Análisis de Algoritmos

Natalia Baeza - Nadina Martínez Carod

21 de octubre de 2024

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Capítulo 1

Recurrencias

1.1. Introducción

Una ecuación recurrente es un tipo específico de relación de recurrencia. Una relación de recurrencia para la sucesión t_0, t_1, t_2, $\ldots$ es una ecuación que relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, t_1, $\ldots$, t_{n-1} . Las condiciones iniciales para la sucesión t_0, t_1, $\ldots$ son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión.

1.2. Resolviendo recurrencias

Resolver una relación de recurrencia consiste en determinar una fórmula explícita (cerrada) para el término general t_n , es decir una función no recursiva de n.

Algunas definiciones de recurrencia pueden tener relaciones muy complejas, y sus comportamientos a veces son estudiados por los físicos y matemáticos en un campo conocido como análisis no lineal.

1.3. Problemas típicos recurrentes

Cómo transformar letra coloquial en un problema de matemáticas, para luego resolverlo.

1.3.1. Ejemplo 1. Problema clásico: *Cría de conejos*

Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci da a conocer esta sucesión numérica en occidente, de allí su nombre *sucesión de Fibonacci*. La generación de esta serie numérica da solución al problema conocido como la *Cría de conejos*. Vamos a analizar la forma de generar la sucesión y su recurrencia.

El problema: *Cría de conejos*

Cada pareja de conejos (macho y hembra) demora alrededor de un mes la gestación, y gestan otra pareja (macho y hembra) de conejos. La nueva pareja que nace demora un mes en alcanzar la maduración.

Definimos

- t_i = cantidad de parejas de conejos pasados i meses.
- p = pareja de conejos

Entonces para especificar que la cantidad de parejas conejos incial es $t_0 = 1p$
Definimos a continuación la proyección en el crecimiento demográfica de las parejas de conejos.

Meses	conejos adultos	conejos jóvenes	a_i
0	1	0	$t_0 = 1p$
1	1	1	$t_1 = 1p + 1p = 2p$
2	2	1	$t_2 = 2p + 1p = 3p$
3	3	2	$t_3 = 3p + 2p = 5p$
4	5	3	$t_4 = 5p + 3p = 8p$
		$\vdots$	
n	Adultos$_{n-1}$	Jóvenes$_{n-2}$	$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

El término general depende de los dos términos anteriores. Las condiciones iniciales o términos iniciales son dos, porque la recurrencia tienen doble dependencia. Si tuviera tres dependencias tendrías 3 condiciones especiales.

1.3.2. Ejemplo 2. Problema clásico: *Saludos en una fiesta*

Llega una persona a una fiesta y saluda a todos los que están en ella. ¿Cuántos saludos hubo al cabo de n personas?

Definimos

- t_i = número de saludos totales al llegar la i-ésima persona.

Cada persona que entra a la fiesta saluda a todos los presentes, entonces la cantidad de saludos totales dados hasta el momento es la suma entre los saludos de la persona i y todos los saludos dados antes de su llegada.
Entonces, a continuación calculamos la t_n como la suma entre la persona n y las $n-1$ invitados presentes más la cantidad total de saludos dados antes de la llegada de n, t_{n-1}.

Orden de llegada	Cantidad de saludos actual	Cantidad total de saludos previos	t_i
1	0	0	$t_1 = 0$
2	1	0	$t_2 = 1$
3	2	1	$t_3 = 2 + 1 = 3$
4	3	3	$t_4 = 3 + 3 = 6$
		$\vdots$	
t_n	$n-1$	t_{n-1}	$t_n = n - 1 + t_{n-1}$

El termino general depende del anterior y sumado con una función de n

1.3.3. Ejemplo 3: Torres de Hanoi

Se tiene una estructura como la de la Figura 1.1, que contiene n discos en una de las columnas y se desea moverlos todos a alguna de las otras dos, con la restricción de que sólo se puede mover de a 1 disco y que nunca puede haber un disco grande sobre uno chico.

