Université Saclay, Feuille de TD 3, 18.11 correction M303

Correction de l'exercice 18.11 Soit $n \geq 1$. Montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes avec au plus n classes de conjugaison. Il revient au même de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes avec exactement n classes de conjugaison.

Soit G un tel groupe. On a

$$|G| = n_1 + \dots + n_n \text{ avec } n_1 = |\omega(1)| = 1.$$

En divisant par le cardinal de G on a donc

$$1 = \frac{1}{\frac{|G|}{n_1}} + \dots + \frac{1}{\frac{|G|}{n_n}}.$$

Posons $m_n := \frac{|G|}{n_1} \geq \ldots \geq m_1 := \frac{|G|}{n_n}$ avec $m_n = |G|$.

On va faire une récurrence mais pour rendre compréhensible d'où sort le résultat je détaille ce qui donne l'idée. On a

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \leq \frac{n}{m_1}.$$

Donc $m_1 \leq n$. Si $m_1 = 1$ alors $n = 1$ l'équation et $|G| = m_n = m_1 = 1$. Sinon $n \geq 2$ et :

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{m_1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{m_i} \leq \frac{n-1}{m_2} \leq \frac{n}{m_2}.$$

Donc $m_2 \leq 2n \leq n^2$. Plus généralement au rang $k < n$ on a

$$1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i} = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{m_i} > 0.$$

En mettant au même dénominateur le membre de gauche on voit qu'il existe un entier strictement positif a tel que

$$1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{m_i} = \frac{a}{m_1 \ldots m_k} \geq \frac{1}{m_1 \ldots m_k}.$$

Et par ailleurs on a

$$\sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{m_i} \leq \frac{n}{m_{k+1}}.$$

On en déduit que

$$m_{k+1} \leq n m_1 \ldots m_k.$$

Par récurence on montre alors que $m_i \leq n^{2^i}$. C'est vrai pour $i = 1$ (et pour $i = 2$) et par ailleurs la formule précédente permet de conclure en notant que $1 + 1 + 2 + \dots + 2^k = 1 + (2^{k+1} - 1) = 2^{k+1}$.

Finalement on a ainsi montré que $|G| = m_n \leq n^{2^n}$. Il reste à montrer que si $|G|$ est borné alors il n'y a qu'un nombre fini de classe d'isomorphismes de tels groupes possibles. Tout d'abord si G est l'ensemble fixé $E_n := \{1, \dots, |G|\}$ alors une loi de groupe sur E_n revient à se donner une fonction de $E_n \times E_n$ dans E_n vérifiant certaines conditions supplémentaires (neutre, associativité, inverse). Or comme E_n est borné (par une fonction dépendant de n), il en est de même pour l'ensemble des telles fonctions. Si ensuite $G = \{g_1, \dots, g_{|G|}\}$ est un groupe quelconque de cardinal $|G|$ alors on fabrique un isomorphisme avec E_n muni d'un structure de groupe transportée depuis celle sur G de la manière suivante : on pose

$$\phi : G \to E_n,\ g_i \mapsto i \text{ et on munit } E_n \text{ de la loi de groupes } i \star j := g_i \cdot g_j.$$

Ainsi ϕ est un isomorphisme de groupes et on a donc prouvé qu'il n'y avait qu'un nombre borné (par une fonction dépendant de n) de classes d'isomorphismes de groupe ayant au plus n classes de conjugaison.