Sommation d'Abel

Anito Kodama

October 20, 2024

Démonstration de la somme des N premiers entiers via la formule de sommation d'Abel

La formule de sommation d'Abel est donnée par :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)\, du,$$

où $A(x) = \sum_{1 \leq n \leq \lfloor x \rfloor} a_n$.

Nous appliquons cette formule avec $a_n = 1$ et $\varphi(u) = u$, ce qui donne :

$$\sum_{1 \leq n \leq N} n = \lfloor N \rfloor N - \int_1^N \lfloor u \rfloor\, du.$$

Nous savons que :

$$\int_1^N \lfloor u \rfloor\, du = \frac{(N-1)N}{2}.$$

En substituant cette expression dans la formule, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{N} n = N^2 - \frac{(N-1)N}{2}.$$

En développant cette expression :

$$N^2 - \frac{(N-1)N}{2} = N^2 - \frac{N^2 - N}{2} = \frac{2N^2 - N^2 + N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Ainsi, nous retrouvons la formule bien connue des nombres triangulaires :

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$