Análisis de Algoritmos

Natalia Baeza - Nadina Martínez Carod

6 de septiembre de 2024

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Capítulo 1

Propagación de Errores

1.1. Introducción: Esquema de resolución numérica

Si se desea resolver un problema P, lo primero que intentamos hacer es traducirlo a lenguaje matemático para dar un problema matemático M, Se estudia la existencia y unicidad de la solución u de este problema, pero en la mayor parte de los casos y después de probado esto, no se sabe cómo determinar la solución de forma efectiva. Por ello, lo que hacemos es sustituir un problema matemático M por un problema próximo a él, M_p, en el que aparecerá algún parámetro p que se va a hacer tender a un cierto valor. Se exige que este problema tenga una única solución u_p y se espera que al tender p hacia el valor elegido u_p converja a u.

En resumen, cada vez que encontramos soluciones a problemas, a nivel de programación, lo que hacemos es aproximar el problema y por ende aproximamos una solución. La cuestión aquí es poder decir cuán apropiada es esta solución sabiendo que existe un margen de error entre el problema real a resolver y nuestra aproximación, y que esto se traslada al resultado obtenido respecto del valor esperado. Ese valor esperado p se lo denomina *valor verdadero*.

1.2. Cifras Significativas

Al emplear un número para realizar un cálculo, debe haber seguridad de que pueda usarse con confianza. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra un velocímetro y un odómetro (contador de kilometraje) de un automóvil. Mirando rápidamente al velocímetro se observa que el vehículo viaja a una velocidad entre 48 y $49km/h$. La aguja está más allá de la mitad entre las marcas del indicador, entonces es posible asegurar que el vehículo viaja aproximadamente a $49km/h$. Tenemos confianza en este resultado, ya que dos o más individuos que hicieran esta lectura llegarían a la misma conclusión. Sin embargo, supongamos que se desea obtener una cifra decimal en la estimación de la velocidad. En tal caso, alguien podría decir $48,8km/h$, mientras que otra persona podría decir $48,9km/h$. Por lo tanto, debido a los límites del instrumento, únicamente se emplean con confianza los dos primeros dígitos. Para estimaciones de tercer dígito o más, sólo se considerarían aproximaciones. No tiene sentido por ejemplo afirmar, considerando el velocímetro de la figura, que el automóvil viaja a $48,8589753km/h$. En contraste, el odómetro muestra hasta seis dígitos confiables. Se puede concluir entonces que que el vehículo ha recorrido $87324,5km$. El séptimo dígito y los siguientes son inciertos.

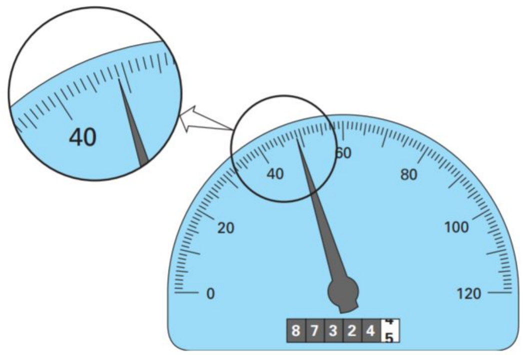


Figura 1.1: Velocímetro y odómetro

Cifras y/o dígitos significativos es un concepto desarrollado para determinar la confiabilidad de un valor numérico. Las *cifras significativas* de un número son aquellas que pueden usarse de forma **confiable**, esto es un número de dígitos que se ofrecen con certeza, mas uno estimado. Según el ejemplo anterior, el velocímetro y el odómetro muestran lecturas de hasta tres y siete cifras significativas, respectivamente. Para el velocímetro, los dos dígitos seguros son 48. Por convención al dígito estimado se le da el valor de la mitad de la escala menor de división en el instrumento de medición. Así, la lectura del velocímetro consistirá de las tres cifras significativas: $48,5$. Similarmente, el odómetro dará una lectura con siete cifras significativas $87324,45$.