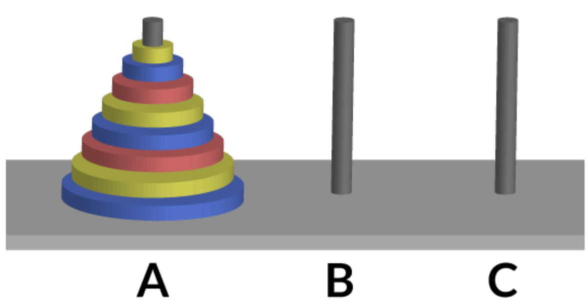

Figura 1.1: Torres de Hanoi

Con n discos, ¿cuántos movimientos son necesarios para resolver el problema?

Definimos

- t_i = el número de movimientos de discos mínimos necesarios hasta resolver el problema.
- $t_1 = 1$. Con un sólo disco hay un sólo movimiento
- $t_2 = 3$
- $t_n = 2 \cdot t_{n-1} + 1$ movimientos

El termino general depende del anterior con un coeficiente y sumado con una constante

1.3.4. Ejemplo 4: *Subconjuntos de números* $\mathbb{N}$ *menores a* n *sin valores consecutivos*

Definimos

- $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$
- t_n como el número de subconjuntos de I_n sin enteros consecutivos
- $t_0 = 1, I_0 = \{\emptyset\}$
- $t_1 = 2, I_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$
- $t_2 = 3, I_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$
- $t_3 = 5, I_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
- $t_4 = 8, I_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$

En general, tomamos como condiciones iniciales $t_1 = 2$ y $t_2 = 3$ con $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

En los ejemplos vistos no encontramos la fórmula pero si la recurrencia. Traducimos un problema coloquial pero todavía no lo podemos resolver.

1.3.5. Ejemplo 5: *Interés compuesto*

Un banco tiene una tasa de interés del $6\,\%$ anual en los depósitos, al cabo de unos años ¿qué valor me da?. Si deposito 1000 pesos, ¿cuánto dinero tengo en n años?

Definimos:

- t_n como la cantidad de dinero luego de n años.
- $t_0 = 1000$
- $t_1 = 1000 + 0,06 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 + 0,06) = 1000 \cdot (1,06) = (1{,}06) \cdot 1000$
- $t_2 = t_1 + t_1 \cdot 0,06 = t_1 \cdot (1,06) = (1,06) \cdot t_1 = (1,06)^2 \cdot 1000 = (1{,}06)^2 \cdot t_0$
- $t_3 = t_2 + t_2 \cdot 0,06 = t_2 \cdot (1,06) = (1,06) \cdot t_2 = (1,06)^3 \cdot 1000 = (1,06)^3 \cdot t_0$

En general, tomamos como condición inicial $t_0 = 1000$ con

$$t_n = t_{n-1} \cdot (1,06) = (1,06)^n \cdot t_0$$

$$t_n = (1,06)^n \cdot t_0$$

1.4. Notación

Es frecuente encontrar sucesiones en donde los subíndices denotando posiciones inician desde cero, en vez de uno, particularmente en matemática discreta o en ciencias de la computación. También se puede usar una variable distinta a n para denotar el término general, cuando así convenga para evitar confusión con otras variables.

En la literatura es posible encontrar una gran variedad de notaciones alternativas. Por ejemplo, uso de llaves en vez de paréntesis, o indicaciones de los límites mediante variantes de súper y subíndices. A continuación se muestran algunos ejemplos:

$$(t_k)_{k=1}^{m} = t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m$$

$$\{t_n\} = t_1, t_2, t_3, \ldots$$

$$\{t_n\}\; n \in \mathbb{N} = t_1, t_2, t_3, \ldots$$

1.5. Recurrencias lineales

Una relación de recurrencia es lineal de grado k si tiene una estructura similar a:

$$F_n = a_0 F_{n-1} + a_1 F_{n-2} + \ldots + a_{k+1} F_{n-k}$$

También puede notarse:

$$T_n = a_0 T_{n-1} + a_1 T_{n-2} + \ldots + a_{k+1} T_{n-k}$$

O bien:

$$T(n) = a_0T(n-1) + a_1T(n-2) + \ldots + a_{k+1}T(n-k)$$

O así:

$$t_n = a_0t_{n-1} + a_1t_{n-2} + \ldots + a_{k+1}t_{n-k}$$

El adjetivo **lineal** indica que cada término de la secuencia está definido como una función lineal de sus términos anteriores. El orden de una relación de recurrencia lineal es el número de términos anteriores exigidos por la definición.

