Recurrencias

Facultad de Informática

October 21, 2024

Indice

Tabla de contenidos

Sucesiones

Notación

Sucesión matemática

Secuencias de números relacionados entre si. Es una aplicación con dominio en naturales y codominio cualquier otro conjunto, en nuestro caso funciones. Es importante el orden en que aparecen los términos.

Notaciones de sucesioness.

- $(t_k)_{k=1}^{m} = t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m$
- $\{t_n\} = t_1, t_2, t_3, \ldots$
- $\{t_n\}\ n \in \mathbb{N} = t_1, t_2, t_3, \ldots$

Serie matemática

Suma de los términos de una sucesión matemática.

Sucesiones
Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} .

Sucesiones
Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} .
- Las **condiciones iniciales** t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} son dados en forma **explícita**.

Sucesiones

Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, $t_1, \ldots, t_{n-1}$.
- Las **condiciones iniciales** t_0, $t_1, \ldots, t_{n-1}$ son dados en forma **explícita**.
- Resolver una recurrencia es dar una fórmula no recursiva para el término general t_n.

Sucesiones
Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, $t_1, \ldots, t_{n-1}$.
- Las **condiciones iniciales** t_0, $t_1, \ldots, t_{n-1}$ son dados en forma **explícita**.
- Resolver una recurrencia es dar una fórmula no recursiva para el término general t_n.
- Una **ecuación recurrente** es un tipo específico de relación de recurrencia.

Sucesiones
Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, $t_1 , \ldots , t_{n-1}$.
- Las **condiciones iniciales** t_0, $t_1 , \ldots , t_{n-1}$ son dados en forma **explícita**.
- Resolver una recurrencia es dar una fórmula no recursiva para el término general t_n.
- Una **ecuación recurrente** es un tipo específico de relación de recurrencia.
- Relación de recurrencia, su orden:

Sucesiones
Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} .
- Las **condiciones iniciales** t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} son dados en forma **explícita**.
- Resolver una recurrencia es dar una fórmula no recursiva para el término general t_n.
- Una **ecuación recurrente** es un tipo específico de relación de recurrencia.
- Relación de recurrencia, su orden:
  - Primer orden: sólo depende del elemento inmediato anterior (ej. $t_n = a_0 \cdot t_{n-1} + a_1$) .

Sucesiones

Notación

- Recurrencia: se relaciona t_n con alguno de sus predecesores t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} .
- Las **condiciones iniciales** t_0, t_1 , . . . , t_{n-1} son dados en forma **explícita**.
- Resolver una recurrencia es dar una fórmula no recursiva para el término general t_n.
- Una **ecuación recurrente** es un tipo específico de relación de recurrencia.
- Relación de recurrencia, su orden:
    - Primer orden: sólo depende del elemento inmediato anterior (ej. $t_n = a_0 \cdot t_{n-1} + a_1$) .
    - Segundo orden: Ejemplo $t_n = 4t_{n-2}$.

Recurrencia

Notación

Utilización

- Se utilizarán la solución de las recurrencias para el análisis de algoritmos recursivos.
- Los ejemplos los colocaremos en función de t_n o $T(n)$.
- Llamaremos a las constantes con las letras a_i, c_i, o k_i,

Posibles Notaciones para la misma relación de recurrencia:

- $T_n = a_0 T_{n-1} + a_1 T_{n-2} + \ldots + a_{k+1} T_{n-k}$
- $T(n) = a_0 T(n-1) + a_1 T(n-2) + \ldots + a_{k+1} T(n-k)$
- $t_n = a_0 t_{n-1} + a_1 t_{n-2} + \ldots + a_{k+1} t_{n-k}$

Solución de recurrencias

Métodos

- Expansión de la recurrencia
- Método del Teorema Maestro
- Método de la Ecuación Característica
- Cambio de Variable

Tabla de contenidos

Solución de recurrencias

Métodos

Cuando se utiliza

- Se puede utilizar sólo en los casos que hay un grado de recurrencia.
- A veces es difícil identificar el patrón.

Ejemplo: Torres de Hanoi

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- $T(1) = 1$
- $T(n) = 2T(n-1) + 1$

Solución de recurrencias
Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $T(4) = 2 \cdot T(3) + 1 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $T(4) = 2 \cdot T(3) + 1 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- $T(5) = 2 \cdot T(4) + 1 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

Solución de recurrencias
Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $T(4) = 2 \cdot T(3) + 1 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- $T(5) = 2 \cdot T(4) + 1 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- ....

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $T(4) = 2 \cdot T(3) + 1 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- $T(5) = 2 \cdot T(4) + 1 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- ....
- $T(k) = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$

Solución de recurrencias

Métodos

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2 \cdot T(n-1) + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se aplica varias veces la fórmula, hasta encontrar una regularidad.

- $T(1) = 1$
- $T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1$
- $T(3) = 2 \cdot T(2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot T(1) + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $T(4) = 2 \cdot T(3) + 1 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- $T(5) = 2 \cdot T(4) + 1 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- ....
- $T(k) = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$
- $T(n) \in \theta(2^n)$

Tabla de contenidos

Método de la Ecuación Característica

Pasos para obtener la solución

Partiendo de una función recurrente de grado k del tipo:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0, n \geq k$$

Si es una recurrencia lineal se busca el **polinomio característico**

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k x^0 = 0$$

a partir de allí se busca la solución:

Ejemplo: $t_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$.

Pero, cómo llegamos?