Se puede comúnmente determinar las cifras significativas de un número de forma sencilla, sin embargo en algunos casos puede ser confuso. Por ejemplo, los ceros no siempre son significativos, ya que pueden utilizarse para ubicar el punto decimal: los números $0,00001845$, $0,0001845$ y $0,001845$ tienen 4 cifras significativas claramente. Sin embargo, cuando se incluyen ceros en números muy grandes, no queda claro cuántos son significativos. Por ejemplo, el número 45300 puede tener diferente cantidad de dígitos significativos dependiendo de si los ceros se conocen o no con exactitud. La incertidumbre se puede eliminar utilizando la notación científica, donde $4,53 \cdot 10^4$, $4,530 \cdot 10^4$, $4,5300 \cdot 10^4$ muestran que el número puede tener 3, 4 o 5 cifras significativas.

Aspectos importantes a considerar cuando se definen cifras significativas:

- Definir criterios para especificar la confiabilidad en los resultados es crucial. Una forma de hacerlo es en términos de cifras significativas, así, una afirmación de aproximación será aceptable si es correcta en términos de cifras significativas.
- Existen cantidades tales como π, e o $\sqrt{7}$ que representan cantidades específicas, dichos números no tienen una representación *finita*, no tienen una representación aceptable con

exactamente un número finito de dígitos. Sin embargo, dichos valores deben lograr una representación numérica en computadora que es finita con lo cual se acepta un margen de error al omitir un determinado número de cifras significativas denominado *error de redondeo* que se explicará en más detalle más adelante en este documento.

1.3. Exactitud y Precisión

Los errores en cálculos y medidas se pueden caracterizar con respecto a su exactitud y su precisión. La *exactitud* se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. La *precisión* se refiere a qué tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos.

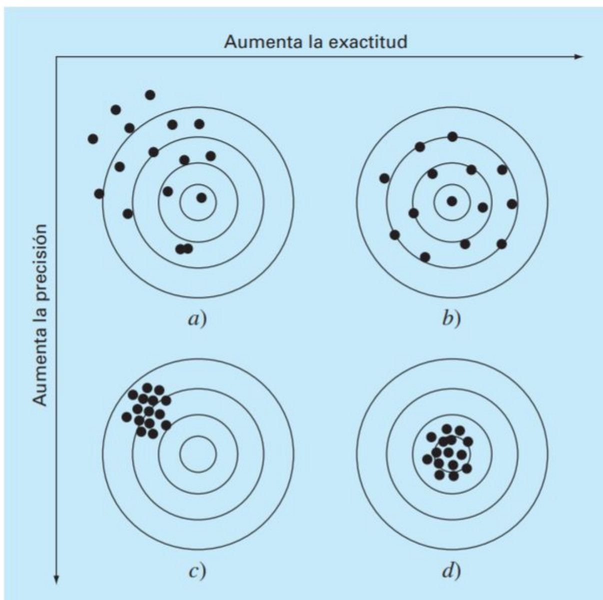


Figura 1.2: Ejemplo de Exactitud y Precisión

Estos conceptos se muestran gráficamente mediante la analogía de una diana en la ṕractica de tiro. Los agujeros en cada blanco de la Figura 1.2 se consideran como las predicciones con una técnica numérica; mientras que el centro del blanco representa la verdad. La *inexactitud* o *sesgo*, se define como la desviación sistemática del valor verdadero. por lo tanto, aunque los disparos de la figura $c)$ están más cerca que los de la figura $a)$, los dos casos son igualmente inexactos, ya que ambos se centran en la esquina superior izquierda del blanco.

1.3.1. Incertidumbre (imprecisión)

Por otro lado, la *imprecisión* también denominada *incertidumbre*, se refiere a la magnitud en la dispersión de los disparos. Por consiguiente aunque las figuras b y d son igualmente exactas (esto es igualmente centradas respecto al blanco), la última es más precisa pues los disparos están agrupados en forma más compacta.

Los métodos numéricos deben ser lo suficiente exactos o sin sesgo para satisfacer los requisitos de un problema particular de ingeniería. También deben ser suficientemente precisos para ser adecuados en el diseño. Así, se verá de manera equivalente el uso del término *error* para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en las mediciones o cálculos. A continuación se describen diferentes factores que contribuyen al error en los cálculos numéricos.

