Asíntotas Omicron, Omega, Theta

Facultad de Informática

August 30, 2024

Indice

Tabla de contenidos

Asíntotas

Recordar

Orden O (Omicron)

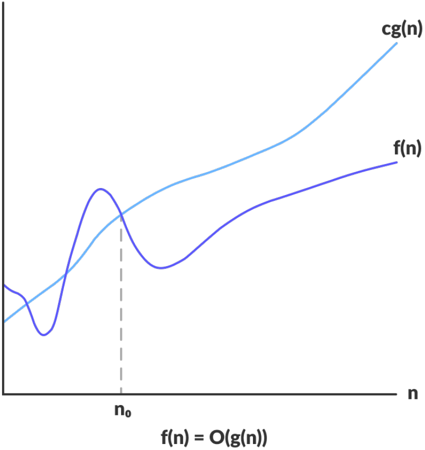
Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$. Se define el conjunto de funciones de orden O de g como:

$$O(g(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) | \exists\ c \in \mathbb{R}, c > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :$$
$$t(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}$$

Brassard and Bratley [1988]

Orden

Gráfica de Orden



Orden
Propiedades

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in O(f)$.
2. $f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subset O(g)$.
3. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge g \in O(f)$.
4. Si $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$
5. Si $f \in O(g) \wedge f \in O(h) \Rightarrow f \in O(min(g, h))$.
6. Regla de la suma: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(max(g, h))$.
7. Regla del producto: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in O(g \cdot h)$.
8. Si existe $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
    1. si $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$
    2. si $k = 0$ entonces $f \in O(g)$, es decir $O(f) \subset O(g)$, pero sin embargo se verifica que $g \notin O(f)$.

Orden

Cómo demostrar un orden

$T(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow$ Cómo demostrar que una función están en el orden de otra, a partir de la regla del límite:
Sea $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ se cumple que:

- Si $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}$ entonces $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$
- Si $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n))$
- Si $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$

Demostraciones

Para demostrar relación entre funciones

En general

- **Absurdo**: Su negación da lugar a una contradicción matemática.
- **Regla del umbral generalizado**: Detectar el valor de la constante c que verifique la relación $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todos los $n \geq n_0$ (n_0 como 1 en lo posible).
- **Regla del límite**: Calcular el límite para $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

Asíntotas
Orden

Comprobar

$$f(n) \text{ es } O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}^+, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0,$$
$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

PROBAR: $(100n + 5) \in O(n^2)$
Probarlo encontrando el valor n_0 y el valor c

Asíntotas
Orden

Comprobar

$$f(n) \text{ es } O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}^{+}, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0,$$
$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

PROBAR: $(100n + 5) \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$

$(100n + 5) \leq (100n + n) = 101n \leq 101\mathrm{n}^2$, $\forall n \geq 5$,
tomamos $c = 101, n_0 = 5$

se cumple que $(100n + 5) \leq c \cdot n^2$, $\forall n \geq 5, c = 101$
$\Rightarrow (100n + 5) \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$

Orden

Cómo demostrar un orden

Partiendo de la regla del límite:
Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

- Decimos $f(n) \in o(g(n))$, es cierto que
  - La comparación es $f(n) < g(n)$
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- Decimos $f(n) \in O(g(n))$, es cierto que
  - La comparación es $f(n) \leq g(n)$
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ o
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C$ (constante)

Tabla de contenidos

Omega
Definición

Omega Ω

Dada una función $f(n)$, las funciones $g(n)$ que son cota inferior, las denominamos $\Omega(g(n))$ y crecen a lo sumo tan lentamente como $f(n)$.

Dada la cota inferior de un algoritmo podemos asegurar que nunca se utilizará un orden inferior al de la cota.

Omega
Formalizando definición

Notación Ω (cota inferior)

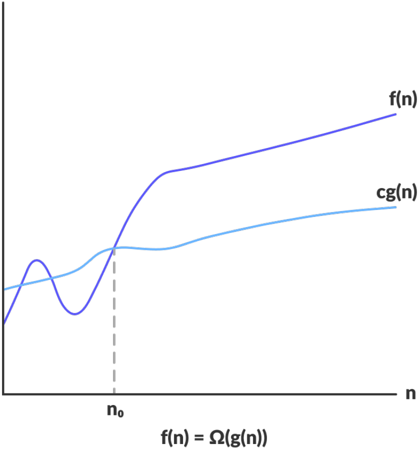
$T(n)$ es $\Omega(g(n))$ cuando
$\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow T(n) \geq c \cdot g(n)$

Formalmente:

$$\Omega(g(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) | \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, t(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ es de orden Ω de g si $f \in \Omega(g(n))$.

