Résumé de Cours d'Analyse, chapitre VI, année 2023: Changement de Variables.

1 Rappel: changement de variable dans l'intégrale de Riemann de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit $a < b$ deux nombres réels et $\phi : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$.

Alors pour toute fonction f à valeurs réelles, Riemann intégrable entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$, la fonction $x \mapsto f(\phi(x))\, \phi'(x)$ est aussi Riemann intégrable sur $[a,\, b]$ et on a la formule:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\, \phi'(x)dx.$$

Remarque

1. Il n'est pas nécessaire, dans le cadre des fonctions Riemann intégrables d'une seule variable, d'exiger que ϕ soit une bijection. Cela n'est plus du tout le cas en dimension supérieure.
2. Si $f = 1$ la formule est celle du théorème fondamentale d'analyse:

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(x)dx.$$

Quelle formule pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ ou une partie de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$, dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue ?

2 Difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soit ϕ une application de U vers $\phi(U)$. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un point de l'espace de départ U et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ un point de l'espace d'arrivée $\phi(U)$. Alors pour tout $y \in \phi(U)$ il existe $x \in U$ tel que

$$y_1 = \phi_1(x_1, \cdots x_n), \cdots, y_n = \phi_n(x_1, \cdots, x_n).$$

L'application ϕ est dite $\mathcal{C}^1$ si et seulement si toutes les fonctions $\phi_1, \cdots, \phi_n$ admettent des dérivées partielles $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ continues de U vers $\mathbb{R}$, $(i, j = 1...n)$. On note $J_\phi(x)$ la matrice jacobienne de ϕ:

$$J_\phi(x)) = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Le Jacobien de ϕ est le déterminant de cette matrice $Jac\,\phi(x) = det(J_\phi(x))$, fonction alors continue de U vers $\mathbb{R}$.

Définition
On dit que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si ϕ est bijective de U vers V (i.e. ϕ est injective de U vers $V = \phi(U)$), est $\mathcal{C}^1$ sur U et dont la réciproque ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur V.

Pour démontrer qu'une application ϕ, définie de U vers V, deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme on pourra utiliser le théorème suivant:

Théorème d'inversion globale
Soit ϕ une application définie de U vers V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si ϕ est bijective, $\mathcal{C}^1$ et si $\forall x \in U,\ Jac\,\phi(x) \neq 0$ alors ϕ est un difféomorphisme de U vers V.

3 Théorème de changement de variables.

Théorème de changement de variables Soit $\phi : U \mapsto V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ (U et V étant deux ouverts de $\mathbb{R}^n$).

1. Soit une fonction $f : V \mapsto \mathbb{R}_+$ mesurable positive, alors on a l'égalité:

$$\int_V f(y)\, d\lambda(y) = \int_U f \circ \phi(x)\, |Jac\,\phi(x)|\, d\lambda(x).$$

2. Une fonction $f : V \mapsto \mathbb{R}$ mesurable est intégrable si et seulement si la fonction $(f \circ \phi)\, |Jac\,\phi|$ est mesurable et intégrable, $(f \circ \phi)\, |Jac\,\phi| : U \mapsto \mathbb{R}$
et on a la formule:

$$\int_V f(y)\, d\lambda(y) = \int_U f \circ \phi(x)\, |Jac\,\phi(x)|\, d\lambda(x).$$

Remarques

1. Ainsi la formule du changement de variables peut s'appliquer de manière "mécanique" en écrivant:

$$\phi : U \mapsto V = \phi(U), \quad y = \phi(x) \Rightarrow d\lambda(y) = |Jac\,\phi(x)|\, d\lambda(x)$$

puis on écrit:

$$\int_{\phi(U)} f(y) d\lambda(y) = \int_U f(\phi(x)) |Jac\,\phi(x)|\, d\lambda(x).$$

2. En remplaçant $x = \phi^{-1}(y)$ à droite dans la formule, en réappliquant le théorème on a:

$$\int_U f \circ \phi(x)\, |Jac\,\phi(x)|\, d\lambda(x) = \int_V f \circ \phi \circ \phi^{-1}(y)\, |Jac\,\phi(x)||Jac\,\phi^{-1}(y)|\, d\lambda(y) = \int_V f(y) d\lambda(y).$$

Ce qui explique l'équivalence (le ssi) dans l'énoncé du théorème.

4 Coordonnées polaires

L'application

$$\phi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}), \quad \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$) appelé passage aux coordonnées polaires.

On vérifie bien que $\phi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, que ϕ est injective et que le jacobien de ϕ, $Jac\,\phi(r,\theta) = r$.

L'ensemble $\mathbb{R}_- \times \{0\}$ est de mesure nulle sur $\mathbb{R}^2$ donc est négligeable: ainsi en appliquant le théorème de changement de variables à une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}^2$ on a, comme

$$\phi(]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) :$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_-\times\{0\})} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)|Jac\,\phi(r,\theta)|d\lambda(r,\theta).$$

Or f est intégrable on peut donc appliquer le théorème de Fubini et donc:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{]-\pi,\pi[} \left(\int_{]0,+\infty[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\lambda(r) \right) d\lambda(\theta)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{]0,+\infty[} r \left(\int_{]-\pi,\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\lambda\theta) \right) d\lambda(r).$$

On obtient les mêmes formules pour une fonction f mesurable positive, utilisant le théorème de changement de variables ainsi que le théorème de Fubini-Tonelli.