0 & \rightarrow j \neq 0 \text{ es la primera condición de (1)} \\ k-1 = 0 & \rightarrow k = 1 \end{cases}$$

Por tanto si escogemos $k = 2$ tenemos.

$$\begin{aligned} a^i a^{2j} a^{2^N-i-j} &= a^{2^N-i-j+i+2j} \\ &= a^{2^N+j} \end{aligned}$$

Procedemos a demostrar que a^{2^N+j} para toda j no es de la forma a^{2^N} o a^{2^N+1} que harían que $\omega \in$ L

$$
\begin{array}{rll}
a^{2^N} < a^{2^N+j} < a^{2^{N+1}} & & \text{trabajamos solo con los exponentes} \\
2^N < 2^N + j < 2^{N+1} & & j \neq 0 \\
2^N + j < 2^{N+1} & & \\
j < 2^{N+1} - 2^N & & \\
j < 2^N(2-1) & & \\
j < 2^N & & |i+j| \leq \mathrm{N} \to j \leq \mathrm{N} \\
& & \text{cierto}
\end{array}
$$

Podemos afirmar que: $a^{2^N+j} \notin$ L