Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2021-2022

CORRIGÉ de l'examen du mardi 26 Avril 2021

Début 13h30 Durée : 3 heures

Je rappelle les énoncés parce que ça ne me coûte rien. Attention aus fautes de frappe : je ne relis pas.

Exercice 1. (4 points.) Déterminer pour chacune des fonctions suivantes f_i, définies sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, si l'origine est un point critique pour f_i, si f a un minimum local en 0, et si f_i a un maximum local en 0.

1. $f_1(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^2$.
2. $f_2(x,y,z) = x^4 + y^4 - z^2$.
3. $f_3(x,y,z) = \cos^2(x) + \sin^2(y)$.
4. $f_4(x,y,z) = xyz$.
5. $f_5(x,y,z) = x + y + z$.

Pour chacun, pas de problèmes en général pour calculer le gradient, et déterminer que f_i a un point critique en 0, sauf pour la dernière fonction f_5.

Puisque 0 n'est pas un point critique, f_5 ne peut y avoir ni minimum local, ni maximum local (cours).

Ensuite vous vous êtes en majorité précipités pour calculer les dérivées seconde, et essayer d'en déduire les infos demandées. C'est potentiellement une bonne idée, mais vous pouvez aussi regarder ce qui se passe et en déduire des infos plus fiables et plus précises.

Pour f_1 et f_2, on peut calculer la matrice Hessienne H, et on trouve que le seul terme non nul est un ± 2 en bas à droite. Comme la matrice est clairement dégénérée (de rang < 3), on s'attend à devoir discuter. Dire "on ne peut rien dire" ne suffit pas.

Dans le premier cas, le 2 en bas implique en tout cas que f_1 ne peut pas avoir de maximum local en 0, et de même f_2 ne peut pas avoir de maximum en 0. Mais de toute façon on va regarder de manière plus précise.

Pour f_1, on voit tout de suite que $f_1(x,y,z) \geq 0$ partout. Et comme $f(0) = 0$, on en déduit que f_1 a un minimum global en 0.

Elle ne peut pas avoir de maximum local en 0, puisqu'il y a des points du type $(0,0,t)$ arbitrairement près de 0 tels que $f(0,0,t) > 0 = f(0)$.

Pour $f = f_2$, on doit observer que f prend des valeurs des deux signes près de 0. Voyons ceci de plus près. D'abord, il y a des points du type $(0,0,t)$ arbitrairement près de 0 tels que $f(0,0,t) = -t^2 < 0 = f(0)$, donc f_2 ne peut pas avoir de minimum local en 0.

Et ensuite, il y a des points du type $(t,0,0)$ arbitrairement près de 0 tels que $f(t,0,0) = t^4 > 0 = f(0)$, donc f_2 ne peut pas avoir de maximum local en 0.

Pour f_3, on pouvait conclure directement avec la Hessienne, puisqu'elle était une matrice diagonale avec les coefficients $-2, 2, 0$, ce qui dit qu'elle a au moins une valeur propre strictement négative (donc pas de minimum local) et une valeur propre strictement positive (donc pas de maximum local). Ou alors, directement on observe qu'il y a des points du type $(t,0,0)$ arbitrairement près de 0 tels que $f(t,0,0) = \cos^2(t) < 1 = f(0)$ (donc pas de de minimum local), et des points du type $(0,0,t)$ arbitrairement près de 0 tels que $f(t,0,0) = 1 + \sin^2(t) > 1 = f(0)$ (donc pas de de maximum local).

Pour $f = f_4$, la matrice hessienne est nulle, donc on ne peut rien conclure du tout de sa valeur. Mais on peut regarder à la main. On voit que $f(0) = 0$, et que f prend des valeurs stritement positives et des valeurs strictement négatives arbitrairement près de 0. Pour strictement positive, prendre $f(t,t,0) = t^2$. Pour strictement négtive, prendre $f(t,-t,0) = -t^2$.

On a vu que f_5 n'a pas d'extremum local, puisque pas de point critique.

Exercice 2. (3 points.) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe ; on rappelle que convexe signifie que $(1-t)x+ty \in \Omega$ pour $x \in \Omega$, $y \in \Omega$, et $t \in [0,1]$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

On suppose que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$, et on veut en déduire que f est constante sur Ω, mais on est prié ne ne pas utiliser le résultat du cours qui dit ceci.

