Algèbre bilinéaire

Pascal ORTIZ

10 septembre 2021

Table des matières

1 Projecteurs, symétries **3**

1. Projecteurs 3
2. Symétries 5

2 Espaces euclidiens **7**

1. Vocabulaire 7
2. Inégalités 9
3. Expressions analytiques 10
4. Orthogonalité 11
5. Existence de BOG 12
6. Symétries, projecteurs orthogonaux 12
7. Le procédé de Gram-Schmidt 13

Exercices 16

3 Endomorphismes d'un espace euclidien **17**

1. Adjonction 17
2. Isométries vectorielles 19
3. Symétries orthogonales 20

Exercices 22

4 Espaces euclidiens de dimensions 2 ou 3 **27**

1. Orientation d'un espace euclidien 27
2. Produits mixte et vectoriel 28
3. Isométries vectorielles en dimension 2 29
4. Isométries vectorielles en dimension 3 29

Exercices 31

5 Formes quadratiques **34**

1. Dualité dans les espaces vectoriels 34
2. Généralités sur les formes quadratiques 38
3. Expression analytique d'une forme quadratique 41
4. Orthogonalité 42
5. Décomposition d'une forme quadratique 44

6. La méthode de Gauss 46
7. Les formes quadratiques réelles 49
Exercices 51

Chapitre 1

Projecteurs, symétries

Sommaire

1. **Projecteurs** 3
2. **Symétries** 5

Dans tout le chapitre, K est fixé à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. On fixe aussi un K-espace vectoriel E.

1. Projecteurs

1 **Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Tout $x \in E$ peut donc se décomposer sous la forme**

$$x = x_F + x_G$$

pour un *unique* vecteur $x_F \in F$ et un *unique* $x_G \in G$. Il existe donc une application $p : E \to E$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait

$$p(x) = x_F.$$

On dit que p est le *projecteur* sur F et de direction G. Plus généralement, une application $p : E \to E$ sera dite un *projecteur* de E s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que p soit définie comme ci-dessus.

2 **Remarque.** Au lieu de projecteur sur F et de *direction* G, on dit aussi projecteur sur F *parallèlement* à G.

3 **Proposition. Si p est un projecteur de E alors $p \in \mathcal{L}(E)$ (autrement dit, p est un endomorphisme de E).**

4 **Exemple.** Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$. Alors, p est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur la droite $F = \text{vect}(1, 0)$ et de direction la droite $G = \text{vect}(0, 1)$

5 **Exemple.** Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $F = \text{vect}(0, 1)$ et de direction la droite G d'équation $y = x$. On veut calculer $p(x, y)$. On cherche donc $x_F \in F$ tel qu'il existe $x_G \in G$ tels que $(x, y) = x_F + x_G$. Par définition de F et de G, on a $x_F = (0, k)$ et $x_G = (a, a)$

d'où, en remplaçant dans $(x,y) = x_F + x_G$, on obtient $a = x$ et $k = y - x$, d'où $x_F = (0, y-x)$. Par suite, la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ **Exemples : les projecteurs triviaux.**

- L'application nulle, ie $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, est le projecteur sur le sous-espace vectoriel $F := \{0_E\}$ parallèlement à $G := E$.
- L'application $p = \mathrm{Id}_E$ est le projecteur sur le sous-espace vectoriel $F := E$ parallèlement à $G := \{0_E\}$.

$\boxed{7}$ **Théorème. Soit p un projecteur de E. Alors**

i) $p \circ p = p$ **ie** p **est *idempotent.***

ii) Si p **est le projecteur sur** F **et de direction** G **alors**

- $\ker p = G$
- $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathbf{Id}_E) = F$

$\boxed{8}$ **Remarque.** Le théorème précédent montre en particulier que si p est un projecteur sur F alors

$$\forall x \in E, (p(x) = x \Leftrightarrow x \in F).$$

$\boxed{9}$ **Remarque.** Le théorème précédent montre que si p est un projecteur de E alors, en fait, p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ et de direction $\ker p$.

$\boxed{10}$ **Théorème. Soit** $p \in \mathcal{L}(E)$ **tel que** $p \circ p = p$**. Alors** p **est un projecteur de** E**.**

$\boxed{11}$ **Théorème. On suppose que** E **est de dimension finie** $n > 0$**. Soit** $p \in \mathcal{L}(E)$**.**

- p **est un projecteur si et seulement s'il existe une base** $\mathscr{B}$ **de** E **telle que la matrice de** p **dans** $\mathcal{B}$ **soit diagonale et de diagonale composée de 0 ou de 1.**
- **Si** p **est un projecteur de** E**, de rang** k **alors il existe une base** $\mathscr{B}$ **de** E **telle que la matrice de** p **dans** $\mathcal{B}$ **soit diagonale et de la forme suivante**

$$D = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & O_{n-k} \end{array}\right)$$

- **Si** p **est un projecteur de** E **alors** $\mathbf{tr}(p) = \mathbf{rg}\,(p)$**.**

2. Symétries

12 **Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. Tout $x \in E$ peut donc se décomposer sous la forme**

$$x = x_F + x_G$$

pour un *unique* vecteur $x_F \in F$ et un *unique* $x_G \in G$. Il existe donc une application $s : E \to E$ telle que, pour tout $x \in E$, on ait

$$s(x) = x_F - x_G.$$

On dit que s est la *symétrie* vectorielle par rapport à F et de direction G. Plus généralement, une application $s : E \to E$ sera dite un *symétrie* de E s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E tels que s soit définie comme ci-dessus.

13 **Remarque.** Au lieu de symétrie de *direction* G, on dit aussi symétrie *parallèlement* à G.

14 **Exemple.** Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$. Alors, s est la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $F = \text{vect}(1, 0)$ et de direction la droite $G = \text{vect}(0, 1)$

15 **Symétries remarquables.**

- L'application $s = \text{Id}_E$ est la symétrie par rapport à E et de direction $\{0_E\}$.
- L'application $s = -\text{Id}_E$ est la symétrie par rapport à $\{0_E\}$ et de direction E.

16 **Proposition. Si s est un symétrie de E alors $s \in \mathcal{L}(E)$ (autrement dit, s est un endomorphisme de E).**

17 **Exemple.** Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $F = \text{vect}(0, 1)$ et de direction la droite G d'équation $y = x$. On veut calculer $s(x, y)$. On cherche donc $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $(x, y) = x_F + x_G$. Par définition de F et de G, on a $x_F = (0, k)$ et $x_G = (a, a)$ d'où, en remplaçant dans $(x, y) = x_F + x_G$, on obtient $a = x$ et $k = y - x$, d'où $x_F = (0, y - x)$ et $x_G = (x, x)$ en sorte que

$$s(x, y) = x_F - x_G = (-x, y - 2x).$$

Par suite, la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

18 **Théorème. Soit s un symétrie de E. Alors**

i) $s \circ s = \mathbf{Id}_E$ **ie s est *involutif.***

ii) $s \in GL(E)$ **et** $s^{-1} = s$.

iii) Si s est la symétrie par rapport à F et de direction G alors

- $\ker(s - \mathbf{Id}_E) = \{x \in E \; ; \; s(x) = x\} = F$
- $\ker(s + \mathbf{Id}_E) = \{x \in E \; ; \; s(x) = -x\} = G$

19 **Remarque.** Le théorème précédent montre que si s est une symétrie de E alors, en fait, s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et de direction $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

20 **Lien entre projecteur et symétrie.** Soit p le projecteur sur F et de direction G. Soit s symétrie vectorielle par rapport à F et de direction G. Alors,

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E$$

21 **Théorème. On suppose que E est de dimension finie $n > 0$. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de s dans $\mathcal{B}$ soit diagonale et de diagonale composée de -1 ou de 1.**

Chapitre 2

Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Vocabulaire

$\boxed{22}$ **Définition. On appelle *produit scalaire* sur l'espace vectoriel réel E une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :**

i) f **est *symétrique* ie** $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$ **;**

ii) f **est linéaire à gauche ie**

- $\forall x, y, z \in E, f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$ **;**
- $\forall x, z \in E, \forall a \in \mathbb{R}, f(ax, z) = af(x, z)$

iii) f **est définie positive :**

- **positive ie** $\forall x \in E, f(x, x) \geq 0$ **;**
- **définie ie** $\forall x \in E, f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$**.**

***Notation.*– on préfère noter** $\langle x, y\rangle$ **au lieu de** $f(x, y)$**.**
La linéarité à droite est, en fait, une conséquence de la symétrie et de la linéarité à gauche.

$\boxed{23}$ **Exemple : le produit scalaire du lycée.** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y, z), (x', y', z')) & \longmapsto & xx' + yy' + zz' \end{array}$$

Alors, f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{24}$ **Exemple.** Soit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Alors, φ est un produit scalaire sur E.

25 **Exemple.** Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n > 0$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$

Alors, f est un produit scalaire sur E.
Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et que $\mathscr{B}$ est la base canonique de E, on dit que f est le *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

26 **Carré scalaire.** Pour $x \in E$ on dit que $\langle x, x \rangle$ est le *carré scalaire* de x.

27 **Reformulation de définie positive.** Dans la définition ci-dessus, la condition iii) peut être remplacée par :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x, x) > 0.$$

28 **Définition. On appelle *espace euclidien* tout couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ où E est un espace vectoriel réel de dimension finie et $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.**

29 **Remarque.** En pratique, lorsque le produit scalaire est connu, on parle juste d'un espace euclidien E.

30 **Propriété. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E. Alors**

$$\forall x \in E,\ \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0.$$

31 **Notation.** Si $x \in E$ alors $\langle x, x \rangle \geq 0$; on note alors

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

On a donc $\| x \|^2 = \langle x, x \rangle$.

32 **Identité.** Soit E un espace euclidien. Alors

$$\forall x, y \in E, \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \| y \|^2$$

et en particulier (identité dite de *polarisation*) :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2}{2}$$

33 **Restriction d'un produit scalaire.** Soit E un espace euclidien pour le produit scalaire f. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, la restriction g du produit scalaire f à $F \times F$ est un produit scalaire sur F. On rappelle que g est défini par : $\forall x, y \in F, g(x, y) = f(x, y)$.

Dans toute la suite du cours, sauf mention contraire, E désigne un espace euclidien de dimension n.

2. Inégalités

34 **Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit E un espace euclidien. Alors**

$$\forall x, y \in E,\ |\ \langle x, y\rangle\ | \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel .$$

L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

35 **Mnémotechnique.** On se rappelle aisément cette inégalité si on sait, cf. lycée ou cours de physique, que

$$\langle x, y\rangle\ = \parallel x \parallel \parallel y \parallel \cos(x, y) \text{ et } |\cos t| \leq 1$$

36 **Variante.** En prenant $E = \mathbb{R}^n$ euclidien canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit :

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

37 **Définition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que**

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ **(*séparation*);**
- $\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{R}, N(ax) = |\,a|\,N(x)$ **(*homogénéité*);**
- $\forall x, \forall y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ **(*inégalité triangulaire*);**

On dit que N est une *norme* sur E.
Notation : On emploie souvent la notation $\parallel x \parallel$ au lieu de $N(x)$.

38 **Théorème. Soit E un espace euclidien. Alors l'application $\parallel\ \parallel$ est une norme sur E; en particulier, elle vérifie l'inégalité triangulaire. Cette norme est dite *norme associée* au produit scalaire sur E.**

39 **Vocabulaire. Soit une norme N sur un espace vectoriel réel. On dit que N *dérive* d'un produit scalaire ou encore que N *est une norme euclidienne* s'il existe un produit scalaire f sur E tel que $\forall x \in E, N(x)^2 = f(x, x)$.**

40 **Vocabulaire. Soit une norme N sur un espace vectoriel réel. On appelle *distance* associée à N l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que**

$$\forall x, y \in E, d(x, y) = N(x - y)$$

3. Expressions analytiques

41 **Définition. Soit un espace euclidien E. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle *matrice* M dans la base $\mathscr{B}$ du produit scalaire la matrice suivante :**

$$M := (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \le i,j \le n}.$$

42 **Propriété. Soit M la matrice d'un produit scalaire dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors**

- **${}^tM = M$ ie M est symétrique.**
- **$\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = {}^tXMY$ où $X = [x]^{\mathscr{B}}$ et $Y = [y]^{\mathscr{B}}$**

En particulier, si l'expression analytique de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$f(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j \textbf{ où } x = \sum_{1 \le i \le n} x_i e_i, y = \sum_{1 \le j \le n} y_j e_j$$

c'est que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $M = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et donc, on obtient ses coefficients sans calculs, par lecture directe.

43 **Remarque.** $\langle x, y \rangle = {}^tXMY$ est un abus de notation : ${}^tXMY$ est une matrice de taille 1×1 et on l'identifie à son unique coefficient.

44 **Remarque.** Avec les notations ci-dessus, on a $\| x \|^2 = {}^tXMX$.