En la relación $t_n = t_{n-2}$ el orden es dos, porque debe haber al menos dos términos anteriores (ya sean usados o no). Ejemplo : $3t_n - 1t_{n-1} + 2t_{n-2} = 0$

Se llama ecuación de recurrencia lineal homogénea de grado k, con coeficientes constantes, a una expresión del tipo:

$$t_n + c_1t_{n-1} + c_2t_{n-2} + \ldots + c_kt_{n-k} = 0, c_i, i \in \mathbb{R}, c_k \neq 0$$

1.5.1. Ecuación Característica

Si de la ecuación de recurrencia lineal homogénea anterior consideramos $t_n \equiv x^n$ surge lo que denominamos la *ecuación característica*.

Entonces,

$$c_0t_n + c_1t_{n-1} + c_2t_{n-2} + ... + c_kt_{n-k} = 0$$

se puede ver como:

$$c_0x^k + c_1x^{k-1} + ... + c_kk^0 = 0$$

Para poder encontrar una solución, hacen falta condiciones de contorno o iniciales $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$, siendo k el grado de la ecuación.Así, la recurrencia lineal, junto con las condiciones iniciales $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$, determinan la secuencia única.

Decimos entonces que: Sea la ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden k anterior, se denomina **ecuación característica** a la ecuación de grado k:

$$c_0x^k + c_1x^{k-1} + \ldots + c_kk^0 = 0 \text{ ó } a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

1.6. Polinomio característico

La ecuación característica da origen al polimonio característico

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - r_i)n$$

donde r_i puede ser número complejo, y los r_i son las únicas soluciones de la ecuación $p(x)$.

Considérese cualquier raíz r del polinomio característico. Dado que $p(r_i) = 0$ entonces $x = r$ es una solución de la ecuación y por lo tanto r_in es una solución de la recurrencia.

Como toda combinación lineal de soluciones es también una solución entonces se concluye que:

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$$

satisface la recurrencia para cualquier selección de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Siempre y cuando todos los r_i sean distintos. En este caso las k constantes se pueden resolver a través de k ecuaciones lineales con k incógnitas.

1.7. Soluciones de las recurrencias

Para resolver las recurrencias contamos existen tres métodos básicos y uno auxiliar que se aplican según el caso:

- Expansión de la recurrencia
- Método del Teorema Maestro
- Método de la Ecuación Característica
- Cambio de Variable

Estas técnicas ya han sido demostradas. Sólo consideraremos su aplicación para las recurrencias generadas a partir del análisis de algoritmos.

1.7.1. Método de la ecuación característica

Método adecuado para algoritmos con recurrencia asociadas a ecuación polinómica, llamada ecuación característica, cuyas soluciones proporcionan soluciones básicas de la ecuación de la recurrencia.

La solución general es combinación lineal de las soluciones básicas, y las constantes de la combinación lineal se calculan imponiendo casos base. De acuerdo a la forma de la ecuación característica, se clasifica en **homogéneas** y **no homogéneas**.

1.7.2. Homogéneas

Son recurrencias lineales, con expresiones de siguiente forma

$$c_0 t_n + c_1 t_{n-1} + c_2 t_{n-2} + \ldots + c_k t_{n-k} = 0, n \geq k$$

Donde los t_i son los valores que estamos buscando. La combinación lineal de t_i es igual a cero. Con coeficientes c_i son constantes.

Suponiendo que las soluciones son de la forma $t_n = x_n$, la ecuación se transforma en:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \ldots + c_kx_{n-k} = 0, n \geq k$$

Dividiendo por x^{n-k} se debe resolver la ecuación:

$$c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k^0 = 0$$

La solución será llegar a una ecuación no recurrente.

Sean las soluciones $x = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, la solución será:

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdots s_i^n$$

con c_i constantes, cuyos valores dependen de los casos bases, siempre y cuando todas las raices sean diferentes.

