Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2020-2021

CORRIGÉ du Partiel du mercredi 10 Mars 2021

Durée : 3 heures

Je rappelle certaines parties de l'énoncé (c'est facile). Par contre pardonnez les fautes de frappes, je ne relirai pas.

Exercice 1. On se donne un espace vectoriel V, muni d'une norme $|| \ ||$, et une application linéaire $L : V \to V$.

1. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ telle que

$$||L(x)|| \leq M||x|| \quad \text{pour tout } x \in V. \tag{1}$$

Démontrer que L est M-Lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$||L(x) - L(y)|| \leq M||x - y|| \quad \text{pour tout choix de } x, y \in V. \tag{2}$$

Donc on suppose que l'hypothèse est satisfaite, et on se donne $x, y \in V$. On note simplement que $L(x) - L(y) = L(x - y)$ parce que L est linéaire, puis $||L(x) - L(y)|| = ||L(x - y)|| \leq M||x - y||$ à cause de (1).

2 Démontrer la réciproque : s'il existe $M \geq 0$ tel qu'on ait (2), alors on a aussi (1).

On prend $y = 0$ dans (2), et on trouve que pour tout $x \in V$, $||L(x)|| = ||L(x)-L(y)|| \leq M||x-y|| = ||x||$ (puisque $L(y) = 0$ par linéarité. Notez que formellement, quand vous dites "on pose $z = x - y$, on applique (2), et on trouve que $||L(z)|| \leq M||z||$ pour tout z", d'abord c'est plus compliqué et ensuite in faut justifier du fait que pour tout $z \in V$, on peut effectivement trouver x et y tels que $z = x - y$ (pour pouvoir appliquer (2)).

3 Qu'on n'a pas demandé, mais que je suis certain que vous avez vu aussi : les deux propriétés (1) et (2) sont aussi équivalentes à la continuité de L en 0. Je vous laisse vérifier que L est continue en tout point (donc en 0) si elle est Lipschitzienne ; il reste l'autre direction. Mais si L est continue en 0, l'application de la définition dit que pour tout $\varepsilon > 0$, et on peut prendre $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $||L(x) - L(0)|| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(0, \delta)$. Autrement dit, avec notre choix de ε, $||L(x)|| < 1$ dès que $||x|| < \delta$. Et (parce qu'on s'est mal débrouillé avec nos inégalités strictes), on trouve que $||L(x)|| < 1$ dès que $||x|| \leq \delta/2$. On va en déduire (1) avec $M = 2/\delta$. On prend $x \in V$. Si $x = 0$, $L(x) = 0$ et $||L(x)|| \leq M||x||$. Sinon, on applique notre inégalité à $y = \lambda x$, où on choisit $\lambda = ||x||^{-1}\delta/2$. Noter que $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| = \delta/2$ par choix de λ, et donc $||L(\lambda x)|| \leq 1$. Finalement $L(x) = \lambda^{-1}L(\lambda x) = 2||x||/\delta L(\lambda x)$, donc $||L(x)|| \leq 2||x||/\delta$ comme promis.

Exercice 2.

On se donne une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On note $\alpha_j = \varphi(e_j)$ l'image du j-ième élément de la base canonique.

1. Vérifier que $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$. pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Beaucoup trop de confusion entre les vecteurs et les coordonnées, et après vous vous perdez. Les coordonnées de x sont les x_j, qui sont des nombres réels. Les e_j sont des vecteurs particuliers (pas des nombres), et l'écriture de x dans la base des e_j est juste $X = x_1e_1 + ... + x_ne_n = \sum_{j=1}^n x_je_j$ (une combinaison linéaire de vecteurs.

Du coup, par linéarité de φ, $\varphi(X) = \varphi(\sum_j x_je_j) = \sum_j \varphi(x_je_j) = \sum_j x_j\varphi(e_j) = \sum_j x_j\alpha_j$, où la dernière égalité est la définition de α_j (qui est un nombre).

2. En déduire que $|\varphi(X)| \leq \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right)^{1/2} ||X||_2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$.