45 **Caractérisation d'un produit scalaire. Soit une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ définie positive. On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in E, f(x, y) = {}^tXMY$ où $X = [x]^{\mathscr{B}}$ et $Y = [y]^{\mathscr{B}}$. Alors f est un produit scalaire sur E. En outre, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est M.**

46 **Remarque.** Soient les vecteurs-colonnes X et Y tels que $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$. Alors, on a les identités :

- ${}^tXY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
- ${}^tXX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

47 **Remarque.** Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ admet la matrice I_n pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

48 **Changement de base. Soit un produit scalaire de matrice M dans une base $\mathscr{B}$. Soit $\mathscr{B}'$ une base de E et soit $P = \text{Pass}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ la matrice de passage. Alors la matrice du produit scalaire dans $\mathscr{B}'$ est $M' = {}^tPMP$. On dit que M et M' sont *congruentes*.**

4. Orthogonalité

49 **Définition. Soit E un espace euclidien.**

- **On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$ et on note $x \perp y$.**
- **Soient deux parties $A, B \subseteq E$. On dit que A et B sont *orthogonales* si et seulement si**

$$\forall x \in A, y \in B, x \perp y$$

et on note $A \perp B$.

50 **Théorème de Pythagore. Soit E un espace euclidien. Alors**

$$x \perp y \Leftrightarrow \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

51 **Définition. Soit E un espace euclidien. Soit $A \subseteq E$. On appelle *orthogonal* de A :**

$$A^{\perp} := \{x \in E \ ; \ \forall a \in A, x \perp a\}$$

Si $A = \{a\}$ alors on notera $a^{\perp} := A^{\perp}$.

52 **Propriétés.**

i) $\forall x \in E, x \perp x \Leftrightarrow x = 0_E$

ii) $E^{\perp} = \{0_E\}$

iii) $0_E^{\perp} = E$

iv) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

v) $A \cap A^{\perp} = \{0_E\}$

vi) $A^{\perp}$ **est un sous-espace vectoriel de E ;**

vii) $A^{\perp} = \mathbf{vect}(A)^{\perp}$

viii) $A \subseteq A^{\perp\perp}$

ix) $\mathbf{vect}(e_1, \ldots, e_p)^{\perp} = e_1^{\perp} \cap \cdots \cap e_p^{\perp}$.

53 **Définition. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une famille**

- **orthogonale si** $\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}, i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$
- **orthonormale si** $\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}, i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$ **et si** $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \| e_i \| = 1$

54 **Remarque.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E. Alors,

- si cette famille est orthonormale, c'est une base de E et on dit alors que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale (en abrégé BON) de E.
- si cette famille est orthogonale et que ses vecteurs sont tous non nuls, c'est une base de E et on dit alors que $\mathscr{B}$ est une base orthogonale (en abrégé BOG) de E.

Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une BOG de E alors $\mathscr{U} = (e_1 / \| e_1 \|, \ldots, e_n / \| e_n \|)$ est une BON de E.

55 **Théorème. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit M la matrice du produit scalaire dans $\mathscr{B}$. Alors**

- **$\mathscr{B}$ est une BOG si et seulement si M est diagonale. Dans ce cas, si $M = \mathbf{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ alors si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ alors**

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i;$$

- **$\mathscr{B}$ est une BON si et seulement si $M = I_n$. Dans ce cas, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ alors**

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

5. Existence de BOG

56 **Théorème. Soit F un sous-espace de E. Alors,**
- $F \oplus F^\perp = E$;
- $\dim F^\perp = n - \dim F$;
- $F = F^{\perp\perp}$;
- **On suppose que $F \oplus G = E$. Alors $F \perp G \Leftrightarrow F = G^\perp \Leftrightarrow G = F^\perp$**

57 **Théorème.**
- **Un espace euclidien admet des BOG.**
- **Un espace euclidien admet des BON.**

58 **Théorème. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E. Soit D le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $a \in E$ tel que $[a]^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ n \end{pmatrix}$. Soit le sous-espace H d'équation cartésienne suivante dans $\mathscr{B}$:**

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

Alors $H = D^\perp$ et $D^\perp = H$.

6. Symétries, projecteurs orthogonaux

59 **Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *projecteur orthogonal* p sur F le projecteur sur F associé à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.**

60 **Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle *symétrie orthogonale* p sur F la symétrie sur F associée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.**

61 **Distance à un sous-espace vectoriel . Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $a \in E$. On appelle *distance* de a à F le nombre $\inf\{d(a,x)\ ;\ x \in F\}$ et on note $d(a,F)$ cette distance.**

62 **Théorème de projection. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $a \in E$. Soit p_F le projecteur orthogonal sur F. On pose $x_F = p_F(a)$. Alors $d(a,F) = d(a,x_F)$ et donc la distance de a à F est atteinte. De plus, si $x \in F$ vérifie $d(a,F) = d(a,x)$ alors $x = x_F$, autrement dit la distance est atteinte uniquement en le projeté orthogonal de a sur F.**

7. Le procédé de Gram-Schmidt

63 **Projecteur orthogonal et BOG. Soient F un sous-espace vectoriel de E, $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ une BOG de F et $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ une BOG de $F^\perp$.**
Soient p_F (resp. $p_{F^\perp}$) le projecteur orthogonal sur F (resp. sur $F^\perp$).
Soit $x \in E$. Alors

$$x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp.$$

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

$$p_{F^\perp}(x) = x - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

64 **Orthogonalisation de Gram-Schmidt.**
Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ une famille libre de E. Pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, on pose

$$F_0 = \{0_E\} \text{ et } F_i = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_i).$$

On cherche une BOG $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de F_k. On pose, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_i = p_{F_{i-1}^\perp}(e_i) = e_i - p_{F_{i-1}}(e_i)$ i.e. :

$$v_1 = e_1$$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle e_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$$\dots$$

$$v_k = e_k - \frac{\langle e_k, v_{k-1}\rangle}{\langle v_{k-1}, v_{k-1}\rangle} v_{k-1} - \dots - \frac{\langle e_k, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1.$$

Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $(v_1, v_2, \dots, v_i)$ est une BOG de F_i. On remarquera que pour chaque i, on a $\text{vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$.

65 **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on pose

$$\boxed{e_1 = (1,0,-1),\, e_2 = (2,1,-1) \text{ et } e_3 = (0,0,1)}.$$

On cherche une ON de la famille libre (e_1, e_2, e_3).

- D'abord, on recherche une OG de la famille (e_1, e_2, e_3) :
  - $v_1 = e_1$ donc $\boxed{v_1 = (1,0,-1),\ \langle v_1, v_1\rangle = 2}$
  - $v_2 = e_2 - \dfrac{\langle e_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$

Le calcul donne $\langle e_2, v_1\rangle = 3$ donc $v_2 = (2,1,-1) - \dfrac{3}{2}(1,0,-1) = \dfrac{1}{2}(1,2,1)$.
On pose $\boxed{v_2' = (1,2,1)}$ donc $\boxed{\langle v_2', v_2'\rangle = 6.}$
• $v_3 = e_3 - \dfrac{\langle e_3, v_2'\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' - \dfrac{\langle e_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$
Le calcul donne $\langle e_3, v_2'\rangle = 1$ et $\langle e_3, v_1\rangle = -1$ donc
$v_3 = (0,0,1) - \dfrac{1}{6}(1,2,1) - \dfrac{-1}{2}(1,0,-1) = \dfrac{1}{3}(1,-1,1)$.
On pose $\boxed{v_3' = (1,-1,1)}$ donc $\boxed{\langle v_3', v_3'\rangle = 3.}$ (v_1, v_2', v_3') est une OG de (e_1, e_2, e_3)

- On recherche ensuite une ON de (e_1, e_2, e_3)
  On obtient $(u_1, u_2, u_3) = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1))$.

On pourra construire la base en remplissant progressivement un tableau :

i	1	2	3
e_i	1 0 -1	2 1 -1	0 0 1
v_i	1 0 -1	1 2 1	1 -1 1
$\lvert\lvert v_i\rvert\rvert^2$	2	6	3

66 **Remarque.** Noter que la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{E}$ est triangulaire supérieure avec une diagonale formée de 1 et qu'il en est donc de même de la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{V}$.

67 **Remarque.** $(\dfrac{v_1}{||v_1||}, \dfrac{v_2}{||v_2||}, \dots, \dfrac{v_k}{||v_k||})$ est une BON de F_k.

68 **Remarque.** Dans notre pratique, le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sert essentiellement à déterminer une base OG d'un sous-espace vectoriel donné ou à déterminer l'expression analytique d'un projecteur orthogonal sur un sev donné. Ce procédé n'en reste pas moins un outil théorique important.

69 **Deux cas particuliers.** On se donne un vecteur $x \in E$ et un sous-espace vectoriel F et on cherche $p_F(x)$. Lorsque $\dim F \in \{1, n-1\}$, le calcul de $p_F(x)$ est simple :

- si $\dim F = 1$ alors il existe $v \in F \setminus \{0_E\}$ tel que $F = \text{vect}(v)$. Alors, d'après la formule du début de section,
$$p_F(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{||v||^2} v$$
- si $\dim F = n-1$ alors comme $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$ on a $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$. Or, $F^\perp$ est une droite vectorielle, disons $F^\perp = \text{vect}(u)$, donc d'après le point précédent, $p_{F^\perp}(x) = \frac{\langle x,u\rangle}{||u||^2} u$ en sorte que
$$p_F(x) = x - \frac{\langle x, u\rangle}{||u||^2} u$$

70 **Base du supplémentaire orthogonal.** On se donne un sous-espace vectoriel F, connue par une base $\mathcal{E}_F = (e_1, \cdots, e_p)$ et on cherche une BOG de $F^\perp$. Pour cela,

- il suffit de compléter $\mathcal{E}_F$ avec $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ en une base $\mathcal{E}$ de E,
- de chercher une BOG $\mathcal{V}$ de E en orthogonalisant $\mathcal{E}$ par Gram-Scmidt,
- d'extraire les $n - p$ derniers vecteur de $\mathcal{V}$ pour obtenir la BOG cherchée.

Exercices

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel euclidien canonique $E = \mathbb{R}^4$, on se donne les trois vecteurs suivants :

$$u = (0, 1, -1, 0), \quad v = (1, 1, -2, -1), \quad w = (1, 1, 1, -2).$$

On définit la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$ ainsi que le sous-espace vectoriel $F = \text{vect}(u, v, w)$.

1. a) Montrer que cela a un sens de parler de l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de la famille $\mathscr{F}$.
   b) Déterminer l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de la famille $\mathscr{F}$ puis donner une base orthonormale du sous-espace vectoriel F.
2. Déterminer la distance du vecteur $u + v + w$ au sous-espace vectoriel F.
3. a) Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ sur le sous-espace vectoriel F.
   b) Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel F.
   c) Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel $F^\perp$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u, u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

On admet que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour calculer les produits scalaires on utilisera la matrice M de f, cf. cours si nécessaire.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer l'orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de E pour le produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$.
2. Déterminer $\inf \left\{ \int_{-1}^{1} (ax + b - x^2)^2 dx \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ en voyant cette quantité comme la distance d'un vecteur à un sous-espace de E.

Chapitre 3

Endomorphismes d'un espace euclidien

Sommaire

1. **Adjonction** **17**
2. **Isométries vectorielles** **19**
3. **Symétries orthogonales** **20**

Exercices **22**

Dans tout le chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien donné, de dimension n et f est un endomorphisme donné de E.
BON abrège Base OrthoNormale.

1. Adjonction

$\boxed{71}$ **Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. on dit que**

- M **est symétrique** $\overset{\text{notation}}{\iff} M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{\iff} {}^tM = M$**.**
- M **est orthogonale** $\overset{\text{notation}}{\iff} M \in O_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{\iff} M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ **et** ${}^tM = M^{-1}$ **(i.e.** $M\,{}^tM = I_n$**).**

$\boxed{72}$ **Reconnaître une matrice orthogonale.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs-colonnes de M forment une BON de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

$\boxed{73}$ **Remarque.** La matrice de passage entre deux BON de E est une matrice orthogonale (ne pas parler de matrice *orthonormale*).

$\boxed{74}$ **Théorème et définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *adjoint* l'unique endomorphisme noté $f^* \in \mathcal{L}(E)$ caractérisé par la condition**

$$\forall a, x \in E, \langle a, f^*(x)\rangle = \langle f(a), x\rangle.$$

$\boxed{75}$ **Existence de l'adjoint.** Pour montrer l'existence de l'adjoint de f, on procède par analyse-synthèse en prouvant que si f^* existe alors sa matrice dans une BON donnée est la transposée de celle de f dans la même base.