Omega
Gráfico



Omega

Propiedades

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in \Omega(f)$.
2. $f \in \Omega(g) \Rightarrow \Omega(f) \subset \Omega(g)$.
3. $\Omega(f) = \Omega(g) \Leftrightarrow f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(f)$.
4. Si $f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(h)$
5. Si $f \in \Omega(g) \wedge f \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(min(g, h))$.
6. Regla de la suma: Si $f_1 \in \Omega(g) \wedge f_2 \in \Omega(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Omega(g + h)$.
7. Regla del producto: Si $f_1 \in \Omega(g) \wedge f_2 \in \Omega(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \Omega(g \cdot h)$.
8. Si existe $\lim_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
    1. si $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces $\Omega(f) = \Omega(g)$
    2. si $k = \infty$.

Omega
Ejemplo

Comprobar cota inferior

Se cumple? $n^2 \in \Omega(n^3)$
Sean f(n) = n^2 y g(n) = n^3
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \approx 0$
por lo tanto, por propiedad (3) $\quad n^2 \notin \Omega(n^3)$

Ahora probar $n^3 \in \Omega(n^2)$

Omega
Ejemplo

Probar cota inferior

$t(n) \in \Omega(g(n))$ cuando $\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, t(n) \geq c \cdot g(n)$, $\forall n \geq n_0$

PROBAR: $2n^3 \in \Omega(n^2)$

Probarlo encontrando el valor n_0 y el valor c

- $(2n^3) \geq (2n^2), \forall n \geq 1,$
- tomamos $c = 2, n_0 = 1,$
- se cumple que $2n^3 \geq c \cdot n^2, \forall n \geq n_0$

Levitin [2011]

Omega
Ejemplo

Probar que $f(x) \in \Omega(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \in O(f(x))$

$(\rightarrow)$ $f(x) \in \Omega(g(x)) \rightarrow g(x) \in O(f(x))$

por definición de Ω : $f(x) \in \Omega(g(x)) \rightarrow f(x) \geq c \cdot g(x)$, $c > 0$

$$\Rightarrow f(x) \,.\, \frac{1}{c} \geq g(x) \,,\, siendo\ \frac{1}{c} = d$$

$$\Rightarrow f(x) \,.\, d \geq g(x) \,,\, por\ lo\ tanto\ g(x) \in O(f(x))$$

$(\leftarrow)$ $g(x) \in O(f(x)) \rightarrow f(x) \in \Omega(g(x))$

por definición de O : $g(x) \in O(f(x)) \rightarrow g(x) \leq c.f(x)$, $c > 0$

$$\Rightarrow g(x) \,.\, \frac{1}{c} \leq f(x) \,,\, siendo\ \frac{1}{c} = d$$

$$\Rightarrow g(x) \,.\, d \leq f(x) \,,\, por\ lo\ tanto\ f(x) \in \Omega(f(x))$$

Tabla de contenidos

Theta
Definición

Theta Θ

Dada una función $f(n)$, es de orden exacto o está acotada tanto superior como infeirormente, las funciones $g(n)$ que son cota inferior y superior $f(n)$, las denominamos $\Theta(g(n))$.

Se define el conjunto de funciones de orden Θ (Theta) como:

$$\Theta(g(n)) = \{t : \mathbb{N} \to [0, \infty) | \exists c, d \in \mathbb{R}^+; \exists n_0 \in \mathbb{N} :$$

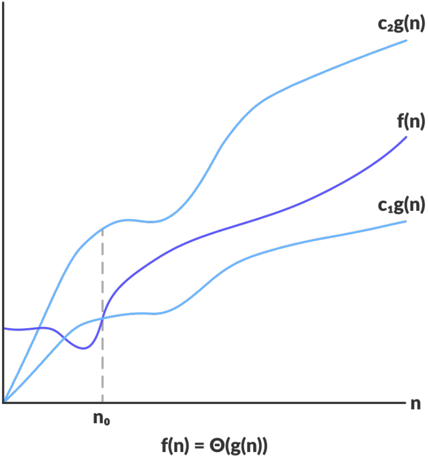
$$\forall n \geq n_0, c \cdot g(n) \leq t(n) \leq d \cdot g(n)\}$$

