Université Saclay-Paris-Sud   Feuille de TD 8   M303

Exercice 1. 1. Quel est l'ordre de $G = (\mathbb{Z}/77\mathbb{Z})^\times$?

2. Quels sont ses invariants comme groupe abélien fini ? Construire un isomorphisme avec un groupe de la forme $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}, \quad n_r | n_{r-1} | \ldots | n_1$.

3. Combien G a t'il d'éléments d'ordre 2,4 ? De sous-groupes d'ordre 2, 4 ?

Exercice 2. Parmi les groupes suivants, lesquels sont isomorphes ?

$$G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \quad G_2 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$G_3 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad G_4 = (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad G_5 = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2.$$

Exercice 3. Déterminer les classes d'isomorphismes de groupes abélien d'ordre 32 et d'ordre 18.

Exercice 4. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$ soit A_i un groupe abélien. On note

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} | a_i \in A_i\}, \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i | \exists J \subset I, J \text{ fini}, a_i = 0 \,\forall\, i \notin J\}.$$

1. Montrer que $\prod_{i\in I} A_i$ est un groupe abélien, et que $\bigoplus_{i\in I} A_i$ est un sous-groupe.

2. A quelle condition a t'on égalité ?

3. Supposons que $I = \mathbb{Z}$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $A_i = \mathbb{Z}$ (resp. $A_i = \mathbb{R}$). Montrer que l'on a un isomorphisme
$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \ell(\mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \ell(\mathbb{R})),$$
où $\ell(\mathbb{Z})$ (resp. $\ell(\mathbb{R})$) est l'ensemble des suites à valeurs entières (resp. réelles). A quoi est alors identifié $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ (resp. $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) ?

4. Soit V un k-espace vectoriel (k corps). Soit E, F deux sous-espaces vectoriels de V.

   (a) Montrer que l'on a une application canonique
   $$E \times F \longrightarrow E + F := \{e + f |\ e \in E, f \in F\ \} \subset V.$$

   (b) A quelle condition (sur E et F) est-ce un isomorphisme ?

Exercice 5. Soit G un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. On note

$$G[n] = \{g \in G |\ n \cdot g = 0\} \quad \text{et} \quad G^{tor} = \bigcup_{n\geq 1} G[n].$$

1. Montrer que $G[n]$ (resp. G^{tor}) est un sous-groupe de G.

2. Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe. Montrer que $f(G[n]) \subset H[n]$ (resp. $f(G^{tor}) \subset H^{tor}$).

3. Si $f(G^{tor}) = H^{tor}$, a t'on nécessairement $f(G[n]) = H[n]$ pour tout $n \geq 1$?

4. Montrer que $H := G/G^{tor}$ est sans torsion, i.e. $H[n] = \{0\}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6. Soit G un groupe abélien dont les diviseurs élémentaires sont $(1125, 45, 5)$.

1. Possède t'il un sous-groupe dont les diviseurs élémentaires sont $(375, 3)$?

2. Donner toutes les structures possibles de sous-groupes non cycliques de G pouvant être engendrés par 2 éléments.

Exercice 7. Soit G, H sont deux groupes abéliens finis.

1. Montrer que si $G \times G \simeq H \times H$ alors $G \simeq H$.

2. Montrer que si il existe K un groupe abélien fini tel que $G \times K \simeq H \times K$ alors $G \simeq H$.

Trouver un contre exemple dans le second cas lorsque G, H, K ne sont plus abélien finis. *C'est en fait encore vrai pour tous les groupes finis, cf. théorème de Krull-Schmidt.*

Exercice 8. Soit G un groupe abélien fini.

1. Montrer que si $|G|$ est sans facteur carré alors G est cyclique.

2. On appelle exposant de G le ppcm des ordres des éléments de G. Montrer qu'il existe $g \in G$ d'ordre l'exposant de G.

3. Donner un contre exemple si G n'est plus supposé abélien.

Exercice 9. Soit les vecteurs suivants de $\mathbb{Z}^4$

$$v_1 = (1, 4, 2, 5), \quad v_2 = (3, 7, 11, 6), \quad v_3 = (4, 13, 10, 2), \quad v_4 = (5, 11, 9, 7).$$

Soit $B \subset \mathbb{Z}^4$ le groupe engendré par $v_1, \ldots, v_4$. Trouver une base adaptée à B.

Exercice 10. 1. Soit $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ un morphisme de groupes.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\mathbb{Z}^n / \operatorname{Ker} f$ sont des groupes abéliens libres de type fini.

(b) Montrer qu'il existe une unique application $\mathbb{Q}$-linéaire $f_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^m$ dont la restriction à $\mathbb{Z}^n$ est f.

(c) Montrer que

$$\operatorname{rg}(\operatorname{Ker} f) = \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ker} f, \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(\mathbb{Z}^n / \operatorname{Ker} f) = \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Im} f_{\mathbb{Q}}.$$

(d) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ adment un supplémentaire dans $\mathbb{Z}^n$. Est-ce le cas pour $\operatorname{Im} f$?

2. Soit
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^4 |\ x + 2y + 3z = 0, \text{ et } 2y + 5t = 0 \right\}$$
Montrer que G est un groupe abélien libre de rang 2, en donner une base. Donner un supplémentaire de G dans $\mathbb{Z}^4$.

3. Soit
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3 |\ 2x + y + 5z = 0, \text{ et } 4x + 3y = 0 \right\}$$
Monter que H est abélien libre de rang 1, en donner une base ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{Z}^3$.