76 **Propriété de l'adjoint.** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.Alors :

i) $O^*_{\mathcal{L}(E)} = O_{\mathcal{L}(E)}$,

ii) $(\text{ Id}_E)^* = \text{ Id}_E$,

iii) $(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*$,

iv) $(f^*)^* = f$,

v) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,

vi) si f est inversible alors f^* aussi et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

La propriété iii) traduit que l'application adjontion $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), f \mapsto f^*$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ autrement dit un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. En particulier, on retrouve i). La propriété iv) nous dit que cet endomorphisme est une involution et donc finalement une symétrie vectorielle, cf. le théorème §18 du chapitre 1.

77 **Matrice de l'adjoint.** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $\mathcal{B}$ est une base *orthonormale* de E alors

$$\text{mat}(f^*, \mathcal{B}) = {}^t\text{mat}(f, \mathcal{B})$$

78 **Remarques.**

— Dans le résultat précédent, noter que la base est supposée *orthonormale.*

— Le résultat précédent explique qu'on utilise parfois, pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la notation M^* pour désigner la matrice ${}^tM$.

79 **Déterminant de l'adjoint.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det f = \det f^*$.

80 **Endomorphismes symétriques. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors**

$$f \textbf{ est un endomorphisme symétrique} \overset{\textbf{notation}}{\iff} f \in \mathcal{S}(E) \overset{\textbf{déf}}{\iff} f^* = f.$$

On parle parfois aussi d'endomorphisme «auto-adjoint» au lieu de «symétrique».

81 **Caractérisation des endomorphismes symétriques.** Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une BON de E et $M = [f]^{\mathcal{B}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) $f \in \mathcal{S}(E)$

ii) $\forall a, x \in E, \langle a, f(x) \rangle = \langle f(a), x \rangle$

iii) $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

On a vu plus haut les exemples de l'application nulle de E et de l'application identique de E.

82 **Théorème spectral.**

i) Si $f \in \mathcal{S}(E)$ alors f est diagonalisable dans une BON, autrement dit, il existe une BON de E formée de vecteurs propres de f.

ii) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors M diagonalise dans le groupe orthogonal, autrement dit, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = D$.

Sous cette forme, le théorème semble dû à Weierstrass (autour de 1850).

83 **Remarques.** Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ alors

i) les sev propres de f sont deux à deux orthogonaux

ii) si f admet exactement deux sous-espaces propres F et G, ces deux sous-espaces sont mutuellement orthogonaux ie $F^\perp = G$ et $G^\perp = F$, cf. théorème §56.

iii) la seconde forme se traduit en disant qu'une matrice symétrique réelle diagonalise dans le groupe orthogonal.

Attention, pour la version matricielle, bien préciser qu'on est dans le cas de symétriques matrices *réelles* sinon, c'est faux.

Une preuve du théorème spectral est donnée en exercice.

84 **Endomorphismes symétriques positifs. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,**

$$\begin{array}{cl} & f \textbf{ est un endomorphisme symétrique positif} \\ \overset{\text{notation}}{\Longleftrightarrow} & f \in \mathcal{S}^+(E) \\ \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} & f \in \mathcal{S}(E) \textbf{ et } \mathbf{Sp}\,(f) \subseteq [0, +\infty[\\ \Longleftrightarrow & f \in \mathcal{S}(E) \textbf{ et } \forall x \in E, \langle x, f(x)\rangle \geq 0 \end{array}$$

85 **Endomorphismes symétriques définis positifs. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,**

$$\begin{array}{cl} & f \textbf{ est un endomorphisme symétrique défini positif} \\ \overset{\text{notation}}{\Longleftrightarrow} & f \in \mathcal{S}^{++}(E) \\ \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} & f \in \mathcal{S}(E) \textbf{ et } \mathbf{Sp}\,(f) \subseteq]0, +\infty[\\ \Longleftrightarrow & f \in \mathcal{S}(E) \textbf{ et } \forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle x, f(x)\rangle > 0 \\ \Longleftrightarrow & f \in \mathcal{S}^+(E) \cap \mathbf{GL}(E) \end{array}$$

Dans ce dernier cas, la matrice de f dans n'importe BON de E est celle d'un (deuxième) produit scalaire sur E.

86 **Matrices symétriques positives.** On définit de manière analogue les notions de matrice symétrique positive et définie positive. Les ensembles correspondants sont notés $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi,

i) une matrice symétrique positive est une matrice carrée symétrique dont les valeurs propres sont toutes positives ;

ii) une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si l'endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est un endomorphisme symétrique positif.

2. Isométries vectorielles

87 **Automorphismes orthogonaux. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors,**

$$\begin{array}{ll} & f \textbf{ est un automorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle)} \\ \overset{\text{notation}}{\iff} & f \in O(E) \\ \overset{\text{déf}}{\iff} & \forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \textbf{ (i.e. } f \textbf{ conserve le produit scalaire)} \\ \iff & \forall x \in E, ||f(x)|| = ||x|| \textbf{ (i.e. } f \textbf{ conserve la norme)} \\ \iff & f \circ f^* = \mathbf{Id}_E \textbf{ ou } f^* \circ f = \mathbf{Id}_E \\ \iff & f \in \mathbf{GL}(E) \textbf{ et } f^* = f^{-1} \\ \iff & \forall \mathcal{B} \text{ BON}, \mathbf{mat}(f, \mathcal{B}) \in O_n(\mathbb{R}) \\ \iff & \exists \mathcal{B} \text{ BON}, \mathbf{mat}(f, \mathcal{B}) \in O_n(\mathbb{R}) \\ \iff & \forall \mathcal{B} \text{ BON}, f(\mathcal{B}) \textbf{ est une BON} \\ \iff & \exists \mathcal{B} \text{ BON}, f(\mathcal{B}) \textbf{ est une BON} \end{array}$$

88 **Spectre d'une isométrie.** Si $f \in O(E)$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subseteq \{-1, 1\}$ et $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

89 **Isométrie positive, négative.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & f \text{ est une isométrie vectorielle positive (ou directe ou encore une rotation)} \\ \overset{\text{notation}}{\iff} & f \in O^+(E) \text{ (ou } f \in SO(E)) \\ \overset{\text{déf}}{\iff} & f \in O(E) \text{ et } \det(f) = +1 \\ & f \text{ est une isométrie vectorielle négative (ou indirecte)} \\ \overset{\text{notation}}{\iff} & f \in O^-(E) \\ \overset{\text{déf}}{\iff} & f \in O(E) \text{ et } \det(f) = -1 \end{array}$$

90 **Groupes orthogonaux.** $O(E)$ et $SO(E)$ sont des sous-groupes de $\text{GL}(E)$ appelés resp. *groupe orthogonal* et *groupe spécial orthogonal* de E. Cela signifie que

i) la composée de deux isométries vectorielles f et g est encore une isométrie vectorielle (directe si f et g le sont)

ii) la réciproque d'une isométrie vectorielle f est encore une isométrie vectorielle (directe si f l'est).

La composée de deux éléments de $O^-(E)$ est un élément de $O^+(E)$.
Les trois derniers § s'adaptent de manière transparente aux *matrices* orthogonales. Les groupes orthogonaux correspondants s'écrivent $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.

3. Symétries orthogonales

Il s'agit d'exemples importants d'isométries vectorielles.

91 **Définition. Si F est un sous-espace vectoriel donné de E, on appelle *symétrie orthogonale* par rapport à F (notée f) la symétrie par rapport à F et de direction $F^\perp$ (on rappelle que dans l'espace vectoriel euclidien E, on a $E = F \oplus F^\perp$). Ainsi, f est définie par**

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^\perp \Rightarrow f(x) = x_1 - x_2.$$

92 **Propriétés des symétries orthogonales.** Si f est la symétrie orthogonale par rapport à F alors

i) $f \circ f = \mathrm{Id}_E$,

ii) $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$,

iii) $F^\perp = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$

iv) $f \in O(E) \cap \mathcal{S}(E)$.

On notera que F est donc l'espace des points fixes de la symétrie.

$\boxed{93}$ **Symétrie centrale.** L'application $-\mathrm{Id}_E$ (l'homothétie de rapport -1) est une symétrie orthogonale par rapport à $\{0_E\}$. Une telle symétrie n'admet que 0_E pour point fixe.

$\boxed{94}$ **Remarque.** Une symétrie orthogonale par rapport à F est directe ou indirecte selon la parité de $\dim F^\perp = n - \dim F$, ce qui dépend de la parité de la dimension de l'espace des points fixes. En particulier, ne pas croire qu'une symétrie orthogonale serait systématiquement une isométrie négative et donc qu'une symétrie ne pourrait pas être une rotation.

$\boxed{95}$ **Remarque.** Une symétrie orthogonale f est diagonalisable dans une base orthonormale et dans une telle base de diagonalisation, la diagonale de la matrice de f est à coefficients parmi -1 et/ou 1. En particulier, $f \in \mathcal{S}(E)$.

$\boxed{96}$ **Remarque.** Si $f \in O(E)$ et est une symétrie vectorielle (i.e. un endomorphisme qui vérifie $f \circ f = \mathrm{Id}_E$) alors f est une symétrie orthogonale.

$\boxed{97}$ **Remarques.** Si $f \in O(E) \cap \mathcal{S}(E)$ alors f est une symétrie orthogonale.

$\boxed{98}$ **Vocabulaire.** La symétrie orthogonale par rapport à F est dite

- *symétrie hyperplane ou réflexion* si $\dim F = n - 1$ (F est un plan en dimension 3),
- *retournement ou renversement* si $\dim F = n - 2$ (F est une droite en dimension 3).

Exercices

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,2),(1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f]^{\mathscr{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer la matrice de f^* dans $\mathscr{B}$.

Exercice 2

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable dans un base orthonormale. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer qu'un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique.

Exercice 3

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Calculer ${}^t\overline{X}X$ en fonction des coefficients de X.
2. Soit M une matrice antisymétrique réelle. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $MX = \lambda X$. Conjuguer et transposer la relation $MX = \lambda X$, et en faisant apparaître ${}^t\overline{X}X$, en déduire que λ est un imaginaire pur.

Exercice 4

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admet que le polynôme caractéristique de A est $P_A = (X-2)(X+2)^3$.
Montrer que A est diagonalisable et donner des matrices D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien et soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Démontrer de deux manières différentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{U}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{U}$ soit triangulaire supérieure.

- 1e méthode : raisonner par récurrence sur la dimension de E ;
- 2e méthode : utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 6

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{pmatrix}$$

dont on admet que le déterminant vaut 2500.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique de matrice A dans la base canonique. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.
2. (a) Trouver une matrice orthogonale U et une matrice diagonale D, d'ordre 2 chacune, telles que $A = UDU^{-1}$.

   (b) En déduire une matrice symétrique réelle B, ayant des valeurs propres positives telle que $B^2 = A$.

Exercice 7 Soient E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On pose $g = f^* \circ f$.

1. Montrer que g est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer que $\ker f = \ker g$ (on pourra calculer $\langle g(x), x \rangle$).
3. Montrer que g est un endomorphisme symétrique positif. À quelle condition est-il défini positif ?

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 9

1. Soient $D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale et définie positive et $B \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
   a. Montrer qu'il existe $\Delta \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $D = \Delta^2$.
   b. En déduire que DB est diagonalisable.
2. a. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (i.e. définie positive) et $B \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que AB est diagonalisable.
   b. Montrer que le résultat précédent n'est plus vrai si on suppose seulement que $A \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 10

Existe-t-il un automorphisme orthogonal $f \in O(\mathbb{R}^2)$ de l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^2$ tel que $f(-1, 2) = (0, 3)$?

Exercice 11

Existe-t-il $M \in O_3(\mathbb{R})$ de diagonale $\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$?

Exercice 12

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice orthogonale. Soit f l'endomorphisme de l'espace euclidien canonique $E = \mathbb{R}^n$ de matrice A dans $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de E.

1. Soit $u = (1, 1, \ldots, 1)$ le vecteur de E dont toutes les composantes valent 1. *Les deux sous-questions suivantes sont indépendantes.*
   a. Montrer que $||f(u)||^2 = n$.
   b. Déterminer en fonction des coefficients $a_{i,j}$ la valeur de $S = \langle u, f(u) \rangle$.
2. En déduire que :
$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$
   (*indication* : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 13

Soit E un espace euclidien, λ un réel non nul et u un vecteur non nul de E. Soit f l'application de E dans E définie par
$$\forall x \in E, \ \ f(x) = x + \lambda \langle x, u \rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un automorphisme orthogonal de E.

Exercice 14

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. A quelle condition nécessaire et suffisante $\sigma := \lambda s$ est-elle une symétrie orthogonale ? Préciser dans ce cas par rapport à quel sous-espace vectoriel σ est une symétrie.

Exercice 15

1. Dans un espace euclidien E soit $u \in E$ non nul et soit $H = \text{vect}(u)^{\perp}$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à H. Montrer que

$$\forall x \in E, s(x) = x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{||u||^2}u$$

2. Dans l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, trouver la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2x - y + z = 0$.

