Asíntotas

Facultad de Informática

August 22, 2024

Indice

Tabla de contenidos

Tiempos
Medir un algoritmo gráficamente

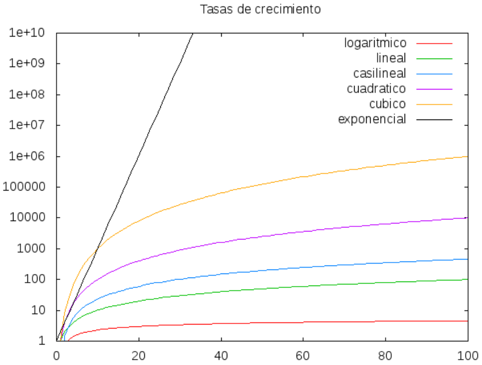

Figure: Tipos de crecimiento

Considerar n datos de entrada. Se mide el tiempo de procesar dichos datos.

Tiempos

Recordar: Medir un algoritmo

Eficiencia

Un algoritmo es más eficiente que otro para resolver el mismo problema si su tiempo de ejecución (o espacio) en el peor caso tiene un crecimiento menor.

Cómo medir el tiempo?
$T(n)$: Tiempo empleado para ejecutar el algoritmo con una entrada de tamaño n

Tiempos

Recordar las estructuras de control

- **Bucles:** Cantidad de iteraciones producto el interior (más las comparaciones)
- **Bucles anidados:**De adentro hacia fuera. Costo de la proposición interior a los bucles multiplicado por el producto de los tamaños de todos los bucles.
- **Proposiciones consecutivas:** Simplemente se suman.
- **Alternativas:** Se suma el costo de la comparación con el mayor costo de las proposiciones de la alternativa.

Medición de Algoritmos

Indice de crecimiento

Principio de Invariancia

Si dos implementaciones tardan $T_1(n)$ y $T_2(n)$ segundos respectivamente, existe un valor $c > 0$ y un número natural n_0 que a partir de ese valor se cumple que $T_1(n) <= cT_2(n)$.

Tabla de contenidos

Orden
Recordar

- Necesitamos determinar matemáticamente la cantidad de recursos que necesita un algoritmo de tamaño y/o valor de los casos considerados.
- Cómo no hay computadora estándar, comparamos las medidas utilizando tiempos de ejecución.
- La función se llama asintótica porque trata del comportamiento de valores en el límite, esto es para valores suficientemente grandes. Brassard and Bratley [1988]
- Diremos que una función $t : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ es de orden O (Omicron) de g si $t \in O(g)$.

Orden

Función y Orden

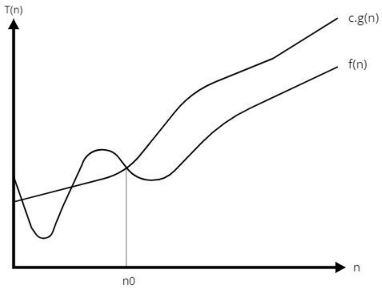

Figure: Relación entre la función f y el orden

Orden
Ejemplos

Ejemplos de Ordenes

- Si $T(n) = 3n$ entonces
  $T(n) \in O(n), T(n) \in O(n \cdot logn), T(n) \in O(n^2))$
- Si $T(n) = (n+1)^2$ entonces
  $T(n) \in O(n^2), T(n) \in O(n^3), T(n) \in O(2^n))$
  $T(n) \notin O(n), T(n) \notin O(n \cdot logn)$
- Si $T(n) = 32n^2 + 17n + 32$ entonces
  $T(n) \in O(n^2), T(n) \notin O(n)$
- Si $T(n) = 3n^3 + 342^2 n + 32$ entonces
  $T(n) \in O(n^3), T(n) \notin O(n^2)$
- Si $T(n) = 3^n$ entonces
  $T(n) \in O(3^n), T(n) \notin O(2^n)$