Como solucionar las ecuaciones homogéneas

Sabemos que una ecuación homogénea es de la forma:

$$c_0t_n + c_1t_{n-1} + c_2t_{n-2} + \ldots + c_kt_{n-k} = 0, n \geq k$$

La solución a esta ecuación está dada por la siguiente fórmula:

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot P_i(n) \cdot r_i^n$$

La función puede tener:

Caso 1: todas sus raíces diferentes $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$

Caso 2: raíces iguales $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$ donde m es la multiplicidad de la raíz

Caso 3: solución compuesta $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n + \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$

Ejemplo 1: Ecuación homogénea con raíces iguales

$$T(n+2) - 4T(n+1) + 4T(n) = 0 \text{ casos base: } T(0) = 0, T(1) = 1$$

también lo podemos ver como:

$$t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0 \text{ con } t_0 = 0 \text{ y } , t_1 = 1$$

Su ecuación característica asociada se define del siguiente modo:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Siendo una ecuación de grado 2, podemos obtener las raíces con la fórmula de Bhaskara, que resultan $r_1 = r_2 = 2$.
Como las raíces son iguales, se puede expresar la recurrencia según el Caso 2.

$$t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$$

Aplicando los casos bases a la ecuación t_n obtenemos:

$$\begin{cases} t_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = 0 \\ t_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos: $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.
Entonces:

$$\begin{array}{rcl} t_n & = & c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n \\ t_n & = & 0 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n \\ t_n & = & n \cdot 2^{n-1} \end{array}$$

La función t_n resultante ya no depende de una recurrencia, y se puede ver claramente que $t_n \in O(n \cdot 2^{n-1})$.

Ejemplo 2: Ecuación homogénea con raíces iguales

$$2T(n) - 12T(n-1) + 18T(n-2) = 0$$

Puede verse como:

$$2t_n - 12t_{n-1} + 18t_{n-2} = 0$$

La ecuación característica asociada:

$$2x^2 - 12x + 18 = 0 \text{ y sus raíces son } r1 = r2 = 3$$

Por lo tanto, podemos expresar la solución del polinomio como,

$$(x-3)^2 = 0$$

Expresamos la recurrencia utilizando el Caso 2

$$t_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n$$

Podemos determinar el orden a partir de aquí el orden sin necesitar los casos base,

$$t_n = c_1 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n \in O(n \cdot 3^n)$$

Ejemplo 3: Homogénea con raíces distintas

$$2T(n) - 5T(n-1) + 6T(n-2) = 0$$

Puede verse como:

$$2t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$$

Ecuación asociada:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ y sus raíces } r_1 = 3, r_2 = 2$$

Expresamos la recurrencia utilizando el Caso 1:

$$t_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n$$

Si bien no se pueden obtener c_1 y c_2, se puede asegurar que $t_n \in O(3^n)$.

1.7.3. No Homogéneas

Corresponde a expresiones que tienen la forma

$$c_0 \cdot t_n + c_1 \cdot t_{n-1} + c_2 \cdot t_{n-2} + \ldots + c_k \cdot t_{n-k} = b^n \cdot p(n)$$

donde los coeficientes c_i y b son constantes y $p(n)$ es un polinomio de grado d.

Es posible manipular una recurrencia no homogénea para convertirla en homogénea, tal como se ve en siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: Cómo transformar una recurrencia NO homogénea en homogénea

Sea la ecuación $T(n) - 2T(n-1) = 3^n$ para $n \geq 2$, con las condiciones iniciales $T(0) = 0$ y $T(1) = 1$. Puede verse así:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

En este caso $b = 3$ y $p(n) = 1$, polinomio en n de grado 0.

Podemos escribir la ecuación de dos formas distintas.
En primer lugar, para $n+1$ tenemos que

$$t_{n+1} - 2t_n = 3^{n+1}$$

O bien si multiplicamos por 3 la ecuación original obtenemos:

$$3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$$

Restando ambas ecuaciones, conseguimos

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & t_{n+1} & - & 2 \cdot t_n & & & = & 3^{n+1} \\
- & & & 3 \cdot t_n & - & 6 \cdot t_{n-1} & = & 3^{n+1} \\
\hline
 & t_{n+1} & - & 5 \cdot t_n & + & 6 \cdot t_{n-1} & = & 0
\end{array}
$$

$$t_{n+1} - 5t_n + 6t_{n-1} = 0$$

que resulta ser una ecuación homogénea cuya solución, aplicando lo visto anteriormente, es

$$t_n = 3^n - 2^n \in \Theta(3^n)$$

Estos cambios son, en general, difíciles de ver. Afortunadamente, para este tipo de ecuaciones también existe una fórmula general para resolverlas, buscando sus soluciones entre las funciones que son combinaciones lineales de exponenciales, en donde se demuestra que la ecuación característica es de la forma.