1.4. Distintos tipos de errores

Generalmente el resultado de un cálculo numérico es aproximado (sólo en casos excepcionales es exacto), y por eso necesitamos conocer la precisión. Si p y p^* son dos números reales, p es el valor verdadero esperable y p^* se considera como aproximación de p, una medida de precisión de p^* es:

$$E = |p - p^*|$$

De costumbre el conocimiento de E no basta para establecer si p^* es una aproximación buena de p. Por ejemplo, supongamos lo siguiente:

$$p_1 = 5{,}1346, p_1^* = 5{,}1345$$
$$E = |p_1 - p_1^*| = 10^{-4}$$

y

$$p_2 = 0{,}0005, p_2^* = 0{,}0004$$
$$E = |p_2 - p_2^*| = 10^{-4}$$

En ambos casos E es igual a 10^{-4}, pero sólo el primer caso pensamos que p_1^* es una buena aproximación de p_1. En el segundo caso p_2 y E son del mismo orden de magnitud, y entonces nos parece mejor considerar su razón.

Damos entonces la siguiente definición: si p^* es una aproximación de p, el **error absoluto** está dado por $E_v = |p - p^*|$, y el **error relativo** está dado por $E_v = \frac{|p-p^*|}{|p|}$, siempre y cuando $p \neq 0$.

Con esto decimos entonces que la relacion entre el resultado exacto, o verdadero, y el aproximado está dado por:

$$Valor\ verdadero = Valoraproximado + error \tag{1.1}$$

Reordenando la Ecuación (1.1) anterior, se encuentra que el error numérico es igual a la diferencia entre el valor verdadero y el valor aproximado, es decir:

$$E_v = Valor\ verdadero - Valor\ aproximado \tag{1.2}$$

donde E_v se usa para denotar el valor exato del error. El subíndice v denoma que se trata del error *verdadero* (también se puede encontrar con la t de $True$).

Además como se mencionaba también previamente, para considerar el orden de magnitud del valor que se estima se define:

$$Error\ relativo\ fraccional\ verdadero = \frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero} \tag{1.3}$$

y también se define el *Error relativo porcentual verdadero*:

$$\varepsilon_v = \frac{error\ verdadero}{valor\ verdadero} \cdot 100\,\% \tag{1.4}$$

1.4.1. Tipos y causas del error

Muchas son las causas que pueden interferir en la precisión de un cálculo y generar esos errores. Los podemos clasificar en:

1. errores iniciales;
2. errores de redondeo;
3. errores de truncamiento;
4. errores de propagación.

Los **errores iniciales** no se pueden evitar si, por ejemplo, son el resultado de medidas de precisión limitada. Supongamos que debemos calcular $f(x)$ en un cierto punto de x. Puede ocurrir que estemos obligados a sustituir x por x', con lo cual se calculará $f(x')$ en vez de $f(x)$. Se llama error inicial al valor $f(x') - f(x) = \varepsilon_i$.

Los **errores de redondeo** son debidos a redondeos en los cálculos porque están hechos con un número finito de cifras significativas. Entonces, y continuando con el ejemplo previo, no calcularemos $f(x')$ sino $f_1(x')$. El valor $f_1(x') - f(x') = \varepsilon_r$.

Los **errores de truncamiento** generalmente corresponden al truncamiento de procedimientos infinitos (desarrollos en serie, etc.). En el ejemplo previo puede ocurrir que f (y f_1) sea poco manejable y estamos obligados a sustituirla por otra función próxima a ella, f_2. El valor $f_2(x') - f_(x') = \varepsilon_t$ es llamado error de truncamiento o de discretización.

Los **errores de propagación** son debidos a la propagación de errores previos en el algoritmo.

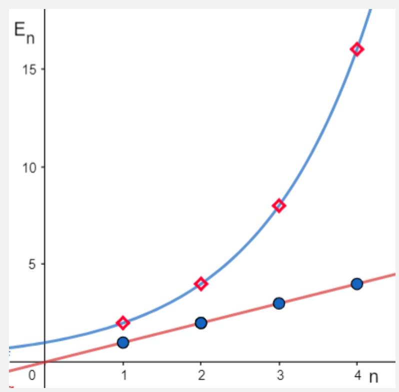
1.5. Convergencia

Hemos dicho ya que los cálculos que involucran aproximaciones en la máquina pueden resultar en el crecimiento de los errores de redondeo. Por supuesto, estamos interesados en escoger métodos que produzcan resultados fiables en su precisión. Un criterio que impondremos en un algoritmo, cuando sea posible, es que cambios pequeños en los datos iniciales produzcan correspondientemente cambios pequeños en los resultados finales. Un algoritmo que satisface esta propiedad se llama **estable**. Es **inestable** cuando este criterio no se cumple. Algunos algoritmos serán estables para ciertos grupos de datos iniciales pero no para todos. Se tratará, siempre que se pueda de caracterizar las propiedades de estabilidad de los algoritmos.

