Análisis de Algoritmos 2024

Trabajo Práctico 1 - Demostraciones por Inducción

Fecha de entrega: 23 de Agosto de 2024

El objetivo de este trabajo es realizar los ejercicios propuestos de forma colaborativa. Para los ejercicios compartidos entre grupos, pueden compartir el desarrollo del ejercicio o realizar dos resoluciones diferentes.
Todos los ejercicios deben ser resueltos por todos los estudiantes, pero en este trabajo sólo deben ser publicados los que te tocaron según la asignación de la tabla siguiente. Dicha asignación también aplica a la presentación oral del TP.
Por supuesto, si querés compartir la resolución de otros ejercicios en este proyecto Overleaf, también son bienvenidas pero no es obligatorio.
Colocá el nombre del/de los estudiante/s que resolvió/resolvieron el ejercicio al iniciar la resolución del ejercicio que te tocó.
Resolvé el ejercicio que te tocó a continuación del enunciado.

Las respuestas deben quedar escritas en este mismo .tex, en Overleaf.

Grupos (Estudiantes por grupo)	**Ej. asignado**
Grupo 1 (Sthefany, Victoria, Paula, Adriano, Facundo)	1
Grupo 2 (Sebastián, Bautista, Antonio, Albany, Luis)	8
Grupo 3 (Lucas, Valentina, Nicanor, Ignacio, Franco)	3
Grupo 4 (Manuel, Jan Ulises, Demian , Luciano,)	7
Grupo 6 (Roman, Ulises, Guillermo, Jamiro, Juan)	4
Grupo 7 (Christopher, Tomás, Joaquín, Leonard, Facundo)	6
Grupo 8 (Facundo, Belén, Jeremías, Bruno, Kevin)	5

en una línea así se van a indicar las observaciones vistas en clase que no se resuelvan en el momento

1. Demostrar por inducción

1. Demostrar que la suma de los primeros n enteros impares positivos es n^2.
2. Si n es un entero positivo, entonces $n \cdot (n+1)$ es divisible por 2.

Demostración de ejemplo - Autoras NaNa

Probando por el mecanismo de inducción generalizada, podemos decir que nuestra hipótesis es: Sea $n \in \mathbb{Z}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ | P(n) = n \cdot (n+1) = 2 \cdot k$
y lo que tenemos que probar es que
$\exists k_a \in \mathbb{Z}^+ | n+1 \cdot ((n+1)+1) = 2 \cdot k_a$

Desarrollo de la prueba:
$P(1) = 1.(1+1) = 2$, donde $k = 2$
$P(2) = 2.(2+1) = 6$ donde $k = 3$
Por hipótesis $P(n) = n \cdot (n+1) = 2 \cdot k$
$P(n+1) = (n+1) \cdot ((n+1)+1) = (n+1) \cdot (n+2)$ **(1)**
En este punto podemos asumir dos casos:
Si n es par $\rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^+ | n = 2 \cdot c$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c + 1) \cdot (2 \cdot c + 2)$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c + 1) \cdot 2 \cdot (c+1) = 2 \cdot k$ **(2)**
donde $k = (2 \cdot c + 1) \cdot (c+1)$

Si n es impar $\rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{Z}^+ | n = 2 \cdot c_1 - 1$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c_1 - 1 + 1) \cdot (2 \cdot c_1 - 1 + 2)$
$\rightarrow P(n+1) = 2 \cdot c_1 \cdot (2 \cdot c_1 + 1) = 2 \cdot k_1$ **(3)**
donde $k_1 = c_1 \cdot (2 \cdot c_1 + 1)$

Así, por **(2)** y **(3)** podemos decir que $P(n+1) = 2 \cdot k_a, k_a \in \mathbb{Z}^+$ **(4)**
Queda demostrado entonces que $n \cdot (n+1)$ es divisible por 2 para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

3. Demuestre que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple

$$7 + 13 + 13 + 19 + \cdots + (6n+1) + (6n+7) = 6 \cdot n^2 + 14 \cdot n$$

4. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n+4) = (n+1) \cdot (3n+4)$$

5. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n \cdot (2n-1)$$

6. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$2 + 7 + 12 + \cdots + (5n+2) = (n+1)(5n+4)/2$$

7. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$
$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = (3^{n+1} - 1)/2$$

8. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$
$$2 + 6 + 10 + ... + (4 \cdot n - 2) = 2 \cdot n^2$$