École universitaire Paris-Saclay — Licence de mathématiques (L3)
Année universitaire 2023/2024 — MEU 302 Algèbre

Feuille d'exercices n°4

Rédaction solutions $\mathscr{F}.\mathscr{J}$

Exercice I

On considère plusieurs applications $\varphi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

a. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$;
b. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$;
c. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + x_1y_2$;
d. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1$;
e. $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2$.

(1) Lesquelles définissent une forme bilinéaire ?
Solution : Si $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ $w = (z_1, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et λ de $\mathbb{R}$ on a :
☞ Pour la a. : Dans la question (2) on montre que cette application est symétrique, il suffit donc de montrer la linéarité par rapport à la variable de droite (ou de gauche) : $\varphi(u+\lambda v, w) = (x_1+\lambda y_1)z_2+(x_2+\lambda y_2)z_1 = \varphi(u, w)+\lambda\varphi(v, w)$, donc φ est bien bilinéaire (symétrique par la réponde à la question b.).
☞ Pour le b. : bilinéaire facile ...
☞ Pour le c. : Le terme x_1x_2 met en défaut la linéarité à gauche : $\varphi(\lambda u, v) = \lambda^2x_1x_2 + \lambda x_1y_2 = \lambda(\lambda x_1x_2 + x_1y_2) \neq \lambda\varphi(u, v)$.
☞ Pour le d. : bilinéaire facile...
☞ Pour le e. : bilinéaire facile...

(2) Parmi les formes bilinéaires, lesquelles sont symétriques ? antisymétriques ?
Solution : Si $u = (x_1, x_2)$ et $v = (y_1, y_2)$ on a :
☞ Pour le a. : $\varphi(u, v) = x_1y_2+x_2y_1 = y_1x_2+y_2x_1 = \varphi(v, u)$, donc bilinéaire symétrique.
☞ Pour le b. : $\varphi(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1 = -(y_1x_2 - y_2x_1) = -\varphi(v, u)$, donc bilinéaire antisymétrique.
☞ Pour le c. : pas bilinéaire.
☞ Pour le d. bilinéaire symétrique facile...
☞ Pour le e. bilinéaire ni symétrique ni anti symétrique.

(3) Pour les formes bilinéaires, écrire la matrice de φ dans la base canonique, ainsi que la forme quadratique correspondante.
Solution : La matrice d'une application linéaire à pour coefficient $a_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$ d'où :
☞ $Mat(\varphi_a, Can) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
☞ $Mat(\varphi_b, Can) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
☞ $Mat(\varphi_d, Can) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
☞ $Mat(\varphi_e, Can) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Exercice II

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
(1) Déterminer l'expression de φ.
Solution : On a $\varphi(u, v) = (U)^tAV$ pour tout $u, v \in \mathbf{R}^2$,
d'où $\varphi(u, v) = x_1y_1 - x_2y_2$.
(2) Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ la base de $\mathbf{R}^2$ définie par $e'_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $e'_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Déterminer l'expression de φ *en fonction des coordonnées dans la base* $\mathscr{B}'$ ainsi que la matrice A' de φ dans la base $\mathscr{B}'$. On note $\mathscr{C}_{an}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Solution : Si on note $P = Mat(id, \mathscr{B}', \mathscr{C}_{an})$ la matrice de changement de base, on a $U = PU'$, d'où :
$\varphi(u, v) = (PU')^tAPV' = (U')^t(P)^t\ A\ PV' = (U')^t(P^tAP)V' = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}y_1x_2$,
on a la aussi $Mat(\varphi, \mathscr{B}') = P^tAP = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice III

On considère l'application la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - x_2y_2$.

(1) Déterminer deux formes bilinéaires φ_1 et φ_2 telles que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec φ_1 symétrique et φ_2 antisymétrique.

(2) Déterminer les matrices de φ, φ_1 et φ_2 dans la base canonique.

Exercice IV

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On note $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique. Représenter graphiquement les sous-espaces $\ker f$, $\ker f^\star$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} f^\star$.

