Université Paris-Saclay
L3 EU

Analyse théorique et numérique des équations différentielles ordinaires

Notes de cours - 2023/2024

Filipa Caetano

Dans ces notes, on présente les concepts et les résultats vus en cours, ainsi que quelques exemples. C'est une version destinée à être améliorée, certains passages seront présentés de manière résumée.

Voici une bibliographie conseillée pour ce cours :

Pour la première partie du cours - théorie des équations différentielles ordinaires.

- Le livre *Analyse numérique et équations différentielles*, de Jean-Pierre Demailly, disponible à la bibliothèque universitaire.
- Le polycopié du cours d'équations différentielles de l'ancien L3MINT de Thierry Ramond (il ne couvre que la partie « théorie des équations différentielles » du cours), disponible à sa page web à l'adresse suivante : https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ ramond/docs/cours/m318.pdf

  Les chapitres abordés dans notre cours son le chapitre 1, le chapitre 3 de manière très succincte et le chapitre 4, en particulier 4.3 et 4.4.
- Le polycopié du cours de Dominique Hulin de l'ancienne L3 MFA, (il ne couvre que la partie « théorie des équations différentielles » du cours et va au delà de ce qu'on fera), disponible à sa page web à l'adresse suivante : https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ hulin/poly-cours-EDO.pdf

Pour la deuxième partie du cours - approximation numérique des équations différentielles ordinaires.

- Le livre *Analyse numérique et équations différentielles*, de Jean-Pierre Demailly, disponible à la bibliothèque universitaire.
- Le polycopié d'un cours de Hervé Le Dret disponible à sa page web à l'adresse : https ://www.ljll.math.upmc.fr/ledret/3M236/HLD-3M236-2016.pdf

CHAPITRE 1

Introduction. Généralités et définitions sur les EDO. Quelques exemples.

Ce premier chapitre est présenté de forme résumée, il regroupe l'ensemble des notions de base autour des équations différentielles ordinaires (EDO) et des exemples vus en cours.

1.1 Définitions.

Définition. Équation différentielle.
Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $F : I \times U^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Une **équation différentielle ordinaire** (EDO) est une équation de la forme

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p)}(t)) = 0, \tag{1.1}$$

dont l'inconnue est une fonction y définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$; si $n = 1$ (1.1) est une équation scalaire, si $n > 1$ (cas vectoriel), (1.1) est un système d'équations.

On appelle p l'**ordre** de l'équation différentielle (il s'agit de l'ordre de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation).

On dit que l'équation (1.1) est **linéaire** si F est une fonction linéaire de $y,\ y',\ \ldots,\ y^p$. Elle est dite **non linéaire** dans le cas contraire.

L'équation (1.1) est dite autonome si F ne dépend pas de t.

On utilise également la notation $F(t, y, y', \dots, y^p) = 0$ pour désigner l'équation $(*)$.

Définition. Solution.
Une **solution** de l'équation (1.1) est une fonction $y : J \longrightarrow U$, définie dans un intervalle ouvert $J \subseteq I$ de $\mathbb{R}$, de classe C^p sur J, vérifiant (1.1) en tout point t de J.
Résoudre l'équation (1.1) consiste à trouver toutes les solutions $y : J \longrightarrow U$, définies dans un intervalle $J \subseteq I$ de $\mathbb{R}$.

Exemples.

- $y'(t) = y(t)$ est une équation linéaire d'ordre 1 ;
- $y''(t) + 2y(t) = g(t)$, avec $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue donnée, est une équation linéaire d'ordre 2 ;
- $y'''(t) + \sin(t)y(t) = e^t$ est une équation linéaire d'ordre 3 ;
- $y' = y^2$ est une équation non linéaire.
- $y' = y$ et $y' = y^2$ sont des équations autonomes.

Définition.
Problème de Cauchy ou problème de valeurs initiales. Étant donné $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{p-1}) \in I \times U \times \cdots \times U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution de (1.1) qui vérifie

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_0^1, \\ \vdots \\ y^{(p-1)}(t_0) = y_0^{p-1}. \end{cases}$$

On appelle $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{p-1})$ une **condition initiale**.

