Université Paris-Sud - L3 MINT / DL MI-ME-MP / HEC
M309 - Calcul Différentiel et optimisation
Année 2019-2020

Une possible résolution du partiel du 8 novembre 2019

Durée : 3h00

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Documents et tout autre appareil électronique sont interdits.

Notations

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On note :

— $d_a f$ la différentielle de f en un point a de $\mathbb{R}^n$;

— Si $m = 1$, $\nabla f(a)$ le gradient de f en un point a de $\mathbb{R}^n$;

— Si $m = 1$, $D^2 f(a)$ la matrice Hessienne de f en un point a de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
3. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
5. Calculer, si ces dérivées existent,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Résolution de l'exercice 1.

1. La fonction $\tilde{f} : (x,y) \mapsto y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ est une fonction continue sur l'ensemble ouvert $D_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. La fonction f est donc continue sur D_1, car au voisinage de chaque point (x,y) de D_1, f coïncide avec $\tilde{f}$.

   Montrons que f est continue sur les points $(\bar{x}, 0)$, avec $\bar{x} \in \mathbb{R}$, en montrant que
   $$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y) = f(\bar{x}, 0).$$
   On a
   $$\left| y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq y^2, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \neq 0.$$
   Donc
   $$|f(x,y)| \leq y^2, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Comme
   $$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} y^2 = 0,$$
   on conclut que
   $$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y) = 0 = f(\bar{x}, 0).$$
   La fonction f est donc continue en $(\bar{x}, 0)$.

2. La fonction $(x,y) \mapsto y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ est dérivable par rapport à x et à y sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0\}$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right), \end{cases}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0$. D'autre part, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{x}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{x}{h}\right) = 0,$$

car

$$\left| h \sin\left(\frac{x}{h}\right) \right| \leq |h| \to 0, \text{ lorsque } h \to 0.$$

3. Sur l'ensemble ouvert $D_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0\}$ la fonction f est de classe C^1 car elle admet des dérivées partielles en tout point de cet ensemble et ses dérivées partielles sont des fonctions continues sur cet ensemble. Comme f est de classe C^1 sur D_1, f est différentiable en tout point de D_1. Montrons que f est différentiable en tout point $(x,0)$, avec $x \in \mathbb{R}$. On aura alors que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme les dérivées partielles de f en $(x,0)$ existent, f est différentiable en $(x,0)$ si

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f\left((x,0) + (h_1,h_2)\right) - f(x,0) - (\nabla f(x,0) | (h_1,h_2))}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

   Or

$$\frac{f\left((x,0) + (h_1,h_2)\right) - f(x,0) - (\nabla f(x,0) | (h_1,h_2))}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{h_2^2 \sin\left(\frac{x+h_1}{h_2}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \to 0, \text{ lorsque } (h_1,h_2) \to (0,0),$$

   car

$$\left| \frac{h_2^2 \sin\left(\frac{x+h_1}{h_2}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0, \text{ lorsque } (h_1,h_2) \to (0,0).$$

4. La fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$. En effet, on a

$$\lim_{y \to 0} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

   mais, si $x \neq 0$, il n'existe pas la limite

$$\lim_{y \to 0} x \cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

   car par exemple les suites $y_n = \frac{x}{2n\pi}$, $\tilde{y_n} = \frac{x}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ vérifient $\lim y_n = \lim \tilde{y_n} = 0$, mais

$$\lim_{n \to +\infty} x \cos\left(\frac{x}{y_n}\right) = x \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} x \cos\left(\frac{x}{\tilde{y_n}}\right);$$

   on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue aux points $(x,0)$, avec $x \neq 0$.