Soient $x, y \in \Omega$, avec $x \neq y$. On pose $h(t) = f((1-t)x+ty)$ pour $t \in [0,1]$.

1. Expliquer pourquoi h est définie et continue sur $[0,1]$.
2. Expliquer pourquoi h est dérivable sur $]0,1[$, et calculer sa dérivée en $t \in]0,1[$ (à partir de la différentielle Df de f).
3. Démontrer que $h(1) = h(0)$ et conclure.

Pour le fait que f est définie, il faut juste dire que pour $0 \leq t \leq 1$, l'énoncé dit que $(1-t)x+ty \in \Omega$, et donc $f((1-t)x+ty)$ est défini.

Pour la continuité, on dit juste que h est la composée de deux fonctions continues, l'application que je vais appeler ρ, définie sur $[0,1]$ par $\rho(t) = (1-t)x+ty$, et de la restriction de f à $\rho([0,1])$. Les deux applications sont continues.

Pour la dérivabilité, pareil : h est la composée de ρ (dérivable, ou de manière équivalente parce que $]0,1[\subset \mathbb{R}$, différentiable), et f, qui est différentiable sur un ouvert qui contient $\rho(]0,1[)$. Le cours dit que h est différentiable, et que sa différentielle (ici, une simple dérivée puisque $]0,1[\subset \mathbb{R}$) est obtenu en composant les différentielles.

Normalement on dirait que $Dh(t) = Df(\rho(t)) \circ D\rho(t)$; faisons le calcul comme ceci d'abord. $Dh(t)$ doit être une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc en fait la multiplication par un nombre $h'(t)$. Mais on peut calculer son effet sur le "vecteur" $e = 1 \in \mathbb{R}$ en composant. D'abord, $D\rho(t)(e) = y - x$ (la dérivée de ρ au point t). Ensuite on doit donc calculer $Df(\rho(t))(y-x) = Df((1-t)x+ty)(y-x)$. Et donc $h'(t) = Df((1-t)x+ty)(y-x)$.

Si vous aimez les gradients, vous pouvez observer que $Df((1-t)x+ty)(y-x) = \langle \nabla f((1-t)x+ty), (y-x)\rangle$.

Dans tous les cas, l'hypothèse disait que $Df(\rho(t)) = 0$, donc $h'(t) = 0$.

Et en fait on n'en demandait pas tant. On a vu plusieurs fois cette application $t \to f((1-t)x+ty)$, et c'est celle qui permet de définir et calculer la dérivée directionnelle de f, dans la direction $y-x$ (mais en général on fait ceci au point x et ici c'était au point $(1-t)x+ty$. Quand même on aurait accepté la réponse : "ceci est la dérivée de f dans la direction $y-x$, calculée au point $(1-t)x+ty$, et on a vu en cours qu'elle vaut $Df((1-t)x+ty)(y-x)$".

Par contre, SVP n'acrivez pas le produit $(y-x) \times Df((1-t)x+ty)$, qui n'a aucun sens.

Une fois qu'on a trouvé que h est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, avec une dérivée nulle, on peut en déduire par un théorème que vous connaissez que h est constante sur $[0,1]$ donc $h(1) = h(0)$.

Vous pouvez même rappeler que ceci se prouve en appliquant le théorème des accroissements finis, puisque ceui-ci dit qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $h(1) - h(0) = (1-0)h'(\xi) = h'(\xi) = 0$.

Enfin, on note qu'on a montré que pour tout choix de $x, y \in \Omega$ (avec $y \neq x$), on a prouvé que $f(y) = f(x)$, puisque avec les notations ci-dessus, $f(x) = h(0)$ et $f(y) = h(1)$.

Exercice 3. (5 points.) On considère l'application $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ donnée par ses coordonnées

$$\begin{aligned} g_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \cos(x_1^2) + 6\sin(x_1x_2) + 4x_3 - 3x_4 \\ g_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= e^{x_1+x_2} + 3x_3 - 2x_4. \end{aligned}$$