La ecuación característica es

$$(c_0x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_kx^0)(x - b)^{d+1} = 0$$

Para expresiones más generales que tienen la forma

$$c_0 \cdot t_n + c_1t_{n-1} + c_2t_{n-1} + \ldots + c_k = b_1^n \cdot p_1(n) + b_2^n \cdot p_2(n) + \ldots + b_s^n \cdot p_s(n)$$

su ecuación característica será

$$(c_0 \cdot x^k + c_1 \cdot x^{k-1} + c_2 \cdot x^{k-2} + \ldots + c_k \cdot x^0)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \ldots (x - b_s)^{d_s+1} = 0$$

Solución, caso general es caso homogéneo por un lado y luego el particular

$$t_{general} = t_{homogéneo} \cdot t_{particular}$$

Ejemplo 5: Recurrencia no homogénea

Sea la ecuación

$$T(n) = 2T(n-1) - (n+3)3^n \Rightarrow T(n) - 2T(n-2) = -3^n(n+3)$$

Resulta:

$$t_n = 2t_{n-1} - (n+3)3^n \Rightarrow t_n - 2t_{n-1} = -3^n(n+3)$$

$t_{homogéneo}$ está dado por la parte homógenea de la ecuación $t_n - 2t_{n-1} = 0$ y $x - 2 = 0$ su ecuación característica. La solución de la ecuación es una única raíz $r = 2$.

$t_{particular}$ está dado por la parte no homogénea de la ecuación, $-3^n(n+3)$ con $b = 3$ y $p(n) = -(n+3)$, un polinomio de grado $d = 1$.
Su ecuación característica será $t_{particular} = (x-3)^2$

Al unir las dos soluciones, obtenemos la ecuación definitiva con tres soluciones:

$$t_n = (x-2)(x-3)^2$$

Expresando la recurrencia a través del Caso 3 para raíces compuestas tenemos

$$t_n = c_1 \cdot 2^n + d_1 \cdot 3^n + d_2 \cdot n \cdot 3^n \in O(n \cdot 3^n)$$

Ejemplo 6: Recurrencia no homogénea

Sea la ecuación

$$t_n = 6t_{n-1} - 9t_{n-2} + 7^n \Rightarrow t_n - 6t_{n-1} + 9t_{n-2} = 7^n$$

$t_n - 6t_{n-1} + 9t_{n-2} = 0$ es la parte homogénea de la ecuación y $x^2 - 6x + 9 = 0$ su ecuación característica. Tiene como solución a 3, con multiplicidad dos. Entonces $r_1 = r_2 = 3$.

Aplicando el Caso 2 obtenemos como función a $t_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$.

7^n es la parte no homogénea de la ecuación, con $b = 7$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado $d = 0$.

Su ecuación característica será $(x-7)^1$

Al unir las dos soluciones, obtenemos la ecuación definitiva que tres soluciones:

$$(x-3)^2(x-7) = 0$$

Expresando la recurrencia a través del Caso 3 para raíces compuestas tenemos

$$t_n = d_1 \cdot 3^n + d_2 \cdot n \cdot 3^n + c_1 \cdot 7^n \in O(n \cdot 3^n)$$

Ejemplo 7: Recurrencia no homogénea con 2 polinomios

Sea la ecuación

$$t_n - 6t_{n-1} + 9t_{n-2} = 7^n + n$$

Tal como se muestra en el ejemplo anterior, las raíces de la parte homogénea de la ecuación tiene como solución con multiplicidad dos a $r = 3$.

$7^n + n$ es la parte no homogénea de la ecuación dónde:

1. $b_1 = 7$ y $p_1(n) = 1$, un polinomio de grado $d_1 = 0$.
2. $b_2 = 1$ y $p_2(n) = n$, un polinomio de grado $d_2 = 1$.