Je ne saurais trop vous conseiller d'apprendre l'inégalité de Cauchy-Schwarz par coeur et de savoir l'appliquer les yeux fermés. On reconnaît dans $\sum_j x_j\alpha_j$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$: le premier, disons X, avec les cordonnées x_j, et le second, A, avec les coordonnées α_j. Donc par Cauchy-Schwarz,

$$|\sum_j x_j\alpha_j| \leq ||X||_2||A||_2 = (\sum_j x_j^2)^{1/2}(\sum_j \alpha_j^2)^{1/2}.$$

C'était pourtant téléphoné !

3. Démonter en calculant $\varphi(X)$ pour un vecteur particulier que la norme de φ, est $|||\varphi||| = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right)^{1/2}$.

J'imagine que vous avez vu ceci aussi. Notons $||a|| = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right)^{1/2}$.

Il y avait une partie facile : la question précédente dit que $|\varphi(X)| \leq a||X||_2$ pour tout X. Donc $|\varphi(X)| \leq a$ pour tout X dans la boule unité fermée. Comme la norme de φ est le sup des valeurs de $|\varphi(X)|$ pour X dans cette boule, il vient $|||\varphi||| \leq a$.

Reste l'autre inégalité. C'est en rapport avec le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, que j'aurais dû vous rappeler en cours, qui est que $|\langle A, X\rangle| = ||X||_2||A||_2$ ssi les deux vecteurs sont co-linéaires (donc chacun est un multiple de l'autre, ou alors au moins un des deux est nul).

Donc ici, c'est un peu ce qu'on cherche, on va donc prendre un vecteur test colinéaire à notre vecteur A. Prenons carrément $X = A$ (le vecteur de coordonnées α_j. On pourrait normaliser (diviser par a, mais ca n'est pas vraiment la peine. On note que $\varphi(X) = \sum_j \alpha_j^2 = ||A||^2 = a^2$. Et la définition de la norme dit que $|||\varphi||| \geq |\varphi(X)|/||X||$ (si vous ne vous souvenez pas, appliquez la définition avec le sup des valeurs de $|\varphi(X)|$, $X \in \overline{B}(0,1)$, au vecteur normalisé $X/||X||$ (résultat trivial si $X = 0$ car alors $A = 0$ et $\varphi = 0$). Donc $|||\varphi||| \geq ||A||^2/||X|| = a$. CQFD pour la seconde inégalité.

Exercice 3.
On se donne une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}^3$, et pour tout $X \in \mathbb{R}^3$ on note $F(X) \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de ses trois coordonnées dans la base (V_1, V_2, V_3). Autrement dit, en écrivant horizontalement les vecteurs, $F(X) = (y_1, y_2, y_3)$, où les y_j sont tels que $X = \sum_{j=1}^3 y_jV_j$. On note $||\ ||_2$ la norme euclidienne. On note aussi N la norme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $N(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ (on admet que c'est une norme).

1. On pose $N_v(X) = N(F(X))$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. Vérifier que N_v est une norme sur $\mathbb{R}^3$.

Pas trop de difficulté ici, mais il fallait se souvenir de la définition d'une norme (ne pas oublier de commencer par dire que N doit être à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Il fallait vérifier ensuite que si $N_v(X) = 0$, alors $X = 0$. Mais $N_v(X) = 0$ signifie que $|x_1|+|x_2|+|x_3| = 0$ (où on rappelle que les x_j sont les coordonnées de X dans notre base, donc chaque x_j est nul donc X aussi (par définition des coordonnées : $X = \sum_j x_jV_j = 0$.

Pour la sous-linéarité, se donner X et $Y \in \mathbb{R}^3$, noter aussi y_1, y_2, y_3 les coordonnées de Y (petite parenthèse : dites toujours qui sont les êtres mathématiques que vous introduisez, autrement comment je devine ? En plus, c'est un moyen de vous assurer que vous n'êtes pas perdu dans les notations). Alors $X + Y$ a les coordonnées $x_j + y_j$, et il ne reste plus qu'à écrire et utiliser l'inégalité triangulaire : $N_v(X + Y) = \sum_j = 1^3|x_j + y_j| \leq \sum_j = 1^3|x_j| + |y_j| = N_v(X) + N_v(Y)$ où la première identité vient de cette histoire de calcul des coordonnées de la somme, et la dernière partie est la définition de N_v. Je passe le fait que $N_v(\lambda X) = |\lambda|N_v(X)$, qui se fait pareil.