Équations explicites. Nous nous intéresserons uniquement à des équations de la forme (1.1) pour lesquelles l'équation $F(t, y, \dots, y^p)$ permet de définir explicitement la dérivée d'ordre plus élevée $y^{(p)}$ comme fonction de t, $y, \dots, y^{(p-1)}$, autrement dit à des équations explicites de la forme

$$y^{(p)}(t) = \tilde{F}\big(t, y(t), \dots, y^{(p-1)}(t)\big), \tag{1.2}$$

où $\tilde{F}$ est une fonction continue.

Toute équation explicite d'ordre p de la forme (1.2) peut se ramener à un système de p équations d'ordre 1. Plus concrètement, une fonction $y : J \longrightarrow U$ de classe C^p est une solution de (1.2) si et seulement si la fonction $Y = (Y_1, \ldots, Y_p) : J \longrightarrow U^p$, définie par $Y_1 = y,\ Y_2 = y', \ldots, Y_p = y^{(p-1)}$, est solution du système d'équations

$$\begin{cases} Y_1' = Y_2, \\ Y_2' = Y_3, \\ \vdots \\ Y_{p-1}' = Y_p, \\ Y_p' = \tilde{F}\big(t, Y_1, \ldots, Y_p\big), \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si Y est solution du système

$$Y' = G(t, Y),$$

avec G la fonction définie par $G(t, Y) = \big(Y_2, \ldots, Y_p, \tilde{F}\big(t, Y_1, \ldots, Y_p\big)\big)$.

Pour cette raison, au chapitre deux nous étudierons du point de vue qualitatif uniquement des équations différentielles (ou systèmes d'équations) d'ordre 1 de la forme

$$(E) \qquad y'(t) = f(t, y(t)),$$

où f est une fonction donné.

1.2 Quelques exemples d'équations intégrables.

On rappelle dans cette section la forme des solutions à valeurs réelles de certaines équations résolues.

1.2.1 Équations linéaires scalaires du premier ordre.

On s'intéresse aux équations différentielles de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = g(t), \tag{1.3}$$

où $a,\ g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

On parle d'équation **homogène** lorsque $g = 0$, d'équation **non homogène** si $g \neq 0$.

Solution générale de l'équation homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

On note $A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$, $t_0 \in I$, une primitive de a sur I, c'est-à-dire que $A'(t) = a(t)$ pour tout $t \in I$ (cette primitive existe car a est une fonction continue). On a alors que $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$

est solution de $y' + a(t)y = 0$ sur I si et seulement si

$$\begin{aligned}
& y'(t)e^{A(t)} + e^{A(t)}a(t)y(t) = 0, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi} \quad & \frac{d}{dt}\big(y(t)e^{A(t)}\big) = 0, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi il existe } C \in \mathbb{R} \text{ tel que} \quad & y(t)e^{A(t)} = C, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi il existe } C \in \mathbb{R} \text{ tel que} \quad & y(t) = Ce^{-A(t)}, && \text{pour tout } t \in I.
\end{aligned}$$

On a ainsi le résultat suivant :

Proposition. Solutions de l'équation linéaire du premier ordre.
L'ensemble des solutions de l'équation $y' + a(t)y = 0$ est l'ensemble

$$S = \big\{ y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{R} \big\},$$

où $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de a.

Solution générale de l'équation non homogène $y'(t) + a(t)y(t) = g(t)$.

On peut de manière similaire résoudre l'équation non homogène : on a que $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution de $y' + a(t)y = g(t)$ sur I si et seulement si

$$\begin{aligned}
& y'(t)e^{A(t)} + e^{A(t)}a(t)y(t) = g(t)e^{A(t)}, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi} \quad & \frac{d}{dt}\big(y(t)e^{A(t)}\big) = g(t)e^{A(t)}, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi il existe } C \in \mathbb{R} \text{ tel que} \quad & y(t)e^{A(t)} = C + \int_{t_0}^{t} g(s)e^{A(s)}\,ds, && \text{pour tout } t \in I,\\
\text{ssi il existe } C \in \mathbb{R} \text{ tel que} \quad & y(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} g(s)e^{A(s)}\,ds, && \text{pour tout } t \in I,
\end{aligned}$$

où la fonction $t \mapsto \int_{t_0}^{t} g(s)e^{A(s)}$ est une primitive de $t \mapsto g(t)e^{A(t)}$ sur I. On a alors le résultat suivant :