Su ecuación característica será

$$(x - b_1)^{d_1+1} \cdot (x - b_2)^{d_2+1} = 0$$

$$(x - 7)^1 \cdot (x - 1)^2 = 0$$

Al unir las dos soluciones, obtenemos la ecuación definitiva que cinco soluciones:

$$(x - 3)^2(x - 7)(x - 1)^2 = 0$$

Expresando la recurrencia a través del Caso 3 para raíces compuestas tenemos

$$t_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + d_1 7^n + c_3 1^n + c_4 n 1^n$$

$$t_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + d_1 7^n + c_3 + c_4 n$$

$$t_n \in O(n3^n)$$

1.8. Método del Teorema Maestro

$$t_n = a t_{n/b} + f(n)$$

donde El método del Teorema Maestro está basado en el estudio de los algoritmos *Divide y Vencerás* [Lev11], que tienen la forma

- $f(n)$, es una función que divide una instancia de tamaño n en instancias de tamaño n/b y combina sus soluciones.
- a es una contante numérica
- b es una constante numérica que determina el tamaño de las instancias

Por supuesto que el orden de crecimiento de la solución de t_n depende de los valores de las constantes a, b y el orden de crecimiento de la función $f(n)$.

El análisis de eficiencia está simplificado en el siguiente teorema:

Teorema Maestro

Si $f(n) \in \Theta(n^d)$ donde $d \geq 0$ en una recurrencia del tipo $t_n = at_{n/b} + f(n)$, entonces

$$t_n \in \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{si } a < b^d \\ \Theta(n^d \cdot log\ n) & \text{si } a = b^d \\ \Theta(n^{log_b\ a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

Los resultados son análogos para O y Ω.

Ejemplo 8: Aplicación de teorema Maestro

Sea

$$t_n = 2t_{n/2} + 1$$

donde:

1. $a = 2$
2. $b = 2$
3. $f(n) = 1$
4. $f(n) \in \Theta(n^0)$
5. $d = 0$
6. $a > b^d$

Entonces

$$t_n \in \Theta(n^{log_b\ a}) = \Theta(n^{log_2\ 2}) = \Theta(n)$$

Visto de otra manera, según [Cor+01][1]

Teorema Maestro

Sean $a \geq 1$, $b > 1$ constantes, $f(n)$ una función y t_n una recurrencia definida sobre los enteros no negativos de la forma $t_n = at_{n/b} + f(n)$, entonces valen:

1. si $f(n) \in O(n^{log_b\ a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ entonces $t_n \in \Theta(n^{log_b\ a})$
2. si $f(n) \in \Theta(n^{log_b\ a})$ entonces $t_n \in \Theta(n^{log_b\ a} \cdot log\ n)$

[1] Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms*. 2nd. Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2001.

3. si $f(n) \in \Omega(n^{log_b\ a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$, y satisface $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ para alguna constante $c < 1$, entonces $t_n \in \Theta(f(n))$.

Antes de mostrar un ejemplo de aplicación del teorema maestro, vamos a invertir un momento en entender que dice. En cada uno de los 3 casos, comparamos la función $f(n)$ con la función $n^{\log_b a}$ Intuitivamente la mayor de las dos funciones determina la solución de la recurrencia. Si, como en el caso 1, la función $n^{\log_b a}$ es la mayor, entonces la solución es $t_n = \theta(n^{\log_b a})$. Si, como en el caso 3, la mayor es la función $f(n)$, entonces la solución es $t_n = \theta(f(n))$ Si, como en el caso 2, las dos funciones son del mismo tamaño, multiplicamos por un factor logarítmico y la solución resulta $t_n = \theta(n^{log_b a} \cdot lg\ n) = \theta(f(n) \cdot lg\ n)$.

Detrás de esta deducción intuitiva, es necesario entrar en detalle en algunos tecnicismos. En el primer caso no sólo $f(n)$ debe ser más pequeña que $n^{\log_b a}$, sino que debe ser *polinómicamente* más pequeña. Esto es, $f(n)$ debe ser asintóticamente más pequeña que $n^{\log_b a}$ por un factor de n^{ε} para alguna constante $\varepsilon > 0$. En el tercer caso no sólo debe $f(n)$ ser más grande que $n^{\log_b a}$, sino que debe ser *polinómicamente* mayor, además de satisfacer la condición de "regularidad" $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$.