5. On a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$
et
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Exercice 2.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$F(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x).$$

1. Montrer que F est différentiable en tout point x de $\mathbb{R}^n$.
2. Donner la valeur de $\nabla F(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Résolution de l'exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a
$$F(x+h) = \frac{1}{2}(A(x+h)|x+h) - (b|x+h) =$$
$$\left\{\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)\right\} + \left\{\frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x) - (b|h)\right\} + \frac{1}{2}(Ah|h).$$
Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$L(h) = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x) - (b|h),\ h \in \mathbb{R}^n.$$
L est une application linéaire.
D'autre part, on a
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\frac{(Ah|h)}{\|h\|} = 0,$$
car, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a
$$\left|\frac{(Ah|h)}{\|h\|}\right| \leq \frac{\|Ah\|\|h\|}{\|h\|} = \|Ah\| \to 0,\ \text{lorsque } h \to 0.$$
On a alors montré que
$$F(x+h) = F(x) + L(h) + o(\|h\|),$$
avec $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire, ce qui prouve que F est différentiable au point x et que la différentielle de F en x est l'application linéaire L.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a montré dans 1.) que F est différentiable en x et que la différentielle de F en x est l'application linéaire définie par
$$d_xF(h) = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(Ah|x) - (b|h),\ h \in \mathbb{R}^n.$$
On a alors, pour $h \in \mathbb{R}^n$,
$$d_xF(h) = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(h|A^Tx) - (b|h) = \frac{1}{2}(Ax|h) + \frac{1}{2}(A^Tx|h) - (b|h) = \left(\frac{1}{2}(A+A^T)x - b\middle|h\right).$$
Comme $\nabla F(x)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que
$$d_xF(h) = (\nabla F(x)|h),\ \forall\ h \in \mathbb{R}^n,$$
on conclut que
$$\nabla F(x) = \frac{1}{2}(A+A^T)x - b.$$

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ et

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 de f au point $(0,0)$, avec reste de Young.

Résolution de l'exercice 3.
Le développement de Taylor d'ordre 2 de f au point $(0,0)$, avec reste de Young s'écrit

$$f(x,y) = f(0,0) + (\nabla f(0,0)|(x,y)) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} D^2 f(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + o(\|(x,y)\|^2).$$

On obtient alors

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + o(x^2 + y^2).$$

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = \big(x + y + z, xyz\big).$$

Soit f la fonction, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, définie par

$$f(x,y) = \left(\ln{(x+y)}, \frac{1}{y}, \frac{1}{\sqrt{xy}}\right).$$

1. Donner le domaine D de la fonction f et le représenter dans le plan. L'ensemble D est-il ouvert ? L'ensemble D est-il fermé ? Justifier.
2. Calculer la matrice jacobienne de f en un point $(x,y) \in D$ et la matrice jacobienne de g en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Sans calculer la fonction $g \circ f$, donner l'expression de la différentielle de $g \circ f$ au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Justifier.

Résolution de l'exercice 4.

1. On a

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y > 0,\ y \neq 0,\ xy > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\}.$$

   L'ensemble D est ouvert car tout point de D est intérieur à D : pour tout point $(x,y) \in D$, il existe $r > 0$ tel que la boule de centre (x,y) et rayon r est contenue dans D.
   L'ensemble D n'est pas fermé car D ne coïncide pas avec son adhérence : le point $(0,0)$, par exemple, n'appartient pas à D mais est adhérent à D, car toute boule de centre $(0,0)$ intersecte D.
2. On a f différentiable sur D, g différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et, pour $(x,y) \in D$,

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{y}{2(xy)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{x}{2(xy)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix};$$

   pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}.$$

3. La fonction f est différentiable au point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et g est différentiable au point $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=(0,2,2)$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, $g\circ f$ est différentiable en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et

$$d_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(g\circ f)=\left(d_{f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}g\right)\circ\left(d_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}f\right)=\left(d_{(0,2,2)}g\right)\circ\left(d_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}f\right).$$

La matrice jacobienne de $g\circ f$ en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est alors donnée par

$$D(g\circ f)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=Dg(0,2,2)\times Df\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

