8/10

Florian Saudu.

L3MATH
M203-Algèbre

Université Paris Saclay, Orsay
2023-2024

Interrogation 4 : Transformations affines, formes quadratiques

Durée : 30 minutes - 4 questions.

Le 12 décembre 2023

1,5/2

Question 1. (2 points) On fixe un espace vectoriel E muni d'une produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Reformulez la phrase suivante en utilisant un formalisme mathématique : "Un endormorphisme de E qui est autoadjoint a une valeur propre réelle." Le terme "autoadjoint" est à développer (sans utiliser l'adjoint f^*).

$\forall f \in \mathcal{L}(E)$

Si $\langle x \mid f(y) \rangle = \langle f(x) \mid y \rangle$ $\forall x, y \in E$ alors $\exists\, u \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(u) = \lambda u$.

2,5/3

Question 2. (3 points) Répondez par vrai ou faux et argumentez par une démonstration ou un contre-exemple.

1,5/1,5

1. Si une application affine $f : E \to F$ est surjective, alors sa partie linéaire est surjective.

Vrai f surjective i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $f(x) = y$
f affine donc $\exists a \in E$ tq $f(x) = f(a) + \vec{f}(\vec{ax})$ $\forall x \in E$

Donc on a $\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $y = f(a) + \vec{f}(\vec{ax})$
i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E$ tq $\vec{f(a)y} = \vec{f}(\vec{ax})$

Donc
$\forall \vec{u} \in \vec{F}\ \exists \vec{v}\ E$ tq $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{u}$. Précisez (on forme $\vec{v}$, on pose $y = \ldots$).

1/1,5

2. La forme quadratique $q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 4xz - 4yz - 2z^2$ est de signature $(1, 2)$.

Vrai

$\cancel{(\sqrt{2}x)^2 + 2xz}$ $-(y^2 + 4yz - 4xz + 2z^2 - 2x^2)$
$= -(y + 2z)^2 + (2z^2 - 4xz + 2x^2)$ Identité remarquable.
$= -(y + 2z)^2 + (\sqrt{2}z - 2x)^2 - 4x^2 + 2x^2$
$= -(y + 2z)^2 + (\sqrt{2}z - 2x)^2 - 2x^2$

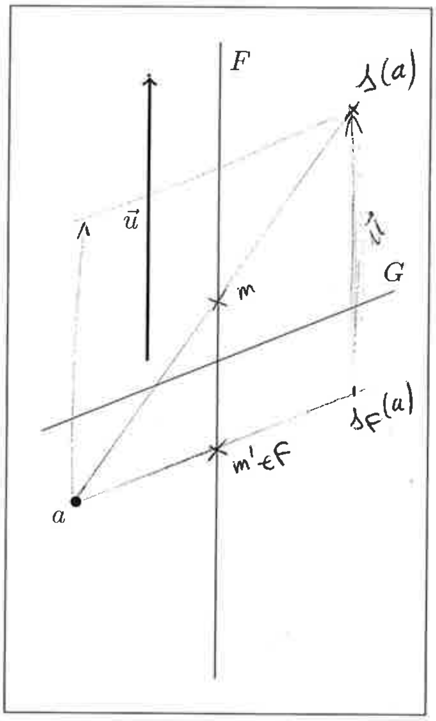
signature $= \cancel{(1, 2)}$

2,5/3

Question 3. (3 points) Soit E le plan affine et F, G deux droites sécantes. On se donne un vecteur $\vec{u} \in \vec{F}$.

Soit s_F la symétrie affine d'axe F parallèlement à $\vec{G}$, et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. On note $s := t_{\vec{u}} \circ s_F$.

1/1 1. Construisez le point $s(a)$ sur le dessin ci-contre.



✓

1,5/2 2. Démontrez que le milieu de $[a, s(a)]$ appartient à F.

$m :=$ milieu de $[a\, s(a)]$

$m' :=$ milieu de $[a\, s_F(a)] \in F$ par déf

On a $\vec{am'} + \vec{m'm} = \vec{am} = \frac{1}{2}\vec{a\,s(a)}$

D'où $m = a + \vec{am'} + \vec{m'm}$ ✓

$= \cancel{a} + m' \cancel{- a} + \vec{m'm}$

$= m' + \vec{m'm}$

$\in F \quad \in \vec{F}$ → Pourquoi ?

Donc $m \in F$.

1,5/2

Question 4. (2 points)

1/1 1. Soit $q(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ une forme quadratique de $\mathbb{R}^2$. Écrivez la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. La forme q est-elle dégénérée ?

$A = \mathrm{Mat}(q, \mathrm{Can}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ✓ $|A| = -1 \neq 0$ Donc le rg est maximal ✓ donc q est non dégénérée ✓

0,5/1 2. Trouvez un couple $(x, y) \neq (0,0)$ tel que $q(x, y) = 0$. Déduisez-en la signature de q.

$u = (-1, 1)$ on a $q(-1,1) = 1 - 4 + 3 = 0$ ✓

on a signature $= (1,1)$ Pourquoi ?