CHAPITRE 2

Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre 1. Existence et unicité de solution. Temps de vie des solutions.

On rappelle que toute équation explicite d'ordre p de la forme

$$y^{(p)}(t) = F\big(t, y(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\big)$$

peut se ramener au système de p équations d'ordre 1 suivant, dans la variable $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ donnée par $Y_1 = y,\ Y_2 = y', \dots, Y_p = y^{(p-1)}$:

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = Y_3, \\ \vdots \\ Y_{p-1}' = Y_p, \\ Y_p' = F\big(t, Y_1, \dots, Y_p\big), \end{cases}$$

c'est-à-dire le système

$$Y' = G(t, Y),$$

avec G la fonction définie par $G(t, Y) = \big(Y_2, \dots, Y_p, F\big(t, Y_1, \dots, Y_p\big)\big)$.

On s'intéresse alors désormais aux équations différentielles (ou systèmes d'équations différentielles) d'ordre 1 de la forme

$$(E) \qquad y'(t) = f(t, y(t)),$$

où f est une fonction donnée, définie dans un ensemble de la forme $I \times U$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

On commence par expliciter ce que l'on entend par solution de (E).

Définition. Solution, solution globale, prolongement et solution maximale.
Soit $J \subseteq I$ un intervalle et $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.

1. On dit que le couple (J, y) est une **solution** de l'équation (E) si
   - $y(t) \in U$, pour tout $t \in J$;
   - $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$, pour tout $t \in J$.
2. On dit que le couple (J, y) est une **solution globale** de l'équation (E) lorsque (J, y) est une solution de (E) et $J = I$.
3. Soient $J_1,\ J_2 \subseteq I$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $(J_1, y_1),\ (J_2, y_2)$ solutions de (E). On dit que (J_2, y_2) est un **prolongement** de (J_1, y_1) si $J_1 \subseteq J_2$ et $y_2(t) = y_1(t)$ pour tout $t \in J_1$.
4. On dit que (J, y) est une **solution maximale** de (E) lorsque elle n'admet pas de prolongement.

En pratique souvent on se référera à une solution d'une équation différentielle en précisant l'intervalle de définition de la fonction y : au lieu d'écrire (J, y) solution de (E), on écrira $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solution de (E), en précisant l'intervalle de définition J de y.

Exemple 1.
Considérons l'équation différentielle
$$y' = -y^2. \tag{2.1}$$
C'est une équation différentielle de la forme (E) $y' = f(t, y)$, avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, y) = -y^2$ ($I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}$). On a :

— La fonction $\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 0 \end{array}$, définie sur $J = \mathbb{R}$, est une solution de (2.1). C'est une solution globale de (2.1).

— Quelque soit $C \in \mathbb{R}$, la fonction
$$\begin{array}{rcl} y^- :]-\infty, -C[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t+C}, \end{array}$$
définie sur $J =]-\infty, -C[$, est une solution de (2.1) ; la fonction
$$\begin{array}{rcl} y^+ :]-C, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t+C}, \end{array}$$
définie sur $J =]-C, +\infty[$, est aussi une solution de (2.1).

— Les fonctions y^- et y^+ ne peuvent pas se prolonger comme des fonctions de classe C^1 au delà de leur intervalle de définition J (alors que l'équation (2.1) fait du sens pour tout $t \in \mathbb{R}$). y^+ et y^- sont donc des solutions maximales de (2.1).

Exemple 2.
Considérons l'équation différentielle
$$y' = \sqrt{|y|}. \tag{2.2}$$
C'est une équation différentielle de la forme (E) $y' = f(t, y)$, avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, y) = \sqrt{|y|}$.

— La fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $J = \mathbb{R}$ par $y(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$, est une solution globale de (2.2).

— La fonction $y_+ :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $J =]1, +\infty[$ par $y_+(t) = \frac{(t-1)^2}{4},\ t > 1$, est une solution de (2.2).

— La fonction $y_- :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $J =]-\infty, 1[$ par $y_-(t) = \frac{(t-1)^2}{4},\ t < 1$, n'est pas une solution de (2.2).

— La fonction $\tilde{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{4}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1, \end{cases}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$, et est une solution globale de (2.2). La fonction $\tilde{y}$ est un prolongement de y_+.

Remarques.

— Toute solution globale d'une EDO est une solution maximale.

— Il y a des solutions maximales qui ne sont pas globales (exemple 1).