2. Expliquez rapidement pourqoi il existe $M \geq 0$ tel que $N_v(X) \leq M||X||_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$.

On s'est donné le mal de prouver que N_v est une norme pour pouvoir appliquer le théorème du cours qui dit que dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes à $||\ ||_2$ (je devrais dire chaque norme est équivalente à $||\ ||_2$?). En particulier, il existe $M > 0$ tel que $N_v(X) \leq M||X||_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. Evidemment, la constante M dépend du choix de la norme, et ici si on avant pris des vecteurs V_j mal choisis (par exemple, avec V_1 très proche de V_2), il se serait pu que M soit très grand (pes coordonnées d'un X de taille 1 pourraient être très grandes). Mais on s'en moque dans cet exercice.

3. On se donne maintenant une application linéaire $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on note $W_j = H(V_j)$ pour $1 \leq j \leq 3$, et on suppose que $||W_j||_2 \leq 10$ pour $1 \leq j \leq 3$. Démontrer que $||H(X)||_2 \leq 10M||X||_2$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. [Indication : commencer par l'inégalité triangulaire].

On déroule les définitions. On écrit $X = \sum_j x_j V_j$, et on trouve que $H(X) = H(\sum_j x_j V_j) = \sum_j H(x_j V_j) = \sum_j x_j H(V_j) = \sum_j x_j W_j$, donc par inégalité triangulaire pour la norme euclidienne, $||H(X)||_2 \leq \sum_j ||x_j W_j||_2 = \sum_j |x_j|\,||W_j||_2 \leq 10 \sum_j |x_j| = 10N_v(X)$, en utilisant l'hypothèse puis la définition de N_v. On utilise ensuite la question précédente et on conclut.

Exercice 4.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0). \tag{3}$$

1. Vérifier que f a des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et calculer ces dérivées partielles.

Pourquoi forcément revenir à la définition d'une dérivée partielle ? ? Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on doit fixer y, considérer $f(x,y)$ comme une fonction de x avec un paramètre y, et regarder si c'est une fonction dérivable. Et oui, parce que c'est une fraction rationnelle (en x), tant que le dénominateur ne s'annule pas. Mais le dénominateur ne s'annule que quand $x = y = 0$, ce qu'on a justement exclu dans l'énoncé.

C'est d'autant plus curieux cette panique qu'ensuite vous savez calculer les dérivées partielles ! Je veux dire, quand on vous demande quand une fonction d'une variable est dérivable, vous ne revenez presque jamais aux définitions. Je fais quand même le calcul pour vérifier si je me trompe, mais là n'était pas trop la question.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}\big[3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)\big] = (x^2+y^2)^{-2}\big[x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)\big].$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ se calcule pareillement (en fait x et y jouent des rôles symétriques) et on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}\big[y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y)\big]$.

2. Démontrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et calculer $Df(x,y)(u,v)$ (la différentielle de f au point (x,y), appliquée au vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Même histoire ici : ne revenez pas à la définition de la différentielle, sauf si vous êtes vraiment obligés. C'est pour cela qu'il y avait la question précédente pour vous aider. Led formules précédentes montrent que les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc on applique le théorème du cours qui dit que dans ce cas, f est différentiable sur cet ouvert, et qu'en plus la différentielle se calcule à l'aide des dérivées partielles.

Donc, pour $(x,y) \neq (0,0)$, puis pour tout choix de vecteur (u,v), $Df(x,y)(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = u(x^2+y^2)^{-2}\big[x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)\big] + v(x^2+y^2)^{-2}\big[y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y)$.