Orden

Comparativa de funciones de Orden

$T(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow$

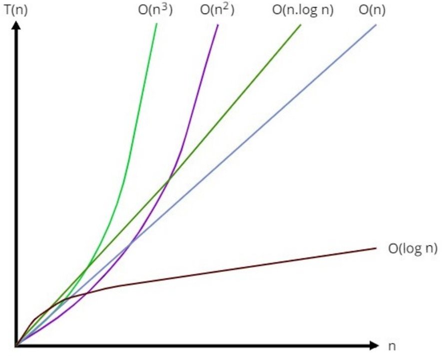

Figure: Ordenes de crecimiento

Orden

Comparativa de funciones de Orden

$$O(1) \subset O(log\ n) \subset O(n) \subset O(n \cdot log\ n) \subset O(n^2) \subset O(2^n) \subset O(n!)$$

N	$O(log_2\ n)$	$O(n)$	$O(n\ log_2\ n)$	$O(n^2)$	$O(2^n)$
10	$3\mu s$	$10\mu s$	$30\mu s$	$0.1\ ms$	$1\ ms$
25	$5\mu s$	$25\mu s$	$0.1\ ms$	$0.6\ ms$	$33\ s$
50	$6\mu s$	$50\mu s$	$0.3\ ms$	$2.5\ ms$	36 *años*
100	$7\mu s$	$100\mu s$	$0.7\ ms$	$10\ ms$	10^{17} *años*
1000	$10\mu s$	$1\ ms$	$10\ ms$	$1\ s$	...
10000	$13\mu s$	$10\ ms$	$0.1\ s$	$100\ s$	...

Table: Comparativa de órdenes

Asíntotas

Definición

Orden O (Omicron)

Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$. Se define el conjunto de funciones de orden O de g como:

$$O(g(n)) = \{t : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) | \exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} :$$

$$t(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}$$

Brassard and Bratley [1988]

Asíntotas

Orden

Notación O

Decimos que una funcion $T(n)$ es $O(g(n))$ si existen constantes n_0 y c tales que $T(n) <= c \cdot g(n)$ para todo $n > n_0$.

Estamos diciendo que $T(n)$ se comporta como la función $f(n)$ para valores de entrada muy grandes.

T(n) es O(g(n)) $\Leftrightarrow$

$$\exists\ c \in \mathbb{R}^+, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, T(n) \leq c \cdot g(n)$$

Orden
Propiedades

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in O(f)$.
2. $f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subset O(g)$.
3. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge g \in O(f)$.
4. Si $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$
5. Si $f \in O(g) \wedge f \in O(h) \Rightarrow f \in O(min(g,h))$.
6. Regla de la suma: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(max(g,h))$.
7. Regla del producto: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in O(g \cdot h)$.
8. Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
    1. si $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$
    2. si $k = 0$ entonces $f \in O(g)$, es decir $O(f) \subset O(g)$, pero sin embargo se verifica que $g \notin O(f)$.

Orden
Cómo demostrar un orden

$T(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow$ Cómo demostrar que una función están en el orden de otra, a partir de la regla del límite:
Sea $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ se cumple que:

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}$ entonces $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n))$
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $f(n) \notin O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$

Orden

Gráfica de Orden

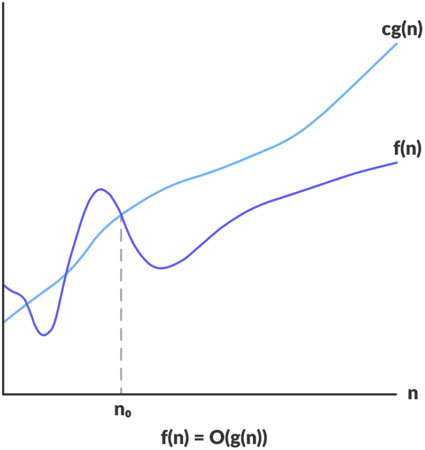

Figure: una función f y su orden O

Asíntotas
Orden

Comprobar una función

Para probar si una función es de un orden específico, tendríamos que seguir la definición.