— Une solution non maximale peut avoir plusieurs prolongements (exemple 2 : $(\mathbb{R}, y)$ et $(\mathbb{R}, \tilde{y})$ sont deux prolongements de $(]-\infty, 1[, z)$, où z est la fonction constante égale à 0 dans $]-\infty, 1[$).

2.1 Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre 1. Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Nous avons vu à la section précédente qu'une équation différentielle ordinaire admet en général plusieurs solutions, même si on ne s'intéresse qu'aux solutions maximales. Mais on peut penser que lorsque l'on décrit l'évolution en temps d'une grandeur guidée par une loi physique, l'évolution de cette grandeur soit uniquement déterminée par son état initial et par la loi qui la régit. On va alors s'intéresser dans ce chapitre au problème de valeurs initiales, ou problème de Cauchy : il s'agit de trouver la solution d'une équation différentielle vérifiant une *condition initiale* donnée.

Définition. Problème de Cauchy.
Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $t_0 \in I$, $y_0 \in U$ donnés. Le **problème de Cauchy**, ou problème de valeurs initiales, de condition initiale (t_0, y_0), est le problème

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Résoudre le problème de Cauchy de condition initiale (t_0, y_0) consiste à trouver toutes les fonctions $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$, définies dans un intervalle $J \subseteq I$ tel que $t_0 \in J$, solutions de l'équation $y' = f(t, y)$ sur J et vérifiant $y(t_0) = y_0$.
Une solution (solution maximale, solution globale) du problème de Cauchy (PC) est une solution (solution maximale, solution globale) $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(t, y)$, définie dans un intervalle $J \subseteq I$ tel que $t_0 \in J$, qui vérifie la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Dans cette section on va répondre aux questions suivantes concernant le problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire : existe-t-il des solutions de (PC) ? Si une solution existe, est-elle unique ? Quel est le plus grand intervalle où une solution de (PC) est définie ?

Exemples.

— Soit le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
Ce problème admet une unique solution maximale, la fonction $\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction y est une solution globale de ce problème de Cauchy, et est l'unique solution globale.

— Soit le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
La fonction $y :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = \frac{1}{1-t}$, définie sur $]-\infty, 1[$, est l'unique solution de ce problème de Cauchy. C'est une solution maximale (elle ne peut pas être prolongée), qui n'est pas globale.

Nous allons voir au paragraphe suivant que sous des hypothèses sur la fonction f, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale.

2.1.1 Le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous allons considérer le problème de Cauchy

$$(\mathrm{PC}) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où la fonction f est définie dans un ensemble de la forme $I \times U$, avec I **un intervalle ouvert de** $\mathbb{R}$ et U **un ensemble ouvert de** $\mathbb{R}^n$, et où $(t_0, y_0) \in I \times U$.

Un résultat général (théorème de Cauchy-Arzéla-Péano), que nous ne montrerons pas dans le cours, donne que si la fonction f est continue, le problème de Cauchy (PC) admet des solutions. Nous montrerons ici le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui est un résultat d'existence et d'unicité de solution locale, puis d'existence et d'unicité de solution maximale, sous des hypothèses légèrement moins générales sur la fonction f.

Nous commençons par introduire quelques définitions que nous utiliserons par la suite.

Définition. Fonction Lipschitzienne, fonction localement Lipschitzienne, fonction localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

1. Une fonction $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **Lipschitzienne** s'il existe une constante $K > 0$ tel que
$$\|F(y_1) - f(y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|, \ \forall \ y_1, \ y_2 \ \in U.$$
2. Une fonction $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **localement Lipschitzienne** si pour tout $y_0 \in U$, il existe $r_0 > 0$ et une boule $B(y_0, r_0)$ centrée en y_0, tel que la restriction de F à cette boule est Lipschitzienne, autrement dit si pour tout $y_0 \in U$, il existe $r_0 > 0$ et une constante $K_0 > 0$ tel que
$$\|f(y_1) - f(y_2)\| \leq K_0\|y_1 - y_2\|, \ \forall \ y_1, \ y_2 \ \in B(y_0, r_0).$$
3. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Une fonction $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable** si pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe un cylindre $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\times B(y_0, r_0)$, avec $\epsilon, \ r_0 > 0$, et une constante $K_0 > 0$, tel que
$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq K_0\|y_1 - y_2\|, \ \forall \ (t, y_1), \ (t, y_2) \ \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\times B(y_0, r_0).$$

Remarques.

1. Toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}$, de classe C^1, est localement Lipschitzienne. C'est une conséquence immédiate tu théorème des accroissements finis : si $y_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $[y_0 - r, y_0 + r] \subseteq U$; la fonction f étant de classe C^1, sa dérivée f' est continue, et on a qu'il existe $M > 0$ tel que $|f'(y)| \leq M$, pour tout $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$; on a alors que pour tous $y_1, \ y_2 \in [y_0 - r, y_0 + r]$, $|f(y_1) - f(y_2)| = |f'(\xi)||y_1 - y_2|$, où ξ est un point entre y_1 et y_2, et donc pour tous $y_1, \ y_2 \in [y_0 - r, y_0 + r]$, $|f(y_1) - f(y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$.

2. En raisonnant comme ci-haut, on montre que toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, ayant une dérivée bornée sur U, est globalement Lipschitzienne sur U.
3. Si $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, avec I, U des ouverts de $\mathbb{R}$, est de classe C^1, ou plus généralement telle que $\partial_y f$ est continue, f est localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. En effet, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe $\tau > 0,\ r > 0$ tel que $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subseteq I \times U$ et, $\partial_y f$ étant continue, il existe $M > 0$ tel que $|\partial_y f(t, y)| \leq M$, pour tout $(t, y) \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times [y_0 - r, y_0 + r]$; on a alors $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |\partial_y f(t, \xi)||y_1 - y_2| \leq M|y_1 - y_2|$, pour tous $(t, y_1),\ (t, y_2) \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times [y_0 - r, y_0 + r]$.
4. Ces résultats sont aussi valables si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $n > 1$, et f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, grâce à l'inégalité des accroissements finis, que vous étudierez dans le cours de calcul différentiel.

Nous montrons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité de solution locale).
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$.
Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.
Alors il existe $T = T(t_0, y_0)$ tel que le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne que :
i) il existe $T > 0$, il existe $y : [t_0 - T, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ solution de (PC) (existence de solution) ;
ii) si $\tilde{y} : [t_0 - T, t_0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (PC) dans $[t_0 - T, t_0 + T]$, alors $\tilde{y}(t) = y(t)$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ (unicité de solution).

En vue de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz, on introduit ici la notation suivante. Pour $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$, on note

$$\|f\|_{\mathcal{C}([a,b])} := \sup_{t \in [a,b]} \|f(x)\|.$$

Cette notation se justifie par le fait que l'application $f \mapsto \|f\|_{\mathcal{C}([a,b])}$ définit une norme dans l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ (appelée norme du supremum ou du maximum, et parfois norme de la convergence uniforme).

Démonstration. (Théorème de Cauchy-Lipschitz).
On remarque qu'une fonction continue $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (PC) si et seulement si

$$(*) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds, \text{ pour tout } t \in J :$$

On a, d'un coté, que si y est solution de (PC), alors

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\,ds, \text{ pour tout } t \in J,\\
\Longleftrightarrow\ & y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\,ds, \text{ pour tout } t \in J,\\
\Longleftrightarrow\ & y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\,ds, \text{ pour tout } t \in J, \text{ (car } y(t_0) = y_0) \text{ ;}
\end{aligned}$$

D'un autre coté, si y vérifie $(*)$, on a, d'une part, $y(t_0) = y_0$, d'autre part $y'(t) = f(t, y(t))$, pour tout $t \in J$.

On remarque par ailleurs que toute fonction continue solution de (PC) ou de $(*)$ est de classe C^1.

La preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz consiste à montrer qu'il existe $T > 0$ tel que l'on peut définir une suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$, par la relation de récurrence

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0, \\ y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds, \end{cases}$$

puis que cette suite converge uniformément dans $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une solution du problème $(*)$, et que la limite est l'unique solution de $(*)$ dans cet intervalle.

Pour ce faire, on choisit :

- $T_0 > 0$ et $r > 0$ tels que le cylindre $C_0 := [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B(y_0, r)}$ soit inclus dans $I \times U$ (de tels T_0 et y_0 existent car I et U sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$ respectivement) ;
- $K > 0$ tel que f est $K-$Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable dans C_0 (un tel K existe, en diminuant si besoin T_0 et r) ;
- $M > 0$ tel que $\|f(t, y)\| \le M,\ \forall (t, y) \in C_0$ (un tel M existe car f est continue et C_0 un compacte) ;
- $T > 0$ tel que $T < \inf\left\{T_0, \frac{r}{M}, \frac{1}{2K}\right\}$.

