# Análisis de Algoritmos 2024

Trabajo Práctico 1 - Demostraciones por Inducción

*Fecha de entrega: 23 de Agosto de 2024*

El objetivo de este trabajo es realizar los ejercicios propuestos de forma colaborativa. Para los ejercicios compartidos entre grupos, pueden compartir el desarrollo del ejercicio o realizar dos resoluciones diferentes.
Todos los ejercicios deben ser resueltos por todos los estudiantes, pero en este trabajo sólo deben ser publicados los que te tocaron según la asignación de la tabla siguiente. Dicha asignación también aplica a la presentación oral del TP.
Por supuesto, si querés compartir la resolución de otros ejercicios en este proyecto Overleaf, también son bienvenidas pero no es obligatorio.
*Colocá el nombre del/de los estudiante/s que resolvió/resolvieron el ejercicio al iniciar la resolución del ejercicio que te tocó.*
*Resolvé el ejercicio que te tocó a continuación del enunciado.*

Las respuestas deben quedar escritas en este mismo .tex, en Overleaf.

| **Grupos (Estudiantes por grupo)** | **Ej. asignado** |
|---|---|
| Grupo 1 (Sthefany, Victoria, Paula, Adriano, Facundo ) | 1 |
| Grupo 2 (Sebastián, Bautista, Antonio, Albany, Luis) | 8 |
| Grupo 3 (Lucas, Valentina, Nicanor, Ignacio, Franco) | 3 |
| Grupo 4 (Manuel, Jan Ulises, Demian , Luciano, ) | 7 |
| Grupo 6 (Roman, Ulises, Guillermo, Jamiro, Juan) | 4 |
| Grupo 7 (Christopher, Tomás, Joaquín, Leonard, Facundo ) | 6 |
| Grupo 8 (Facundo, Belén, Jeremías, Bruno, Kevin) | 5 |

en una línea así se van a indicar las observaciones vistas en clase que no se resuelvan en el momento

## 1. Demostrar por inducción

1. Demostrar que la suma de los primeros n enteros impares positivos es $n^2$.
2. Si $n$ es un entero positivo, entonces $n \cdot (n+1)$ es divisible por 2.

**Demostración de ejemplo - Autoras NaNa**

Probando por el mecanismo de inducción generalizada, podemos decir que nuestra hipótesis es: Sea $n \in \mathbb{Z}^+, \exists k \in \mathbb{Z}^+ | P(n) = n \cdot (n+1) = 2 \cdot k$
y lo que tenemos que probar es que
$\exists k_a \in \mathbb{Z}^+ | n + 1 \cdot ((n+1)+1) = 2 \cdot k_a$

Desarrollo de la prueba:
$P(1) = 1.(1+1) = 2$, donde $k = 2$
$P(2) = 2.(2+1) = 6$ donde $k = 3$
Por hipótesis $P(n) = n \cdot (n+1) = 2 \cdot k$
$P(n+1) = (n+1) \cdot ((n+1)+1) = (n+1) \cdot (n+2)$ **(1)**
En este punto podemos asumir dos casos:
Si $n$ es par $\rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^+ | n = 2 \cdot c$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c + 1) \cdot (2 \cdot c + 2)$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c + 1) \cdot 2 \cdot (c+1) = 2 \cdot k$ **(2)**
donde $k = (2 \cdot c + 1) \cdot (c + 1)$

Si $n$ es impar $\rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{Z}^+ | n = 2 \cdot c_1 - 1$
$\rightarrow P(n+1) = (2 \cdot c_1 - 1 + 1) \cdot (2 \cdot c_1 - 1 + 2)$
$\rightarrow P(n+1) = 2 \cdot c_1 \cdot (2 \cdot c_1 + 1) = 2 \cdot k_1$ **(3)**
donde $k_1 = c_1 \cdot (2 \cdot c_1 + 1)$

Así, por **(2)** y **(3)** podemos decir que $P(n+1) = 2 \cdot k_a, k_a \in \mathbb{Z}^+$ **(4)**
Queda demostrado entonces que $n \cdot (n+1)$ es divisible por 2 para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$

3. Demuestre que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple

$$7 + 13 + 13 + 19 + \cdots + (6n+1) + (6n+7) = 6 \cdot n^2 + 14 \cdot n$$

4. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n+4) = (n+1) \cdot (3n+4)$$

5. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n \cdot (2n-1)$$

6. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$2 + 7 + 12 + \cdots + (5n+2) = (n+1)(5n+4)/2$$

7. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = (3^{n+1} - 1)/2$$

Ejercicio Nº7 - Grupo 4: Triñanes, Jan, Sepulveda, Wernly, Corrales

**Hipótesis Inductiva:**

$$p(k) : \sum_{i=0}^{k} 3^i = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

**Tesis:**

$$p(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \frac{3^{(k+1)+1} - 1}{2}$$

Primero, debemos verificar que la fórmula es verdadera para $P(0)$:

$$P(0) : \sum_{i=0}^{0} 3^i = \frac{3^{0+1} - 1}{2}$$

$$P(0) : 3^0 = \frac{2}{2}$$

$$P(0) : 1 = 1$$

Luego, se cumple P(0). Ahora debemos verificar que la formula es verdadera para $P(1)$:

$$P(1) : \sum_{i=0}^{1} 3^i = \frac{3^{1+1} - 1}{2}$$

$$P(1) : 3^0 + 3^1 = \frac{8}{2}$$

$$P(1) : 4 = 4$$

Como P(0) y P(1) se cumplen, ahora tenemos que demostrar que se cumpla para $\forall k \in N_0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 3^i &= \underbrace{3^0 + 3^1 + \cdots + 3^k}_{\text{Sumatoria}} + 3^{k+1} \\
&= (\sum_{i=0}^{k} 3^i) + 3^{k+1} \quad \textit{(reemplazo por sumatoria)} \\
&= \frac{3^{(k+1)} - 1}{2} + 3^{k+1} \quad \textit{(hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{3^{(k+1)} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} \quad \textit{(denominador común)} \\
&= \frac{3 \cdot 3^{(k+1)} - 1}{2} \quad \textit{(agrupación)} \\
&= \frac{3^{(k+1)+1} - 1}{2} \quad \textit{(propiedad de la potencia)}
\end{aligned}$$

Luego, como llegamos a la tesis, se cumple que

$$\forall k \in N_0, p(k) : \sum_{i=0}^{k} 3^i = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

8. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2 + 6 + 10 + ..... + (4 \cdot n - 2) = 2 \cdot n^2$$

Resolución Ejercicio 1 - Grupo 1 - Bugli, Cedeño, Coronel, Ferraris, Guido

Demostrar que la suma de los primeros n enteros impares positivos es $n^2$:

Nuestra hipótesis es:

$$\forall n \in \mathbf{N} : P(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \text{es verdadero}$$

Luego hay que probar que P(n+1) también es verdadero, es decir que

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Desarrollo de Prueba

- $P(1) = (2 \cdot 1) - 1 = 1, \quad \text{y} \quad 1^2 = 1$
- $P(2) = [(2 \cdot 1) - 1] + [(2 \cdot 2) - 1] = 4, \quad \text{y} \quad 2^2 = 4$
- $P(3) = [(2 \cdot 1) - 1] + [(2 \cdot 2) - 1] + [(2 \cdot 3) - 1] = 9, \quad \text{y} \quad 3^2 = 9$

Por Hipótesis: $P(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \quad$ es verdadero

Hay que demostrar que $P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$ también lo es.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{\text{Reemplazo por hipótesis}} + [2(n+1)-1] \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= \underbrace{(n+1)^2}_{\text{por binomio cuadrado}}
\end{aligned}$$

Luego, podemos decir que $P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) = (n+1)^2$ es verdadero $\forall k \in \mathbf{N}$.

Queda demostrado entonces que $P(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad$.