Proposition. Solutions de l'équation linéaire du premier ordre non homogène.
L'ensemble S des solutions de l'équation $y' + a(t)y = g(t)$ est l'ensemble

$$S = \big\{ y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} g(s)e^{A(s)}\,ds \mid C \in \mathbb{R} \big\}.$$

On remarque que la fonction $\tilde{y}(t) := e^{-A(t)} \int_{t_0}^t g(s)e^{A(s)}\, ds$ est une solution particulière de l'équation $y' + a(t)y = g(t)$, car

$$\tilde{y}\,'(t) = -a(t)e^{-A(t)} \int_{t_0}^t g(s)e^{A(s)}\, ds + e^{-A(t)}g(t)e^{A(t)} = -a(t)\tilde{y}(t) + g(t), \text{ pour tout t } \in I,$$

et donc

$$\tilde{y}\,'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = g(t), \text{ pour tout } t \in I.$$

D'autre part, si y_p est une solution particulière de l'équation non-homogène $y' + a(t)y = g(t)$, toute autre solution y de cette équation vérifie

$$(y - y_p)'(t) + a(t)(y - y_p)(t) = y'(t) + a(t)y(t) - \big(y_p'(t) + a(t)y_p(t)\big) = 0, \text{ pour tout } t \in I,$$

c'est-à-dire que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène. On a donc qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(y - y_p)(t) = Ce^{-A(t)},\ t \in I$, et donc $y(t) = Ce^{-A(t)} + y_p(t)$, pour tout $t \in\ I$. On vient alors de montrer que l'ensemble des solutions de l'équation nonhomogène $y' + a(t)y = g(t)$ est également égale à l'ensemble

$$\big\{y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto Ce^{-A(t)} + y_p(t) \mid C \in \mathbb{R}\big\},$$

où y_p est une solution de l'équation non homogène. Il suffit donc de connaître une solution de l'équation non homogène pour connaître toutes. Ce résultat s'énonce souvent sous la forme suivante : *la solution générale de l'équation non homogène est égale à la solution génerale de l'équation homogène plus une solution particulière de l'équation nonhomogène.* C'est en réalité une propriété générale de toutes les équations différentielles linéaires.

Remarque.
Pour trouver une solution particulière de l'équation (1.3), on peut utiliser la méthode dite *de la variation de la constante*, qui consiste à chercher une solution de (1.3) de la forme

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}.$$

On a ${y_p}' + a(t)y_p = g(t)$ si et seulement si

$$C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = g(t), \text{ pour tout } t \in I,$$

si et seulement si

$$C'(t) = g(t)e^{-A(t)}, \text{ pour tout } t \in I,$$

si et seulement si C est une primitive de la fonction $t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$ (et on remarque que l'on retrouve bien la formule de la proposition donnant la solution générale de l'équation non homogène).

1.2.2 Équations non linéaires du premier ordre à variables séparables.

On s'intéresse aux équations de la forme

$$y' = g(y)f(t),$$

où $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

On a tout d'abord que si $\overline{y} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\overline{y}) = 0$, alors la fonction constante égale à $\overline{y}$ est solution de $y' = f(t)g(y)$.

On cherche des solutions non constantes de cette équation. Si $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution telle que $g(y)$ n'est pas identiquement nulle, alors sur l'ensemble

$$\{t \,:\, g(y(t)) \neq 0\}$$

on a

$$\begin{aligned} & y'(t) = g(y(t))f(t) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{d}{dt}\big(G(y(t))\big) = f(t) \\ \Longleftrightarrow\ & G(y(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + C, \end{aligned}$$

avec C une constante réelle et G une primitive de $\frac{1}{g}$, et où $t \mapsto \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds,\ t_0 \in I$, est une primitive de f. Si la fonction G est inversible, on obtient alors que

$$y(t) = G^{-1}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds + C\Big)$$

est une solution de $y' = g(y)f(t)$.

