Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2020-2021

Partiel du mercredi 10 Mars 2021

Départ 13h30 Durée : 3 heures

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Documents et tout autre appareil électronique sont interdits.

Dans cet énoncé, $\mathbb{R}^n$ est automatiquement muni de la norme euclidienne $|| \ ||_2$, et de la distance euclidienne. On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (donc e_j a toutes ses coordonnées nulles, sauf la j-ième qui vaut 1).

Exercice 1. (Rédigez bien, c'est presque une question de cours.)
On se donne un espace vectoriel V, muni d'une norme $|| \ ||$, et une application linéaire $L : V \to V$.

1. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ telle que
$$||L(x)|| \leq M||x|| \quad \text{pour tout } x \in V. \tag{1}$$
Démontrer que L est M-Lipschitzienne, c'est-à-dire que
$$||L(x) - L(y)|| \leq M||x - y|| \quad \text{pour tout choix de } x, y \in V. \tag{2}$$
2. Démontrer la réciproque : s'il existe $M \geq 0$ tel qu'on ait (2), alors on a aussi (1).

Exercice 2.
On se donne une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On note $\alpha_j = \varphi(e_j)$ l'image du j-ième élément de la base canonique.

1. Vérifier que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$. pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. En déduire que $|\varphi(X)| \leq \Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\Big)^{1/2} ||X||_2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$.
3. Démonter en calculant $\varphi(X)$ pour un vecteur particulier que la norme de φ, est $|||\varphi||| = \Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\Big)^{1/2}$.

Exercice 3.
On se donne une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$, et pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ on note $F(X) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de ses trois coordonnées dans la base (V_1, V_2, V_3). Autrement dit, en écrivant horizontalement les vecteurs, $F(X) = (y_1, y_2, y_3)$, où les y_j sont tels que $X = \sum_{j=1}^3 y_j V_j$. On note $|| \ ||_2$ la norme euclidienne. On note aussi N la norme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $N(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ (on admet que c'est une norme).

1. On pose $N_v(X) = N(F(X))$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. Vérifier que N_v est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
2. Expliquez rapidement pourqoi il existe $M \geq 0$ tel que $N_v(X) \leq M||X||_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.
3. On se donne maintenant une application linéaire $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on note $W_j = H(V_j)$ pour $1 \leq j \leq 3$, et on suppose que $||W_j||_2 \leq 10$ pour $1 \leq j \leq 3$. Démontrer que $||H(X)||_2 \leq 10M||X||_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. [Indication : commencer par l'inégalité triangulaire].

TSVP

Exercice 4.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0). \tag{3}$$

1. Vérifier que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et calculer ces dérivées partielles.
2. Démontrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et calculer $Df(x,y)(u,v)$ (la différentielle de f au point (x,y), appliquée au vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que f est continue en 0.
4. Pour tout vecteur $W = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, on note f_W la fonction définie par $f_W(t) = f(tu,tv)$. Vérifier que f_W est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que pour tout $W = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, f a une dérivée directionnelle $\partial_W f(0,0)$ (dans la direction W) à l'origine, que l'on calculera. Vous pouvez prendre $W \neq (0,0)$ si vous voulez ; de toute manière les définitions donnent $\partial_{(0,0)} f(0,0) = 0$.
6. Vérifier que l'application $W \to \partial_W f(0,0)$ n'est pas linéaire, et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5.
On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et on note G_f le graphe de f. On rappelle que

$$G_f = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4}$$

On notera souvent $X = (x_1, \ldots, x_n)$ le point générique de $\mathbb{R}^n$ et (X, x_{n+1}) un point générique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. On suppose que f est continue au point $X = (x_1, \ldots, x_n)$, et on se donne une suite $\{X_k\}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui converge vers X. On note $Z_k = (X_k, f(X_k)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $\{Z_k\}$ converge vers un point de G_f.
2. On suppose maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}^n$. Déduire de la question précédente que G_f est fermé.
3. Démontrer que réciproquement, si $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est fermé, alors f est continue.