On considère aussi le point $w = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ et l'ensemble

$$S = G^{-1}(w) = \{x \in \mathbb{R}^4 \,;\, G(x) = w\}.$$

1. Calculez les dérivées partielles des g_i en tout point $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, et en déduire que G est differentiable sur $\mathbb{R}^4$.
2. Enoncer le théorème des fonctions implicites qui devrait vous permettre de montrer que près de 0, l'ensemble S est le graphe d'une fonction $(x_1, x_2) \mapsto \varphi(x_1, x_2)$.
3. Vérifier les hypothèses et conclure.
4. On note $\varphi_1(x_1, x_2)$ et $\varphi_2(x_1, x_2)$ les deux coordonnées de $\varphi(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi
$$g_1(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = g_2(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = 1$$
pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ assez proche de 0.
5. Utiliser la question précédente pour calculer les quatre dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0,0)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Pour 1, calculez les dérivées partielles (par exemple, $\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = -2x_2 \cos(x_1^2) + 6x_2 \sin(x_1 x_2)$), puis dire que puisque ces dérivées partielles existent et sont continues (et même polynomiales), f est différentiable sur $\mathbb{R}^4$, avec une différentielle donnée par les dérivées partielles.

Pour 2, énoncer le théorème des fonctions implicites, pour une fonction G définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ici vous pouviez directement prendre $m = 2$ et $n = 2$ pour simplifier votre vie future.

Evidemment, ne pas oublier l'hypothèse la plus importante come quoi à l'origine (ici $0 = (0,0,0,0)$) la restriction au second $\mathbb{R}^2$ de la différentielle de G en 0 est bien bijective.

Pour la question 3, il ne restait plus qu'à vérifier cette condition. Les dérivées à considérer étaient donc $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, avec $i = 1$ ou 2, et $j = 3$ ou 4. Ced dérivées valaient $4, -3, 3, -2$, et la matrice correspondante était bien inversible puisque son déterminant valait $4 \times (-2) - (-3) \times 3 = -8 + 9 = 1 \neq 0$.

Donc on trouvait (comme dan l'énoncé du TFI) deux ouverts $I \subset \mathbb{R}^2$ et $J \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, et aussi une application φ de classe C^1 de I dans J, avec $\varphi(0,0) = (0,0)$, tels que dans $I \times J \subset \mathbb{R}^4$, l'équation $G(x) = G(0)$ (où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$) est équivalent à $(x_3, x_4) = \varphi(x_1, x_2)$.

Ou si vous préférez, en notant φ_1 et φ_2 les coordonnées de φ, à $x_3 = \varphi_1(x_1, x_2)$ et $x_4 = \varphi_2(x_1, x_2)$.

Ou encore, puisque $S = G^{-1}(w) = G^{-1}(G(0))$ est l'ensemble défini par l'équation $G(x) = w$, tels que dans $I \times J \subset \mathbb{R}^4$, $x \in S$ est équivalent à $(x_3, x_4) = \varphi(x_1, x_2)$.

Du coup (question 4), pour tout $(x_1, x_2) \in I$ (donc pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ assez proche de 0, on a bien que $\varphi(x_1, x_2)$ est défini, et que le point $x = (x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)$ est dans S, donc que $G(x) = G(0) = w$. Autrement dit, en regardant les coordonnées, que $g_1(x) = G_1(0) = 1$ et $g_2(x) = G_2(0) = 1$.

On passe à la question 5. On part de l'équation
$$g_i(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = 1, \tag{1}$$
avec $i = 1, 2$ (pour gagner de la place je vais faire les 2 à la fois, mais vous pouviez regarder la première $(i = 1)$ et ensuite dire que pour la seconde c'est pareil.

Appelons $h_i(x_1, x_2)$ le membre de droite. C'est une fonction différentiable de x_1 et x_2 (dans un voisinage de $(0,0)$, en fait I), comme composition de fonctions différentiables. Et sa dérivée partielle par rapport à x_1 est
$$\frac{\partial h_i}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_4}(x), \tag{2}$$
où pour gagner de la place (et en clarté) j'ai appelé $x = (x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2))$ le point (toujours le même) où on calcule les dériées partielles.

