Partiel du 21/02/2023 - Durée : 3 heures

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Documents et tout autre appareil électronique sont interdits.

Exercice 1.

1. Soient $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $|||A||| < 1$.
   (a) Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible.
   (b) Montrer que
   $$|||(I_n - A)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||A|||}.$$
   Indication : utiliser que $(I_n - A)^{-1}(I_n - A) = I_n$ et chercher à minorer $|||(I_n - A)^{-1}(I_n - A)|||$.
2. Supposons que la matrice A est inversible, soit $b \in \mathbb{K}^n,\ b \neq 0$, et $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = b$.
   Soit $\Delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A + \Delta A$ est inversible et soit $x_\Delta \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A + \Delta A)x_\Delta = b$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{\|x_\Delta - x\|}{\|x\|} \leq |||(A + \Delta A)^{-1}|||\ |||\Delta A|||.$$
   Indication : chercher à écrire $x_\Delta - x = Mx$ pour une matrice M convenable.
   (b) Justifier que la matrice $I_n + A^{-1}\Delta A$ est inversible.
   (c) Soit $\mathrm{cond}(\cdot)$ le conditionnement relatif à la norme $|||\cdot|||$. Conclure que
   $$\frac{\|x_\Delta - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}|||(I_n + A^{-1}\Delta A)^{-1}|||.$$
   En déduire que si en plus $|||A^{-1}|||\ |||\Delta A||| < 1$, alors
   $$\frac{\|x_\Delta - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}\frac{1}{1 - |||A^-1\Delta A|||}.$$
3. On considère ici la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$, la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (la norme $|||\cdot|||_\infty$) et le conditionnement $\mathrm{cond}_\infty(\cdot)$ relatif à cette norme. Soit
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta A = \begin{bmatrix} 10^{-14} & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{bmatrix}.$$
   (a) Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-6} \end{bmatrix}^T$. Donner la solution $X \in \mathbb{R}^2$ de $AX = B$, et la solution X_Δ de $(A + \Delta A)X_\Delta = B$.
   (b) Calculer
   $$\mathrm{cond}_\infty(A), \quad \frac{\|X - X_\Delta\|_\infty}{\|X\|_\infty} \quad \text{et} \quad \frac{|||\Delta A|||_\infty}{|||A|||_\infty}.$$
   Commenter les résultats obtenus (*il suffit de donner un ordre de grandeur des valeurs pour les comparer*).

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^T = -M$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque est définie positive si $(Mx|x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$.

1. Montrer, en justifiant les calculs, que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors
$$(Mx|x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A_s \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et $A_{as} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique tel que $A = A_s + A_{as}$. On appelle A_s la partie symétrique de A et A_{as} sa partie antisymétrique.
3. En déduire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa partie symétrique est définie positive.
4. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Montrer que A est définie positive.
   (b) Calculer le spectre de A (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A). Que remarque-t-on par rapport au spectre d'une matrice symétrique réelle définie positive ?

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de montrer une généralisation à des matrices rectangulaires du théorème spectral pour des matrices normales. Attention donc : dans cet exercice les matrices sont rectangulaires.

1. **Questions préliminaires.**
Soient $p,\ n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Sa transposée est la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par ${A^T}_{i,j} = A_{j,i},\ i \leq n,\ j \leq p$. On note $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ et $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^p}$ respectivement le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ et dans $\mathbb{R}^p$. (Re)démontrer les résultats suivants :
   (a) $(A^T)^T = A$ et $(AB)^T = B^T A^T$, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   (b) $(Ax|y)_{\mathbb{R}^p} = (x|A^T y)_{\mathbb{R}^n}$, pour tous $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^p$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On suppose $p > n$.

1. Justifier que la matrice $A^T A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet des valeurs propres réelles et qu'il existe une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^T A$.
2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de $A^T A$, associées respectivement aux vecteurs propres $u_1, \ldots, u_n$ (donc $A^T A u_i = \lambda_i u_i$).
   (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i \geq 0$, et que si $\ker(A) = \{0\}$, alors $\lambda_i > 0$.
   (b) On suppose désormais que $\ker(A) = \{0\}$. Conclure que $A^T A = UDU^T$, avec $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale (*i.e.* $UU^T = U^T U = I_n$) dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale telle que $D_{ii} = \lambda_i > 0$.
   (c) On pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$. Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^p$ définis par $v_i = \frac{1}{\mu_i} A u_i$. Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille orthonormale de vecteurs de $\mathbb{R}^p$.
   (d) On utilise ici que $p > n$. On considère $v_{n+1}, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^p$ tel que $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_p)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$. Soit $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_p$. Justifier que V est une matrice orthogonale et montrer que l'on a $A = V \Sigma U^T$, avec $\Sigma \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ 0 \end{bmatrix}$$
   où $\tilde{D}$ est la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{D}_{ii} = \mu_i$ et 0 la matrice nulle de taille $(p-n) \times n$.
   Indication : représenter la matrice V par colonnes et regarder ce que vaut le produit $V\Sigma$.

Exercice 4.

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire ($UU^* = U^*U = I_n$).
   Soit $\|\cdot\|_2$ la norme induite par le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$ ($\|x\|_2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$) et $|||\cdot|||$ la norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que :
   (a) $\|Ux\|_2 = \|U^*x\|_2 = \|x\|_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.
   (b) $|||UA|||_2 = |||AU|||_2 = |||A|||_2$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (c) $\mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5.

Quelles sont les matrices diagonalisables $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $(I_n - M)^2 = 0$?
Remarque : attention, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.