Partiel MAG303

Les exercices sont indépendants. Tout matériel électronique est interdit.

Exercice 1 Soient $n \geq 2$ un entier et G un groupe d'ordre $2n$.

1. Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre n est distingué.
2. Soit $V := \{x \in G \,:\, x^2 \neq 1\}$. Montrer que V contient un nombre pair d'éléments. En déduire que G contient au moins un élément d'ordre 2.

Suppsons maintenant que $n = p$ est un nombre premier impair.

3. Justifier que G contient un sous-groupe H d'ordre p et que celui-ci est cyclique.

Soit $u \in G$ un générateur de H et soit $a \in G$ d'ordre 2 et soit $\Phi_a : G \to G$ l'automorphisme de G défini par $\Phi_a(g) = aga^{-1}$, pour tout $g \in G$.

4. Déterminer les valeurs possibles pour l'ordre de Φ_a dans $\mathrm{Aut}(G)$ et montrer qu'il existe $1 \leq i \leq p-1$ tel que $\Phi_a(u) = u^i$.
5. Montrer que $i^2 \equiv 1 \bmod p$, puis que $i \in \{1, p-1\}$. (*Indication : on pourra calculer* $\Phi_a(\Phi_a(u))$.)
6. Montrer que G est abélien si et seulement si $i = 1$ et déterminer G dans ce cas-là.
7. Si G est non-abélien, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $au^k = u^{-k}a$.
8. Montrer que tout $g \in G$ s'écrit de manière unique $g = u^k a^j$, avec $0 \leq k \leq p-1$ et $0 \leq j \leq 1$. En déduire qu'il existe un unique groupe non-abélien d'ordre $2p$.

Exercice 2 (Groupes d'ordre 55) Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Soit $p : H \times K \to G$ l'application définie pour $(h,k) \in H \times K$ par $p(h,k) = hk$.

1. Supposons que $H \cap K = \{1\}$. Montrer que p est injective.
2. Montrer que si H est distingué ou si K st distingué, alors l'image HK de p est le sous-groupe de G engendré par H et K.
   (*Indication : On pourra commencer par montrer que* $HK = KH$)

Supposns maintenant que G est un groupe d'ordre 55.

3. Déterminer le nombre de 5-Sylow et le nombre de 11-Sylow de G.
4. Lorsque G a exactement un 5-Sylow, montrer que G est cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$.

On suppose à présent que G est non-cyclique.

5. Déduire de ce qui précède que G est engendré par deux éléments $x, y \in G$ tels que $x^{11} = 1$ et $y^5 = 1$.

6. Montrer qu'il existe $1 < r < 11$ tel que $yxy^{-1} = x^r$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$y^k x y^{-k} = x^{r^k}.$$

   En déduire que r ne peut pas prendre les valeurs $2, 6, 7, 8, 10$.
8. En déduire qu'il y a 2 groupes d'ordre 55 à isomorphisme près. Combien d'entre eux sont abéliens ?

Exercice 3 (Une nouvelle démonstration du premier Théorème de Sylow) Le but de cet exercice est de donner une preuve du premier théorème de Sylow qui est différente de celle donnée en cours.

Dans tout l'exercice, p désigne un nombre premier.

1. Justifier que pour toute paire de polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $(P+Q)^p = P^p + Q^p$.
2. Soient $m, k \in \mathbb{N}^*$ avec m non-divisible par p. Déduire de la question précédente que

$$\binom{p^k m}{p^k} \equiv m \mod p,$$

   puis que $\binom{p^k m}{p^k}$ est premier avec p.
   (*Indication : on pourra calculer le coefficient de* X^{p^k} *dans le polynôme* $(1+X)^{mp^k}$*.*)

Soit G un groupe fini dont l'ordre $|G|$ s'écrit $|G| = p^k m$ avec $k, m \geq 1$ et m premier avec p.

3. Montrer que l'action $(g, x) \in G \times G \longmapsto gx \in G$ par translation à gauche de G sur lui-même induit une action de G sur $\mathcal{P}(G)$.
4. Soit $X \subset \mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G de cardinal p^k. En utilisant l'action de G sur $\mathcal{P}(G)$ restreinte à X et l'équation aux classes, montrer qu'il existe $A \in X$ tel que p^k divise $|\mathrm{Stab}(A)|$.
5. Montrer que l'action de G sur lui-même par translation est *libre*, c'est-à-dire que pour tout $g \in G \setminus \{1\}$ et tout $x \in G$, on a $g \cdot x \neq x$, puis en déduire cette action se restreint en une action de $\mathrm{Stab}(A)$ sur A qui est également libre.
6. En déduire que $|\mathrm{Stab}(A)|$ divise $\mathrm{Card}(A)$, puis conclure.

Exercice 4 (La formule de Burnside et applications) Le but de cet exercice est de montrer que si G est un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, alors on a

$$\mathrm{Card}(X/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)),$$

où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \ : \ g \cdot x = x\}$ est l'ensemble des points fixes de g, puis d'appliquer cette formule.

1. On note $A := \{(g, x) \in G \times X \ : g \cdot x = x\}$. Montrer que l'on a bien

$$\mathrm{Card}(A) = \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} \mathrm{Card}(\mathrm{Stab}(x)).$$

2. Déduire la formule de Burnside de la seconde égalité.

Questions bonus. On suppose maintenant que G agit transitivement sur X et que $n = \mathrm{Card}(X) \geq 2$. On veut montrer qu'il existe au moins $|G|/n$ éléments $g \in G$ tels que $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$.

3. Déduire de la formule de Burnside qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$.
4. Soit $G \times X^2 \to X^2$ l'action donnée par

$$g \cdot (x, x') := (g \cdot x, g \cdot x'), \quad (g, x, x') \in G \times X^2.$$

   Montrer que pour cette action, on a

$$\mathrm{Card}(X^2/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))^2.$$

   (*Indication : on pourra déterminer le nombre de points fixes de* $g \in G$ *pour cette action en fonction de* $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$.)

5. Soit $\Gamma := \{g \in G : \ \mathrm{Fix}(g) = \varnothing\}$ et soit

$$\tau := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(n - \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))\right) \left(\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) - 1\right).$$

   Montrer que $\tau \geq -n\mathrm{Card}(\Gamma)/|G|$, puis que $\tau \leq -1$. Conclure.