L3 École Universitaire **Année 2021-22**

Examen du 16 Décembre 2021

Probabilités

Durée 3 heures

Les calculettes, téléphones, pigeons voyageurs, avions en papier, sarbacanes et tout autre moyen de communication avec autrui sont prohibés.

Les correcteurs apprécieront sous forme de points toute forme d'égard : des arguments bien exposés, une présentation soignée, des résultats soulignés.

Vous avez le droit d'admettre des résultats de questions que vous n'arrivez pas à traiter.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $1_{[0,1]}(x)$.

1 - Trouver la densité de la loi du couple $(X, X+Y)$.

2 - En déduire la loi de $X+Y$.

3 - Calculer de deux manières $E[X+Y]$.

Exercice 2

Soit U et U' deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et ε_p une variable de Bernoulli de paramètre p, indépendante de U et de U'. On note $V_p = \varepsilon_p U + (1-\varepsilon_p)U'$ et $W_p = \varepsilon_p U + (1-\varepsilon_p)(1-U)$.

1 - Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P((V_p \leq t) \cap (\varepsilon_p = 0))$ et $P((V_p \leq t) \cap (\varepsilon_p = 1))$.

2 - En déduire la loi de V_p.

3 - Suivre une démarche analogue pour trouver la loi de W_p.

4 - Montrer que pour tout $s, t \in [0,1]$,

$$P(W_p \leq s, U \leq t) = (1-p)\min(s,t) + p\max(0, t+s-1).$$

5 - Montrer que les variables U et $W_{\frac{1}{2}}$ sont décorrélées (i.e. de covariance nulle) mais ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$, une suite de variables aléatoires. Montrer que :

1 - Si la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ converge presque sûrement, elle converge en probabilité.

2 - Si la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ converge dans L^p ($p > 0$), elle converge en probabilité.

3 - Si la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ converge en probabilité, alors la suite $(X_{2i} - X_i)_{i\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 4

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes telles que X et Y suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$ et Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p compris entre 0 et 1. Simplifier les expressions suivantes :

1 - $E[(X + Y)(X + Z) \,|\, \sigma(X)]$

2 - $E[(X + Y)(X + Z) \,|\, \sigma(Y)]$

3 - $E[(X + Y)(X + Z) \,|\, \sigma(X, Y)]$

4 - $E[(X + Y)(X + Z) \,|\, \sigma(X, Z)]$

5 - $E[(X + Y)(X + Z) \,|\, \sigma(X, Y, Z)]$

6 - $E[f(X + Y) \,|\, \sigma(X)]$ où f est une fonction mesurable bornée.

7 - $E[f(X + Y) \,|\, \sigma(X, Y)]$ où f est une fonction mesurable bornée.

Exercice 5

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1 - Trouver la densité de la loi de $M := \max(X_1, X_2)$.

2 - Trouver la densité de la loi de $m := \min(X_1, X_2)$.

3 - *(bonus)* Montrer que le couple (m, M) a pour densité,

$$f_{(m,M)}(s, t) = 2 \times 1_{s\leq t}.$$

4 - Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver la fonction f_g telle que :

$$E[g(M) \,|\, m] = f_g(m).$$

5 - Calculer $E[M \,|\, m]$.

Exercice 6

Soit $x, \lambda \geq 0$ et E une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
1 - Calculer $f(x,\lambda) := E[e^{-\lambda E} 1_{E>x}]$ (on vérifiera pour contrôler le résultat trouvé que l'on a bien $f(0,0) = 1$).

Soit E_1 et E_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et $t_1, t_2 > 0$.

2 - Montrer que $E[1_{E_2 - E_1 > t_2} \,|\, E_1] = e^{-t_2 - E_1}$.

3 - En utilisant les deux questions précédentes, montrer que

$$E[1_{E_2 - E_1 > t_2} 1_{E_1 > t_1}] = \frac{e^{-t_2 - 2t_1}}{2}.$$

4 - En déduire que

$$P[(E_2 - E_1 > t_2) \cap (E_1 > t_1) \,|\, E_2 > E_1 > 0] = e^{-t_2 - 2t_1}.$$

5 - Soit $E_1, ..., E_n$ une suite de variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 et $t_1, ..., t_n > 0$. Trouver, ou à défaut conjecturer, la valeur de

$$P[(E_n - E_{n-1} > t_n) \cap ... \cap (E_2 - E_1 > t_2) \cap (E_1 > t_1) \,|\, E_n > ... > E_2 > E_1 > 0].$$