Université Paris-Saclay - L3 Mathématiques
Analyse théorique et numérique des EDO - Année 2023-2024

TD3 - suite : Théorème de Cauchy-Lipschitz (existence et unicité de solution du problème de Cauchy) et théorème des bouts (temps de vie de la solution maximale).

Exercice 5. [**Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra**].

On se donne deux populations $H(t)$ de sardines (les proies) et $P(t)$ de requins (les prédateurs) au temps t, dont l'évolution au cours du temps suit la loi :

$$\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bP(t)) \\ P'(t) = P(t)(-c + dH(t)), \end{cases} \tag{1}$$

où $a, b, c, d > 0$. On suppose connues les populations de sardines et de requins à l'instant initial $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} H(0) = H_0, \\ P(0) = P_0, \end{cases} \tag{2}$$

où $H_0 \geq 0$ et $P_0 \geq 0$ sont donnés.

1. En posant $X = (H, P)$, réécrire le système (1) sous la forme $X' = F(X)$, où $F = (F_1, F_2)$ avec F_1, F_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Justifier que le problème de Cauchy (1)-(2) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle J contenant 0.
2. Donner la solution (maximale) du problème de Cauchy (1)-(2) dans chacun des quatre cas suivants :
   (a) $(H_0, P_0) = (0, 0)$;
   (b) $(H_0, P_0) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$;
   (c) $H_0 = 0$ et $P_0 > 0$;
   (d) $H_0 > 0$ et $P_0 = 0$.
3. Dans le plan (H, P), représentez les points d'équilibre du système (les points (H^*, P^*) tels que $F(H^*, P^*) = (0, 0)$. Étudier le signe des dérivées H' et P' et représenter le sens et la direction des champs de vecteurs dans le plan (H, P), suivant la position de H et P par rapport aux points d'équilibre. Intuitez quel sera le comportement des solutions (H, P) suivant la condition initiale.
4. Soit $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Démontrer que si la condition initiale $(H_0, P_0) \in Q$, alors $(H(t), P(t)) \in Q$ pour tout temps $t > 0$ où la solution est définie.
5. On suppose que $(H_0, P_0) \in Q$ et soit (H, P) la solution maximale du problème de Cauchy (1)-(2).
   (a) Montrer une inégalité différentielle faisant apparaître la quantité $\phi(t) := dH(t) + bP(t)$ au cours du temps. En déduire que la solution (H, P) est définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) (*) En étudiant la relation entre $(-c + dH)H'/H$ et $(a - bP)P'/P$, construire une fonction $E(x, y) = k(x) + \ell(y)$ vérifiant $E(H(t), P(t)) = \text{cst}$ et telle que $\lim_{X \in Q, \|X\| \to +\infty} E(X) = +\infty$. En déduire que les trajectoires de la solution maximale restent bornées.
   (c) Démontrez que si (H, P) converge quand $t \to +\infty$, c'est nécessairement vers un point d'équilibre.

(d) (**) Tracer sur un schéma les *nullclines* $\{(x,y) \in Q \mid F_i(x,y) = 0\}$ et les points d'équilibre. Les nullclines divisent le quart de plan Q en quatre ouverts

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in Q \mid F_1(x,y) > 0 \text{ et } F_2(x,y) < 0\},\\
B &= \{(x,y) \in Q \mid F_1(x,y) > 0 \text{ et } F_2(x,y) > 0\},\\
C &= \{(x,y) \in Q \mid F_1(x,y) < 0 \text{ et } F_2(x,y) > 0\},\\
D &= \{(x,y) \in Q \mid F_1(x,y) < 0 \text{ et } F_2(x,y) < 0\}.
\end{aligned}$$

Démontrer que si $(H_0, P_0) \in A$, alors la trajectoire de la solution maximale $(H(t), P(t))$ va parcourir successivement les ensembles A, B, C, D, A, B, etc. Montrer que les deux points de passage successifs de la solution à l'interface AB sont égaux, et en déduire que la solution (H, P) est périodique.

Indication : Utiliser la monotonie de H' et P' dans chacune des zones A, B, C, D et le fait que la solution est bornée pour déduire que si la trajectoire ne quitte pas une zone en temps fini, alors elle doit converger vers un des points d'équilibre. Conclure par l'absurde.