Mathématiques
Université Paris-Saclay

Feuille de TD 1

MEU353
2023-2024

Rappels de Topologie

Exercice 1. Convergence dans $\mathbb{R}^2$. On considère $\mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne. Donc si $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$, $\mathrm{dist}(X, X') = \sqrt{|x - x'|^2 + |y - y'|^2}$.
On se donne une suite $\{X_k\}$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $X_k = (x_k, y_k)$ pour $k \geq 0$, et un point $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Démonter que $\lim_{k\to+\infty} X_k = X$ (dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne) si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$ et $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$.

Exercice 2. Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ Rappelons la définition des normes usuelles sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, comme applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$: pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \\
\|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n|, \\
\|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},
\end{aligned}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que ces trois normes sont équivalentes.
3. Donner les trois distances dans l'ensemble $\mathbb{R}^n$ induites par les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On notera ces distances d_∞, d_1 et d_2.
4. Dessiner deux points distincts dans $\mathbb{R}^2$ et représenter leur distance au sens de d_1, d_2 et d_∞.
5. Dans $\mathbb{R}^2$, représenter les boules fermées $\overline{B}_{d_1}(0, 1)$, $\overline{B}_{d_2}(0, 1)$ et $\overline{B}_{d_\infty}(0, 1)$.

Exercice 3. Représentation des formes linéaires. Notons $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que L est linéaire *si et seulement si* il existe un vecteur v dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L(x) = (v|x)$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Quelle est alors, dans la question ci-dessus, la norme de L?

Exercice 4. Exemples concrets. Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, x^3) \,:\, x < 1\}, \\
B &= \{(n, \frac{1}{n+1}) \,:\, n \in \mathbb{N}\}, \\
C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2,\ y > x + 1\}.
\end{aligned}$$

1. Représenter dans le plan chacun de ces ensembles.
2. Lesquels de ces ensembles sont fermés? ouverts?
3. Déterminer leur intérieur, leur frontière et leur adhérence.
4. Lesquels de ces ensembles sont compacts ?

Exercice 5. Graphes. On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on note $G_f \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f.

1. Rappeler la définition de G_f.

   Solution : $G_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^2$

2. Montrer que G_f est fermé si f est continue.

   Solution : Supposons f continue, montrons que G_f est fermé, utilisons la caractérisation séquentielle des fermés : Soit donc (x_n, y_n) une suite de G_f qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $(x, y) \in G_f$. On a donc $(x_n, y_n)_n \in G_f$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a donc $y_n = f(x_n)$, donc $f(x_n) \to y$ quand $n \to +\infty$ et comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$, donc par unicité de a limite on a $f(x) = y \Rightarrow (x, y) \in G_f$.

3. La réciproque est-elle vraie?

   Solution : faux, pourquoi ??

Exercice 6. Limites. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(\frac{y^2}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

1. Montrer que f admet la même limite selon toutes les directions en $(0, 0)$ mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. Montrer que les fonctions suivantes, notées g et h, sont continues au point $(0, 0)$.

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} (x-y)\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 7. Exemples de distances

1. Rappeler la définition d'une norme et d'une distance. Vérifier que toute norme sur un espace vectoriel E définit une distance sur $E \times E$. La suite donne des exemples de distances qui ne viennent pas directement de normes.

2. Vérifier que les applications suivantes sont bien des distances.

$$\begin{aligned} d_1 &: \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \min(1, |x-y|)\,, \\ d_2 &: \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \sqrt{|x-y|} \ \ \text{(et que se passse-t-il avec } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto |x-y|^2\text{?)}\,, \\ d_3 &: \ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{|x_1-y_1|} + \min(1, |x_2-y_2|)\,. \end{aligned}$$

3. Vérifier que les ouverts pour la distance d_1 et d_2 (resp. d_3) sont les mêmes que les ouverts pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

Exercice 8. Produit d'espaces métriques I

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques.

1. Proposer (au moins) une distance d sur l'espace produit $E_1 \times E_2$.

   Solution : On a par exemple pour $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in (E_1, d_1) \times (E_2, d_2)$ la distance définie comme le max des distance sur chacuns des espaces métriques : $\max\big(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big)$, on peut faire de même pour les deux autres distances classiques.

2. Montrer que pour toute suite $(x_k, y_k) \in (E_1 \times E_2)^{\mathbb{N}}$, et pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$,

$$(x_k, y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (x,y) \text{ dans } (E_1 \times E_2, d) \quad \textit{ssi} \quad x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ dans } (E_1, d_1)\,, \text{ et } y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ dans } (E_2, d_2)\,.$$

   Solution : On peut raisonner ici par équivalence en prenant la norme 1 définie sur l'ensemble produit.

Exercice 9. Fonction continue dans un espace métrique

Soit $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$, et $x \in E_1$.

1. Montrer que f est continue au point x *ssi* pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$f\big(B_1(x,\delta)\big) \subset B_2\big(f(x),\epsilon\big)\,.$$
2. Montrer que f est continue au point x *ssi* pour toute suite $\{x_k\}$ dans E_1 qui converge vers x dans E_1, la suite $\{f(x_k)\}$ converge vers $f(x)$ dans E_2.

Exercice 10. Équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$

Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une norme, et $\| \ \|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, définie on le rappelle par
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \quad \text{pour } x = (x_i)_{1\leq i\leq n}\,.$$

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$N(x) \leq M\|x\|\,.$$
2. Montrer alors que $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. *Remarque: On déduit de cette question que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application continue.*

Soit maintenant $S = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\big\}$.

3. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $m \leq N(x)$ pour tout $x \in S$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$m\|x\| \leq N(x)\,.$$
5. Soient N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N et N' sont équivalentes.

Exercice 11. Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$. Munissons $\mathbb{R}$ de sa topologie la plus naturelle, à savoir celle qui vient de la valeur absolue $| \ |$.

1. Justifier le fait que toute réunion dénombrable d'intervalles ouverts est encore un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, on va montrer que que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Considérons pour cela $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est une réunion (pas forcément dénombrable) d'intervalles ouverts.
   (b) Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour avoir une réunion dénombrable. Indication: On suppose $U \neq \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{Q} \cap U$, considérer l'intervalle $I_y =]y - d(y)/2, y + d(y)/2$, où $d(y) = \mathrm{dist}(\mathrm{y}, \mathbb{R} \setminus \mathrm{U})$.

Exercice 12. *(Bonus)* **Produit d'espaces métriques II**

Soit $(E_j, d_j)_{j\geq 0}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Supposons que pour tout $j \geq 0$,
$$d_j(x_j, y_j) \leq 1 \quad \text{lorsque } (x_j, y_j) \in E_j \times E_j\,. \tag{1}$$

1. Montrer que
$$d : \big((x_j),(y_j)\big)_{j\geq 0} \in \big(\prod_{j\geq 0} E_j\big) \times \big(\prod_{j\geq 0} E_j\big) \longmapsto \sum_{j\geq 0} 2^{-j} d_j(x_j, y_j)$$
est une distance sur $\displaystyle\prod_{j\geq 0} E_j$.

2. Montrer que la suite $\left\{(x_j^{(k)})\right\}_k$ converge dans l'espace métrique produit $\left(\prod_j E_j, d\right)$ *ssi* chaque suite coordonnée $(x_j^{(k)})_k$ converge dans l'espace (E_j, d_j).
3. Que faire si l'on n'a pas (1) d'emblée

Exercice 13. *(Bonus)* **Caractérisation des compacts de** $]0\,,1[$

1. Quels sont les sous-ensembles compacts de $[0, 1]$? Ceux de $]0\,,1[$?