Feuille d'exercices n°4

Exercice I

On considère plusieurs applications $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

a. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$;
b. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$;
c. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + x_1 y_2$;
d. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$;
e. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2$.

(1) Lesquelles définissent une forme bilinéaire ?
(2) Parmi les formes bilinéaires, lesquelles sont symétriques ? antisymétriques ?
(3) Pour les formes bilinéaires, écrire la matrice de φ dans la base canonique, ainsi que la forme quadratique correspondante.

Exercice II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
(1) Déterminer l'expression de φ.
(2) Soit $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$ la base de $\mathbf{R}^2$ définie par $e_1' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $e_2' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Déterminer l'expression de φ *en fonction des coordonnées dans la base* $\mathscr{B}'$ ainsi que la matrice A' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice III

On considère l'application la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_2 y_1 + \frac{3}{2} x_1 y_2 - x_2 y_2$.
(1) Déterminer deux formes bilinéaires φ_1 et φ_2 telles que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec φ_1 symétrique et φ_2 antisymétrique.
(2) Déterminer les matrices de φ, φ_1 et φ_2 dans la base canonique.

Exercice IV

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On note $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique. Représenter graphiquement les sous-espaces $\ker f$, $\ker f^\star$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} f^\star$.

Exercice V

(1) Parmi les applications $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définies ci-dessous, lesquelles sont des formes quadratiques ?

a. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_1 x_2 + 6x_2^2$;
b. $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 + 3x_2 + 6x_2^2$;
c. $q(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 x_2 + 4x_2^2$;
d. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$;
e. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 3x_2^2 + x_2 x_3 + 7x_3^2$;
f. $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 x_2$;
g. $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1 x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 x_3 + x_3^2 + 2x_2 x_3$.

(2) Pour chacune des formes quadratiques identifiées à la question (1), déterminer sa forme bilinéaire symétrique associée, sa matrice dans base canonique, son rang.
(3) Déterminer la signature des formes quadratiques identifiées à la question (1). *(Dans un premier temps, ne pas traiter cette dernière question : y revenir quand la réduction de Gauss aura été vue en cours.)*

Exercice VI

Soit $q : E \to \mathbf{R}$ une forme quadratique réelle. On note $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée.
(1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in E$, $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.
(2) Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $q(u + v) = q(u) + q(v) + 2\varphi(x, y)$.
(3) Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \frac{1}{4}\left(q(u + v) - q(u - v)\right)$.
(4) Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(q(u + v) + q(u - v) = 2(q(u) + q(v))$.

Exercice VII

Déterminer la signature de la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$.

Exercice VIII

On munit $\mathbf{R}^2$ du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $5(x^2+y^2)+6xy=16$.
(1) Réduire la forme quadratique apparaissant dans le membre de gauche de l'équation dans une base orthonormale.
(2) Déterminer les caractéristiques géométriques de $\mathscr{C}$.
(3) Déterminer les valeurs minimales et maximales prises par la restriction de la fonction $(x,y) \longmapsto 5(x^2+y^2)+6xy$ sur le cercle d'équation $x^2+y^2=1$.

Exercice IX

Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $q(x,y)=x^2-y^2$. Existe-t-il un système de coordonnées (x',y') (*i.e.* x' et y' sont les fonctions coordonnées dans une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ bien choisie) telle que l'expression de q devienne :

a. $q=2x'^2+\frac{1}{4}y'^2$;
b. $q=2x'^2-\frac{1}{4}y'^2$;
c. $q=-2x'^2+\frac{1}{4}y'^2$;
d. $q=x'y'$;
e. $q=x'^2$;

Exercice X

Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$. Montrer que la forme quadratique réelle $q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ est définie positive si et seulement si $a>0$ et $b^2-4ac<0$.

Exercice XI

Soit E un espace euclidien. Soit $a\in E$ tel que $\|a\|=1$. Soit $\lambda\in\mathbf{R}$. On définit $q : E\to\mathbf{R}$ par la formule $q(x)=\lambda\|x\|^2-\langle x,a\rangle^2$.
(1) Vérifier que q est une forme quadratique sur E.
(2) Justifier que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $u+ta$ avec $u\in a^\perp$ et $t\in\mathbf{R}$. Calculer $q(u+ta)$.
(3) Notons $\varphi : E\times E\to\mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée à q. Calculer $\varphi(u+ta,u'+t'a)$ où u et u' sont des éléments de $a^\perp$, et t et t' des réels.
(4) On suppose que $\dim E\geq 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur λ est-ce que q est définie positive ?

Exercice XII

Décrire les courbes déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^2$:

a. $5x^2+6xy+5y^2=8$;
b. $3x^2-2xy-3y^2=1$;
c. $3xy=1$;

Exercice XIII

Décrire les surfaces déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^3$:

a. $x+y+z=3$;
b. $x^2+y^2+z^2=1$;
c. $x^2+y^2=1$;
d. $x^2+y^2-z^2=0$;
e. $x^2+y^2-z^2=1$.

Exercice XIV

On considère la forme quadratique $q(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$ sur $\mathbf{R}^3$. Soit A la matrice de q dans la base canonique.
(1) Déterminer A.
(2) On pose $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Calculer AU, AV, AW.
(3) Quelle est la signature de q ?
(4) Déterminer la matrice de q dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ (correspondant aux vecteurs-colonnes U, V, W).
(5) Déterminer $q(x'\vec{u}+y'\vec{v}+z'\vec{w})$ en fonction des réels x', y' et z'.
(6) Appliquer la réduction de Gauss à la forme quadratique q.
(7) Quelle est la nature géométrique du cône isotrope de q ?