TD 1 - Construction de $\mathbb{N}$ et écriture des nombres entiers

1 La construction de l'ensemble des entiers

Exercice 1. Soit S l'application successeur définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer à l'aide du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n) \neq n$.

Exercice 2.

1. Soit E un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Montrer que E est dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

Indication. Pour la question 1, on pourra construire une bijection de $\mathbb{N}$ dans E de manière explicite.

Exercice 3. On considère la définition ensembliste de Von Neumann des entiers.

1. Montrer que pour tout entier n non nul, $\emptyset \in n$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, $n > 0$.

Indication. Pour la question 1, on pourra effectuer une démonstration par récurrence.

Exercice 4. Montrer que l'application $[0+]$ est l'identité sur $\mathbb{N}$.

Indication. On pourra effectuer une démonstration par récurrence.

Exercice 5. Soient a, b et c des entiers tels que $b \leq c \leq a$. En utilisant la définition de la différence de deux entiers et les propriétés de l'addition, montrer que :

$$a - b = (a - c) + (c - b).$$

Exercice 6. Soient a, b et c des entiers tels que $c \leq b \leq a$. En utilisant la définition de la différence de deux entiers et les propriétés de l'addition, montrer que :

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Exercice 7. Soient a et b deux entiers avec b non nul. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a$ et :

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - b & \text{si } a_n > b\,; \\ b - a_n & \text{si } a_n \leq b. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Indication. On pourra d'abord travailler sur des exemples afin d'en déduire une méthode pour démontrer ce résultat.

Exercice 8. Soit a un entier non nul et soient m, n des entiers. Montrer que $a^{m+n} = a^m \times a^n$.

2 Numération de position

Exercice 9. Dans le système en base 10, calculer le produit du nombre 123456789 par $9p$ où p est un nombre compris entre 1 et 9.

Exercice 10. En base supérieure à 10, on utilisera dans l'ordre les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ comme chiffres au-delà de 9.

1. Convertir en base 10 les nombres suivantes $(234)_5$, $(11001000110)_2$, $(\alpha\alpha\beta)_{12}$, $(111)_3$, $(38\alpha)_{11}$.
2. Le nombre 794 est écrit en base 10. Le convertir en bases 2, 4, 7 et 12.
3. Convertir $(\alpha 8 \beta)_{12}$ en base 4.

Exercice 11. Les nombres entiers sont écrits dans une base b avec $b \geq 2$.

1. En supposant que le premier chiffre à gauche est non nul, quels sont les plus petits nombres écrits avec deux chiffres ? trois chiffres ? n chiffres ?
2. Quels sont les plus grands nombres écrits avec deux chiffres ? trois chiffres ? n chiffres ?

3. En supposant que le premier chiffre à gauche est non nul, combien y-a-t-il de nombres écrits avec deux chiffres ? trois chiffres ? n chiffres ?
4. Que donnent les résultats des questions précédentes si on choisit $b = 10$? $b = 2$? $b = 12$? (on donnera les résultats en base 10).

Exercice 12.

1. Soit b un entier tel que $b \geq 2$. Dans quel système de numération a-t-on $(32)_b \times (14)_b = (438)_b$? Dans quel système de numération a-t-on $(27)_b \times (25)_b = (708)_b$?
2. Soient x, y et z des entiers compris entre 0 et 6. Trouver les nombres qui s'écrivent (xyz) en base 7 et (zyx) en base 11.
3. Dans le système en base 12, un nombre s'écrit $(xyz)_{12}$. Dans le système en base b (avec b entier tel que $b \geq 2$) ce même nombre s'écrit $(xyz0)_b$. Quel est le nombre et quelle est la nouvelle base ?

Indication. Pour la question 3, on pourra établir la décomposition dans la base 12 et la décomposition dans la base b de l'entier recherché, puis déterminer un encadrement de l'entier recherché afin d'en déduire les valeurs possibles de b, puis les valeurs possibles de l'entier.

Exercice 13. Soit n un entier compris entre 100 et 999. Calculer le produit de $7n$ par 143.

Indication. On pourra utiliser l'associativité de la multiplication et écrire n sous la forme $(abc)_{10}$ avec a, b et c des entiers compris entre 0 et 9 et $a \neq 0$.

Exercice 14. Soit b un entier tel que $b \geq 2$. Soit n un entier tel que $0 \leq n < b$. Montrer que le nombre :

$$(123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321)_b$$

est un carré.

Indication. À l'aide d'exemples pour de petites valeurs de n et pour $b = 10$, on pourra déterminer une écriture en base b du nombre dont le carré est $(123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321)_b$ puis démontrer ce résultat.

Exercice 15. Soit b un entier tel que $b \geq 2$. Soient a et a' deux entiers qui s'écrivent en base b de la façon suivante :

$$a = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b \qquad \text{et} \qquad a' = (a'_m a'_{m-1} \ldots a'_1 a'_0)_b$$

avec n, m des entiers, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $a_n \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $a'_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $a'_m \neq 0$. On suppose que a et a' sont distincts.

1. Soit p le plus grand entier tel que $a_p \neq a'_p$. Montrer que si $a_p > a'_p$ alors $a > a'$. Puis montrer que si $a_p < a'_p$ alors $a < a'$.
2. Montrer que si $n > m$, alors $a > a'$.

Remarque 1. Cet exercice nous permet de constater que l'écriture des entiers dans une base b permet de comparer facilement ces entiers.