On obtient

$$D(g\circ f)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}1&1&1\\4&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1\\0&-4\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-5\\4&4\end{bmatrix}.$$

La différentielle de $g\circ f$ au point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ est ainsi l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$d_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(g\circ f)(x,y)=\begin{bmatrix}-1&-5\\4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(-x-5y,4x+4y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Exercice 5.
Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $g:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$g(t)=f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big).$$

1. Calculer $g'(t),\ \forall t>0$. Sachant que $\nabla f(0,1)=(1,-1)$, donner la valeur de $g'(1)$.
2. Sachant en plus que $\partial^2_{xx}f(0,1)=1$, calculer $g''(1)$.

Résolution de l'exercice 5.

1. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $\varphi:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),$$

avec

$$\varphi_1(t)=\ln(t),\quad \varphi_2(t)=e^{(t-1)^2},$$

est différentiable sur $]0,+\infty[$. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, $g=f\circ\varphi$ est différentiable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}g'(t)&=\Big(\nabla f(\varphi(t))\Big|(\varphi_1'(t),\varphi_2'(t))\Big)=\Big(\nabla f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)\Big|\big(\frac{1}{t},2(t-1)e^{(t-1)^2}\big)\Big)\\&=\frac{1}{t}\partial_x f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)+2(t-1)e^{(t-1)^2}\partial_y f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big).\end{aligned}$$

On obtient alors

$$g'(1)=\Big(\nabla f\big(\ln(1),e^{(1-1)^2}\big)\Big|\big(1,2(1-1)e^{(1-1)^2}\big)\Big)=\big(\nabla f(0,1)|(1,0)\big)=\big((1,-1)|(1,0)\big)=1.$$

2. Les fonctions f et φ sont deux fois différentiables. On peut alors à nouveau appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées pour obtenir

$$\begin{aligned}g''(t)=&-\frac{1}{t^2}\partial_x f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)+\Big(2e^{(t-1)^2}+4(t-1)^2e^{(t-1)^2}\Big)\partial_y f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)\\&+\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{t}\partial^2_{xx}f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)+2(t-1)e^{(t-1)^2}\partial^2_{yx}f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)\Big)\\&+2(t-1)e^{(t-1)^2}\Big(\frac{1}{t}\partial^2_{xy}f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)+2(t-1)e^{(t-1)^2}\partial^2_{yy}f\big(\ln(t),e^{(t-1)^2}\big)\Big).\end{aligned}$$

On a alors

$$g''(1)=-\partial_x f(0,1)+2\partial_y f(0,1)+\partial^2_{xx}f(0,1)=-1-2+1=-2.$$

Exercice 6.

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Justifier que pour tout $a \in \Omega$, il existe une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :
   i) l'application
   $$a \in \Omega \longmapsto L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
   est continue ;
   ii) pour tout $a \in \Omega$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,
   $$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L_a(v).$$
2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que pour tout $a \in \Omega$, il existe une application linéaire $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :
   i) l'application
   $$a \in \Omega \longmapsto L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
   est continue ;
   ii) pour tout $a \in \Omega$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on ait
   $$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L_a(v).$$

   Montrer alors que f est de classe C^1 sur Ω et que pour tout $a \in \Omega$ on a $d_a f = L_a$.

Résolution de l'exercice 6.