3. Vérifier que f est continue en 0 (j'aurais dû dire $(0,0)$).

On commence par se souvenir que $f(0) = 0$. Donc on doit juste monrter que la limite de f en 0 est 0. Certains ont trouvé agréable de passer en coordonnées polaires pour y voir plus clair. C'est raisonnable mais je vais faire sans. On veut juste estimer la taille de $f(x,y)$, donc on majore le numérateur en fonction du dénominateur (je veux dire, faire apparaître des x^2+y^2 ne peut pas faire de mal). Alors on dit que $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$, donc $|x|^3 \leq (x^2+y^2)^{3/2}$, puis $|y| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$, donc $|y|^3 \leq (x^2+y^2)^{3/2}$. On additionne et on trouve que $|x^3+y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq 2(x^2+y^2)^{3/2}$. Donc en divisant par x^2+y^2, $|f(x,y)| \leq 2(x^2+y^2)^{1/2}$, qui tend bien vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ (ou de manière équivalente par définition, quand $||(x,y)||_2 = (x^2+y^2)^{1/2}$ tend vers 0.

Attention, pour que f tende vers 0 en $(0,0)$, il faut bien que $f(x_k, y_k)$ tende vers 0 pour toute suite $\{x_k\}$ et toute suite $\{y_k\}$ qui tendent toutes les deux vers 0, et pas seulement que $f(x_k, 0)$ tende vers 0 et $f(0, y_k)$ tende vers 0. Les valeus de f sur les axes, ça ne suffit pas.

4. Pour tout vecteur $W = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, on note f_W la fonction définie par $f_W(t) = f(tu, tv)$. Vérifier que f_W est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Plus paniquant que dur. On commence juste par calculer $f_W(t) = f(tu, tv) = \frac{t^3u^3+t^3v^3}{t^2u^2+t^2v^2} = t\frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} = th(W)$, où $h(W) = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}$ est juste une constante qui dépend de W. Donc f_W est une bête fonction linéaire, qui est donc dérivable et dont la dérivée est $h(W) = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}$.

5. En déduire que pour tout $W = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, f a une dérivée directionnelle $\partial_W f(0, 0)$ (dans la direction W) à l'origine, que l'on calculera. Vous pouvez prendre $W \neq (0, 0)$ si vous voulez ; de toute manière les définitions donnent $\partial_{(0,0)} f(0, 0) = 0$.

Par définition, la dérivée directionnelle $\partial_W f(0, 0)$, si elle existe, est exactement la dérivée en $t = 0$ de la fonction f_W. On vient de voir qu'elle existe et vaut $h(W)$.

6. Vérifier que l'application $W \to \partial_W f(0, 0)$ n'est pas linéaire, et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Donc on commence par vérifier que $h(W)$ n'est pas une fonction linéaire de w. Par la formule, elle n'en a pas l'air évidemment. Mais pour le démontrer, on doit faire un petit effort, comme par exemple trouver deux vecteurs W_1 et W_2 tels que $h(W_1 + W_2) \neq h(W_1) + h(W_2)$. En fait les prendre un peu au hasard marcherait, mais optimisons nos calculs. On observe que $W_1 = (1, 0)$ et $W_2 = (0, 1)$ donnent tous les deux des $h(W)$ nuls. Il ne reste plus qu'à espérer que $h(1, 1) \neq 0$, et c'est bien le cas puisque le calcul donne $h(1, 1) = 1$.

Pourquoi cette vérifcation ? Un théorème du cours dit que si $L = Df(0, 0)$ existe, alors les dérivées directionnelles $\partial_W f(0, 0)$ existent dans toutes les directions, (et ceci, ont le sait déjà), mais surtout sont données par application de L : pour tout $W = (u, v)$, $\partial_W f(0, 0) = L(u, v)$. Mais alors l'application $W \to \partial_W f(0, 0)$ doit être linéaire, pisqu'en fait c'est L. Comme on a vu que cela n'était pas le cas, $Df(0, 0)$ n'existe pas.

Exercice 5.

On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et on note G_f le graphe de f. On rappelle que

$$G_f = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\, x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{4}$$

On notera souvent $X = (x_1, \ldots, x_n)$ le point générique de $\mathbb{R}^n$ et (X, x_{n+1}) un point générique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. On suppose que f est continue au point $X = (x_1, \ldots, x_n)$, et on se donne une suite $\{X_k\}$ dans $\mathbb{R}^n$, qui converge vers X. On note $Z_k = (X_k, f(X_k)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $\{Z_k\}$ converge vers un point de G_f.