Notar que los tres casos no cubren todas las posibilidades para $f(n)$, hay una "ventana" entre los casos uno y dos donde la función $f(n)$ es menor que $n^{\log_b a}$ pero no polinómicamente menor. Similarmente hay otra ventana entre los casos 2 y 3 cuando $f(n)$ es mayor que $n^{\log_b a}$ pero no polinómicamente mayor. Si la función $f(n)$ cae en alguna de estas ventanas o si la condicion de regularidad no se cumple, entonces no se puede resolver el teorema maestro para esa recurrencia.

Ejemplo 9: Aplicación de teorema Maestro

Sea

$$t_n = 3t_{n/4} + n \cdot log\ n$$

donde:

- $a = 3$
- $b = 4$
- $f(n) = n \cdot log\ n$

Entonces

$$log_b a = log_4 3 \approx 0{,}8$$
$$f(n) \in \Omega(n^{log_4 3 + 0{,}2})$$

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot (n/4) \cdot log(n/4) & \leq & c \cdot n \cdot log\, n \\ 3/4 \cdot \cancel{n} \cdot (log\, n - log\, 4) & \leq & c \cdot \cancel{n} \cdot log\, n \\ 3/4 \cdot log\, n - 3/4 \cdot log\, 4 & \leq & c \cdot log\, n \end{array}$$

con $3/4 \cdot log\, 4 \approx 0{,}45$ y $c = 3/4$, resulta

$$3/4 \cdot log\, n - 0{,}45 \leq (3/4) \cdot log\, n$$

se aplica el Caso 3, entonces podemos decir que:

$$t_n \in \Theta(n \cdot log\, n)$$

Ejemplo 10: Un caso en que no es posible aplicar el Teorema Maestro

Sea

$$t_n = 2t_{n/2} + n \cdot \log n$$

donde:

(1) $a = 2$

(2) $b = 2$

(3) $f(n) = n \cdot \log n$

Entonces

$$n^{log_b a} = n^{log_2 2} = n$$

Así

$$f(n) \in \Omega(n^{log_2 2}) \rightarrow n \cdot \log n \in \Omega(n)$$

Esto es que $f(n)$ es asintóticamente mayor que n. El problema es que $f(n)$ no es *polinómicamente* más grande que n. Para mostrarlo calculamos la siguiente relación:

$$f(n)/n^{\log_b a} = (n \cdot \log n)/n = \log n$$

Así, $\log n$ es asintóticamente menor que n para cualquier constante positiva ε. Consecuentemente la recurrencia cae en la ventana entre el caso 2 y 3 y el teorema maestro según el mecanismo de Cormen no puede ser aplicado en este caso.
Imaginemos que el teorema maestro se puede aplicar y tratamos de verificar las condiciones de la regla de *regularidad* del caso 3.

$$a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$$
$$2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} \leq c \cdot n \cdot \log n$$

$$\log n - \log 2 \leq c \cdot \log n$$

Sabemos que $\log 2 \approx 0,3$, entonces:

$$\log n - 0{,}3 \leq c \cdot \log n$$

$$\log n - c \cdot \log n \leq 0,3$$

$$\log n \cdot (1-c) \leq 0{,}3 \Rightarrow \nexists c < 1/\forall n \text{ se cumpla que } \log n \cdot (1-c) \leq 0{,}3$$

1.9. Cambio de Variable

Esta técnica se aplica cuando n es potencia de un número real a, esto es, $n = a^k$.

Ejemplo 11: Aplicación de cambio de variable

Sea por ejemplo, donde n es una potencia de 2:

$$t_n \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 6 & \text{si } n = 2 \\ 4 \cdot t_{n/2} + n & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Sabiendo que n es una potencia de 2, sustituimos con $n = 2^k$:

$$\begin{aligned} t_{2^k} =& 4 \cdot t_{2^k/2} + 2^k \\ =& 4 \cdot t_{2^{k-1}} + 2^k \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, tomamos una nueva recurrencia $t'_k = t_{2^k}$ y obtenemos la ecuación recurrente

$$t'_k = 4 \cdot t'_{k-1} + 2^k$$

que corresponde a una de las ecuaciones estudiadas anteriormente, y se puede resolver por ecuación característica no homogénea.