On note C le cylindre $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)} \subseteq I \times U$. Comme $T < T_0$, C est inclus dans C_0 et $\|f\|$ reste bornée par M et $K-$Lipschitzienne sur C.

La preuve du théorème est divisée en 4 étapes.

1. y_n est bien définie dans $[t_0 - T, t_0 + T]$ et $y_n \in \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que y_n est définie dans $[t_0 - T, t_0 + T]$, continue et à valeurs dans $\overline{B(y_0, r)}$. Il est clair que c'est le cas de la fonction constante $y_0(t) = y_0$. Supposons que $y_n \in \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)})$. Comme $y_n(t) \in \overline{B(y_0, r)}$ pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, la fonction y_{n+1} est bien définie dans $[t_0 - T, t_0 + T]$ et y est continue. Comme

$$\big\|y_{n+1}(t) - y_0\big\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\,ds \right\| \le M|t - t_0| \le MT < r, \text{ pour tout } t \in [t_0 - T, t_0 + T],$$

on a bien que $y_{n+1}(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

2. La suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente dans $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction y.

Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme f est $K-$Lipschitzienne par rapport à y dans $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)}$, on a

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds \right\| \\
&\leq K|t - t_0| \sup_{[t_0 - T, t_0 + T]} \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \\
&\leq TK \sup_{[t_0 - T, t_0 + T]} \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{t\in[t_0 - T, t_0 + T]} \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq TK \sup_{t\in[t_0 - T, t_0 + T]} \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|,$$

et par récurrence que

$$\|y_{n+1} - y_n\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \leq (TK)^n \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])}.$$

On a donc que, pour $n,\ p \in \mathbb{N},\ p > 1$, et pour $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned}
\|y_{n+p}(t) - y_n(t)\| &\leq \|y_{n+p}(t) - y_{n+p-1}(t)\| + \cdots + \|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \\
&\leq \big((TK)^{n+p-1} + \cdots + (TK)^n\big) \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \\
&\leq (TK)^n \big((TK)^{p-1} + \cdots + 1\big) \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \underbrace{\left(1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right)}_{\leq 2} \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \underset{n,p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

car T est tel que $TK < \frac{1}{2}$.

On a donc que pour chaque $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, la suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$. Il existe alors $y(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y(t)$.

Comme $y_n(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on obtient que $y(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

Montrons que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers la fonction y.

Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. On a montré que pour $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\|y_{n+p}(t) - y_n(t)\| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])}.$$

En passant à la limite lorsque $p \to \infty$ dans les deux cotés de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|y(t) - y_n(t)\| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])}.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on a que

$$\sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} \|y(t) - y_n(t)\| \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \|y_1 - y_0\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(y_n)_n$ converge uniformément vers la fonction y dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Comme les fonctions y_n sont continues sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, on obtient que y est continue sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3. La fonction y est solution de $(*)$.

On a, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$,

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds. \tag{2.3}$$

Comme la fonction f est Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)}$, et vu que $y_n(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que la suite de fonctions $\{f(\cdot, y_n(\cdot))\}_n$ converge uniformément vers $f(\cdot, y(\cdot))$ dans $[t_0 - T, t_0 + T]$. On obtient ainsi que

$$\int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds,$$

pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans les deux cotés de l'égalité (2.3), on obtient que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds,$$

c'est-à-dire que y est solution de $(*)$.

4. La fonction y est l'unique solution de $(*)$ dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Soit $\tilde{y} \in \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$ une autre solution de $(*)$. On commence par montrer que $\tilde{y}(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Si ce n'est pas le cas, il existe $\tilde{t} \in]t_0 - T, t_0 + T[$ tel que $\|\tilde{y}(t) - y_0\| > r$. Supposons $\tilde{t} > t_0$, la preuve est analogue si $\tilde{t} < t_0$. Soit