1.2.3 Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

On s'intéresse aux équations de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t), \tag{1.4}$$

où $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et où $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée.

Équations homogènes : $g \equiv 0$.

On s'intéresse ici au cas $g \equiv 0$, donc à l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{1.5}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[\lambda]$ le polynôme

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

et $\Delta := b^2 - 4ac$.

On remarque que si $\lambda \in \mathbb{R}$, ou $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

si et seulement si λ est racine de P. En effet on a, pour $y(t) = e^{\lambda t}$,

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda t},$$

pour tout t, donc $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$, pour tout t, si et seulement si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

Remarque.
On remarque que si $\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda = \alpha + i\beta$, avec $\beta \neq 0$, la dérivée de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t} \in \mathbb{C}$ est bien la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$: on a

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) &= \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) + i\big(\alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t)\big) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i(\alpha + i\beta)e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) \\ &= \lambda e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

On peut alors montrer le résultat suivant

Proposition.
Ensemble des solutions de l'équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Soit S l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (1.5). Alors :

1. Si $P(\lambda)$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, autrement dit si $\Delta > 0$, S est l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par
$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si $P(\lambda)$ admet une racine double réelle λ_0, autrement dit si $\Delta = 0$, S est l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par
$$y(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2\, t e^{\lambda_0 t},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si $P(\lambda)$ admet deux racines complexes $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$, avec $\beta \neq 0$, autrement dit si $\Delta < 0$, S est l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par
$$y(t) = e^{\alpha t}\Big(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\Big),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. 1. Supposons λ une racine de P. On a déjà montré plus haut que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de (1.5). On a donc que toute fonction de la forme $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$, est solution de (1.5). Montrons maintenant que toute solution de (1.5) est de cette forme. Supposons $y(t)$ tel que $ay'' + by' + cy = 0$. Soit $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$. On suppose ici que

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

On a alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}.$$

D'autre part, comme $ay'' + by' + cy = 0$, on a

$$y'' = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y = (\lambda_1 + \lambda_2)y' - (\lambda_1 \lambda_2)y.$$

Calculons z' et z''. On a

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t)e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 y(t)e^{-\lambda_1 t}, \\ z''(t) &= y''(t)e^{-\lambda_1 t} - 2\lambda_1 y'(t)e^{-\lambda_1 t} + {\lambda_1}^2 y(t)e^{-\lambda_1 t} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)y'e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 \lambda_2)ye^{-\lambda_1 t} - 2\lambda_1 y'(t)e^{-\lambda_1 t} + {\lambda_1}^2 y(t)e^{-\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

de sort que

$$\begin{aligned} z''(t) &= \big(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1\big)y'(t)e^{-\lambda_1 t} + \big({\lambda_1}^2 - \lambda_1 \lambda_2\big)y(t)e^{-\lambda_1 t} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\big(y'(t)e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 y(t)e^{-\lambda_1 t}\big) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)z'(t). \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$z'(t) = Ce^{(\lambda_2 - \lambda_1)t},$$

et donc qu'il existe $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$z(t) = C_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C_2.$$

On obtient que

$$y(t) = z(t)e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{\lambda_2 t} + C_2 e^{\lambda_1 t}.$$

2. On raisonne comme dans 1. On remarque que $b^2 - 4ac = 0$ donc $\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$. Montrons d'abord que toute fonction de la forme $C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t e^{\lambda_0 t},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$, est solution de (1.5). On sait déjà que, λ_0 étant une racine de P, la fonction $t \mapsto e^{\lambda_0 t}$ est solution de (1.5). Montrons que $t \mapsto te^{\lambda_0 t}$ l'est aussi. On a

$$\begin{aligned} a(te^{\lambda_0 t})'' + b(te^{\lambda_0 t})' + cte^{\lambda_0 t} &= a(2\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + {\lambda_0}^2 te^{\lambda_0 t}) + b(e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 te^{\lambda_0 t}) + cte^{\lambda_0 t} \\ &= \underbrace{(a{\lambda_0}^2 + b\lambda_0 + c)te^{\lambda_0 t}}_{=0,\ \text{car } P(\lambda_0)=0} + \underbrace{(2a\lambda_0 + b)e^{\lambda_0 t}}_{=0,\ \text{car } \lambda_0 = -\frac{b}{2a}} = 0. \end{aligned}$$

On a donc que $t \mapsto te^{\lambda_0 t}$ est solution de (1.5), et donc toute combinaison linéaire de $e^{\lambda_0 t}$ et de $te^{\lambda_0 t}$ est aussi solution de (1.5).

