Résumé de Cours d'Analyse, chapitre V, année 2023: Fubini.

---

1 Ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Soit n un entier $n > 1$.

Définition: Un pavé P dans $\mathbb{R}^n$ est le produit cartésiens de n intervalles fermés bornés:

$$P = \times_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i]$$

avec $a_i \leq b_i$ des nombres réels pour $i = 1, \cdots n$

Ainsi $x \in \times_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i]$ si et seulement si $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ avec $x_i \in [a_i,\, b_i]$ pour tout $i = 1, \cdots n$.

De façon tout à fait analogue au cas $n = 1$, nous cherchons à construire une mesure sur les sous ensembles de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit de déterminer une fonction λ qui, aux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, associe une valeur positive, tout en vérifiant les axiomes de σ-additivité et d'invariance par translation (vus dans le cas où $n = 1$) et qui, appliquée aux pavés, prend comme valeur le volume de ces pavés.

Comme pour le cas $n = 1$, on démontre qu'une telle mesure ne peut pas exister sur l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}^n$.

Définition: Tribu ou σ-algèbre sur $\mathbb{R}^n$

On appelle tribu sur $\mathbb{R}^n$, ou σ-algèbre sur $\mathbb{R}^n$, tout ensemble S de parties de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les trois axiomes suivants:

1. $\mathbb{R}^n \in S$
2. Si $E \in S$ alors son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ l'est aussi.
3. Toute réunion dénombrable d'éléments de S est aussi dans S. Ainsi par passage au complémentaire, toute intersection dénombrable d'éléments de S est aussi dans S.

C'est sur ces ensembles que l'on peut définir une mesure.

On a alors le

Théorème: existence et unicité de la mesure Lebesgue.

Il existe une unique mesure λ, la mesure de Lebesgue, ainsi qu'une tribu sur $\mathbb{R}^n$, dite tribu de Lebesgue,(les éléments de la tribu de Lebesgue seront appelés dans le cours, les ensembles mesurables), vérifiant les 3 axiomes suivants:

1. **Normalisation:** Pour tout pavé $P = \times_{i=1}^n [a_i,\, b_i]$ de $\mathbb{R}^n$, $\lambda(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
2. σ**-additivité**: pour toute suite de sous ensembles mesurables $(E_i)_{i\geq 1}$ de $\mathbb{R}^n$, disjoints deux à deux, $E_i \cap E_J = \emptyset$ si et seulement si $i \neq j$, on a:
$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(E_i).$$
3. **Invariance par translation:** pour tout $r \in \mathbb{R}^n$ et pour tout E sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, on a:
$$\lambda(E + r) = \lambda(E)$$
où $E + r = \{x + r, \;\; x \in E\}$.

Remarque

Une autre tribu sur $\mathbb{R}^n$ peut être très utile en analyse: la tribu de Borel. Il s'agit de la plus petite tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Cette tribu est associée à une mesure, dite mesure de Borel-Lebesgue. La mesure de Lebesgue coincide avec la mesure de Borel-Lebesgue sur la tribu des Boréliens.

La mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue est complète. Ce qui signifie que tout ensemble inclus dans un ensemble mesurable et négligeable (de mesure nulle) est un ensemble mesurable.

Ce n'est pas le cas de la mesure de Borel-Lebesgue sur la tribu des Boréliens. On démontre que la mesure de Lebesgue est en fait la complétée de celle de Borel-Lebesgue (la tribu de Lebesgue correspond à celle de Borel augmentée de tous les ensembles inclus dans un borélien de mesure nulle, dits ensembles négligeables.)

De même l'intégrale de Lebesgue est définie sur un ensemble particulier de fonctions: les fonctions mesurables.

2 Fonctions mesurables.

Définition des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$.

Supposons $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ notée L et $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue sur R, notée U. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite mesurable si et seulement si $f^{-1}(E) \in L$ pour tout $E \in U$.

Exemple

Toute fonction f s'écrivant de la manière suivante:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \, 1_{E_i}$$

où $(E_i)_{i=1,\cdots n}$ est une suite finie d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ et $(a_i)_{i=1,\cdots n}$ une suite finie de nombres réels, est dite fonction étagée. Alors toute fonction étagée est mesurable.

Dans toute la suite du cours nous ne considérerons que des ensembles et fonctions mesurables. Il ne sera jamais demandé de prouver la nature mesurable d'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ ou d'une fonction.