Exercice 16

Cet exercice propose de démontrer le théorème spectral (dernière question). Dans toutes les questions, E désigne un espace euclidien. La notation $\mathcal{S}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice D de f dans $\mathcal{B}$ soit diagonale. Montrer que $f \in \mathcal{S}(E)$.
2. Si A est une matrice complexe, on notera $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique *réelle*.
   a. Calculer le nombre complexe ${}^t\overline{X}X$ en fonction des coefficients de X (par abus, on assimile ${}^t\overline{X}X$ à son seul coefficient).
   b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $MX = \lambda X$ et $X \neq O_{n,1}$. Conjuguer et transposer la relation $MX = \lambda X$ puis faire apparaître ${}^t\overline{X}X$ pour en déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$.
   c. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Déduire de la question précédente que le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Soit $u \in E$ un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. On pose $H = u^{\perp}$.
   a. Monter que H et vect(u) sont supplémentaires dans E.
   b. Montrer que $f(H) \subseteq H$.
   c. Montrer que si $g : H \to H$ est la restriction de f à H alors $g \in \mathcal{S}(H)$.
   d. Montrer que si $v \in H$ est un vecteur propre de g alors v est un vecteur propre de f.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence sur n l'assertion suivante :

   si E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et si $f \in \mathcal{S}(E)$ alors il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.

Exercices supplémentaires

Exercice 17

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ que l'on suppose diagonalisable. Montrer que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Exercice 18

Soit E espace euclidien soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer, sans invoquer le théorème spectral, que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

Indications

- Que suffit-il de montrer pour établir que $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$?
- Prendre $v \in$ ..?.. et calculer $||v||^2$.

Exercice 19

Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{C})$.

1. Soit Δ le discriminant du polynôme caractéristique de M. Ecrire Δ comme une somme de deux carrés.
2. Montrer que M est non diagonalisable si et seulement si $b \neq 0$ et $\Delta = 0$ (pour la réciproque, raisonner par l'absurde et regarder la forme de la réduite diagonale).
3. En déduire un exemple de matrice M non diagonalisable.

Exercice 20

Soit la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne f l'endomorphisme de l'espace euclidien canonique $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
2. (a) En calculant le rang de M, déterminer le spectre de M.
   (b) Déterminer une base de $\ker f$.
   (c) En déduire sans calculs inutiles une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}MP$.

Exercice 21

Soit la matrice A :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et en déduire le spectre de A avec les multiplicités.
2. En limitant au plus les calculs, déterminer une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 22

On définit $f \in O(E)$ comme l'équivalence portant «def» dans la définition §87. Montrer que c'est équivalent au fait que f est inversible et $f^{-1} = f^*$ (on formalisera mathématiquement les énoncés ci-dessus).

Exercice 23

On définit $f \in O(E)$ comme l'équivalence portant «def» dans la définition §87. Montrer que c'est équivalent au fait que f conserve la norme (on formalisera mathématiquement les énoncés ci-dessus).

Exercice 24

On formalisera mathématiquement les énoncés ci-dessous.

1. Montrer que la composée de deux isométries vectorielles est encore une isométrie vectorielle.
2. Montrer que la réciproque d'une isométrie vectorielle est encore une isométrie vectorielle.

Chapitre 4

Espaces euclidiens de dimensions 2 ou 3

1. Orientation d'un espace euclidien

$\boxed{99}$ **Déterminant d'une famille dans une base.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors,

- si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, on désigne par $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice de taille $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de E et si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

$\boxed{100}$ **Orientations.** Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}_0$ une BON fixée de E. Alors, pour toute BON $\mathcal{B}$ de E, on a

$$\det_{\mathcal{B}_0}\mathcal{B} = -1 \text{ ou } \det_{\mathcal{B}_0}\mathcal{B} = 1.$$

Les BON de E telles que $\det_{\mathcal{B}_0}\mathcal{B} = 1$ sont dites de *même orientation* que $\mathcal{B}_0$. La relation *avoir même orientation* au sens d'avoir même orientation que la base $\mathcal{B}_0$ est même une relation d'équivalence sur l'ensemble des BON de E et qui possède deux classes.

$\boxed{101}$ **Orientation d'un espace euclidien.** Orienter E c'est fixer une BON $\mathcal{B}_0$ de référence et qualifier de *directe* (en abrégé : BOND) toute BON $\mathcal{B}$ de même orientation de $\mathcal{B}_0$. On dit que l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est canoniquement orienté si on convient que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est directe.

$\boxed{102}$ **Remarque.** La matrice de passage entre deux BOND est un matrice orthogonale positive.

$\boxed{103}$ **Orientation d'une droite vectorielle.** Il existe exactement deux façons d'orienter une droite vectorielle.

$\boxed{104}$ **Changement d'orientation par échange.** Soit $\mathcal{B}$ une BON de E.

i) Soit $\mathcal{B}'$ la base de E obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en échangeant deux vecteurs donnés de $\mathcal{B}$. Alors, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'orientations distinctes.

ii) Si on change un vecteur en son opposé, la base $\mathcal{B}$ change d'orientation.

iii) On suppose $n = 3$. Soit $\mathcal{B}''$ la base de E obtenue à partir de $\mathcal{B}$ en effectuant une permutation circulaire de chacun des vecteurs. Alors, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$ sont deux bases de même orientation.

105 **Complétion.** Il est toujours possible de compléter une famille orthonormale qui n'est pas une base en une BOND.

2. Produits mixte et vectoriel

106 **Définition. Soit E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux BOND de E et soient $u, v, w \in E$; alors $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \det_{\mathcal{B}'}(u, v, w)$. Le réel $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ est appelé le *produit mixte* de u, v et w (dans cet ordre) et est noté $[u, v, w]$.**

107 **Théorème de Riesz (rappel). Soit E un espace euclidien de dimension finie (pas forcément 2 ou 3). Soit une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Alors, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que**

$$\forall x \in E, f(x) = \langle u, x \rangle .$$

La suite de cette section suppose que E est de dimension 3.

108 **Définition et théorème. Pour tous $u, v \in E$, il existe un unique vecteur $w \in E$ tel que**

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle w, x \rangle .$$

On dit que w est le *produit vectoriel* de u et de v et on note $w = u \wedge v$. Retenir donc que

$$\forall x \in E, [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle .$$

109 **Propriétés du produit vectoriel.** Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes :

i) $u \wedge v = -v \wedge u$ (antisymétrie)

ii) $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$ et $(\alpha u) \wedge w = \alpha(u \wedge w)$ (bilinéarité)

iii) (u, v) libre SSI $u \wedge v \neq 0_E$, en particulier $u \wedge u = 0_E$

iv) $u, v \perp u \wedge v$.

110 **Produit vectoriel et base orthonormale.**

i) Si (u, v, w) est une BOND de E alors $w = u \wedge v$, $u = v \wedge w$, $v = w \wedge u$.

ii) Réciproquement, si (u, v) est une famille orthonormale alors $(u, v, u \wedge v)$ est une BOND de E.

111 **Expression analytique dans une BOND.** Soient $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une BOND de E. Soient $u, u' \in E$ tels que $[u]^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $[u']^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors

$$[u \wedge u']^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ où } X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

3. Isométries vectorielles en dimension 2

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension 2, orienté bien que parfois ce ne soit pas nécessaire. Si $\theta \in \mathbb{R}$ alors on définit les deux matrices

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

112 **Théorème. Soit $f \in O(E)$. Pour toute BON $\mathcal{B}$ de E, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :**

$$\mathbf{Mat}(f, \mathcal{B}) \in \{R_\theta, S_\theta\}$$

113 **Théorème. Si f est dans $SO(E)$ alors, pour toute BON $\mathcal{B}$, il existe un réel θ tel que**

$$\mathbf{Mat}(f, \mathcal{B}) = R_\theta$$

Si on suppose E orienté et, si $\mathcal{B}$ est une BOND, la matrice de f dans tout autre BOND $\mathcal{B}'$ vérifie Mat$(f, \mathcal{B}) =$ Mat$(f, \mathcal{B}')$ et on dit alors que f est la *rotation* d'angle θ (qui est unique modulo 2π).

114 **Inverse d'une rotation.** On remarquera que si f est une rotation d'angle θ alors f^{-1} est la rotation d'angle $-\theta$.

115 **Rotation qui est une symétrie.** Soit f une rotation d'angle θ. Alors f est une symétrie orthogonale si et seulement si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ ie si, modulo 2π, l'angle θ vaut 0 (et alors $f = \mathrm{Id}_E$) ou l'angle θ vaut π (et alors $f = -\mathrm{Id}_E$).

116 **Propriété de R_θ.** Si $a, b \in R$ alors $R_a R_b = R_b R_a = R_{a+b}$. En particulier, deux rotations d'un espace euclidien orienté de dimension 2 commutent et la composée de la rotation d'angle a et de la rotation d'angle b est la rotation d'angle $a + b$.

117 **Théorème. Soit $f \in O(E)$ telle que det$f = -1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que**

$$\mathbf{Mat}(f, \mathcal{B}) = S_\theta$$

et f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle. Si on pose $\mathcal{B} = (i, j)$ alors l'axe de la symétrie est la droite faisant un angle polaire de $\theta/2$ avec i.

118 **Remarque.** En dimension 2, une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie négative

4. Isométries vectorielles en dimension 3

On suppose $n = 3$.

119 **Théorème : Matrice réduite. Il existe une BOND $\mathcal{B}$ de E et il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ et un unique $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que Mat$(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.**
On a $f \in SO(E) \Leftrightarrow \varepsilon = 1$ et $f \notin SO(E) \Leftrightarrow \varepsilon = -1$.

120 **Classification des isométries.** La classification des isométries $f \in O(E)$ s'effectue en étudiant le sous-espace vectoriel des points fixes de f, ie $F = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Dans les deux dernières lignes du tableau ci-dessous, on a $\theta \not\equiv 0$ (mod. 2π).

$\dim F$	f directe/indirecte	Mat$(f, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ BON	Nature	(ε, θ)
3	directe	I_3	Id_E	$(1, 0)$
2	indirecte	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	sym_F	$(-1, 0)$
1	directe	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u)$ BOND	Rotation notée $f = \mathrm{Rot}(u, \theta)$ d'axe orienté par u et d'angle θ où vect$(u) = F$ et (u_1, u_2) BOND de $F^\perp$	$(1, \theta)$ avec $\theta \neq 0$
0	indirecte	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u)$ BOND $\theta \neq 0, \pi$	Si $\theta \neq \pi$(mod. 2π) alors $f = \mathrm{sym}_{G^\perp} \circ r = r \circ \mathrm{sym}_{G^\perp}$ où $r = \mathrm{Rot}(u, \theta)$, $G = \ker(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}(u)$ et (u_1, u_2) BOND de $G^\perp$	$(-1, \theta)$ avec $\theta \neq 0$

121 **Remarque.** À la différence du cas où $\dim E = 2$, deux rotations quelconques de E ne commutent pas forcément.

122 **Calcul de l'angle d'une rotation vectorielle.** Si $\dim F = 1$, et si u est fixé parmi les deux choix possibles, on obtient θ par tr$(f) = 2\cos\theta + 1$ (ce qui donne θ au signe près) et par le fait que pour tout $x \in E \setminus F$, le produit mixte $[x, f(x), u]$ est du signe de $\sin\theta$.

123 **Ramener le dernier cas à une rotation.** Si $\dim F = 0$ (le cas le moins facile), on peut ramener l'étude au cas d'une rotation car $-f \in SO(E)$ et, plus précisément, $-f = \mathrm{Rot}(u, \theta + \pi)$.

124 **Rotation qui est une symétrie.** Une rotation f est une symétrie orthogonale SSI f est une rotation d'angle π.

125 **Remarque.** En dimension 3, les symétries par rapport à un plan vectoriel ainsi que l'application $x \in E \mapsto -x$ sont les seules symétries à être des isométries négatives.

Exercices

Exercice 1

1) Soient x, u, v des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Justifier que $x \wedge (u \wedge v) \in \text{vect}(u, v)$.

b) Plus précisément, démontrer $x \wedge (u \wedge v) = \langle x, v \rangle u - \langle x, u \rangle v$. Pour cela, supposer d'abord que (u, v) est une famille orthonormale et compléter pour obtenir une BOND, puis supposer que (u, v) est une famille libre orthogonale, puis que (u, v) est une famille libre (remarquer alors que $(u, \langle u, u \rangle v - \langle u, v \rangle u)$ est une famille OG) et enfin que (u, v) est une famille liée.

2) Que vaut $(a \wedge b) \wedge c$?

3) a) Démontrer que $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = [a, b, d]c - [a, b, c]d$.

b) Démontrer que $\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a, b, c]$ le produit mixte de a, b et c.

1) Exprimer à l'aide de p le scalaire $s = [a + b, b + c, c + a]$.

2) Exprimer à l'aide de p le scalaire $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$ (utiliser la formule du double produit vectoriel).