Theta
Propiedades

Propiedades de Θ

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in \Theta(f)$.
2. $f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) \subset \Theta(g)$.
3. $\Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(f)$.
4. Si $f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$
5. Regla de la suma: Si $f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Theta(max(g, h))$.
6. Regla del producto: Si $f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \Theta(g \cdot h)$.
7. Si existe $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
    1. $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces $\Theta(f) = \Theta(g)$

Theta
Gráfico



Theta
Ejemplo

Indicar la validez

Se cumple ? $2^n \in \theta(2^{n+1})$

Sean

$$f(n) = 2^n, g(n) = 2^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n.2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

por lo tanto, por propiedad (7) $\quad 2^n \in \theta(2^{n+1})$

Tabla de contenidos

Big O vs little o
Diferencias

Big O vs Little o

Si bien ambas son cotas, la diferencia fundamental es que .
en cuando uno utiliza O está diciendo la función $f(n)$ *no crece más rápido que* $g(n)$, en cambio cuando utiliza o está diciendo, la función $f(n)$ *crece estrictamente más lento que* $g(n)$.

La diferencia es entre $\leq$ versus $<$

Ejemplos:

- $n^2 \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$
- $n^2 \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^3)$
- $n^2 \notin \mathrm{o}(\mathrm{n}^2)$
- $n^2 \in \mathrm{o}(\mathrm{n}^3)$

Resumen

- $f(n) \in O(g(n))$ (big-o) Indica que $f(n)$ es asintóticamente menor o igual a $g(n)$.
- $f(n) = o(g(n))$ (little-o) Indica que $f(n)$ es asintóticamente menor que $g(n)$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ (big-omega) Indica que $f(n)$ es asintóticamente mayor o igual a la tasa de a $g(n)$.
- $f(n) = \omega(g(n))$ (little-omega) Indica que $f(n)$ es asintóticamente mas grande que $g(n)$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ (theta) Indica que $f(n)$ es asintóticamente igual a $g(n)$.

Comparativa de Θ , O, Ω

Propiedades de Θ , O, Ω

1. Para cualquier función f $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.
2. $f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subset O(g)$.
3. $f \in \Omega(g) \Rightarrow \Omega(f) \subset \Omega(g)$.
4. $f \in \Theta(g) \Rightarrow \Theta(f) \subset \Theta(g)$.
5. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge g \in O(f)$.
6. $\Omega(f) = \Omega(g) \Leftrightarrow f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(f)$.
7. $\Theta(f) = \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(f)$.
8. Si $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$
9. Si $f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(h)$
10. Si $f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h)$

Comparativa de Θ , O, Ω

Propiedades de Θ , O, Ω

1. Si $f \in O(g) \wedge f \in O(h) \Rightarrow f \in O(min(g, h))$.
2. Si $f \in \Omega(g) \wedge f \in \Omega(h) \Rightarrow f \in \Omega(min(g, h))$.
3. Regla de la suma: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(max(g, h))$.
4. Regla de la suma: Si $f_1 \in \Omega(g) \wedge f_2 \in \Omega(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Omega(g + h)$.
5. Regla de la suma: Si $f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \Theta(max(g, h))$.

Comparativa de Θ , O, Ω

Propiedades de Θ , O, Ω

1. Regla del producto:
   Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in O(g \cdot h)$.
2. Si $f_1 \in \Omega(g) \wedge f_2 \in \Omega(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \Omega(g \cdot h)$.
3. Si $f_1 \in \Theta(g) \wedge f_2 \in \Theta(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \Theta(g \cdot h)$.
4. Si existe $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
   - si $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces
     $O(f) = O(g)$, $\Omega(f) = \Omega(g)$, $\Theta(f) = \Theta(g)$
   - si $k = 0$ entonces $O(f) \subset O(g)$
     $f \in O(g)$, pero $g \notin O(f)$, $g \in \Omega(f)$, $f \notin \Omega(g)$
   - si $k = \infty$ entonces $O(g) \subset O(f)$
     $g \in O(f)$, pero $f \notin O(g)$

Referencias I

G. Brassard and P. Bratley. *Algorithmics - Theory and Practice*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

Anany Levitin. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms (3$^{\underline{a}}$ edição)*. Addison-Wesley, 2011.