Para considerar un poco más el tema del crecimiento del error de redondeo y su conexión con la estabilidad de los algoritmos, supongamos que se introduce un error ε en alguna etapa de los cálculos y que el error después de n operaciones subsecuentes se denota por E_n. Los dos casos que se presentan más frecuentemente en la práctica se definen a continuación:

Definición

Supongamos que E_n representa el crecimiento del error después de n operaciones subsecuentes. Si $|E_n| \approx C \cdot n \cdot \varepsilon$, donde C es una constante independiente de n, se dice que el crecimiento del error es **lineal**. Si $|E_n| \approx k^n \cdot \varepsilon$, para algún $k > 1$, el crecimiento del error es **exponencial**.



El crecimiento lineal del error es usualmente inevitable, y cuando C y ε son pequeños los resultados son generalmente aceptables. El crecimiento exponencial del error debe ser evitado, ya que el término k^n será grande aún para valores pequeños de n. Esto lleva a imprecisiones inaceptables, no importando la magnitud de ε. Como consecuencia, un algoritmo que exhibe crecimiento lineal del error es *estable*, mientras que un algoritmo en el que el crecimiento del error es exponencial es *inestable*.

Como ejemplo consideremos la sucesión $p_n = (\frac{1}{3})^n, n > 0$, que puede generarse recursivamente tomando $p_0 = 1$ y definiendo $p_n = (\frac{1}{3}) \cdot p_{n-1}$, para $n > 1$. Si obtenemos la sucesión de esta manera, usando aritmética de redondeo a cinco dígitos, los resultados vienen dados en la Tabla 1. El error de redondeo introducido en reemplazar $\frac{1}{3}$ por $0{,}33333$ produce un error de sólo $(0{,}33333)^n \cdot 10^{-5}$ en el $n-$ésimo término de la sucesión. Este método de generar la sucesión es claramente estable.

Otra manera de generar la sucesión es definiendo $p_0 = 1$, $p_1 = \frac{1}{3}$, y calculando para cada $n \geq 2$,

$$p_n = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot p_{n-1} - p_{n-2} \tag{1.5}$$

La Tabla 2 muestra los resultados tanto exactos como redondeados a cinco dígitos usando esta fórmula.

n	P_n
0	$0{,}10000 \cdot 10^{1}$
1	$0{,}33333 \cdot 10^{0}$
2	$0{,}11111 \cdot 10^{0}$
3	$0{,}37036 \cdot 10^{-1}$
4	$0{,}12345 \cdot 10^{-1}$

Tabla 1

n	P_n calculado	P_n exacto
0	$0{,}10000 \cdot 10^{1}$	$0{,}10000 \cdot 10^{1}$
1	$0{,}33333 \cdot 10^{0}$	$0{,}33333 \cdot 10^{0}$
2	$0{,}11111 \cdot 10^{0}$	$0{,}11111 \cdot 10^{0}$
3	$0{,}37000 \cdot 10^{-1}$	$0{,}37036 \cdot 10^{-1}$
4	$0{,}12230 \cdot 10^{-1}$	$0{,}12346 \cdot 10^{-1}$
5	$0{,}37660 \cdot 10^{-2}$	$0{,}41152 \cdot 10^{-2}$
6	$0{,}32300 \cdot 10^{-3}$	$0{,}13717 \cdot 10^{-2}$
7	$-0{,}26893 \cdot 10^{-2}$	$0{,}13717 \cdot 10^{-3}$
8	$-0{,}92872 \cdot 10^{-2}$	$0{,}15242 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2

Este método es obviamente inestable.