$$t^* = \inf\{t \in]t_0, t_0 + T[\ \mid \|\tilde{y}(t) - y_0\| > r\}.$$

On a, d'une part, $\|\tilde{y}(t^*) - y_0\| \geq r$ (car par définition d'infimum, il existe une suite $t_n \in]t_0, t_0 + T[$ tel que $\|\tilde{y}(t) - y_0\| > r$ et tel que $t_n \to t^*$). En particulier, on a que $t^* > t_0$, car $\|\tilde{y}(t_0) - y_0\| = 0$. D'autre part, comme $\|\tilde{y}(t) - y_0\| \leq r$, pour tout $t \in [t_0, t^*[$ (sinon, t^* ne serait pas l'infimum), et puisque $\tilde{y}$ est continue, on conclut que $\|\tilde{y}(t^*) - y_0\| \leq r$, et donc que

$$\|\tilde{y}(t^*) - y_0\| = r.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|\tilde{y}(t^*) - y_0\| &= \Big\| \int_{t_0}^{t^*} f\big(s, y(s)\big)\, ds \Big\| \\ &\le \int_{t_0}^{t^*} \underbrace{\big\| f\big(s, y(s)\big) \big\|}_{\le M \text{ car } \tilde{y}(s) \in \overline{B(y_0, r)}} \, ds \\ &\le M(t^* - t_0) \\ &< MT \le M \frac{r}{M} = r,\end{aligned}$$

ce qu'est absurde.

On a donc que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\|\tilde{y}(t) - y_0\| \le r$ et donc $\tilde{y} \in \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T]; \overline{B(y_0, r)})$.

On montre maintenant que $\tilde{y} \equiv y$. On a, pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\|y_{n+1}(t) - \tilde{y}(t)\| = \Big\| \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, \tilde{y}(s)\big)\, ds \Big\| \le KT \|y_n - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])},$$

car $y_n(t),\ \tilde{y}(t) \in \overline{B(y_0, r)}$, et dans $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B(y_0, r)}$ f est $K-$Lipschitzienne dans sa deuxième variable. On peut alors montrer comme à l'étape *2.* par récurrence que

$$\|y_n - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \le (KT)^n \|y_0 - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \|y_0 - \tilde{y}\|_{\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])},$$

et donc que la suite de fonctions $(y_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $\tilde{y}$ dans $[t_0 - T, t_0 + T]$. Comme la limite est unique, on conclut que $\tilde{y} = y$ dans $\mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T])$. □

Une conséquence importante du théorème de Cauchy-Lipschitz est que les graphes de deux solutions distinctes de l'équation différentielle (E), définies sur un même intervalle, ne peuvent pas se croiser. Il en découle l'existence, et l'unicité, de solution maximale du problème de Cauchy.

Corollaire. Les solutions distinctes d'une équation différentielle ne se croisent pas.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.
Soient (J, y_1) et (J, y_2) deux solutions de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, définies sur le même intervalle J.
Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$. Alors y_1 coïncide avec y_2 sur J, c'est-à-dire que $y_1(t) = y_2(t),\ \forall\ t \in J$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $t \in J$ tel que $y_1(t) \neq y_2(t)$ et sans perte de généralité que $t > t_0$ (la preuve est analogue si $t < t_0$). Alors l'ensemble

$$\tilde{I} = \big\{ t \in J,\ t > t_0 \ \mid\ y_1(t) \neq y_2(t) \big\}$$

est non vide, soit $\tilde{t} = \inf(\tilde{I})$. On a $\tilde{t} \geq t_0$ et, par définition d'infimum, il existe une suite $(t_n)_n$ tel que $t_n \in \tilde{I}$, autrement dit tel que $y_1(t_n) \neq y_2(t_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tel que $t_n \to \tilde{t}$, lorsque $n \to \infty$.

Montrons que $y_1(\tilde{t}) = y_2(\tilde{t})$. Cette égalité est trivialement vraie si $\tilde{t} = t_0$. Si $\tilde{t} \neq t_0$, elle est vraie aussi, car sinon, par continuité de y_1 et y_2, on aurait $y_1(t) \neq y_2(t)$ dans un voisinage $]\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon[$ de $\tilde{t}$, ce qui contredit la définition de $\tilde{t}$ comme infimum de $\tilde{I}$. On a donc $y_1(\tilde{t}) = y_2(\tilde{t})$. On note

$$\bar{y} := y_1(\tilde{t}) = y_2(\tilde{t}).$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(\tilde{t}) = \bar{y} \end{cases}$$

admet une unique solution dans $[\tilde{t}-T, \tilde{t}+T]$. Mais alors $y_1 = y_2$ dans l'intervalle $[\tilde{t}-T, \tilde{t}+T] \cap J$, ce qui n'est pas possible car il existe $t_n \longrightarrow \tilde{t}$ tel que $y_1(t_n) \neq y_2(t_n)$.