Comme on a vu que $h_i(x_1, x_2) = 1$, sa dérivée par rapport à x_1 est nulle, et donc on trouve
$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_4}(x) = 0. \tag{3}$$

Pareil pour la dérivée de la même fonction h_i, mais par rapport à x_2. On trouve par le même calcul que

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_4}(x) = 0. \tag{4}$$

Ceci nous fait 4 équations (deux pour $i = 1$ et deux pour $i = 2$), qui sont vérifiées pour tout (x_1, x_2) assez proche de $(0, 0)$. Mais en fait, on ne va avoir besoin que du cas où $x_1 = x_2 = 0$, qui bien entendu donne $x = 0$ (car $\varphi(0, 0) = (0, 0)$). Donc en ré-écrivant

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial g_i}{\partial x_3}(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(0)\frac{\partial g_i}{\partial x_4}(0) = 0, \tag{5}$$

et

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_2}(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(0)\frac{\partial g_i}{\partial x_3}(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(0)\frac{\partial g_i}{\partial x_4}(0) = 0. \tag{6}$$

On peut maintenant utiliser les valeurs des dérivées partielles trouvées à la question 1, On commence par $i = 1$, pour lequel les deux premières dérivées partielles s'annulent en 0, et on trouve

$$4\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) - 3\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(0) = 0 \tag{7}$$

et

$$4\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(0) - 3\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(0) = 0. \tag{8}$$

Puis pour $i = 2$ (la coordonnée g_2), on trouve

$$1 + 3\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) - 2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(0) = 0 \tag{9}$$

et

$$1 + 3\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(0) - 2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(0) = 0. \tag{10}$$

A ce stade, si je ne me suis pas déjà trompé dans les calculs, on résout les 4 équations à 4 inconnues, et on trouve les dérivées partielles souhaitées. Sauf nouvelle erreur on trouve $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(0) = -4$ et $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(0) = -3$.

Exercice 4. (6 points.) On considère la région triangulaire

$$T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \text{et } x + y \leq 2\big\},$$

et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$m = \inf\big\{f(x, y)\,;\ (x, y) \in T\big\} \ \text{ et } M = \sup\big\{f(x, y)\,;\ (x, y) \in T\big\}.$$

1. Vérifier que f est différentiable et calculer ses dérivées partielles.
2. Vérifier que f a un seul point critique, qui est l'origine.
3. Démontrer qu'il existe $(x_1, y_1) \in T$ tel que $f(x_1, y_1) = m$, et $(x_2, y_2) \in T$ tel que $f(x_2, y_2) = M$.
4. Démontrer que $m = 0$ et déterminer l'ensemble des points $(x_1, y_1) \in T$ tels que $f(x_1, y_1) = 0$.
5. Démontrer que (x_2, y_2) appartient au bord de T, puis que $x_2 + y_2 = 2$.
6. Etudier la fonction h définie par $h(x) = 2x(2 - x)$ et en déduire la valeur de M et de (x_2, y_2).

Pour 1, les dérivées partielles sont $y^2 + 2xy$ et $2xy + x^2$, et comme elles sont continues, f est de classe C^1. Ou dire juste que f est un polynôme.

Pour 2, on cherche les points (x, y) tels que $y^2 + 2xy = 2xy + x^2 = 0$. Le plus simple est de distinguer des cas. Si $x = y = 0$, on a bien $y^2 + 2xy = 2xy + x^2 = 0$ et donc $(0, 0)$ est un point critique. Si $x = 0$, on trouve, en remplaçant dans la première équation,$y^2 = 0$ et donc $y = 0$ aussi. Si $y = 0$, on trouve $x^2 = 0$ et donc $x = 0$ aussi. Enfin si x et y sont tous les deux non nuls, on peut simplifier les équations et on trouve $y + 2x = 0$ et $2y + x = 0$. Donc $y = -2x$ et ensuite $-4x + x = 0$, ce qui donne $x = 0$ (impossible dans ce cas).

Pour 3, on sait qu'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ (comme f) définie sur un compact admet au moins un minimum et un maximum, donc il suffit de vérifier que T est un compact. Or $T \subset \mathbb{R}^2$, donc il suffit de vérifier qu'il est fermé et bborné. Il est fermé comme intersection de trois fermés : par exemple $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + y \leq 2\big\}$ est fermé, comme image inverse par la fonction continue $(x, y) \mapsto x + y$ de l'intervalle $]-\infty; 2]$; les deux autres sont pareils. Enfin T est borné parce que (par exemple) $0 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq 2$ pour tout $(x, y) \in T$ (de sorte que $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$ si vous n'étiez pas déjà convaincu(e).