Nótese que la fórmula dada, $p_n = (\frac{10}{3}) \cdot p_{n-1} - p_{n-2}$, se satisface si p_n es de la forma

$$p_n = C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot 3^n$$

para cualquier par de constantes C_1 y C_2. Para verificar esto, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3} \cdot p_{n-1} - p_{n-2} &= \frac{10}{3}\left[C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + C_2 \cdot 3^{n-1}\right] - \left[C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + C_2 \cdot 3^{n-2}\right] \\
&= C_1 \cdot \left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right] + C_2 \cdot \left[\frac{10}{3} \cdot 3^{n-1} - 3^{n-2}\right] \\
&= C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot 3^n \\
&= p_n
\end{aligned}$$

Para tener $p_0 = 1$ y $p_1 = \frac{1}{3}$, las constantes C_1 y C_2 deben elegirse como $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$. Sin embargo, en la aproximación de 5 dígitos, los dos primeros términos son $p_0 = 0{,}10000 \cdot 10^1$

y $p_1 = 0{,}33333 \cdot 10^0$, los cuales requieren una modificación de estas constantes a $C_1 = 0{,}10000 \cdot 10^1$ y $C_2 = -0{,}125000 \cdot 10 - 5$. Este pequeño cambio en C_2 da lugar a un error de redondeo de $3^n(-0{,}12500 \cdot 10 - 5)$ al producir p_n. Como consecuencia resulta un crecimiento exponencial del error, lo cual se refleja en la pérdida extrema de exactitud encontrada en la Tabla 2.

Para reducir los efectos del error de redondeo, podemos usar una aritmética de un orden grande de dígitos, como las opciones de doble o múltiple precisión, disponibles en la mayoría de las computadoras digitales. Una desventaja del uso de la aritmética de doble precisión es que toma mucho más tiempo de computadora. por otro lado, no se elimina completamente el crecimiento serio del error de redondeo, sino que sólo se pospone si es que se realizan un gran número de cálculos posteriores. Hay también otros métodos para estimar el error de redondeo (aritmética de intervalo, métodos estadísticos, entre otros) que no estudiaremos en este curso.

1.6. Otros ejemplos

Cálculo de errores

El puente y el remache

Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, y se obtiene 9999 y 9cm respectivamente. Si los valores verdaderos son 10000 y 10cm..

1. ¿Cuál es el error absoluto?
2. ¿Cuál es el error relativo en cada caso?

Vamos a resolverlo:

1. El error en la medición del puente es:

$$E_{v-puente} = 10000 - 9999 = 1cm \tag{1.6}$$

   y en la del remache es de:

$$E_{v-remache} = 10 - 9 = 1cm \tag{1.7}$$

   En ambos casos el error absoluto es de $1cm$.

2. El error relativo porcentual para el puente es:

$$\epsilon_{v-puente} = \frac{1}{10000} \cdot 100\,\% = 0{,}01\,\% \tag{1.8}$$

   y para el remache es de

$$\epsilon_{v-remache} = \frac{1}{10} \cdot 100\,\% = 10\,\% \tag{1.9}$$

Así se puede observar que aunque ambas medidas tienen un error de 1 cm, el error relativo porcentual del remache es mucho mayor. Se concluye entonces que se ha hecho un buen trabajo de medición sobre el puente con un alto grado de confiabilidad en los resultados en términos generales. Sin embargo la estimación para el remache dejó mucho que desear.

Algunas cuestiones a considerar en esta resolución son las siguientes, note que en el ejemplo E y ε tienen un subíndice v que significa que el error ha sido normalizado al valor verdadero. En el ejemplo anterior, teníamos el valor verdadero. Sin embargo, en las situaciones de la vida cotidiana no siempre es así y es difícil contar con esta información. En los métodos numéricos el valor verdadero sólo se conocerá cuando se tengan funciones que se resuelvan analíticamente. En estos casos, cuando no se conoce *a priori* la respuesta verdadera, una alternativa es normalizar el error, usando la mejor estimación posible al valor verdadero; es decir, para la aproximación misma, como en:

$$\varepsilon_a = \frac{error\ aproximado}{valor\ aproximado} \cdot 100\,\% \tag{1.10}$$

donde el subíndice a significa que el error está normalizado a un valor aproximado.