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^2$. Soient s_1 la symétrie orthogonale d'axe la droite vectorielle $\text{vect}(1, 1)$ et s_2 la symétrie orthogonale d'axe la droite vectorielle $\text{vect}(0, 1)$. Donner la nature et la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de l'endomorphisme $s_2 \circ s_1$.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit $f \in SO(E)$. Montrer que f conserve le produit mixte.

Exercice 5 Soit $n \in \{2, 3\}$.

1) Soit f une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^n$. Que peut-on dire de $-f$?

2) Déterminer les rotations de $\mathbb{R}^n$ qui sont aussi des symétries vectorielles.

Exercice 6 L'espace vectoriel euclidien canonique $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

a) Vérifier qu'il existe une unique rotation f de E d'axe $u = e_1 - e_2 + e_3$ et telle que $f(e_1) = -e_2$ et déterminer sa matrice dans $\mathcal{B}$.

b) En supposant E canoniquement orienté, donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 7 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien canoniquement orienté $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Dans l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$ orienté, soit f la rotation d'axe dirigé par le vecteur $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

1) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique $\mathscr{C}$. On construira une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice R de f est réduite, au sens du cours et on en déduira M. On pourra faire les calculs avec SageMath.

2) On obtiendra un résultat particulièrement simple. Comment pouvez-vous le justifier a posteriori ?

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, canoniquement orienté. Soit $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathscr{C}$:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est une rotation de E *(on ne vous demande pas, pour l'instant, de donner les éléments caractéristiques de f).*

2) Déterminer un vecteur générateur u de l'axe de f ainsi que l'angle θ de la rotation f.

3) (*Cette question ne sert pas dans la suite de l'exercice*) Montrer qu'il existe un entier $k > 0$ tel que $f^k = \mathrm{Id}_E$ et calculer le plus petit entier $k > 0$ tel que $f^k = \mathrm{Id}_E$ (*indication : on pourra, par exemple, utiliser la matrice de f dans une base adaptée).*

4) (*Cette question est indépendante des précédentes*) Soit $v \in E \setminus \{0_E\}$ et soit $H = v^\perp$.

   a) Dans cette sous question, on suppose que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Donner une équation cartésienne de H.

   b) Soit s la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace H. Soit $x \in E$. D'après le cours sur les symétries, que peut-on dire du vecteur $s(x) - x$?

5) Soit P le plan de E d'équation $4x - y - z = 0$ et soit s_P la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace P. On pose $g = f \circ s_P$

   a) Vérifier que $u \in P$ (*on rappelle que le vecteur u est défini à la question 2*).

   b) Montrer que g est une isométrie vectorielle de E.

   c) En vous référant précisément à la classification des isométries vectorielles en dimension 3, déterminer la *nature* de g (*on ne vous demande pas pour l'instant de donner les éléments caractéristiques de g*).

   d) Soit $v \in P^\perp$. Exprimer $g(v)$ à l'aide de f et de v.

   e) En utilisant les deux sous-questions précédentes ainsi que la question 4, calculer les éléments caractéristiques de g.

Exercice 10

Soit une matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$. On note A_{ij} le cofacteur de A en une position (i, j) quelconque de A.

1) Soient des indices $1 \leq i, j \leq n$.

   a) Déterminer une relation entre $a_{i,j}$ et $A_{i,j}$.

   b) En déduire que si $a_{i,j}$ et $A_{i,j}$ sont non nuls alors $\det(A) > 0$ si et seulement si $a_{i,j}$ et $A_{i,j}$ sont de même signe.

2) Appliquer le résultat précédent pour retrouver la nature des isométries vectorielles canoniquement associées aux matrices orthogonales A, B et C de l'exercice 7.

Exercice 11

Soit l'espace vectoriel euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$, de base canonique notée $\mathscr{C}$. Soit l'endomorphisme $h \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{C}$.

1. Montrer que h est une rotation vectorielle d'axe dirigé par un vecteur unitaire u que l'on déterminera et d'angle θ que l'on déterminera également.
2. a) Déterminer une base orthonormale du plan P engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, -1)$ et $e_2 = (1, -1, 0)$.
   b) Déterminer explicitement une base orthonormée *directe* $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de h dans $\mathscr{B}$ soit de la forme $R = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où a, b, c, d et e sont des réels à déterminer.
3. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{B}$, une isométrie vectorielle $f \in O(E)$ tel que $f^2 = h$.

Exercice 12

Soit l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $u \in E$ unitaire et $w \in E$ quelconque. On pose $\lambda = \langle u, w \rangle$ et $z = w - \lambda u$.
   a) Montrer que $z \perp u$.
   b) Exprimer $u \wedge z$ en fonction de u et w.
   c) Montrer que $||z||^2 = ||w||^2 - \lambda^2$
   d) Montrer, en utilisant la formule du double produit vectoriel que si a et b sont des vecteurs orthogonaux de E alors $||a \wedge b|| = ||a|| \, ||b||$.
   e) En partant de $||u \wedge z||^2$, montrer, à l'aide des sous-questions précédentes, que
   $$||u \wedge w||^2 + \langle u, w \rangle^2 = ||w||^2.$$
2. Démontrer que si v et w sont des vecteurs de E alors $||v \wedge w||^2 + \langle v, w \rangle^2 = ||v||^2 ||w||^2$.

Chapitre 5

Formes quadratiques

Dans tout le chapitre, K désigne un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E désignera un K-espace vectoriel , pas nécessairement de dimension finie.

1. Dualité dans les espaces vectoriels

126 **L'espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E,F)$.** Si E et F sont des K-espaces vectoriels alors l'ensemble

$$\mathcal{L}_K(E,F) = \{f : E \to F \ ; \ f \text{ linéaire}\}$$

est un K-espace vectoriel pour les lois usuelles :

$$\begin{array}{ccccccc} + & : & (f,g) & \mapsto & f+g & = & \left[\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right] \\ . & : & (\lambda, f) & \mapsto & \lambda.f & = & \left[\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & \lambda.f(x) \end{array} \right] \end{array}$$

Si $\dim_K E, \dim_K F < \infty$ alors $\mathcal{L}_K(E,F)$ est de dimension finie et $\dim_K \mathcal{L}_K(E,F) = (\dim_K E)(\dim_K F)$.

127 **Corps vu comme un espace vectoriel.** Soit K un corps commutatif, en pratique $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}\}$. Alors, l'ensemble K, muni des deux lois « évidentes » suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} + & : & (u,v) \in K \times K & \mapsto & u+v \\ . & : & (\lambda, u) \in K \times K & \mapsto & \lambda \times u \end{array}$$

est un K-espace vectoriel. De plus, $\dim_K K = 1$ et une base de K est, par exemple (1), laquelle est appelée *base canonique* de K. Le K-espace vectoriel K n'est qu'un cas particulier de l'espace vectoriel produit K^n, avec $n = 1$.

128 **Définition. Soit E un K-espace vectoriel . On appelle *dual algébrique* de E, l'espace vectoriel $\mathcal{L}_K(E,K)$ et qui est alors noté E^*. Les éléments de E^* sont appelés des *formes linéaires.***

129 **Commentaire.** Un élément de E^* est donc une application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

130 **Commentaire.** Il existe un autre dual, dit *topologique*, qui utilisé dans certains contextes, oblige à préciser. Mais, en l'absence d'ambiguïté, on se contentera de parler de *dual* sans le qualifier d'*algébrique*.

131 **Exemple.** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $K = \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y \end{array}$$

est linéaire et donc, par définition, $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$. Soit $\mathscr{C}_2 = (c_1, c_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathscr{C}_1 = (1)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. Alors, comme

$$\begin{array}{rcccc} \varphi(c_1) & = & 2 \times 1 + 3 \times 0 & = & 2 \times 1 \\ \varphi(c_2) & = & 2 \times 0 + 3 \times 1 & = & 3 \times 1 \end{array}$$

la matrice de φ dans les bases canoniques est la matrice-ligne suivante

$$\mathrm{Mat}[\varphi, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_1] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On notera que cette matrice s'obtient simplement en extrayant les coefficients de la forme linéaire $2x + 3y$.

132 **Théorème. On suppose que $\dim_K E = n$. Alors, $\dim_K E^* = n$. En particulier, E et E^* sont des sous-espaces vectoriels isomorphes.**

133 **Théorème (*expression analytique et caractérisation d'une forme linéaire*). Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.**

- **Soit $\varphi : E \to K$ une forme linéaire. Alors, il existe un unique n-uplet $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ tel que**

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in K^n,\ \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

- **Soit $\varphi : E \to K$ une application. Supposons qu'il existe un n-uplet $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ tel que**

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in K^n,\ \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Alors, φ une forme linéaire.

134 **Remarques.**

i) Une base de E étant donnée, on reconnaît qu'une application $\varphi : E \to K$ est une forme linéaire à ce que pour chaque $v \in E$, le scalaire $\varphi(v)$ est une combinaison linéaire à coefficients fixes des coordonnées de v dans la base donnée.

ii) On reprend les notations du théorème précédent. Soient les matrices

$$M = (a_1 \quad \cdots \quad a_n) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{C} = (1)$ la base canonique de K. Alors, $M = [\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, la matrice MX est une matrice de taille 1×1 :

$$[\varphi(x)]^{\mathcal{C}} = MX = [\sum_{i=1}^{n} a_i x_i]$$

obtenu en faisant l'habituel produit ligne par colonne. En pratique, on identifie une matrice de taille 1×1 et son unique coefficient.

135 **Définition. Soit E un K-espace vectoriel , pas forcément de dimension finie, et soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un *hyperplan* de E si H admet un supplémentaire dans E qui est une droite vectorielle.**

136 **Remarque.** Si H est un hyperplan de E alors il existe une droite vectorielle D de E telle que $H \oplus D = E$, ce qui suppose en particulier que $\dim E \geq 1$. Par ailleurs, si H est un hyperplan de E, il n'existe pas nécessairement une unique droite D de E telle que $H \oplus D = E$.

137 **Théorème (*caractérisation d'un hyperplan par sa dimension*). Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors,**

$$H \textbf{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \dim H = n - 1.$$

138 **Théorème (*hyperplan et forme linéaire*). Soit E un K-espace vectoriel , pas nécessairement de dimension finie et soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors,**

$$H \textbf{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, \ker \varphi = H$$

139 **Théorème (*caractérisation analytique d'un hyperplan*). Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et soit H un hyperplan de E. Alors, il existe un n-uplet $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$ tel que**

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}.$$

La relation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est appelée *équation cartésienne* de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{B}$.

140 **Notation : *le Delta de Kronecker*. Soit I un ensemble et soit δ l'application**

$$\begin{array}{rccl} \delta : & I \times I & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (i,j) & \longmapsto & \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textbf{si } i = j \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases} \end{array}$$

On dit que cette application est le *Delta de Kronecker* sur l'ensemble I.

141 **Théorème et définition. Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Alors, il existe une unique famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ telle que**

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Cette famille est une base de E^* et est appelée la *base duale* de $\mathcal{B}$.

142 **Proposition. Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la forme linéaire e_i^* est définie par**

$$e_i^* : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ \sum_{j=1}^n x_j e_j & \longmapsto & x_i \end{array}$$

143 **Exemple.** Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ la base canonique de E. Notons (f, g) la base duale de $\mathcal{C}$. Alors, f et g sont définies par

$$f(x, y) = x \text{ et } g(x, y) = y$$

144 **Remarque importante.** On garde les notations de la définition ci-dessus. Soit φ la forme linéaire définie sur E par

$$[x]^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Notons $M := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$.
Soit $\mathcal{C} = (1)$ la base canonique de K. Assez singulièrement, on remarque que M est *aussi* la matrice de l'application linéaire $\varphi : E \to K$ dans la base $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{C}$.

Noter aussi que

$$[\varphi]^{\mathcal{B}^*} = {}^t M.$$

Par exemple, soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y \end{array}$$

Alors, dans la base (e_1^*, e_2^*) duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.

145 **Théorème (*base « préduale »*). Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une base de E^*. Alors, il existe une unique base $\overline{\mathcal{F}} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que $\overline{\mathcal{F}}^* = \mathcal{F}$. On dira que $\overline{\mathcal{F}}$ est la *préduale* de $\mathcal{F}$ (on dit parfois *antéduale*).**

2. Généralités sur les formes quadratiques

146 **Définition. On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E toute application $f : E \times E \longrightarrow K$ vérifiant les propriétés suivantes :**

- $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$ **(propriété de symétrie)**
- $\forall x, y, z \in E, f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
- $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in K, f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$

147 **Commentaires.**

i) Le terme de *forme* appliqué à f signifie que l'ensemble d'arrivée de f est le corps de base K.

ii) La linéarité à gauche est traduite par les deux dernières conditions. À cause de i), f est aussi linéaire à droite.

iii) Supposons f symétrique. Pour montrer la linéarité de f, le plus souvent, on procède comme suit : on *fixe* un vecteur $u \in E$ et on considère l'application partielle à gauche $\varphi : E \to K$ définie par $\varphi(x) = f(x, u)$ et on montre que cette application est une forme linéaire, ce qui est généralement facile. En particulier, si E est de dimension finie, une base étant fixée, on peut éventuellement montrer que $\varphi(x)$ est une combinaison linéaire à coefficients fixes des coordonnées de x dans la base.