**Resolución ejercicio 3** - Grupo 3 [Margni, Fernandez, Villarroel, Mendiberri, Fabris]
*Demostrar que para todo número natural $n \geq 1$ se cumple que*

$$7 + 13 + 13 + 19 + \cdots + (6n + 1) + (6n + 7) = 6 \cdot n^2 + 14 \cdot n$$

Primero escribiremos esto en forma de sumatoria para que se entienda todo mejor (y agrupando)

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n}[(6i + 1) + (6i + 7)] = \sum_{i=1}^{n}(12i + 8) = 6n^2 + 14n \textbf{ (1)}$$

Ahora probaremos que en los primeros casos se cumple

- $P(1) = \sum_{i=1}^{1}(12i + 8) = 12(1) + 8 = 6 + 14 = 6(1)^2 + 14(1)$
- $P(2) = \sum_{i=1}^{2}(12i + 8) = (12(1) + 8) + (12(2) + 8) = 20 + 32 = 24 + 28 = 6(2)^2 + 14(2)$
- $P(3) = \sum_{i=1}^{3}(12i + 8) = (12(1) + 8) + (12(2) + 8) + (12(3) + 8) = 20 + 32 + 44 = 54 + 42 = 6(3)^2 + 14(3)$

Por último debemos realizar el desarrollo de la prueba

- Se supone por hipótesis que P(k) es verdadero, es decir que se cumple que

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k}(12i + 8) = 6k^2 + 14k \textbf{ (2)}$$

- Queremos probar que P(k+1) también es verdadero, es decir que

$$P(k + 1) = \sum_{i=1}^{k+1}(12i + 8) = 6(k + 1)^2 + 14(k + 1)$$

- Demostración:

$$P(k + 1) = \sum_{i=1}^{k+1}(12i + 8) = \sum_{i=1}^{k}(12i + 8) + (12(k + 1) + 8)$$

$$\overset{\text{por (2)}}{=} (6k^2 + 14k) + 12k + 12 + 8$$

$$= 6k^2 + 12k + 6 + 14k + 14$$

$$= 6(k^2 + 2k + 1) + 14(k + 1)$$

$$= 6(k + 1)^2 + 14(k + 1) \textbf{ (3)}$$

$\therefore$ Por (1), (2) y (3) queda demostrado que $\forall n \geq 1$
$7 + 13 + 13 + 19 + \cdots + (6n + 1) + (6n + 7) = 6 \cdot n^2 + 14 \cdot n$

**Resolución ejercicio 4**
**GRUPO 6 - Gattas Roman, Diaz Guillermo, Zuñiga Jamiro, Oliva Ulises**
Demostrar que $\forall n \in \mathbf{N_0} : 4 + 10 + 16 + ... + (6n + 4) = (n + 1).(3n + 4)$

Reescribimos en forma de sumatoria:

$$\forall n \in \mathbf{N} : P(n) = \sum_{i=0}^{n}(6i + 4) = (n + 1).(3n + 4)$$

**Primer paso, verificamos que P(1) es verdadera:**

$$P(1) : \sum_{i=0}^{1}(6i + 4) = (1 + 1) \cdot (3 \cdot 1 + 4)$$

$$P(1) : (6 \cdot 0 + 4) + (6 \cdot 1 + 4) = (1 + 1) \cdot (3 \cdot 1 + 4)$$

$$P(1) : 14 = 14$$

Por lo tanto, P(1) es verdadero

mostrar para los casos n=0, n=2 y n=3

**Segundo paso, supondremos P(k) se cumple y demostraremos que P(K+1) se cumple también**

$$H_i : P(k) = \sum_{i=0}^{k}(6i + 4) = (k + 1) \cdot (3k + 4)$$

$$T_i : P(k + 1) = \sum_{i=0}^{k+1}(6i + 4) = ((k + 1) + 1).(3(k + 1) + 4)$$

**Demostración:** Desarrollamos la parte izquierda de la tesis

$$\sum_{i=0}^{k+1}(6i + 4)$$

2.Por propiedad de sumatoria, separamos el ultimo termino de la sumatoria

$$\sum_{i=0}^{k}(6i + 4) + \sum_{i=k+1}^{k+1}(6i + 4)$$

3.Desarrollamos la segunda sumatoria

$$\sum_{i=0}^{k}(6i + 4) + 6 \cdot (k + 1) + 4$$

4.Aplicamos la igualdad de la hipotesis inductiva

$$(k+1)\cdot(3k+4)+6\cdot(k+1)+4$$

5.Distributiva

$$(3\cdot k^2)+(4\cdot k)+(3\cdot k)+4+(6\cdot k)+6+4$$

6.Suma

$$3\cdot k^2+(13\cdot k)+14$$

**Demostración:** Desarrollamos la parte derecha de la tesis

$$1)((k+1)+1).(3(k+1)+4)$$
$$2)(k+2).(3\cdot k+3+4)$$
$$3)(k+2)\cdot(3\cdot k+7)$$
$$4)3\cdot k^2+7\cdot k+6\cdot k+14$$
$$5)3\cdot k^2+13\cdot k+14$$

