Université Saclay-Paris-Sud Feuille de TD 4 M303

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \mapsto x \mod n$ la projection canonique et soit L un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Montrer qu'il existe un unique $d \in \mathbb{N}$, tel que d divise n et $L = \pi(d\mathbb{Z})$.

2. Construire un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/L$.
3. On note $n = de$. Construire un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ et L.

Exercice 2 Soit p un nombre premier et d un diviseur de $p-1$. On considère l'ensemble $G = \{x^d \mid x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ d'ordre $\frac{p-1}{d}$. Illustrer ceci dans les cas suivants : $(p,d) = (11,5)$, $(p,d) = (19,3)$ et $(p,d) = (19,6)$.

Exercice 3 (Groupes d'ordre 6) Soit G un groupe de cardinal 6, non commutatif.

1. Montrer qu'il n'y a pas d'élément d'ordre 6.
2. Combien y a-t-il de 3-Sylow ? Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 3 ? Même question en remplaçant 3 par 2.
3. Montrer que deux éléments distincts d'ordre 2 ne commutent pas (on pourra regarder le sous-groupe engendré).
4. Montrer qu'un élément d'ordre 3 de G ne commute jamais à un élément d'ordre 2.
5. Vérifier que G agit par conjugaison sur les éléments d'ordre 2. Montrer que le noyau du morphisme de G dans $\mathcal{S}_3$ correspondant à cette action est trivial et que G est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.

Exercice 4 (Groupe de cardinal 56) On désire montrer qu'un groupe d'ordre 56 possède toujours un sous-groupe distingué d'ordre différent de 1 et de 56. Pour cela :

1. Montrer que G a un ou huit 7-sous-groupes de Sylow.
2. On suppose que G a huit 7-sous-groupes de Sylow.
   (a) Montrer que deux 7-sous-groupes de Sylow distincts sont d'intersection nulle.
   (b) Combien y a-t-il d'éléments de G d'ordre différent de 7 ?
   (c) Combien y a-t-il de 2-sous-groupes de Sylow ?
3. Montrer l'assertion demandée.

Exercice 5 (Groupes d'ordre 30, 35 ou 48) Montrer que tout groupe d'ordre 30 possède un sous-groupe distingué, que tout groupe d'ordre 35 est cyclique, que tout groupe d'ordre 48 a un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16. Dans ce dernier cas, quelles sont les possibilités pour le quotient ?

Exercice 6 Soit G un groupe et U et V deux sous-groupes distingués tels que $U \cap V = \{1_G\}$,. Montrer que l'application produit $U \times V \to G$, $(u,v) \mapsto uv$ est un injective, puis que c'est un morphisme de groupes.

Exercice 7 (Groupes de cardinal 255) Soit G un groupe de cardinal 255.

1. Montrer que G admet au moins un sous-groupe distingué non trivial.

2. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que l'on ne peut pas avoir $n_3 \neq 1$ et en même temps $n_5 \neq 1$.
3. Si $n_3 = n_5 = 1$ montrer que G est cyclique.
4. Sinon, soit $p \in \{3, 5\}$ tel que $n_p \neq 1$ et soit P un p-Sylow fixé. En considérant l'action par conjugaison de P sur l'unique 17-Sylow (qui est cyclique et dont on peut fixer un générateur x_0), montrer que si g est un élément d'ordre de p de P alors $gx_0 = x_0g$. En déduire que l'ordre de gx_0 est $17p$.
5. Combien d'éléments d'ordre $17p$ peut on fabriquer ainsi ?
6. Conclure que $n_3 = n_5 = 1$ donc que G est cyclique.
7. Combien G a-t-il finalement de sous-groupes distingués non triviaux ?

Exercice 8 (Groupes de cardinal pqr) Soit G un groupe d'ordre pqr où p, q et r sont des nombres premiers différents. Montrer que G a au moins un sous-groupe de Sylow distingué.

Exercice 9 (Argument de Frattini) Soit G un groupe fini, H un sous-groupe distingué de G, p un nombre premier et P un p-Sylow de H. Montrer que si N désigne le normalisateur de P dans G, alors $G = HN$.

Exercice 10 (Produit direct)

1. Soient q un nombre premier et n un entier tel que $1 < n < q$. Soit G un groupe d'ordre nq et Q un q-sous-groupe de Sylow de G.
   (a) Prouver que Q est distingué dans G.
   (b) On suppose que n est premier et ne divise pas $q-1$ et on note P un n-sous-groupe de Sylow de G. En utilisant le fait admis, prouver que G est cyclique.
2. Soit q un nombre premier. On considère le sous-groupe H de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ et $b \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
   (a) Quel est le cardinal de H ?
   (b) Décrire l'unique q-sous-groupe de Sylow de H.
   (c) Quelles sont les matrices de H commutant à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $a \neq 1$? Quel est le centre de H ?
   (d) On rappelle (admet) que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Pour tout diviseur n de $q-1$, produire un sous-groupe de H de cardinal nq et prouver qu'il n'est pas abélien si $n \neq 1$.

Exercice 11 Soit G un groupe et U et V deux sous-groupes distingués tels que $U \cap V = \{1_G\}$,. Montrer que l'application produit $U \times V \to G$, $(u, v) \mapsto uv$ est un injective, puis que c'est un morphisme de groupes.

Exercice 12 Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G d'indice p premier avec p le plus petit facteur premier du cardinal de G. Montrer, en étudiant l'action de H par translation sur G/H que H est distingué dans G