148 **Exemples.**

- Supposons que $E = K^n$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. On définit $f : E \times E \longrightarrow K$ par
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
Alors, f est une forme bilinéaire symétrique sur E, dite *forme bilinéaire canonique* sur K^n.
- Un cas particulier du cas précédent est, tout simplement, le produit dans le corps $\mathbb{R}$. Autrement dit, l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $E = \mathbb{R}$.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = 2x_1y_1 - 5x_2y_2 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1$$
alors f est une forme bilinéaire symétrique sur $E = \mathbb{R}^2$.

  i) La symétrie provient de l'égalité des cœfficients de x_1y_2 et de x_2y_1.

  ii) La linéarité vient du fait que si on se donne (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ et qu'on considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(v) = f(v, (a, b))$ alors φ est linéaire. En effet, en posant, $v = (x_1, x_2)$, on a :
$$\varphi(x_1, x_2) = 2ax_1 - 5x_2b + 6x_1b + 6x_2a = (2a + 6b)x_1 + (6a - 5b)$$
Il apparaît alors que $\varphi(x_1, x_2)$ est la forme $\alpha x_1 + \beta x_2$ ce qui montre, d'après le résultat § $\boxed{133}$ ii) que φ est linéaire.

- Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. On définit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall f, g \in E, \varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

  Alors, f est une forme bilinéaire symétrique sur E.

- Le produit scalaire sur un espace euclidien est une forme bilinéaire symétrique particulière (définie positive) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\boxed{149}$ **Propriétés.**

i) L'ensemble, noté $\mathscr{L}_2(E)$, des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(X, K)$ pour l'ensemble $X = E \times E$.

ii) Si $f \in \mathscr{L}_2(E)$, si $a, b \in K$ et $x, y \in E$ alors $f(ax, by) = abf(x, y)$.

iii) Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $f \in \mathscr{L}_2(E)$. Alors, $f|_{F\times F} \in \mathscr{L}_2(F)$ autrement dit, la restriction d'une forme bilinéaire symétrique est encore une forme bilinéaire symétrique.

$\boxed{150}$ **Définitions.**

— **On appelle *forme quadratique* sur E toute application $q : E \longrightarrow K$ telle qu'il existe $f \in \mathscr{L}_2(E)$ vérifiant**

$$\forall x \in E, q(x) = f(x,x)$$

— **Soit $f \in \mathscr{L}_2(E)$. Alors, l'application $q : E \longrightarrow K$ telle que**

$$\forall x \in E, q(x) = f(x,x)$$

est appelée *forme quadratique associée* à f.

L'ensemble des formes quadratiques sur E est noté $Q(E)$.

$\boxed{151}$ **Exemples.**

- Soit f la forme bilinéaire canonique sur K^n. Alors, la forme quadratique q associée à f est définie par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n), q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

  dite forme *quadratique canonique* sur K^n.

- L'application $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $q(x) = x^2$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}$.
  Noter que cela explique l'origine du terme *quadratique* qui signifie *carré*, par allusion à l'aire d'un carré qui est le carré du côté.

- Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q(x,y) = 2x^2 - 5y^2 + 12xy.$$

  Alors q est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^2$

- Soit φ la forme bilinéaire symétrique définie sur $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ par

$$\forall f, g \in E, \varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

  La forme quadratique q associée à φ est définie par :

$$\forall f \in E, q(f) = \int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x$$

- Toute combinaison linéaire de carrés de formes linéaires est une forme quadratique.
- Si E est un espace euclidien alors l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, q(x) = \langle x, x\rangle$$

est une forme quadratique sur E.

152 **Proposition et définition.**

- $Q(E)$ est un K-espace vectoriel pour les lois usuelles sur $\mathscr{F}(E, K)$.
- Soit $q \in Q(E)$. Il existe une unique $f \in \mathscr{L}_2(E)$ telle que

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x)$$

autrement dit telle que q soit la forme quadratique associée à f. On dit que f est la *forme polaire* de q.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $q \in Q(E)$. Alors, $q|_F \in Q(F)$ autrement dit, la restriction d'une forme quadratique est encore une forme quadratique (et sa forme polaire est la restriction à $F \times F$ de la forme polaire de q).

153 **Polarisations.**

- Soit $q \in Q(E)$. Alors, la forme polaire f de q est définie par l'une des deux identités suivantes :
  (a) $\forall x, y \in E, f(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x + y) - q(x) - q(y)\right]$
  (b) $\forall x, y \in E, f(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x + y) - q(x - y)\right]$
  Ces deux identités sont appelées *identités de polarisation.*
- Pour montrer que $q : E \to K$ est une forme quadratique, on peut se contenter de montrer que l'un des deux applications $f : E \times E \to K$ définies ci-dessus est une forme bilinéaire. La symétrie est acquise vue la définition de f.

154 **Remarques.** On retient facilement ces identités si on connaît les identités suivantes sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ d'ailleurs) :

$$xy = \frac{1}{2}\left[(x + y)^2 - x^2 - y^2\right] \text{ et } xy = \frac{1}{4}\left[(x + y)^2 - (x - y)^2\right]$$

155 **Propriété d'homogénéité.** Soit $q \in Q(E)$. Alors

$$\forall a \in K, \forall x \in E, q(ax) = a^2 q(x)$$

156 **Propriété.** Soit $q \in Q(E)$, de forme polaire f. Soient $x, y \in E$. Alors

$$q(x + y) = q(x) + 2f(x, y) + q(y).$$

157 **Remarque.** L'identité précédente est à rapprocher de l'identité $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

158 **Vocabulaire.** Dans la suite, on dira que $f \in \mathscr{L}_2(E)$ et $q \in Q(E)$ sont des formes *associées* si f est la forme polaire de q ou encore si q est la forme quadratique associée à f.

3. Expression analytique d'une forme quadratique

Dans tout ce paragraphe, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On considère $f \in \mathscr{L}_2(E)$ et $q \in Q(E)$ des formes associées.

On note $\mathcal{S}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K)\ ;\ {}^tM = M\}$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans K. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$.

159 **Définition. On appelle matrice de q (ou aussi de f) dans $\mathcal{B}$ la matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par :**

$$M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

On posera $[f]^{\mathcal{B}} = M$ et de même, $[q]^{\mathcal{B}} = M$.

160 **Remarque.** Observer que les coefficients diagonaux de M sont les $q(e_i)$.

161 **Théorème. Si $x, y \in E$ et si $[f]^{\mathcal{B}} = M$ alors**

$$f(x, y) = {}^tXMY \textbf{ et } q(x) = {}^tXMX$$

où $[x]^{\mathcal{B}} = X$ et $[y]^{\mathcal{B}} = Y$.

162 **Propriété.** $[f]^{\mathcal{B}} = [q]^{\mathcal{B}} \in \mathcal{S}_n(K)$.

163 **Expression analytique d'une forme bilinéaire symétrique et matrice.**

- Soit $f \in \mathscr{L}_2(E)$ de matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{B}$. Soient $x, y \in E$, tels que $[x]^{\mathcal{B}} = X, [y]^{\mathcal{B}} = Y$ avec ${}^tX = (x_1 \ \ldots \ x_n)$, ${}^tY = (y_1 \ \ldots \ y_n)$. Alors, l'expression analytique de f est :

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i y_j$$

- Soit $M \in \mathcal{S}_n(K)$ et soit $f : E \times E \to K$ définie par

$$f(x, y) = {}^tXMY$$

où $X = [x]^{\mathcal{B}}$ et $Y = [y]^{\mathcal{B}}$. Alors $f \in \mathscr{L}_2(E)$ et $[f]^{\mathcal{B}} = M$.

164 **Exemple.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 5x_2y_2 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1$$

alors $f \in \mathscr{L}_2(E)$ et, si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ alors $[f]^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

165 **Expression analytique d'une forme quadratique et matrice.**

- Soit $q \in Q(E)$. Soient $x \in E$, tels que $[x]^{\mathcal{B}} = X$ avec ${}^tX = (x_1 \ \ldots \ x_n)$. Alors, il existe une unique suite de coefficients $(b_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ telle que l'expression analytique de q dans $\mathcal{B}$ soit :

$$q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{i,j} x_i x_j.$$

De plus, la matrice $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de q dans $\mathcal{B}$ est donnée par la règle dite du *dédoublement des termes* :

$$\begin{cases} a_{i,j} = b_{i,j} & \text{si } i = j \\ a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} b_{i,j} & \text{si } i < j \end{cases}$$

- Soit une application $q : E \to K$. On suppose qu'il existe une suite de coefficients $(b_{i,j})_{(1\leq i\leq j\leq n}$ telle que l'expression analytique de $q(x)$ dans $\mathcal{B}$ soit un polynôme 2-homogène en les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de x dans $\mathcal{B}$, autrement dit :

$$q(x) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} b_{i,j} x_i x_j.$$

Alors, $q \in Q(E)$ et sa matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est donnée par la règle du dédoublement des termes, cf. ci-dessus.

166 **Exemple.** Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q(x, y) = 2x^2 - 5y^2 + 12xy.$$

Alors, le résultat ci-dessus montre que q est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^2$. La matrice M de q dans la base canonique est obtenue en appliquant la règle du dédoublement des termes : $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

167 **Proposition.** $\dim_K(Q(E)) = \dim_K(\mathscr{L}_2(E)) = \dim_K \mathcal{S}_n(K) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

168 **Proposition : formule de changement de base. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Soit $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Soient $M = [f]^{\mathcal{B}}$ et $M' = [f]^{\mathcal{C}}$. Alors**

$$M' = {}^tPMP$$

169 **Définition. On appelle *rang* de f (ou aussi de q) le rang de n'importe quelle matrice représentant f (ou encore q) dans une base de E. Le rang de f est noté rg (f).**

4. Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, on se donne un couple de formes associées $q \in Q(E)$ et $f \in \mathscr{L}_2(E)$.

170 **Définition. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux* pour q (ou pour f) si $f(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$.**

171 **Définition. Soit A une partie de E (pas forcément un sous-espace vectoriel de E). On appelle *orthogonal* de A pour q (ou pour f) l'ensemble suivant**

$$A^{\perp} := \{x \in E \; ; \; \forall a \in A, x \perp a\}$$

172 **Propriétés.**

i) **Si $A \subseteq E$ alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.**

ii) $A^\perp = [\mathbf{vect}(A)]^\perp$

iii) $A \subseteq B \subseteq E \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

iv) $A \subseteq E \Rightarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$

173 **Remarque.** On utilisera couramment que si $F = \text{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ alors $F^\perp = \{e_1, \ldots, e_p\}^\perp$.

174 **Définition. Soient $A, B \subseteq E$. On dit que A et B sont *orthogonales* (et on note $A \perp B$) si**

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a \perp b$$

175 **Définitions. On appelle *radical* de E pour q (ou pour f) la partie $E^\perp$. On dit que q (ou encore f) est *non dégénérée* si $E^\perp = \{0_E\}$. Sinon, on dit que q (ou encore f) est *dégénérée*.**

176 **Vocabulaire et remarque.**

- On emploie aussi le terme de *noyau* d'une forme quadratique au lieu de *radical*.
- Soit $A \subseteq E$ une partie de E et N le noyau de q. Alors $N \subseteq A^\perp$. En effet, un vecteur du noyau est orthogonal à tout vecteur de E et donc, en particulier, à tout vecteur de A.

177 **Proposition. On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = [f]^{\mathcal{B}}$.**

i) **Soit $x \in E$ et soit $X = [x]^{\mathcal{B}}$. Alors, $x \in E^\perp$ si et seulement si $MX = 0_{n,1}$.**

ii) **f est non dégénérée si et seulement si $M \in \mathbf{GL}(E)$.**

178 **Proposition. On suppose que E est de dimension finie. Alors (*formule du rang*)**

$$\dim E^\perp + \mathbf{rg}\,(q) = \dim E.$$

179 **Proposition. On suppose que $\dim_K E < \infty$ et que f (ou q) est non dégénérée. Alors**

i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

ii) $F = F^{\perp\perp}$

180 **Remarque.** Même si E est de dimension finie et si f est non dégénérée, il n'est pas nécessaire que les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ soient supplémentaires dans E. Par exemple, si $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $q(x, y) = x^2 - y^2$ et si $F = \text{vect}(1, -1)$ alors $F^\perp = F$.

