Examen de seconde session – MAG303

Les exercices sont indépendants. Tout matériel électronique est interdit.

Exercice 1 Soit $n \geq 3$ un entier. On considère les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \tau := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les interprétations géométriques de σ et τ ?
2. Déterminer l'ordre de σ et de τ.
3. Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.

   On pose maintenant $G := \langle \sigma, \tau \rangle$, $H := \langle \sigma \rangle$ et $K := \langle \tau \rangle$.
4. Déterminer l'ordre de G, de H et de K.
5. Le sous-groupe H de G est-il distingué ? Si oui, décrire le groupe G/H.
6. Le sous-groupe K de G est-il distingué ? Si oui, décrire le groupe G/K.

   On pose maintenant $K' := \{g \in G \ : \ \det(g) = 1\}$.
7. Montrer que K' est un sous-groupe de G et que $K = K'$.

   Rappelons que le groupe dérivé $D(G)$ de G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, i.e.
   $$D(G) := \langle ghg^{-1}h^{-1}, \ : \ g, h \in G \rangle.$$
8. Si n est impair, montrer que $D(G) = K$.
9. Si n est pair, montrer que $D(G) = \langle \tau^2 \rangle$ est d'indice 2 dans K, puis que $G/D(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Soit $G \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'action linéaire de G usuelle.
10. L'action est-elle transitive ? Est-elle fidèle ?
11. Détetminer les points fixes de cette action.
12. Déterminer le stabilisateur et l'orbite du vecteur $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
13. Déterminer le stabilisateur du couple $\{x_0, -x_0\}$.

Exercice 2 Soit G un groupe fini non-abélien. Supposons que tout sous-groupe strict de G est abélien. On veut montrer que G n'est pas simple, c'est-à-dire que G admet un sous-groupe distingué distinct de G et $\{1\}$.

1. Soit G_1 un groupe simple. Si H et K sont deux sous-groupes maximaux pour l'inclusion distincts de G_1, tous deux abéliens, monter que $K \cap H = \{1\}$.
2. Soient G_1 un groupe fini simple et H un sous-groupe maximal de G_1 distinct de G_1. Supposons que H est abélien. En utilisant la question précédente, montrer que
$$\left| \bigcup_{g \in G_1} gHg^{-1} \right| = |G_1| + 1 - \frac{|G_1|}{|H|}.$$
3. Soit G un groupe qui n'a pas de sous-groupe strict non-trivial. Montrer que G est cyclique de cardinal premier, et qu'en particulier, il est abélien.
4. Conclure.

Exercice 3 (Groupes d'ordre 12) Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Soit $p : H \times K \to G$ l'application définie pour $(h, k) \in H \times K$ par $p(h, k) = hk$.

1. Supposons que $H \cap K = \{1\}$. Montrer que p est injective.
2. Montrer que si H est distingué ou si K est distingué, alors l'image HK de p est le sous-groupe de G engendré par H et K.
   (*Indication : On pourra commencer par montrer que* $HK = KH$)

On suppose maintenant que G est un groupe d'ordre 12.

3. Combien G peut-il avoir de $3-$Sylow et de $2-$Sylow ?
4. Montrer que
   — les 3-Sylow sont cycliques isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,
   — les 2-Sylow sont soit cycliques isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit isomorphes à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Soient H un 2-Sylow de G et K un 3-Sylow de G. Montrer que soit H est distingué, soit K est distingué.
6. Déterminer G si H et K sont tous les deux distingués.
7. Supposons que H est distingué et que K ne l'est pas. Montrer que G est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.