3 Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^n$.

Définition-Théorème de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^n$:

A toute fonction mesurable positive, $f : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty]$, f pouvant prendre des valeurs infinies, on associe l'intégrale de Lebesgue de f notée $\int f \, d\lambda$ ou $\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \, d\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, vérifiant les trois axiomes suivants:

1. Normalisation: Pour tout pavé $P = \times_{i=1}^{n} [a_i, \, b_i]$ de $\mathbb{R}^n$, $\int 1_P d\lambda = \lambda(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.
2. Croissance: Pour toutes fonctions f et g positives telles que $f \leq g$ alors $\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$.
3. Linéarité positive: $\forall \alpha \geq 0$ et toutes fonctions f et g positives

$$\int (\alpha f + g) d\lambda = \alpha \int f d\lambda + \int g d\lambda.$$

L'intégrale vérifie le théorème de convergence monotone.

Théorème de convergence monotone

Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives, (i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$) de limite simple f, ($f(x) = \sup_n f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$), alors f est mesurable positive et:

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f d\lambda.$$

Le théorème suivant, dit de Fubini-Tonelli nous permet de calculer les intégrales de fonctions mesurables positives définies sur $\mathbb{R}^n$ par n-itérations successives de calcul d'intégrales de fonctions positives définies sur $\mathbb{R}$.

Exprimons le dans cas où $n = 2$:

Définition, propriété: Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on note $f_x : y \mapsto f(x, y)$. De même on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on note $f^y : x \mapsto f(x, y)$. Alors f_x est mesurable pour tout x et f^y est mesurable pour tout y.

Théorème de Fubini-Tonelli: cas $n = 2$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On a l'égalité entre les intégrales suivantes, bien définies:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, d\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(y)) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, d\lambda(x)) \, d\lambda(y).$$

Ce qui peut s'écrire comme:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, d\lambda(x, y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f_x(y) \, d\lambda(y)) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f^y(x) \, d\lambda(x)) \, d\lambda(y).$$

Théorème de Fubini-Tonelli cas $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On a l'égalité entre les différentes intégrales suivantes, bien définies:

$$\int f \, d\lambda = \int (\cdots (\int (\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \, d\lambda(x_{\sigma(1)})) \, d\lambda(x_{\sigma(2)})) \cdots) \, d\lambda(x_{\sigma(n)})$$

pour toute permutation σ du groupe symétrique S_n.

Définition: intégrabilité d'une fonction positive de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction positive $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ est intégrable si et seulement si f est mesurable et l'intégrale de Lebesgue $\int f d\lambda$ est finie, i.e. $\int f d\lambda \in \mathbb{R}_+$.

4 Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles

Définition: intégrabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si f est mesurable et sa valeur absolue, $\mid f \mid$, est intégrable. Ainsi f^+ et f^- sont elles aussi des fonctions positives intégrables et

$$\int \mid f \mid d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque:

Pour démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est intégrable, il est très utile d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ et de démontrer que $\int |f| \, d\lambda \in \mathbb{R}_+$ (i.e. est finie).

Définition: intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On définit l'intégrale de Lebesgue de f par:

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda.$$

l'intégrale a les propriétés suivantes:

Propriétés

1. L'application $f \mapsto \int f \, d\lambda$ définie pour les fonctions intégrables est une application linéaire.
2. l'inégalité triangulaire pour toute fonction intégrable:
$$\mid \int f d\lambda \mid \leq \int \mid f \mid \, d\lambda.$$
3. Croissance de l'intégrale: soit f et g deux fonctions intégrables de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telles que $f \leq g$ alors
$$\int f \, d\lambda \leq \int g \, d\lambda.$$
4. L'intégrale vérifie le théorème de convergence dominée ainsi que ses deux corollaires (continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre)

Le théorème suivant, dit de Fubini, nous permet, comme dans le cas de fonctions positives, de calculer des intégrales de fonctions intégrables définies sur $\mathbb{R}^n$ par n-itérations successives de calcul d'intégrales de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Exprimons le dans cas où $n = 2$:

Théorème de Fubini cas $n = 2$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors:

1. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est intégrable et la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$ est intégrable,
2. pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction f^y est intégrable et la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f^y(x)\, d\lambda(x)$ est intégrable,
3. et on a l'égalité:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y))\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(x))\, d\lambda(y).$$