Pour cette question, on vous guide bien. Par continuité de f en X, on déduit du fait que $\{X_k\}$ converge vers X le fait que $\{f(X_k)\}$ converge vers $f(X)$. Maintenant $\mathbb{Z}_k$ a deux coordonnées : une dans $\mathbb{R}^n$, à savoir X_k, et l'autre dans $\mathbb{R}$, à savoir $f(X_k)$. Chacune de ces deux coordonnées a une limite (à savoir X et $f(X)$), donc Z_k a une limite dans $\mathbb{R}^{n+1}$, dont les coordonnées sont X et $f(X)$ (les coordonnées des limites). Bref Z_k a pour limite $(X, f(X)$, qui est donc un point du graphe par définition du graphe.

2. On suppose maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}^n$. Déduire de la question précédente que G_f est fermé.

On doit se donner un point de l'adhérence du graphe, disons Z et on veut montrer qu'il est dans le graphe. Par définition de l'adhérence (dans un espace métrique) on peut trouver une suite $\{Z_k\}$ dans le graphe G_f, qui tend vers Z. Ecrivons $Z_k = (X_k, Y_k)$; alors X_k tend vers X et Y_k tend vers la dernière coordonnée de Z (appelons la Y). Mais $Z_k \in G_f$, donc $Y_k = f(X_k)$. On applique la question précédente, et on trouve que $Z \in G_f$ aussi, ou autrement dit que $Y = f(X)$. Donc $Z \in G_f$, comme souhaité.

3. Démontrer que réciproquement, si $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est fermé, ET f EST BORNÉE, alors f est continue.

J'avais bien prévu une question plus dure pour occuper les rapides, mais pas vraiment qu'elle soit fausse. Donc si on oublie bêtement dans l'énoncé que f soit bornée, le résultat est faux. La fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, a bien un graphe fermé, qui est l'union de nos deux morceaux d'hyperbole et de l'origine (un point, c'est fermé). Et pourtant la continuité en 0 laisse à désirer.

Supposons que f n'est pas continue. Donc il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que f n'est pas continue au point X_0. Ce qui veut dire qu'il existe une suite $\{X_k\}$ qui tend vers X et telle que $f(X_k)$ ne tend pas vers $f(X_0)$. Autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $||X - X_0|| \leq \delta$ et pourtant $|f(X_k) - f(X_0)| \geq \varepsilon$.

pour tout entier k, on essaie $\delta = 2^{-k}$. On trouve donc un point X_k tel que $||X_k - X_0|| \leq 2^{-k}$ mais $|f(X_k) - f(X_0)| \geq \varepsilon$. Ceci nous fait une suite $\{X_k\}$, qui clairement tend vers X_0. En plus, par hypothèse rajoutée dans le corigé, il existe $M \geq 0$ tel que $|f(X_k)| \leq M$ pour tout X (et même $|f(X)| \leq M$ pour tout X). Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite (une suite extraite), que je vais noter $\{X_{k_m}\}$, $m \geq 0$, telle que les $f(X_{k_m})$ convergent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc la suite des X_{k_m} et la suite des $f(X_{k_m})$ convergent toutes les deux, et on en déduit que les $Z_{k_m} = (X_{k_m}, f(X_{k_m})$ aussi ont une limite, qui est le couple $Z = (X_0, \ell)$.

Mais ces points sont sur le graphe, qui est fermé, donc la limite est dans le graphe aussi. Donc $\ell = f(X_0)$. C'est ennuyeux, parce que ℓ est la limite des $f(X_{k_m})$ qui sont tous à distance $\geq \varepsilon$ de $f(X_0)$, alors la limite aussi devrait être à distance $\geq \varepsilon$ de $f(X_0)$.

C'est aussi un argument assez connu, quoique plus compliqué, mais il faut essayer de ne pas oublier la moitié des hypothèses (pardon).