



Errores, aproximaciones numéricas y propagación del error en el cálculo computacional

Facultad de Informática

September 6, 2024





Indice

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos





Tabla de contenidos

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos





Error: Introducción

¿Qué es un error?

*valor verdadero \neq resultado \rightarrow Existe un **error***

Por este motivo se debe encontrar un método para estimar la **fiabilidad** del resultado obtenido.





Error: Introducción

¿Qué es un error?

- 1 **Equivocación** en la medida o en el cálculo
 - Son aparentes.
 - Se suelen detectar probando repetidas veces la funcionalidad.
- 2 **Sistemático**
 - Son discrepancias reproducibles
 - Resultado de fallo en la instrumentación, o consistencia matemática
- 3 **Aleatorio**
 - inevitable limitación de la calidad de los instrumentos.
 - se pueden reducir refinando el equipo o método analítico, repitiendo las medidas, aumentando el tiempo de observación.
- 4 de **Aproximación** o numérico
 - Medida del **ajuste** del cálculo de una magnitud respecto a su valor real o teórico.
 - Se debe hacer un **seguimiento** de los errores cometidos para estimar el grado de aproximación de la solución que se obtiene.



Errores: Introducción

Fuentes del error

- ① Fuente del error: **Humano** - más común
 - de lectura (ej 3.5 en vez de 5.3)
 - de interpretación de un método matemático
 - de codificación incorrecta
 - mal manejo de un equipo (ej termómetro)
- ② Fuente del error: **Otras**
 - Medición en los datos (ej. vibraciones en un microscopio)
 - Operaciones de redondeo y de truncamiento





Error: Introducción

Tipos de Error que trataremos: de Programación y de Aproximación

1 Errores de programación

- Análisis de los errores introducidos por el cálculo
- Uso de aserciones como técnica de testing

2 Errores de Aproximación o numérico

- Suma y multiplicación se realizan en modo inexacto
- Número fijo de dígitos significativos determinado por
 - la cantidad de dígitos de una calculadora
 - longitud de palabra de una computadora

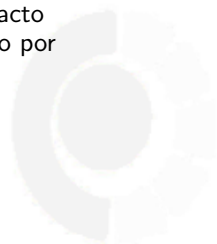




Tabla de contenidos

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos





Ejemplos coloquiales

Conceptos precisión, Incertidumbre exactitud

1 Precisión

- Repetición de mediciones: Al medir algo con un mismo instrumento, y las mediciones son muy similares (ej., 10.1 cm, 10.2 cm, 10.15 cm).
- es la baja variabilidad indica alta precisión

2 Incertidumbre

- asociada con el grado de confianza que se tiene en el resultado obtenido, depende de la calidad del instrumento usado.
- Un termómetro que mide la temperatura con una resolución de $\pm 0.5^\circ\text{C}$ tiene una incertidumbre de $\pm 0.5^\circ\text{C}$

3 Exactitud

- dice cuán cerca está del *valor verdadero*



Errores: Introducción

Conceptos relacionados

1 Precisión

- medida de reproducibilidad de una observación
- dice cuán bien se puede reproducir el resultado
- es independiente de lo cerca que esté del *valor verdadero*

2 Incertidumbre

- es el error asociado a la precisión
- se reduce significativamente utilizando notación de punto flotante.
 - se escribe el cero seguido del punto y luego las cifras significativas multiplicado por 10 elevado a una potencia.
 - Ejemplo: 156.78 se representa como 0.15678×10^3
 - Ejemplo: 0.0002536 se representa como 0.2536×10^{-3}

3 Exactitud

- mide cuán correcta es la observación
- dice cuán cerca está del *valor verdadero*



Exactitud y precisión

Conceptos relacionados

1 Precisión

- Detalle con el que un instrumento o procedimiento puede medir una variable
 - Número de cifras significativas que representa una cantidad.
 - Ejemplo: una medida cuyo valor es 4,273500..., El número 4,277452 es más preciso que 4,273