Sin embargo la ecuación (1.2) no siempre es posible de utilizar porque hay casos en que el valor verdadero se desconoce o no es posible representarlo en la ecuación (1.10). Entonces, uno de los retos que enfrentan los métodos numéricos es el de determinar estimaciones del error en ausencia del conocimiento de los valores verdaderos. Por ejemplo, ciertos métodos numéricos usan un *método iterativo* para calcular los resultados. En tales métodos se hace una aproximación considerando la aproximación anterior. Este proceso se efectúa varias veces, o de forma iterativa, para calcular en forma sucesiva, esperando cada vez mejores aproximaciones. En tales casos, el error a menudo se calcula como la diferencia entre la aproximación previa y la actual. Por lo tanto, el error relativo porcentual está dado por:

$$\varepsilon_a = \frac{aproximacionactual - aproximacion\ anterior}{aproximacion\ actual} \cdot 100\,\% \tag{1.11}$$

Los signos de las ecuaciones anteriores (1.3) y (1.11) pueden ser positivos o negativos. Si la aproximación es mayor que el valor verdadero (o la aproximación previa es mayor a la actual), el error es negativo; si la aproximación es mejor que el valor verdadero, el error es positivo. También en las ecuaciones (1.4) y (1.10) el denominador puede ser menor a cero, lo cual también llevaría a un error negativo. A menudo, cuando se realizan cálculos, no importa mucho el signo del error, sino más bien que su valor absoluto porcentual sea menor que una tolerancia porcentual prefijada. Por lo tanto, es útil emplear valor absoluto en las ecuaciones anteriores. A menudo, cuando se realizan cálculos, no importa mucho el signo del error, sino más bien que su valor absoluto porcentual sea menor que una tolerancia porcentual prefijada ε_S. Por lo tanto, es últil emplear el valor absoluto de las ecuaciones ((1.4) y (1.11). En tales casos los cálculos se repiten hasta que:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_S \tag{1.12}$$

Si se cumple la relación anterior, entonces se considera que el resultado obtenido está dentro del nivel aceptable fijado previamente ε_S. En general se pueden utilizar valores absolutos cuando se hable de errores relativos.

Es importante también relacionar estos errores con el número de cifras significativas en la aproximación.

Estimación con métodos iterativos: Dando vueltas

En matemáticas con frecuencia las funciones se representan mediante series finitas. Por ejemplo, la función exponencial se calcula usando:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{1.13}$$

Así, cuanto más términos se le agreguen a la serie, la aproximación será cada vez más una mejor estimación del valor verdadero de e^x. La ecuación anterior se conoce como *expansión en series de Maclaurin*. Enmpezando con el primer término $e^x = 1$ y agregando término a término, estime el valor de $e^{0,5}$. Después de agregar cada término, calcule los errores: relativo porcentual verdadero y normalizado a un valor aproximado sumando las ecuaciones anteriores. Observe que el valor verdadero es $e^{0,5} = 1{,}648721\ldots$ Agregue términos hasta que el valor absoluto del error aproximado ϵ_z sea menor que un criterio de error preestablecido ϵ_S con tres cifras significativas.

Cómo lo resolvemos?

En primer lugar debemos agregar los suficientes términos a la ecuación de la serie hasta que ε_a sea menor que este valor ε_S

La primera estimación es igual a la igualdad con el primer término, 1, la segunda estimación se agrega x, asumiendo $x = 0{,}5$ el resultado de la aproximación es:

$$e^{0,5} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \tag{1.14}$$

Esto representa el error relativo porcentual verdadero siguiente:

$$\varepsilon_v = \frac{1{,}648721 - 1{,}5}{1{,}648721} \cdot 100\,\% = 9{,}02\,\% \tag{1.15}$$

La ecuación (1.11) se usa para determinar una estimación aproximada del error.

$$\varepsilon_v = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}5} \cdot 100\,\% = 33{,}3\,\% \tag{1.16}$$

Como ε_a no es menor que el valor requerido ε_S , se deben continuar los cálculos agregando términos a la serie, repitiendo el cálculo del error. El proceso termina cuando $\varepsilon_a < \varepsilon_S$ Así, después de utilizar 6 términos el error aproximado es el esperado y el cálculo termina.