Pour 4, on note que $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \in T$, donc que $f(0, 0)$ est bien minimal (dans T). Il reste à déterminer qui sont les (x, y) tels que $f(x, y) = 0$. Si $f(x, y) = 0$, on peut factoriser et trouver que $f(x, y) = xy(x + y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = 0$. Mais si $x + y = 0$, sachant que $x \geq 0$ et $y \geq 0$ (parce que $(x, t) \in T$), on trouve $x + y = 0$. Donc si $f(x, y) = 0$, on trouve que $x = 0$ ou $y = 0$. Et réciproquement c'est évident. Donc les points $(x, y) \in T$ tels que $f(x, y) = 0$ sont les points de T tels que $x = 0$ ou $y = 0$.

Pour 5, on se donne donc un maximum $z = (x_2, y_2)$ de f dans T. Si z est un point intérieur de T, comme $f(z) \geq f(w)$ pour tout $w \in T$, et que T contient une petite boule ouverte B centrée en z, $f(z) \geq f(w)$ pour tout $w \in B$, donc f a un maximum local en z, donc z est un point critique de f, donc $z = (0, 0)$ par la question précédente. C'est impossible puisqu'on a supposé que z est dans l'intérieur de T.

Donc z est au bord (dans la frontière), et ceci implique que $x_2 = 0$ ou $y_2 = 0$ ou $x_2 + y_2 = 0$. [Vérification élémentaire : sinon, $x_2 > 0$ et $y_2 > 0$ et $x_2 + y_2 < 2$, et on voit facilement qu'il y a une petite boule centrée en (x_2, y_2) où ces inégalités restent vraies.] Or $x_2 = 0$ et $y_2 = 0$ sont impossibes, car alors on aurait $f(x_2, y_2) = 0$, donc $M = 0$, et rien qu'en regardant le point $(1, 1)$ on voit que $M \geq f(1, 1) > 0$. Donc il reste $x_2 + y_2 = 2$ (et toujours $x_2 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$ puisque $z = (x_2, y_2)$ est dans T.

Pour 6, on nous dit d'étudier $h(x) = 2x(2 - x) = 4x - 2x^2$. On voit que $h'(x) = 4 - 4x$, donc h est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, 2]$ (on n'a pas besoin du reste. Mais pour $z = (x, y)$, avec $x + y = 2$, $x \geq 0$, et $y \geq 0$ comme ci-dessus, on voit que $f(x, y) = f(x, 2 - x) = xy(x + y) = 2xy = 2x(2 - x) = h(x)$, qui est maximal et vaut 2 quand $x = 1$ (et donc $y = 1$). Bref la plus grande valeur de f sur la partie de la frontière qui nous restait est en $(1, 1)$, et vaut 2.

Donc $M = 2$, et $z = (1, 1)$ (les autres valeurs de $f(x, 2 - x)$ sont strictement plus petites.

Exercice 5. (3 points. Oui, ça fait 21 en tout (pas grave)). On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, où α est un paramètre réel, et on note Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x) = \langle Mx, x \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer $Q(e_1), Q(e_2), Q(e_3)$, et $Q(e_1 + e_2)$, où l'on a noté (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. On suppose que M est la matrice hessienne en $0 = (0, 0, 0)$ d'une fonction de classe C^2 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et que $Df(0) = 0$. Donner un développement limité d'ordre 2 de $f(x_1, x_2, x_3)$ au voisinage de 0.

3. Expliquez pourquoi $M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice hessienne en $0 = (0, 0, 0)$ d'une fonction de classe C^2.

Pour 1, on calcule les produits de matrices, et on trouve les valeurs $2, -3, 4$, et $2\alpha - 1$.

En fait c'était une mise en bouche, parce que pour la question 2 on a besoin de calculer $Q(x)$ pour $x = (x_1, x_2, x_3)$. Je le fais. Pour Mx, on trouve le vecteur $Mx = \begin{pmatrix} 2x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 - 3x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à faire le proquit scalaire avec x. On trouve $Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2$.

Pour la question 2, on dit que puisque f est supposée de classe C^2 dans un voisinage de 0 la formule de Taylor vue en cours dit qu'au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + Df(0)(x) + \frac{1}{2}Q(x) + o(||x||) = f(0) + \frac{1}{2}Q(x) + o(||x||) = f(0) + \frac{1}{2}(2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2) + o(||x||)$$

où l'on a noté $x = (x_1; x_2, x_3)$, où Q est comme ci-dessus (on vient de le calculer), et où on a utilisé l'hypothèse que $Df(0) = 0$.

Pour 3, on dit que les matrices hessiennes de fonctions de classes C^2 sont toujours symétriques, à cause de la formule de Schwarz qui dit que $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.