2 Exactitud

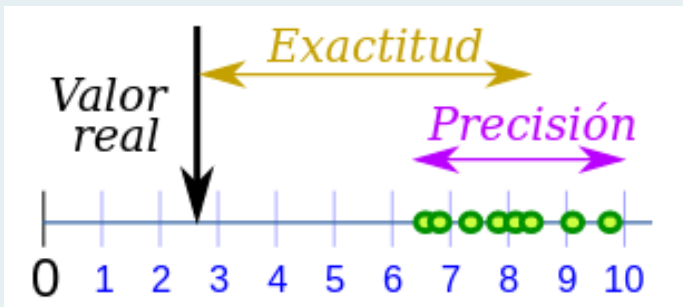
- Cuán correcta es la observación. Lo que se acerca esta medición al valor real
 - Lo bien que se representa una cantidad. El número 4,277452 es menos exacto que 4,273 pues se aproxima menos al valor real 4,273500....



Introducción: Conceptos relacionados

Precisión vs. Exactitud

Comparando Precisión y Exactitud respecto del Valor Real





Introducción: Conceptos relacionados

Números y dígitos

- **Números exactos**
 - Números enteros: 1, 2, 0, -1, -259
 - Algunas fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$
 - ... pero no así la fracción $\frac{1}{3} = 1.\widehat{33}$
- **Números aproximados**
- **Dígitos significativos**

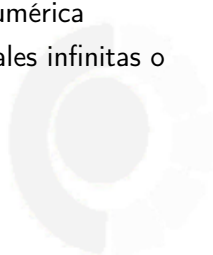




Númeos y Dígitos

Números Aproximados

- Representan un valor que no es el suyo
 - Ej: números irracionales: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$
 - Ej: fracciones: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$
- en general no pueden representarse en la recta numérica
- surgen de cálculos con números con cifras decimales infinitas o a través de mediciones





Números y Dígitos

Dígitos significativos

- Los dígitos significativos de un número son todas sus cifras de 1 a 9
- El 0 es significativo sólo si está ubicado entre dos dígitos diferentes a 0.
- La cantidad de dígitos significativos es el número de cifras enteras o decimales que definen a un número.
- Ejemplos:
 - 3487 tiene 4 dígitos significativos
 - 0.2850 tiene 3 dígitos significativos
 - 19.507 tiene 5 dígitos significativos





Tabla de contenidos

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos

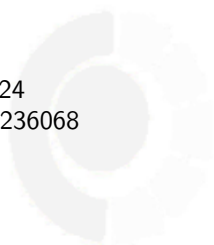




Redondeo

Mecanismo general y ejemplo

- Se representa un número con menos cifras decimales que el valor verdadero.
- Se aumenta la última cifra en una unidad cuando la siguiente es mayor o igual a 5.
- Ejemplo:
 - $\sqrt{5} = 2.236067977 \dots$
 - Redondear $\sqrt{5}$ a dos cifras decimales resulta: 2.24
 - Redondear $\sqrt{5}$ a seis cifras decimales resulta: 2.236068





Redondeo

Ejemplo en una suma simple

- Supongamos $a = 2.25$, $b = 7.99$ y $c = 3.82$
- Supongamos que la representación numérica para la operación resultante de la suma es con 1 dígito decimal realizando operación de redondeo posterior a realizar la suma.
- Supongamos la suma $a + b = 2.25 + 7.99$
- El valor verdadero de la operación es: 10.24 y el valor obtenido es 10.2
- Entonces, es lo mismo $(a + b + c)$ que $(c + a + b)$?
 - $a + b + c = (2.25 + 7.99) + 3.82 = 10.20 + 3.82 = 14.0$
 - $c + a + b = (3.82 + 2.25) + 7.99 = 6.10 + 7.99 = 14.1$

El signo = (igual) pasa a determinar **igualdades dentro de una determinada precisión.**



Truncamiento

Mecanismo general y ejemplos

- Se representa un número con menos cifras decimales que el valor verdadero.
- Se quitan una determinada cantidad de cifras decimales a la derecha del número.
- no se modifica ninguna cifra en el número truncado.
- Ejemplo:
 - $\sqrt{5} = 2.236067977 \dots$
 - Truncar $\sqrt{5}$ a dos cifras decimales resulta: 2.23
 - Truncar $\sqrt{5}$ a seis cifras decimales resulta: 2.236067
- Ejemplo en funciones:
 - La serie $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$
 - Truncando tenemos $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$