Montrons maintenant que toute solution de (1.5) est de la forme $C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 te^{\lambda_0 t}$, avec $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$. A nouveau, supposons $y(t)$ solution de (1.5) et considérons $z(t) = y(t)e^{-\lambda_0 t}$. On a

$$z''(t) = y''(t)e^{-\lambda_0 t} - 2\lambda_0 y'(t)e^{-\lambda_0 t} + {\lambda_0}^2 y(t)e^{-\lambda_0 t}$$

et on utilise à nouveau que

$$y'' = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y.$$

Comme $\lambda_0 = -\frac{b}{2a}$, on a $-\frac{b}{a} = 2\lambda_0$; et comme $b^2 - 4ac = 0$, on a $\frac{c}{a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} = {\lambda_0}^2$. On en déduit que

$$y'' = 2\lambda_0 y' - {\lambda_0}^2 y$$

et donc que

$$z''(t) = e^{-\lambda_0 t}\Big(2\lambda_0 y' - {\lambda_0}^2 y - 2\lambda_0 y' + {\lambda_0}^2 y\Big) = 0.$$

On a alors qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $z' = C_1$ et donc qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $z(t) = C_1 t + C_2$. On obtient que

$$y(t) = z(t)e^{\lambda_0 t} = C_1 te^{\lambda_0 t} + C_2 e^{\lambda_0 t}.$$

3. On peut vérifier à nouveau que toute façon de la forme $e^{\alpha_t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$, avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$, est solution de (1.5).

   D'autre part, on remarque ici que si $y(t)$ est une solution à valeurs réelles de (1.5), alors en raisonnant comme dans 1., on obtient que la fonction à valeurs complexes $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$ est telle que

   $$z(t) = C_1 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C_2,$$

   avec C_1 et C_2 des constantes complexes, et on obtient à nouveau que

   $$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{\lambda_2 t} + C_2 e^{\lambda_1 t} = C_1\Big(e^{\alpha_t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\Big) + C_2\Big(e^{\alpha_t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))\Big) \\ &= (C_1 + C_2)e^{\alpha_t}\cos(\beta t) + i(C_2 - C_1)e^{\alpha_t}\sin(\beta t), \end{aligned}$$

   avec C_1 et C_2 des constantes complexes. Supposons $C_1 = a_1 + ib_1,\ C_2 = a_2 + ib_2$. Comme $y(t)$ à valeurs réelles, on doit avoir $b_1 + b_2 = 0$ et $a_2 - a_1 = 0$, autrement dit

   $$y(t) = 2a_1 e^{\alpha_t}\cos(\beta t) - 2b_1 e^{\alpha_t}\sin(\beta t),$$

   autrement dit y est de la forme $e^{\alpha_t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))$, avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$.

□

Équations non homogènes : $g \neq 0$.

Soit $y_0(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$, avec $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$, la solution générale de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$. Alors on peut montrer, comme on l'a fait dans le cas des équations linéaires d'ordre 1, que toute solution de l'équation non homogène (1.4) $ay''(t)+by'(t)+cy(t) = g(t)$ est de la forme

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t),$$

où $y_p(t)$ est une solution particulière de l'équation (1.4). Pour trouver une solution particulière de l'équation (1.4), on peut utiliser la *méthode de la variation des constantes*, qui consiste à chercher une solution de (1.4) de la forme

$$y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t),$$

avec $C_1(t),\ C_2(t)$ fonctions continues sur I vérifiant

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0.$$

On a alors

$$y_p{}'(t) = C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t) = C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t)$$

et

$$y_p{}''(t) = C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2(t)y_2''(t).$$

En écrivant (1.4) pour y_p, on conclut que les fonctions $C_1(t)$ et $C_2(t)$ doivent vérifier le système d'équations

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \\ aC_1'(t)y_1'(t) + aC_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire est, pour chaque t, égal à $a(\varphi_1\varphi_2{}' - \varphi_2\varphi_1{}')(t)$. Il est simple de voir que dans les 3 cas de la proposition précédente ce déterminant est toujours non nul, et donc que le système précédent admet une solution.