$$t'_k = 4 \cdot t'_{k-1} + 2^k$$

$$\begin{array}{rl} t'_k - 4 \cdot t'_{k-1} = & 2^k \\ \text{parte homogénea} & \text{parte no homogénea} \\ x - 4 = 0 & b = 2, d = 0 \\ \therefore (x-4) \cdot (x-2) & \text{es la ecuación característica} \end{array}$$

Siendo las raíces diferentes, la función resultante es:

$$t_k = c_1 \cdot 4^k + c_2 \cdot 2^k$$

Resta deshacer el cambio de variables que se realizó anteriormente para obtener la función no recurrente dependiente de n. Si sabemos que $n = 2^k$ entonces $k = log_2\ n$. Deshaciendo el cambio que realizamos al principio obtenemos que

$$\begin{aligned}
t_k &= c_1 \cdot 4^k + c_2 \cdot 2^k \\
t_n &= c_1 \cdot 4^{log_2\ n} + c_2 \cdot 2^{log_2\ n} \\
t_n &= c_1 \cdot n^{log_2\ 4} + c_2 \cdot n^{log_2\ 2} \\
t_n &= c_1 \cdot n^2 + c_2 \cdot n^1 \\
t_n &= c_1 \cdot n^2 + c_2 \cdot n
\end{aligned}$$

Conociendo las condiciones iniciales tenemos que:

$$\begin{aligned}
t_1 =& c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2 \\
t_2 =& c_1 \cdot 2^2 + c_2 \cdot 2 = 6 \\
& (1 - c_2) \cdot 4 + c_2 \cdot 2 = 6 \\
& 4 - c_2 \cdot 4 + c_2 \cdot 2 = 6 \\
& - c_2 \cdot 2 = 2 \\
& c_2 = -1 \\
& c_1 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore t_n &= 2 \cdot n^2 - n \\
t_n &\in \Theta(n^2)
\end{aligned}$$

Ejemplo 12: Aplicación de cambio de variable

Sea por ejemplo, donde n es una potencia de 2:

$$t_n \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ 2 \cdot t_{n/2} + n \cdot log\ n & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Sabiendo que n es una potencia de 2, sustituimos con $n = 2^k$. Por conveniencia, asumimos que la base del logaritmo es 2:

$$\begin{aligned}
t_{2^k} =& 2 \cdot t_{2^k/2} + 2^k \cdot log_2\ 2^k \\
=& 2 \cdot t_{2^{k-1}} + 2^k \cdot k \cdot log_2\ 2 \\
=& 2 \cdot t_{2^{k-1}} + 2^k \cdot k
\end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, tomamos una nueva recurrencia $t'_k = t_{2^k}$ y obtenemos la ecuación recurrente

$$t'_k = 2 \cdot t'_{k-1} + 2^k \cdot k \Rightarrow t'_k - 2 \cdot t'_{k-1} = 2^k \cdot k$$

que corresponde a una de las ecuaciones estudiadas anteriormente, y se puede resolver por ecuación característica no homogénea. La ecuación característica de la parte homogénea es $x - 4 = 0$ y su raíz $r = 4$. La parte no homogénea de la ecuación tiene a $b = 2$ y $d = 1$, por lo que la ecuación característica resulta $(x - 2)^2$. Siendo las 3 raices obtenidas iguales, se puede extresar t'_k y t_n como:

$$\begin{aligned} t'_k &= c_1 \cdot 2^k + c_2 \cdot k \cdot 2^k + c_3 \cdot k^2 \cdot 2^k \\ t_n &= c_1 \cdot 2^{log_2\,n} + c_2 \cdot log_2\,n \cdot 2^{log_2\,n} + c_3 \cdot (log_2\,n)^2 \cdot 2^{log_2\,n} \\ &= c_1 \cdot n^{log_2\,2} + c_2 \cdot log_2\,n \cdot n^{log_2\,2} + c_3 \cdot (log_2\,n)^2 \cdot n^{log_2\,2} \\ &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot log_2\,n \cdot n^+ c_3 \cdot (log_2\,n)^2 \cdot n \end{aligned}$$

Sin tener información suficiente para conocer los valores de las constantes c_1, c_2 y c_3, conluímos que

$$t_n \in \Theta(n \cdot (log\,n)^2)$$