On conclut qu'il ne peut pas exister $t \in J$ tel que $y_1(t) \neq y_2(t)$. $\square$

Corollaire. Existence et unicité de solution maximale du problème de Cauchy. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dans les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$.
Alors le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution maximale $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, définie dans un intervalle $J \subseteq I$. En outre, l'intervalle J de définition de y est ouvert.

Le résultat d'existence et d'unicité de solution maximale nous dit que :
i) Il existe un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, et il existe une fonction $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui est solution de (PC) ;
ii) S'il existe une autre solution $\tilde{y}$ du problème de Cauchy (PC), définie dans un intervalle $\tilde{J}$, alors $\tilde{J} \subseteq J$ et $\tilde{y}$ est la restriction de y à $\tilde{J}$ (*i. e.* $\tilde{y} = y$ sur $\tilde{J}$).

Démonstration. (Existence et unicité de solution maximale). Soit

$$\mathcal{J} = \Big\{ J_0 \text{ intervalle de } \mathbb{R},\ J_0 \subseteq I \mid \text{il existe } y_{J_0} : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ solution de (PC)} \Big\}.$$

On a $\mathcal{J} \neq \emptyset$, comme conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz, et pour tout $J_0 \in \mathcal{J}$, $t_0 \in J$.

Soit

$$J = \bigcup_{J_0 \in \mathcal{J}} J_0.$$

L'ensemble J est contenu dans I, car pour tout $J_0 \in \mathcal{J}$ on a $J_0 \subseteq I$, et $t_0 \in J$, car $t_0 \in J_0$, pour tout $J_0 \in \mathcal{J}$. Par ailleurs J est un intervalle de $\mathbb{R}$, car c'est une union d'intervalles de $\mathbb{R}$ avec un point commun, t_0.

Par le premier corollaire au théorème de Cauchy-Lipschitz, on a que pour tout $J_0 \in \mathcal{J}$, il existe une unique solution du problème de Cauchy (PC) dans J_0, $y_{J_0} : J_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $y_{|_{J_0}} = y_{J_0}$. On a :

1. La fonction y est bien définie car pour tout $t \in J$, il existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tel que $t \in J_0$ et on a donc que $y(t) = y_{J_0}(t)$. D'autre part, s'il existe J_{01} et J_{02} dans $\mathcal{J}$ tel que $t \in J_{01} \cap J_{02}$, on a que sur l'intervalle $J_{01} \cap J_{02}$ il existe une unique solution du problème de Cauchy (PC), par le premier corollaire au théorème de Cauchy-Lipschitz, donc $y_{J_{01}} = y_{J_{02}}$ sur $J_{01} \cap J_{02}$, et en particulier $y_{J_{01}}(t) = y_{J_{02}}(t)$.
2. La fonction y est solution du problème de Cauchy. On a d'une part que $y_{J_0}(t_0) = y_0$, quelque soit $J_0 \in \mathcal{J}$, et donc que $y(t_0) = y_0$. D'autre part, si $t \in J$, alors il existe $J_0 \in \mathcal{J}$ tel que $t \in J_0$; comme $y_{|_{J_0}} = y_{J_0}$ et y_{J_0} est une solution du problème de Cauchy (PC), donc en particulier solution de l'équation $y' = f(t, y)$ sur J_0, on a
$$y'(t) = y'_{|_{J_0}}(t) = f\big(t, y_{|_{J_0}}(t)\big) = f(t, y(t)).$$
On a donc que $y'(t) = f(t, y(t))$, pour tout $t \in J$.
3. La solution y est maximale par définition de $\mathcal{J}$ (il ne peut pas exister une solution de (PC) définie dans un intervalle J_0 qui ne soit pas entièrement inclus dans J, car sinon J_0 appartiendrait à $\mathcal{J}$ et donc J_0 serait inclus dans J, par définition de J, ce qu'est une contradiction).
4. La solution maximale y est unique. Supposons que (J_1, y_1) et (J_2, y_2) sont deux solutions maximales de (PC). On a $t_0 \in J_1 \cap J_2$ donc $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Comme $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, le premier corollaire au théorème de Cauchy-Lipschitz implique que $y_1 = y_2$ sur l'intervalle $J_1 \cap J_2$. Comme y_1 et y_2 sont solutions maximales de (PC), on a alors $J_1 \cap J_2 = J_1 = J_2$ (sinon on aurait par exemple $J_1 \cap J_2 \subset J_1$ et donc la fonction y_2 admettrait un prolongement - la fonction définie par y_2 dans J_2 et par y_1 dans $J_1 \backslash J_2$ serait un prolongement de y_2 - ce qui contredirait le caractère maximale de y_2).