Método de la Ecuación Característica

Ecuación polinómica

- Método para algoritmos con recurrencia asociadas a ecuación polinómica: ecuación característica,
- Soluciones básicas de la ecuación de la recurrencia.
- La solución general es combinación lineal de términos anteriores.
- El orden de la recurrencia es el número de términos anteriores.
- De acuerdo a la forma de la ecuación característica, se clasifica en:
  - Homogéneas
  - No homogéneas

Método de la Ecuación Característica

Recurrencia lineal homogénea

Nuestro problema inicial se puede observar como

$$t_n = a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \ldots + a_k t_{n-k}, \text{ con } n \geq k$$

Nosotros lo veremos como esta expresión

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0, \text{ con } n \geq k$$

Lo cual es una recurrencia lineal homogénea de grado k, con coeficientes constantes

Método de la Ecuación Característica

Recurrencia lineal homogénea

Recurrencia lineal homogénea, grado k, con coeficientes constantes

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0, n \geq k$$

Donde

- **Recurrencia:** está formada por términos recurrentes
- **Lineal:** no aparecen productos o potencia de t, sólo suma
- **Homogénea:** La combinación lineal de t_i es $= 0$

Método de la Ecuación Característica

Cómo llegar a la solución

1. Si tuviéramos esta ecuación eficiencia de un algoritmo:

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$$

2. Podemos identificar la ecuación asociada:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

3. La solución será llegar a una ecuación no recurrente para t_n.

$$t_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$$

4. Si encontramos las raices, ejemplo $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$ entonces:

$$t_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 2^n, \qquad t_n \in O(3^n)$$

Método de la Ecuación Característica

Pasos para llegar a la solución

1. Se obtiene a partir de analizar el algoritmo
2. Podemos identificar la ecuación asociada
   - $a_0 \cdot t_n + a_1 \cdot t_{n-1} + a_3 \cdot t_{n-2} + \ldots.. + a_{n-k} \cdot t_{n-k} = 0$
   - Si consideramos $t_n = x^n$ surge el polinomio característico $a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \ldots.. + a_{n-k} \cdot x^{n-k} = 0$

ejemplo, para n>2

$$a_0 \cdot t_n = -a_1 \cdot t_{n-1} - a_2 \cdot t^{n-2}$$

$$a_0 \cdot t_n + a_1 \cdot t_{n-1} + a_2 \cdot t^{n-2} = 0$$

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} = 0$$

$$x^{n-2}(a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^0) = 0$$

$$a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^0 = 0$$

Encontrar las raíces solución de la ecuación r_1 y r_2, Bhaskara

Método de la Ecuación Característica

Polinomio característico

La solución de una ecuación característica será encontrar las raíces, lo que da origen al polinomio característico

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k k^0 = 0$$

Forma canónica

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - r_i)$$

- r_i únicas soluciones de la ecuación $p(x)$, pueden ser complejas,
- $x = r_i$ es una solución de la ecuación y por lo tanto
- $p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - r_i) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_k)$

Tabla de contenidos

Recurrencia Homogénea

Método de la Ecuación Característica

Ecuación homogénea: $c_0 t_n + c_1 t_{n-1} + \ldots + c_k t_{n-k} = 0, n \geq k$

Solución mediante la fórmula:

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot P_i(n) \cdot r_i^n$$

La función puede tener:

1. todas sus raíces diferentes $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$
2. raíces iguales $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$ donde m es la multiplicidad de la raíz
3. solución compuesta $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n + \sum_{i=1}^{m} d_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
    1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz

Recurrencia lineal homogénea
Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
    1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz
5. $t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
   1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz
5. $t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$
6. Determinar constantes c_1 y c_2

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
    1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz
5. $t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$
6. Determinar constantes c_1 y c_2
    - $t_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = c_1 = 0$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
   1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz
5. $t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$
6. Determinar constantes c_1 y c_2
   - $t_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = c_1 = 0$
   - $t_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 1,$ entonces $c_2 = 1/2$

Recurrencia lineal homogénea

Ejemplo con raices iguales

1. $t_n - 4t_{n-1} + 4t_{n-2} = 0$ con $t_0 = 0$ con , $t_1 = 1$
2. Ecuación característica asociada: $x^2 - 4x + 4 = 0$
3. Por Bhaskara obtengo raices, resultan $r_1 = r_2 = 2$.
4. Raices iguales: $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n$,
    1. $m = 2$ es la multiplicidad de la raíz
5. $t_n = c_1 \cdot n^0 \cdot 2^n + c_2 \cdot n^1 \cdot 2^n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n$
6. Determinar constantes c_1 y c_2
    - $t_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = c_1 = 0$
    - $t_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = 2 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = 1,$ entonces $c_2 = 1/2$
7. $$t_n = n \cdot 2^{n-1}$$

Recurrencia lineal homogénea
Ejemplo raices distintas

1. T(n) - 5 T(n-1) + 6 T(n-2) = 0
   $\cdot t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$
2. Se busca la ecuación característica asociada:
   $x^2 - 5x + 6 = 0$
3. Se encuentran las raices: $r_1 = 3$ y $c_2 = 2$, son distintas
   $$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n,$$
4. No se pueden determinar constantes c_1 y c_2,
   $t_n = c_0 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$,
5. Se obtiene el orden de la solución

$$t_n \in O(3^n)$$

Recurrencia lineal homogénea

Solución a distintas ecuaciones

Solución respecto a raices

- Todas sus raices diferentes:
  - $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n$
- Raices iguales, m es multiplicidad de raiz:
  - $t_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n,$
- Solución compuesa:
  - $t_n = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot r_j^n + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot n^{i-1} \cdot r^n.$