1.2.4 Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants.

On considère des systèmes linéaires de n équations différentielles à coefficients constants, de la forme

$$Y' = AY + B(t), \tag{1.6}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice donnée, et $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \mapsto B(t) = (B_1(t), \ldots, B_n(t))$, est une fonction donnée. L'inconnue est alors une fonction vectorielle $Y(t) = (Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Systèmes homogènes : $B \equiv 0$.

On considère ici le cas des systèmes de la forme

$$Y' = AY. \tag{1.7}$$

On peut montrer que l'ensemble des solutions de (1.7) est une espace vectoriel de dimension n.

Cas où la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si on cherche, à l'image du cas scalaire, une solution de la forme $Y(t) = e^{\lambda t}U$, avec $U \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$, alors on a que Y est solution de (1.7) ssi λ est une valeur propre de A et U vecteur propre associé : pour une telle fonction Y on a

$$Y'(t) = AY(t),\ \forall\, t \text{ ssi } \lambda e^{\lambda t}U = Ae^{\lambda t}U,\ \forall\, t \text{ ssi } \lambda U = AU.$$

Supposons A une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et soient alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les n valeurs propres réelles de A et $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A, tel que U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$. On a alors que $A = PDP^{-1}$, avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs $U_1, \ldots, U_n$, et D la matrice diagonale dont la diagonale est constituée des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On a alors

$$Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \iff (P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y).$$

On note $V = P^{-1}Y$. On a alors que

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff V_i' = \lambda_i V_i,\ \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \\ &\iff V_i(t) = C_i e^{\lambda_i t},\ \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}, \end{aligned}$$

avec $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

On a ainsi que

$$\begin{aligned} Y' = AY &\text{ ssi } (P^{-1}Y)(t) = [C_1 e^{\lambda_1 t}\ \ldots\ C_n e^{\lambda_n t}]^T \\ &\text{ ssi } Y(t) = P[C_1 e^{\lambda_1 t}\ \ldots\ C_n e^{\lambda_n t}]^T \\ &\text{ ssi } Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}U_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}U_n. \end{aligned}$$

On vient ainsi de montrer le résultat suivant.

Proposition.
Supposons A une matrice diaginalisable dans $\mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de A et $U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tel que $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble des solutions du système (1.7) est l'ensemble des fonctions $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}U_i,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

.

Cas où la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Supposons maintenant que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Soient alors $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}$ les n valeurs propres de A et $(U_1,\ldots,U_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A, tel que U_i est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i,\ i=1,\ldots,n$. On peut montrer comme dans le cas précédent qu'une fonction $Y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}^n$ est solution (à valeurs complexes) du système $Y'=AY$ si et seulement si

$$Y(t)=C_1e^{\lambda_1t}U_1+\cdots+C_ne^{\lambda_nt}U_n,\ C_i\in\mathbb{C},\ i=1,\ldots,n.$$

On cherche des solutions de (1.7) à valeurs réelles. On remarque que, comme A est une matrice réelle, une fonction à valeurs complexes $Y(t)=Y_1(t)+iY_2(t)$ est solution du système $Y'=AY$ si et seulement si

$$Y_1{}'(t)+iY_2{}'(t)=A(Y_1(t)+iY_2(t))\Longleftrightarrow Y_1{}'(t)+iY_2{}'(t)=A(Y_1(t))+iA(Y_2(t)),$$

si et seulement si ses parties réelle Y_1 et imaginaire Y_2 sont solutions de $Y'=AY$.

On a alors que Y est une solution à valeurs réelles de $Y'=AY$ si et seulement si Y est de la forme

$$Y(t)=\Re(C_1e^{\lambda_1t}U_1+\cdots+C_ne^{\lambda_nt}U_n)$$

ou

$$Y(t)=\Im(C_1e^{\lambda_1t}U_1+\cdots+C_ne^{\lambda_nt}U_n),$$

avec $C_1,\ldots,C_n$ des constantes complexes.