Il reste à montrer que l'intervalle J est ouvert. Soit $t^* \in J$ et montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[\subseteq J$. Soit y la solution maximale de (PC) et soit $y^* = y(t^*)$. On considère le problème de Cauchy pour l'équation différentielle $z' = f(t, z)$, de donnée initiale (t^*, y^*). Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $\varepsilon > 0$ tel que ce problème de Cauchy admet une unique solution z dans $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[$. Or y est solution de ce problème de Cauchy car $y' = f(t, y)$ et $y(t^*) = y^*$. On a donc que $z = y$ dans $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[\cap J$. On en déduit que $]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[\subseteq J$ (car sinon, on aurait par exemple $t^* - \varepsilon < \inf(J)$, et la fonction définie par z dans $]t^* - \varepsilon, \inf(J)]$, et par y dans J, serait un prolongement de y, ce qui n'est pas possible car y est solution maximale de l'EDO $y' = f(t, y)$). $\square$

Le deuxième corollaire au théorème de Cauchy-Lipschitz donne existence et unicité de solution maximale du problème de Cauchy, si la fonction f est dans les conditions du théorème. Par contre, il ne donne aucun résultat (à part qu'il s'agit d'un ouvert) sur le domaine J de définition de la solution maximale. En particulier on ne sait pas si $J = I$, c'est-à-dire si la solution maximale est globale, ou si J est strictement inclus, mais différent, de I, c'est-à-dire que la solution maximale n'est pas globale.

Exemples et contre-exemple.

1. Existence et unicité de solution maximale ; la solution maximale est globale.
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy pour l'équation $y' = f(t, y)$, avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t, y) = y$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donc continue et localement Lipschitzienne dans sa deuxième variable. On a donc existence et unicité de solution maximale de ce problème de Cauchy, et l'unique solution maximale de ce problème est la fonction $\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^t \end{array}$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction y est une solution globale de ce problème de Cauchy.

2. Existence et unicité de solution maximale ; la solution maximale n'est pas globale.
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne, comme pour l'exemple 1, existence et unicité de solution maximale de ce problème. La fonction $y :]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto y(t) = \frac{1}{1-t}$, définie sur $]-\infty, 1[$, est l'unique solution maximale de ce problème de Cauchy, car y est solution et y n'admet pas de prolongement. C'est une solution maximale, qui n'est pas globale.

3. Non unicité de solution maximale.
Voici un exemple d'un problème de Cauchy pour lequel il y a existence mais pas unicité de solution maximale. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

admet au moins deux solutions maximales : la fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto 0$, définie sur $\mathbb{R}$, et la fonction $\bar{y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t \geq 0, \\ -\frac{t^2}{4}, & t < 0. \end{cases}$$

On a que y et $\bar{y}$ sont bien solutions de ce problème de Cauchy, et elles sont maximales car globales. Cet exemple n'est pas en contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, car la fonction $y \mapsto \sqrt{|y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est Lipschitzienne dans aucun intervalle contenant le point 0 (et donc n'est pas localement Lispchizienne sur $\mathbb{R}$). En effet, on a, pour $x,\ y > 0$,

$$\frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} = \frac{1}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \underset{x,y \to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

et donc le quotient

$$\frac{\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|}{|x - y|}$$

est non borné dans tout voisinage de 0.

Remarque.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ses corollaires nous disent que si la fonction $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable :

i) Par tout point (t_0, y_0) du domaine de f, il passe le graphe d'une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ (c'est-à-dire que pour tout (t_0, y_0) il existe une solution maximale du problème de Cauchy pour l'équation $y' = f(t, y)$, de condition initiale (t_0, y_0)) ;

ii) Les graphes des solutions maximales distinctes de l'équation $y' = f(t, y)$ ne se coupent pas (c'est-à-dire que deux solutions maximales distinctes de l'EDO ne se croisent jamais).

2.2 Temps de vie de la solution maximale. Le théorème des bouts.