1. La fonction f est de classe C^1 sur Ω. Par définition de fonction de classe C^1, f est différentiable en tout point de Ω et l'application
   $$a \in \Omega \longmapsto d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
   est continue, où, pour $a \in \Omega$, $d_a f$ est la différentielle de f au point a. Ainsi, pour tout $a \in \Omega$, il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, donnée par la différentielle de f en a, tel que (i) est vérifié.
   D'autre part, soit $a \in \Omega$. Comme f est différentiable en a, pour tout $v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, la dérivée de f en a selon le vecteur v, définie par
   $$f'_v(a) = \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$
   existe et est donnée par
   $$f'_v(a) = d_a f(v).$$
   On a alors que (ii) est aussi vérifié (on remarque que si $v = 0$, la limite dans (ii) vaut 0, ainsi que $d_a f(v)$).
2. Supposons que, pour tout $a \in \Omega$, il existe $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire tel que (i) et (ii) soient vérifiés. Alors en particulier, en prenant $v = e_i$, avec e_i le i ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient que la i ème dérivée partielle de f en a existe, pour tout $a \in \Omega$, et que
   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = L_a(e_i),\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall\, a \in \Omega.$$
   Par (i), l'application $a \in \Omega \longmapsto L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est continue. On a aussi que, pour $v \in \mathbb{R}^n$ donné, l'application
   $$L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longmapsto L_a(v) \in \mathbb{R}$$

est continue, car

$$|L_a(v) - L_b(v)| = |(L_a - L_b)(v)| \leq |||L_a - Lb||| \, ||v|| \to 0, \text{ lorsque } a \to b.$$

On en déduit que, si $v \in \mathbb{R}^n$ est donné, l'application

$$a \in \Omega \longmapsto L_a(v) \in \mathbb{R}$$

est continue. En considérant le cas $v = e_i$, on obtient que la i ème dérivée partielle de f est une fonction continue sur Ω. Ceci est valable pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc toutes les dérivées partielles de f sont continues sur Ω. On en déduit que f est de classe C^1 sur Ω.

Comme f est de classe C^1 sur Ω, f est aussi différentiable en tout point a de Ω et la différentielle de f en a est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$d_a f(h) = (\nabla f(a)|h), \ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, et puisque L_a est linéaire,

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i = \sum_{i=1}^n L_a(e_i) h_i = L_a(\sum_{i=1}^n h_i e_i) = L_a(h).$$

On obtient alors $d_a f = L_a$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que

$$\forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ f(tx) = t f(x).$$

Supposons que f est différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer alors que, pour tout $t > 0$, f est différentiable au point ta et $d_{ta} f = d_a f$.

Suggestion : utiliser la définition de différentiabilité.

Résolution de l'exercice 7.

Soit $t > 0$. Montrons que

$$f(ta + h) = f(ta) + d_a f(h) + o(\|h\|),$$

i. e. que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(ta + h) - f(ta) - d_a f(h)}{\|h\|} = 0.$$

Comme $d_a f$, la différentielle de f en a, est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, cela prouve que f est différentiable au point ta et que la différentielle de f au point ta est donnée par $d_{ta} f = d_a f$.

On a

$$\begin{aligned} f(ta + h) - f(ta) - d_a f(h) &= f\Big(t\big(a + \frac{h}{t}\big)\Big) - f(ta) - d_a f(h) \\ &= t f\big(a + \frac{h}{t}\big) - t f(a) - t d_a f\big(\frac{h}{t}\big) \ \text{ (car } d_a f \text{ est linéaire).} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{f(ta + h) - f(ta) - d_a f(h)}{\|h\|} &= \frac{t f\big(a + \frac{h}{t}\big) - t f(a) - t d_a f\big(\frac{h}{t}\big)}{\|h\|} \\ &= \frac{t f\big(a + \frac{h}{t}\big) - t f(a) - t d_a f\big(\frac{h}{t}\big)}{t \big\|\frac{h}{t}\big\|} \\ &= \frac{f\big(a + \frac{h}{t}\big) - f(a) - d_a f\big(\frac{h}{t}\big)}{\big\|\frac{h}{t}\big\|} \to 0, \quad \text{lorsque } h \to 0, \end{aligned}$$

car

$$\frac{f(a + w) - f(a) - d_a f(w)}{\|w\|} \to 0, \quad \text{lorsque } w \to 0,$$

puisque f est différentiable en a, et $\frac{h}{t} \to 0$, lorsque $h \to 0$.