Tabla de contenidos

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos





E_a, E_r y E_p Operaciones básicas

- La relación entre Valor Verdadero y Valor aproximado está dada por:

$$\text{ValorVerdadero} = \text{ValorAproximado} \pm \text{Error}$$

Donde:

- Error Absoluto: $E_a = \text{Valor aproximado} - \text{Valor verdadero}$
- Error Relativo: $E_r = E_a / \text{Valor verdadero}$
- Error Relativo Porcentual: $E_p = E_r * 100$





Operaciones básicas

Suma y Resta

- En la **suma**: $A + B = (A \pm E_A) + (B \pm E_B)$
$$= (A + B) \pm (E_A + E_B)$$
 - $E_a = E_A + E_B$
 - $E_r = E_a / (A + B)$
 - $E_p = E_r * 100$
- En la **resta**: $A - B = (A \pm E_A) - (B \pm E_B)$
$$= (A - B) \pm (E_A - E_B)$$
 - $E_a = E_A - E_B$
 - $E_r = E_a / (A - B)$
 - $E_p = E_r * 100$





Operaciones básicas

Multiplicación

- $A \cdot B = (A \pm E_A) \cdot (B \pm E_B)$
$$= A \cdot B + A \cdot E_B + E_A \cdot E_B + B \cdot E_A$$
$$= A \cdot B + A \cdot E_B + B \cdot E_A$$
- $E_A \cdot E_B$ se quita de la operación por ser despreciable.
 - $E_a = A \cdot E_B + B \cdot E_A$
 - $E_r = E_a / (A \cdot B) = (A \cdot E_B + B \cdot E_A) / (A \cdot B) = (E_A / A) + (E_B / B)$
 - $E_p = E_r * 100$



Operaciones básicas

División

- $A/B = (A \pm E_A)/(B \pm E_B)$
$$= (A \pm E_A) \cdot 1/(B \pm E_B)$$
 - $E_a = ((-A \cdot E_B)/B^2) + E_A/B$
 - $E_r = E_a/(A/B) = (((-A \cdot E_B)/B^2) + E_A/B)/(A/B)$
$$E_r = (E_A/A) - (E_B/B)$$
- $E_p = E_r * 100$





Tabla de contenidos

1. Errores

Definiciones

Fuentes del error

Tipos de error

2. Conceptos relacionados

Precisión, Incertidumbre y Exactitud

Números y Dígitos Significativos

3. Tipos de Error de Aproximación

Aproximación por Redondeo

Aproximación por Truncamiento

4. Error Absoluto, Relativo y Relativo Porcentual

Definiciones y Operaciones

5. Ejemplos





Suma y resta

Ejemplo de cálculo con error

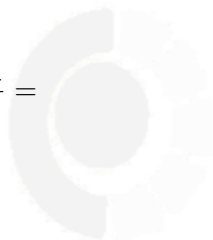
Dados los valores A , B y C , con sus respectivos errores E_A , E_B y E_C calcular el error para $B - A + C$:

$$A = 3000 \text{ y } E_A = 10$$

$$B = 4000 \text{ y } E_B = 20$$

$$C = 1000 \text{ y } E_C = 15$$

$$\begin{aligned} E_r((B - A) + C) &= \frac{E_{(B-A)} + E_C}{(B-A) + C} = \frac{E_B - E_A + E_C}{B - A + C} = \\ &= \frac{20 - 10 + 15}{4000 - 3000 + 1000} = \frac{25}{2000} = 0.0125 \end{aligned}$$





Suma y resta

Errores en el flujo de control

- Condición en bucle por igualdad
 - Cuidado de no crear bucle infinito si hay variables decimales en la condición de corte.
- `==` es apropiado para determinar si dos *enteros* o *caracteres* tienen igual valor. Ejemplo *if (a == 3)* donde *a* es de tipo *int*
- `==` **no** es apropiado para determinar si dos valores de *punto flotante* son iguales.
 - usar el operador de comparación `>` (o similares) y algún valor de tolerancia o error apropiado.
 - **Ejemplo:** *if(Math.abs(b - c) < ε) /*determina b==c*/* donde *b*, *c* y *ε* son de tipo *punto flotante*