181 **Définitions. On appelle *cône isotrope* de f (ou de q) l'ensemble $C(q) := \{x \in E\ ;\ x \perp x\}$. On dit que $x \in E$ est *isotrope* si $x \in C(q)$. On dit que q (ou encore f) est *anisotrope* si $C(q) = \{0_E\}$.**

182 **Vocabulaire.** On emploie aussi le terme de *définie* au lieu de *anisotrope*.

183 **Proposition.**

i) Le radical est inclus dans le cône isotrope : $E^{\perp} \subset C(q)$

ii) Si f **est anisotrope alors** f **est non dégénérée.**

184 **Remarque.** Le cône isotrope n'est, en général, pas un sous-espace vectoriel de E. Toutefois, on a la propriété d'homogénéité suivante :

$$\forall x \in C(q), \forall a \in K, ax \in C(q).$$

185 **Définition. On dit qu'une famille** $(u_1, \ldots, u_m)$ **de** E **est une famille *orthogonale* si**

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$$

186 **Proposition. On appelle *base orthogonale* de** E **toute famille qui est à la fois une base de** E **et est une famille orthogonale de** E**.**

187 **Mise en garde.** Une famille orthogonale de n vecteurs de E n'est pas forcément libre. Par exemple, pour $E = \mathbb{R}^2$ et la forme quadratique définie par $q(x, y) = x^2$, si on pose $u = (0, 1)$ alors la famille (u, u) est orthogonale de E mais ce n'est pas une base de E, naturellement (elle est liée).

5. Décomposition d'une forme quadratique

Dans tout ce paragraphe, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0, \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. On considère $f \in \mathscr{L}_2(E)$ et $q \in Q(E)$ des formes associées.

188 **Théorème.** $[f]^{\mathcal{B}}$ **est diagonale si et seulement si** $\mathcal{B}$ **est une base orthogonale de** E**.**

189 **Théorème. On suppose que** $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ **est une base orthogonale de** E**. On note** $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \; ; \; q(e_i) \neq 0\}$**.**

- **La matrice de** q **dans** $\mathcal{B}$ **est la matrice diagonale** $D := \mathbf{diag}(q(e_1), q(e_2), \ldots, q(e_n))$**.**
- $\mathbf{rg}\,(q) = \mathbf{card}(I)$
- $E^{\perp} = \mathbf{vect}(\{e_i \; ; \; i \notin I\})$
- **La forme** q **est non dégénérée si et seulement si** $I = \{1, \ldots, n\}$
- **Soit** $\mathcal{B}^*$ **la base duale de** $\mathcal{B}$**. Alors, si** $x \in E$ **on a**

$$q(x) = \sum_{i \in I} q(e_i)[e_i^*(x)]^2$$

190 **Remarque.** Le théorème ci-dessus montre que q peut être décomposée en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Toute décomposition de ce type sera appelée *décomposition* de q. Trouver une décomposition de q ou trouver une base orthogonale de E pour q sont des problèmes équivalents.

191 **Théorème fondamental. Il existe des bases orthogonales pour f.**

192 **Exemple.** Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,3,1)$ est une base orthogonale de E. En effet, par exemple,

$$f(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(1, -1, 4)$. En effet, par exemple,

$$q(u_3) = f(u_3, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

193 **Théorème. Soit une famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ de E^*. Soit $q : E \to K$ une application. On suppose qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que**

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [\varphi_i(x)]^2$$

Alors, $q \in Q(E)$ et, si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont tous non nuls, q est de rang r.

194 **Remarque pratique très importante.** Une décomposition de q comme à la proposition précédente est souvent obtenue par application de la méthode de Gauss de réduction d'une forme quadratique. À partir d'une telle décomposition, on peut facilement obtenir une base orthogonale de E pour q. Pour cela, il suffit de compléter la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ en une base $\mathscr{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^*. Si $\mathcal{B}$ est la pré-duale de $\mathscr{F}$ alors $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E pour q. Voir les exercices pour la mise en œuvre pratique.

195 **Mise en garde.** On a vu que la recherche d'une base orthogonale est équivalente à la recherche d'une matrice diagonale représentant la forme quadratique. Pour autant, trouver une base orthogonale N'est PAS DU TOUT un exercice de diagonalisation classique d'une matrice. En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est la matrice de q dans une base donnée $\mathcal{B}$ de E alors

- diagonaliser A c'est trouver une matrice carrée inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que $P^{-1}AP =: D$ soit diagonale
- trouver une BOG de q revient à trouver une matrice carrée inversible $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que ${}^tPAP =: D$ soit diagonale

et, il n'y aucune raison a priori qu'une des actions ci-dessus permette de réaliser l'autre.

196 **BOG pour une forme quadratique réelle.** Dans ce paragraphe, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, toujours de dimension n. Soit $\mathcal{C}$ une base E et soit $A = [f]^{\mathcal{C}}$. Comme A

est une matrice symétrique *réelle*, on sait d'après le théorème spectral, qu'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que la matrice

$$P^{-1}AP =: D \quad (1)$$

soit diagonale. Mais comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = {}^tP$ et donc

$${}^tPAP = D \quad (2)$$

qui ressemble à la formule de changement de base pour une forme quadratique, cf. § $\boxed{168}$, comme on va le préciser maintenant.

Comme P est inversible, on peut écrire que $P = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à une certaine base $\mathcal{B}$ de E. Dans ces conditions, l'égalité (2) montre que la matrice de la forme quadratique q dans la «nouvelle» base $\mathcal{B}$ est D et donc que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale pour q, puisque D est diagonale.

Donc dans le cas d'une forme quadratique réelle q, rechercher une BOG pour q est donc équivalent à diagonaliser une matrice symétrique réelle A dans le groupe orthogonal (au sens du théorème spectral).

Désignons par $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Nous savons que cette diagonalisation s'organise de la manière suivante :

— calculer le polynôme caractéristique P de A,
— déterminer toutes les racines λ de P (qui sont forcément toutes réelles)
— pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ trouvée, chercher une base $\mathcal{B}_\lambda$ du sous-espase propre correspondant E_λ de f,
— orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ
— réunir les bases trouvées pour écrire la matrice P.

Il apparaît donc que ce résultat a essentiellement une *valeur théorique*. Si on ne prend rien qu'une matrice symétrique réelle d'ordre 3, il sera très compliqué en pratique de calculer ses valeurs propres. La méthode de Gauss (exposée ci-dessous) est un procédé infaillible et simple pour trouver une BOG d'une forme quadratique (réelle ou pas).

6. La méthode de Gauss

$\boxed{\textbf{197}}$ **Présentation.** La méthode de Gauss est un algorithme permettant d'obtenir une décomposition d'une forme quadratique q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Il importe d'appliquer à la lettre l'algorithme pour obtenir des formes linéaires *indépendantes*.

L'algorithme s'applique en dimension finie à une forme quadratique connue par son expression analytique dans une base donnée. L'algorithme transforme l'expression d'une forme quadratique en appliquant des transformations élémentaires, décrites ci-dessous, ce qui permet d'appliquer ensuite l'algorithme à une sous-expression de la forme quadratique.

$\boxed{198}$ **Primitives de l'algorithme.**

i) $A^2 + 2AB = (A+B)^2 - B^2$

ii) $AB = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2$

iii) $XY + AX + BY = (X+B)(Y+A) - AB$

$\boxed{199}$ **Exécution de l'algorithme.** Soit une forme quadratique ou, plutôt, un polynôme 2-homogène en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On suppose $n \geq 2$ sinon la décomposition est acquise. On distingue deux cas :

i) q a au moins un terme carré, ie du type ax_i^2 avec $a \neq 0_K$; dans ce cas, seule la primitive numéro 1 interviendra en début d'algorithme

ii) q n'a que des termes non-carrés ie que des termes de la forme ax_ix_j avec $i \neq j$. Dans ce cas, seules les primitives numéros 2 et 3 interviendront en début d'algorithme.

$\boxed{200}$ **1er cas : q a un terme carré.** Par exemple, supposons que $n = 3$ et que

$$q(u) = 2xy + 4y^2 + 3z^2 + 2xz + 6yz$$

en posant $u = (x, y, z)$. On observe que bien que q n'admette pas de terme carré en x, la forme quadratique q admet, par exemple, un terme carré en y.

- La première étape est d'abord de placer tous les termes de q contenant y « au début » et d'écrire q sous la forme :
$$q(u) = ay^2 + yA + B$$
où A est une forme linéaire et B est un polynôme 2-homogènes en les variables x et z (toutes sauf y) et $a = 4$. Ici, on obtient :
$$q(u) = 4y^2 + y(2x + 6z) + (3z^2 + 2xz).$$
- Ensuite, par un procédé analogue à la recherche de la forme canonique d'un trinôme du second degré, on factorise par a toute la partie de $q(u)$ contenant y, ce qui donne
$$q(u) = 4\left(y^2 + y\frac{x+3z}{2}\right) + (3z^2 + 2xz)$$
Ensuite, on transforme l'expression mise en facteur
$$y^2 + y\frac{x+3z}{2}$$
en appliquant la primitive numéro 1, ce qui donne ici :
$$y^2 + y\frac{x+3z}{2} = y^2 + 2y\frac{x+3z}{4} = \left(y + \frac{x+3z}{4}\right)^2 - \left(\frac{x+3z}{4}\right)^2$$
d'où
$$q(u) = 4\left(y + \frac{x+3z}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{x+3z}{4}\right)^2 + (3z^2 + 2xz).$$

- On regroupe la forme quadratique contenant y et le reste qui est une forme quadratique utilisant seulement x et z. Ici, on obtient, tous calculs faits

$$q(u) = 4\left(y + \frac{x+3z}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz + \frac{3}{4}z^2.$$

- L'algorithme a mis en évidence le carré d'une forme linéaire, ici

$$\varphi_1(u) = y + \frac{x+3z}{4}$$

et une forme quadratique r sur deux variables x et z, plus précisément

$$r(x,z) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz + \frac{3}{4}z^2$$

φ_1 est la première des formes linéaires cherchées. Les autres seront obtenues en appliquant l'algorithme à la forme quadratique r ayant strictement moins de variables que q.

201 **2ème cas : q est sans terme carré.** En fait on suppose en outre que q est non nulle, sinon l'algorithme est terminé. Par exemple, supposons que $n = 5$ et que

$$q(u) = 2x_2x_5 - 3x_3x_4 - x_1x_3 + 5x_2x_3 + 3x_2x_1 - 7x_4x_5$$

en posant $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. On choisit alors un terme, par exemple $2x_2x_5$. Ce terme contient les variables x_2 et x_5.

- On regroupe au début de $q(u)$ tous les termes contenant x_2 ou x_5, ce qui donne

$$q(u) = (2x_2x_5 + 5x_2x_3 + 3x_2x_1 - 7x_4x_5) + (-3x_3x_4 - x_1x_3)$$

Posons $Q_1 = 2x_2x_5 + 5x_2x_3 + 3x_2x_1 - 7x_4x_5$ et $Q_2 = -3x_3x_4 - x_1x_3$ en sorte que $q(u) = Q_1 + Q_2$. La forme quadratique Q_1 utilise les variables x_2 et x_5. La forme quadratique Q_2 n'utilise que des variables différentes de x_2 et x_5.

- On transforme Q_1 pour pouvoir appliquer la primitive numéro 3 :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2x_2x_5 + x_2(5x_3 + 3x_1) + x_5(-7x_4) \\ &= 2\left(x_2x_5 + x_2\left(\frac{5x_3+3x_1}{2}\right) + x_5\left(\frac{-7x_4}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(x_2 - \frac{7}{2}x_4\right)\left(x_5 + \frac{5x_3+3x_1}{2}\right) - 2\left(-\frac{7}{2}x_4\right)\left(\frac{5x_3+3x_1}{2}\right) \end{aligned}$$

Posons $A = x_2 - \frac{7}{2}x_4$ et $B = x_5 + \frac{5x_3+3x_1}{2}$ et $C = -2\left(-\frac{7}{2}x_4\right)\left(\frac{5x_3+3x_1}{2}\right)$ en sorte que $Q_1 = 2AB + C$.

- On transforme AB en appliquant la primitive numéro 2 :

$$AB = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2$$

en sorte que

$$Q_1 = \frac{1}{2}(A+B)^2 - \frac{1}{2}(A-B)^2 + C$$

Ainsi,

$$q(u) = \frac{1}{2}(A+B)^2 - \frac{1}{2}(A-B)^2 + C + Q_2$$

- L'algorithme a mis en évidence la combinaison linéaire de carrés des formes linéaires $A+B$ et $A-B$ qui sont indépendantes et une forme quadratique $r = C + Q_2$ sur trois variables x_1, x_3 et x_4.

- Les formes linéaires $A+B$ et $A-B$ sont les deux premières formes linéaires cherchées. Les autres seront obtenues en appliquant l'algorithme à la forme quadratique r ayant strictement moins de variables que q.

7. Les formes quadratiques réelles

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On se donne un couple de formes associées $q \in Q(E)$ et $f \in \mathscr{L}_2(E)$.