**Demostración:** Como desarrollamos ambos lados de la tesis, y llegamos a lo mismo: Probamos la tesis inductiva utilizando la hipótesis, $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. es verdadera
**Luego, como** $P(1)$ **y** $P(k)\Rightarrow P(k+1)$ **son verdaderas, se concluye que** $P(n)$ **es verdadera** $\forall n\in\mathbb{N}$**.**

Usar una igualdad y mantener la igualdad para claridad d ela resolución. Usar menos texto para justificar los pasos y numerar.

Demostración ejercicio 5 - Autores: Grupo 8

**Probando por el mecanismo de inducción generalizada, podemos decir que nuestra hipótesis es:**

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n}(4 \cdot i - 3) = n \cdot (2 \cdot n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

**(a) Caso base:**

$$P(1) = (4 \cdot 1 - 3) = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) \quad \text{donde } n = 1$$
$$P(1) = 1 = 1$$
$$\therefore\ P(1) \text{ es verdadero}$$

$$P(2) = P(1) + (4 \cdot 2 - 3) = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1) \quad \text{donde } n = 2$$
$$P(2) = 1 + 8 - 3 = 2 \cdot (4 - 1)$$
$$P(2) = 1 + 5 = 2 \cdot (4 - 1)$$
$$P(2) = 6 = 6$$
$$\therefore\ P(2) \text{ es verdadero.}$$

$$P(3) = P(2) + (4 \cdot 3 - 3) = 3 \cdot (2 \cdot 3 - 1) \quad \text{donde } n = 3$$
$$P(3) = +9 = 3 \cdot 5$$
$$P(3) = 15 = 15$$
$$\therefore\ P(3) \text{ es verdadero.}$$

$$\therefore \text{ el caso base es verdadero.}$$

**Hipótesis inductiva:**

$$H_0 :\ P(k) = \sum_{i=1}^{k}(4 \cdot i - 3) = k \cdot (2 \cdot k - 1)$$

**Tesis:**

$$H_1 :\ P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(4 \cdot i - 3) = (k+1) \cdot (2 \cdot (k+1) - 1)$$

Trabajamos un poco el lado derecho de la tesis para saber a qué queremos llegar:

$$(k+1) \cdot (2 \cdot (k+1) - 1) =$$

$$(k+1) \cdot (2 \cdot k + 1) =$$

$$2 \cdot k^2 + k + 2 \cdot k + 1 =$$

$$2 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1$$

**(b) Desarrollo del lado izquierdo de la tesis:**

$$\sum_{i=1}^{k+1} (4 \cdot i - 3) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} (4 \cdot i - 3) + (4 \cdot (k+1) - 3) =$$

Reemplazo $H_0$:

$$k \cdot (2 \cdot k - 1) + (4 \cdot (k+1) - 3) =$$

Distribuyo $k$:

$$2 \cdot k^2 + 3 \cdot k + 1$$

Al desarrollar el lado izquierdo de la tesis, llegamos a la expresión deseada.

$\therefore$ por (a) y (b) queda demostrado que:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} (4 \cdot i - 3) = n \cdot (2 \cdot n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Explicar menos en lenguaje natural y usar numeración y justficación numerada. Los pasos están bien. Es completa. Faltan algunas conclusiones intermedias que pueden ayudar a entender mejor la resolución. Poner las secciones d elas demostraciones todo junto en una pagina (usar salto de linea si hace falta)

## Ejercicio N°6-Grupo Nº7

**Ejercicio**

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}_0$:

$$2 + 7 + 12 + \cdots + (5n + 2) = \frac{(n + 1)(5n + 4)}{2}$$

## Resolución del Ejercicio Propuesto

**Sumatoria Planteada**

$$\sum_{i=1}^{n}(5(i - 1) + 2) = \frac{((n - 1) + 1)(5(n - 1) + 4)}{2}$$

Reduzco la sumatoria, aplicando propiedades algebraicas:

$$\sum_{i=1}^{n}(5i - 3) = \frac{5n^2 - n}{2}$$

Utilizaremos el principio de inducción completa. Luego debemos probar el paso 1 y el paso 2.