$f(n)$ es $O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}^+, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)$

PROBAR:

$$(100n + 5) \in O(n^2)$$

Asíntotas
Orden

Comprobar una función

Para probar si una función es de un orden específico, tendríamos que seguir la definición.
$f(n)$ es $O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}^+, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)$

PROBAR: $(100n + 5) \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$

$(100n + 5) \leq (100n + n) = 101n \leq 101\mathrm{n}^2, \forall n \geq 5,$
tomamos $c = 101, n_0 = 5$

se cumple que $(100n + 5) \leq c \cdot n^2, \forall n \geq 5,$
entonces $(100n + 5) \in \mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$
Ejemplo del Levitin [2011]

Propiedades del Orden

Se pueden utilizar en las demostraciones

1. Para cualquier función f se tiene que $f \in O(f)$.
2. $f \in O(g) \Rightarrow O(f) \subset O(g)$.
3. $O(f) = O(g) \Leftrightarrow f \in O(g) \wedge g \in O(f)$.
4. Si $f \in O(g) \wedge g \in O(h) \Rightarrow f \in O(h)$
5. Si $f \in O(g) \wedge f \in O(h) \Rightarrow f \in O(min(g, h))$.
6. Regla de la suma: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 + f_2 \in O(max(g, h))$.
7. Regla del producto: Si $f_1 \in O(g) \wedge f_2 \in O(h) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in O(g \cdot h)$.
8. Si existe $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ según los valores de k tenemos:
    1. si $k \neq 0 \wedge k < \infty$ entonces $O(f) = O(g)$
    2. si $k = 0$ entonces $f \in O(g)$, es decir $O(f) \subset O(g)$, pero sin embargo se verifica que $g \notin O(f)$.

Ejemplo

Cuánto se tarda en revisar una tarea?

Descubrir el tiempo tardado

Se descubre que la demora en minutos en revisar las tareas es igual a la progresión aritmética del número de tareas.

- Si son 4 tareas $1 + 2 + 3 + 4 = 10.$ [minutos]
- Definamos una función $t(n)$ dependiente de los datos de entrada (tareas).
  - $t(n) = (\sum_{k=1}^{n} i)$
  - $(\sum_{i=1}^{n} i) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
  - $t(n) = 0.5n^2 + 0.5n \leq n^2 + n^2 = 2n^2$
  - $c = 2, n_0 = 1$, entonces $t(n) \in O(n^2)$

Orden O vs orden o

Diferencias

Big O vs Little o

Si bien ambas son cotas, la diferencia fundamental es que .
en cuando uno utiliza O está diciendo la función $f(n)$ *no crece más rápido que* $g(n)$, en cambio cuando utiliza o está diciendo, la función $f(n)$ *crece estrictamente más lento que* $g(n)$.

La diferencia es entre $\leq$ versus $<$

Ejemplos:

- $n^2 \in \mathrm{O(n^2)}$
- $n^2 \in \mathrm{O(n^3)}$
- $n^2 \notin \mathrm{o(n^2)}$
- $n^2 \in \mathrm{o(n^3)}$

Orden
Cómo demostrar un orden

Partiendo de la regla del límite:
Sea $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

- Decimos $f(n) \in o(g(n))$, es cierto que
  - La comparación es $f(n) < g(n)$
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
- Decimos $f(n) \in O(g(n))$, es cierto que
  - La comparación es $f(n) \leq g(n)$
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ o
  - Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C$ (constante)

Tabla de contenidos

Resumen

- $f(n) \in O(g(n))$ (big-o) Indica que $f(n)$ es asintóticamente menor o igual a $g(n)$.
- $f(n) = o(g(n))$ (little-o) Indica que $f(n)$ es asintóticamente menor que $g(n)$.

Demostrar

Para demostrar relación entre funciones

En general

- **Absurdo**: Demuestra que su negación da lugar a una contradicción matemática.
- **Regla del umbral generalizado**: Implica detectar el valor de la constante c tal que se verifique la relación $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todos los $n \geq 1$ (tomaremos n_0 como 1 en lo posible).
- **Regla del límite**: Tendremos que calcular el siguiente límite para :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

Referencias I

G. Brassard and P. Bratley. *Algorithmics - Theory and Practice*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

Anany Levitin. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms (3ª edição)*. Addison-Wesley, 2011.