Or si $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est valeur propre complexe de A, son conjuguée $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, et si $U\in\mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda,$ son conjugué $\overline{U}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$. On a en plus que

$$e^{\overline{\lambda}t}\overline{U}=\overline{e^{\lambda t}U}.$$

On conclut ainsi que les deux fonctions $e^{\overline{\lambda}t}\overline{U}$ et $e^{\lambda t}U$ ont les mêmes parties réelles et des parties imaginaires symétriques. On a alors que, associé à chaque couple $(\lambda,\overline{\lambda})$ de valeurs propres complexes de A, il y a deux solutions réelles de $Y'=AY$, qui sont données par $\Re(e^{\lambda t}U)$ et $\Im(e^{\lambda t}U)$. Si $U=V+iW$ et $\lambda=\alpha+i\beta$, on obtient

$$\Re(e^{\lambda t}U)=\Re\big(e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t)\big)(V+iW)\big)=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)V-\sin(\beta t)W)$$

et

$$\Im(e^{\lambda t}U)=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)W+\sin(\beta t)V).$$

On remarque que ces deux fonctions sont linéairement indépendantes : si

$$C\big(e^{\alpha t}(\cos(\beta t)V-\sin(\beta t)W)\big)+D\big(e^{\alpha t}(\cos(\beta t)W+\sin(\beta t)V)\big)=0$$

alors

$$C(\cos(\beta t)V-\sin(\beta t)W)\big)+D\big((\cos(\beta t)W+\sin(\beta t)V)\big)=0$$

et donc

$$\big(C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)\big)V+\big(-C\sin(\beta t)+D\cos(\beta t)\big)W=0. \tag{1.8}$$

Or les vecteurs $V \in \mathbb{R}^n$ et $W \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendantes car $V + iW \in \mathbb{C}^n$ et $V - iW \in \mathbb{C}^n$ le sont : si $\gamma V + \delta W = 0$, avec $\gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$, alors comme $\gamma V + \delta W = \Re\big((\gamma + i\delta)(V - iW)\big)$ et pour $z \in \mathbb{C}, \Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, on a $(\gamma + i\delta)(V - iW) + (\gamma - i\delta)(V + iW) = 0$, et donc $\gamma + i\delta = \gamma - i\delta = 0$, c'est-à-dire que $\gamma = \delta = 0$.

On conclut alors, de (1.8), que

$$\begin{cases} C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t) = 0 \\ -C\sin(\beta t) + D\cos(\beta t) = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système 2×2 (dans les variables $C,\ D$) vaut $\cos^2(\beta t) + \sin^2(\beta t) = 1 \neq 0$, pour tout t, on a donc $C = D = 0$.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Proposition.
Supposons A une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Soient $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_p, \overline{\lambda_p} \in \mathbb{C}$ les valeurs propres complexes non réelles de A et $\lambda_{2p+1}, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de A. Soient respectivement $U_1, \overline{U_1}, \ldots, U_p, \overline{U_p} \in \mathbb{C}^n$ et $U_{2p+1}, \ldots, U_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs propres associés. Alors l'ensemble des solutions du système (1.7) est l'ensemble des fonctions $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définies par

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{p} \Big(C_i \Re(e^{\lambda_i t} U_i) + D_i \Im(e^{\lambda_i t} U_i) \Big) + \sum_{i=2p+1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} U_i,\ C_i,\ D_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

.

Cas où la matrice A n'est pas diagonalisable.

(Ce cas n'a pas été traité en cours). Dans ce cas il convient d'obtenir la forme de Jordan de A.

Donnons l'exemple du cas $n = 2$. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable c'est que A admet une valeur propre double réelle λ telle que l'espace propre associé est de dimension 1. Dans ce cas on prend U un vecteur propre associé à la valeur propre λ puis V un vecteur tel que $(A - \lambda I)V = U$. On a alors que (U, V) est une base de $\mathbb{R}^2$ et la solution générale de (1.7) est une combinaison linéaire des fonctions $e^{\lambda t} U$ et $e^{\lambda t}(tU + V)$.