### Paso 1: Verificación de $P(1)$

Debemos probar que $P(1)$ es verdadera, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n}(5i - 3) = \frac{5n^2 - n}{2}$$

Para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1}(5i - 3) = 5(1) - 3 = 2$$

y

$$\frac{5(1)^2 - (1)}{2} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

De esto resulta que $P(1)$ es verdadera.

### Paso 2: Sea $k \in \mathbb{N}$

Debemos probar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ es verdadera.

**Hipótesis de inducción (Hi):**

$$P(k) : \sum_{i=1}^{k}(5i-3) = \frac{5k^2-k}{2}$$

**Tesis (T):**

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \frac{5(k+1)^2-(k+1)}{2}$$

Demostremos esta implicación:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = (5(1)-3) + (5(2)-3) + \cdots + (5k-3) + (5(k+1)-3)$$

$$\overset{\text{Sumatoria}}{=} \sum_{i=1}^{k}(5i-3) + (5(k+1)-3)$$

$$\overset{\text{HI}}{=} \frac{5k^2-k}{2} + (5(k+1)-3) =$$

$$\overset{\text{Apl.Distribucion}}{=} \frac{5k^2-k}{2} + (5k+5-3) =$$

$$= \frac{5k^2-k}{2} + (5k+2) =$$

$$\overset{\text{Factor Comun}}{=} \frac{5k^2-k+10k+4}{2} =$$

$$= \frac{5k^2+9k+4}{2}$$

**Tesis desarrollada (Utilizada para llegar a una conclusion con lo visto anteriormente.)**

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \frac{5(k+1)^2-(k+1)}{2}$$

Desarrollando el término en el numerador:

$$5(k+1)^2-(k+1) = 5(k^2+2k+1)-(k+1)$$

Expandimos y simplificamos:

$$= 5k^2+10k+5-k-1$$

$$= 5k^2+9k+4$$

Por lo tanto, la tesis se desarrolla como:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(5i-3) = \frac{5k^2+9k+4}{2}$$

De los pasos 1 y 2 queda demostrado que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Resolución ejercicio 8 - Grupo 2: Petit, Sarmiento, Reibold, Fernández Gramajo**

$2 + 6 + 10 + ..... + (4 \cdot n - 2) = 2 \cdot n^2$
Hipótesis planteada:

$$\forall n \in \mathbf{N} : P(n) = \sum_{i=1}^{n}(4i - 2) = 2n^2 \quad \text{es verdadero}$$

Desarrollo de Prueba

- $P(1) = (4 \cdot 1) - 2 = 2, \quad \text{y} \quad 2 \cdot 1^2 = 2$
- $P(2) = [(4 \cdot 1) - 2] + [(4 \cdot 2) - 2] = 8, \quad \text{y} \quad 2 \cdot 2^2 = 8$
- $P(3) = [(4 \cdot 1) - 2] + [(4 \cdot 2) - 2] + [(4 \cdot 3) - 2] = 18 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 3^2 = 18$

$$\forall k \in \mathbf{N} :$$

Por Hipótesis: $P(k) = \sum_{i=1}^{k}(4i - 2) = 2k^2$ es verdadero

Hay que demostrar que $P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(4i - 2) = 2(k+1)^2$ también lo es.

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(4i - 2) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(4i - 2) + [4(k+1) - 2]}_{\text{Por propiedad de la sumatoria}}$$

$$= \underbrace{2k^2}_{\text{Reemplazo por Hipotesis}} + [4(k+1) - 2]$$

$$= 2k^2 + (4k + 4 - 2)$$

$$= 2k^2 + 4k + 2$$

$$= 2 \cdot (k^2 + 2k + 1)$$

$$= \underbrace{2(k+1)^2}_{\text{por binomio cuadrado perfecto}}$$

Luego, podemos decir que $P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(4i-2) = 2(k+1)^2$ es verdadero $\forall k \in \mathbf{N}$.

$$\therefore \quad 2 + 6 + 10 + ..... + (4 \cdot n - 2) = 2 \cdot n^2.$$