202 **Rappel.** Une forme quadratique q est dite *définie* (ou encore anisotrope) si 0_E est son vecteur isotrope, ie l'unique vecteur $u \in E$ tel que $q(u) = 0$. La définition ci-dessous fait référence à ce terme.

203 **Définitions. Le vocabulaire qui suit s'applique autant à f qu'à q.**

- **On dit que q est *positive* si :** $\forall x \in E, q(x) \geq 0$.
- **On dit que q est *négative* si :** $\forall x \in E, q(x) \leq 0$.
- **On dit que q est *définie-positive* si :** $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, q(x) > 0$. **Si q définie-positive, on dit aussi que f est un *produit scalaire* sur E.**
- **On dit que q est *définie-négative* si :** $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, q(x) < 0$.

204 **Précision.** Le vocabulaire peut être trompeur : quand on dit qu'une forme bilinéaire symétrique f est positive cela ne veut pas dire que

$$\forall x, y \in E, f(x, y) \geq 0$$

au contraire !

205 **Exemple.** La forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 2x^2$ est positive mais n'est pas définie-positive puisque, par exemple, $q(0, 1) = 0$ et $(0, 1) \neq (0, 0)$.

206 **Exemple.** La forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = 2x^2 - y^2$ n'est ni positive ni négative puisque $q(1, 1) > 0$ et $q(0, 1) < 0$.

207 **Remarques.**

- Si q est définie-positive ou définie-négative alors q est anisotrope (son cône isotrope est réduit à 0_E).
- Si q est définie-positive alors q est positive.
- Si q est positive alors $-q$ est négative.
- Si q est positive alors la restriction de q à tout sous-espace vectoriel F de E est une forme quadratique positive sur F.

- La restriction de q au sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est à la fois définie-positive et définie-négative.

208 **Caractérisation d'un produit scalaire.** f est un produit scalaire sur E si et seulement si f est positive non dégénérée.

209 **Définition. On suppose E de dimension finie. On appelle *signature* de q le couple d'entiers naturels $\varepsilon(q) := (s, t)$ où s et t sont définis ci-dessous :**

- $s = \max(\{\dim F \ ; \ q|_F$ **définie-positive**$\})$
- $t = \max(\{\dim G \ ; \ q|_G$ **définie-négative**$\})$

210 **Théorème *(loi d'inertie de Sylvester).* Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E. Soit $\varepsilon(q) := (s, t)$ la signature de q. Alors, s est le nombre de vecteurs v de $\mathcal{B}$ tel que $q(v) > 0$ et t est le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$ tel que $q(v) < 0$.**

211 **Corollaire. Soit $\varepsilon(q) := (s, t)$ la signature de q. Alors,**

i) q **est positive si et seulement si** $t = 0$ **;**

ii) q **est négative si et seulement si** $s = 0$ **;**

iii) q **est définie-positive si et seulement si** $t = 0$ **et** $s = n$ **;**

iv) q **est définie-négative si et seulement si** $t = n$ **et** $s = 0$ **;**

v) q **est non-dégénérée si et seulement si** $s + t = n$ **;**

212 **Loi d'inertie.** C'est Sylvester lui-même qui, en 1852, qualifie le théorème ci-dessus de *loi d'inertie*. Selon lui, cela exprime que, *quelle que soit la base orthogonale*, le nombre de termes strictement positifs sur la diagonale est toujours le même, le nombre de termes strictement négatifs aussi.

La signature est un *invariant* d'une forme quadratique réelle. Autrement dit, deux formes quadratiques réelles de même signature ont exactement la même forme analytique dans des bases adaptées. Ou encore, si deux formes quadratiques réelles q_1 et q_2 ont même signature, il est possible de trouver une base $\mathscr{B}'$ (pas forcément orthogonale) telle que l'expression analytique de q_2 soit la même que celle de q_1 dans une base donnée $\mathscr{B}$ de E.

Exercices

Exercice 1

On pose $E = \mathbb{R}^2$ et on appelle $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient les vecteurs de E suivants :

$$e_1 = (5, -2),\ e_2 = (1, -1).$$

On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
2. Déterminer la base duale de $\mathscr{B}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{C}^*$ de E^*.
3. On considère la forme linéaire h sur E définie par

$$h : (x, y) \longmapsto h(x, y) = 3x - 2y.$$

   a. Quelles sont les coordonnées de h dans la base duale de $\mathscr{C}$?
   b. Quelles sont les coordonnées de h dans la base duale de $\mathscr{B}$?

4. On considère la forme linéaire $g \in E^*$ de coordonnées $(-4, 2)$ dans la base duale de $\mathscr{B}$. Pour $(x, y) \in E$, calculer $g(x, y)$.

Exercice 2

On pose ici $E = \mathbb{R}^2$. Soient les formes linéaires f_1 et f_2 définies par :

$$f_1(x, y) = 3x + 2y \quad f_2(x, y) = x + y.$$

Vérifier que la famille $\mathscr{F} = (f_1, f_2)$ est une base de E^* et trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dont la duale soit $\mathscr{F}$.

Exercice 3

Soient deux formes linéaires f et g non nulles sur un K-espace vectoriel E, pas forcément de dimension finie. On suppose qu'elles ont même noyau. Montrer qu'elles sont proportionnelles i.e. qu'il existe un scalaire k tel que $g = kf$.

Exercice 4

Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x, y) = x^2 - y^2$$

est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

Exercice 5

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère la forme quadratique q définie sur E par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz + 6yz.$$

1. Donner la matrice M de q dans la base $\mathcal{B}$.
2. Expliciter dans $\mathcal{B}$ la forme polaire f de q.
3. Déterminer l'orthogonal du plan d'équation cartésienne $y = z$.
4. a. Déterminer le rang de q puis le radical de q.
   b. La forme quadratique q est-elle dégénérée ?
5. Expliciter une base $\mathcal{B}'$ de E orthogonale au sens de q. Donner la matrice de q dans cette base. On présentera deux méthodes :

  a) en utilisant la question 3 et la question 4a ;
  b) en appliquant l'algorithme de Gauss.

6) Calculer la signature de q.
7) Expliciter un vecteur isotrope v de q tel que $v \neq 0_E$.

Exercice 6

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ usuel et soit $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit q la forme quadratique sur E de matrice suivante A dans la base canonique $\mathscr{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Pour $v = (x, y, z) \in E$, expliciter $q(v)$.
2) a) Montrer que q est dégénérée.
   b) Déterminer une base du noyau N de la forme quadratique q.
3) a) Déterminer par la méthode de Gauss une décomposition de $q(x, y, z)$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
   b) En déduire une base $\mathcal{F}$ de E orthogonale pour q et donner la matrice de q dans $\mathcal{F}$.
4) *Cette question est indépendante de la précédente.*
   Soit $u = (1, 0, 1)$.
   a) Soit $F = u^{\perp}$. Donner, sans calcul, un vecteur non nul de F.
   b) Déterminer une équation cartésienne de F et vérifier la cohérence de votre réponse et celle de la question a).
   c) En déduire, en justifiant, une base $\mathcal{B}$ de E orthogonale pour q (on utilisera la question 2b).
5) Vous pourrez utiliser pour la suite la base orthogonale $\mathcal{B} = (u, (1, -4, 0), (2, -1, -1))$, cf. question précédente, et que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.
   a) Ecrire la matrice B de q dans la base $\mathcal{B}$.
   b) Donner la signature de q.
   c) Ecrire une égalité matricielle portant sur A et B traduisant que ce sont des matrices représentant q.
   d) Déduire des questions précédentes une décomposition de $q(x, y, z)$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes et vérifiez en comparant avec la réponse à la question 1.
6) *Cette question est indépendante des précédentes.*
   a) Réduire la matrice A dans le groupe orthogonal, autrement dit trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale (et à déterminer).
   b) En déduire une décomposition de $q(x, y, z)$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On justifiera le lien avec la question a).
   c) Retrouver la signature de q.

Exercice 7

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. a. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
   b. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.
   c. La forme q est-elle positive, négative ?
2. Soit $P := X^2 + X + 1$ et V =vect(P). Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.
3. Déterminer le rang de q puis son radical.
4. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et constuire une base de E formée de vecteurs isotropes. $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
5. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

Exercice 8

Soit K un corps parmi $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel non réduit à 0_E et soit q une forme quadratique sur E.

1. Montrer que q n'est pas injective.
2. On suppose $K = \mathbb{C}$. Montrer que si q est non nulle alors q est surjective.
3. On suppose $K = \mathbb{R}$ et E de dimension finie. Montrer que q est surjective si et seulement si q est de signature (s, t) avec $st \neq 0$.

Exercice 9

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ dans le groupe orthogonal.
2. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale, déterminer la signature de q et une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 10

Déterminer la signature de la forme quadratique

$$q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y - z)^2 - (3x - y + 2z)^2 + (5y - 7z)^2 .$$

Trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ (ne pas tout développer mais plutôt introduire les 3 formes linéaires qui sont élevées au carré).

Exercice 11

Décomposer en carrés la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$q(x, y, z, t) = xy + zt - yz - xt + xz.$$

Exercice 12

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension n. On suppose que q est de rang r. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de q dans $\mathcal{B}$ soit la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ où I_r désigne la matrice-identité d'ordre r.

Exercice 13

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 4. On suppose qu'il existe une partie L de E égale à son orthogonal pour q.

1. Montrer que L est un plan vectoriel et que q est non définie.
2. Soit (e_1, e_2) une base de L. On pose H_1 =vect$(e_1)^\perp$ et H_2 =vect$(e_2)^\perp$.
   a. Montrer qu'il existe $e_3, e_4 \in E$ tels que (e_1, e_2, e_3) soit une base de H_1 et (e_1, e_2, e_4) une base de H_2.

(b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E (indication : supposer que $e_4 \in H_1$, en déduire que $H_1 = H_2$ puis obtenir une contradiction).

(c) Déterminer la matrice M de q dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\det(M) > 0$ et en déduire la signature de q.

Exercice 14

Soit $q \in Q(E)$ où E est un K-espace vectoriel de dimension finie et soit M sa matrice dans une base donnée $\mathscr{B}$. Soit F un sous-espace de E et soit r la restriction de q à F

(1) Montrer que la forme polaire de r est l'application $g : (x, y) \in F \times F \mapsto f(x, y) \in K$ où f est la forme polaire de q.

(2) Soit $\mathscr{F}$ une base de F et soit P la matrice dont les vecteurs-colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{B}$. Montrer que la matrice N de r dans $\mathscr{F}$ est ${}^tPMP$.

Exercice 15

Soit la forme quadratique réelle q définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$$

(1) Quelle est la matrice M de q dans la base canonique ?

(2) Trouver une CNS en fonction de r, s et t ainsi qu'en fonction de $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$ pour chacune des situations suivantes :

- la forme q est positive non dégénérée ;
- la forme q est négative non dégénérée ;
- la forme q n'est ni positive ni négative.

Exercice 16

Décomposer en carrés la forme quadratique q définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$q(x, y, z) = (1 - i)\ x^2 + 2\,(1 - i)\ y^2 + (i + 1)\ z^2 + 4\,(1 - i)\ xy + 4\,xz + 4\,yz$$

Exercice 17

Soit E un K-espace vectoriel et soit f une forme linéaire sur E *non nulle.*

(1) On suppose E de dimension finie n.

(a) Montrer que $n > 0$.

(b) On suppose $n = 1$. Montrer que f est bijective.

(c) On suppose que $n > 1$. Montrer que

- f n'est pas injective,
- f est surjective.

(2) On ne suppose plus E de dimension finie.

(a) Montrer que f est surjective.

(b) On suppose que E n'est ni $\{0_E\}$ ni une droite vectorielle. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 18

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(a). \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi_a \in E^*$.
2. Montrer que la famille $(\varphi_{-1}, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^*.
3. Expliciter la base (P, Q, R) de E dont la duale soit la famille $(\varphi_{-1}, \varphi_2, \varphi_3)$.
4. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ (qu'on ne demande pas d'expliciter) tels que
$$\forall P \in E, \int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = aP(-1) + bP(2) + cP(3).$$

Exercice 19

On souhaite montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq (x+y)(z+t)$$

Pour cela, on introduit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^4$ et définie par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - (x+y)(z+t)$$

Les deux questions sont indépendantes et proposent chacune une preuve.

1. En appliquant la méthode de Gauss de réduction d'une forme quadratique, montrer le résultat annoncé.
2. Soit M la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   a. En déterminant le spectre de M, montrer le résultat annoncé.
   b. On veut montrer que le résultat pouvait aussi s'obtenir par application de l'identité remarquable $(a+b+c+d)^2$. Pour cela, diagonaliser la matrice M dans le groupe orthogonal, écrire l'expression de q dans la base orthonormale obtenue par diagonalisation et en déduire une identité qui montrait directement l'inégalité annoncée.