Exercice V

(1) Parmi les applications $q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définies ci-dessous, lesquelles sont des formes quadratiques ?

a. $q(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2$;
b. $q(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1 + 3x_2 + 6x_2^2$;
c. $q(x_1,x_2,x_3) = 8x_1x_2 + 4x_2^2$;
d. $q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$;
e. $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 7x_3^2$;
f. $q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2$;
g. $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + 2x_2x_3$.
h. $q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

(2) Pour chacune des formes quadratiques identifiées à la question (1), déterminer sa forme bilinéaire symétrique associée, sa matrice dans base canonique, son rang.

(3) Déterminer la signature des formes quadratiques identifiées à la question (1). *(Dans un premier temps, ne pas traiter cette dernière question : y revenir quand la réduction de Gauss aura été vue en cours.)*

Exercice VI

Soit $q : E \to \mathbf{R}$ une forme quadratique réelle. On note $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée.

(1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et $u \in E$, $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.
Solution : On sait que $q(u) = \varphi(u,u)$, donc on a $q(\lambda u) = \varphi(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2\varphi(u,u) = \lambda^2 q(u)$, car φ est la forme bilibénaire associée à q

(2) Montrer que pour tout $(u,v) \in E^2$, $q(u+v) = q(u) + q(v) + 2\varphi(x,y)$.
Solution : On a $q(u+v) = \varphi(u+v,u+v) = q(u) + 2\varphi(u,v) + q(v)$ car φ est symétrique donc $\varphi(u,v) + \varphi(v,u) = 2\varphi(u,v)$.

(3) Montrer que pour tout $(u,v) \in E^2$, $\varphi(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right)$.
Solution : On a $\frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right) = \frac{1}{4}(\varphi(u+v,u+v) - \varphi(u-v,u-v)) = \frac{1}{4}(q(u) + q(v) + 2\varphi(u,v) - q(u) - q(v) + 2\varphi(u,v)) = \varphi(u,v)$.

(4) Montrer que pour tout $(u,v) \in E^2$, $(q(u+v) + q(u-v) = 2(q(u) + q(v))$.
Solution : On a $q(u+v) + q(u-v) = \varphi(u+v,u+v) + \varphi(u-v,u-v) = 2q(u) + 2q(v)$.

Exercice VII

Déterminer la signature de la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$.

Solution : On développe et on utilise l'algorithme de Gauss qui nous donne une somme de formes linéaires indépendantes.

Exercice VIII

On munit $\mathbf{R}^2$ du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $5(x^2 + y^2) + 6xy = 16$.

(1) Réduire la forme quadratique apparaissant dans le membre de gauche de l'équation dans une base orthonormale.

(2) Déterminer les caractéristiques géométriques de $\mathscr{C}$.

(3) Déterminer les valeurs minimales et maximales prises par la restriction de la fonction $(x, y) \longmapsto 5(x^2 + y^2) + 6xy$ sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice IX

Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ définie par la formule $q(x, y) = x^2 - y^2$. Existe-t-il un système de coordonnées (x', y') (*i.e.* x' et y' sont les fonctions coordonnées dans une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ bien choisie) telle que l'expression de q devienne :

a. $q = 2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;
   Solution : Les formes quadratiques n'ont pas même signature, c'est donc impossible.

b. $q = 2x'^2 - \frac{1}{4}y'^2$;
   Solution : si on fait le changement de variable $\sqrt{2}x' = x$ et $\frac{1}{2}y' = y$ on a $x' = \frac{x}{\sqrt{2}}$ et $y' = 2y$, matriciellement on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notons $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, P est la matrice $Mat(id, \mathscr{B}', \mathscr{B})$, on a donc $Mat(q, \mathscr{B}) = P^t \times Mat(q, \mathscr{B}') \times P$

c. $q = -2x'^2 + \frac{1}{4}y'^2$;

d. $q = x'y'$;

e. $q = x'^2$;

Exercice X

Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que la forme quadratique réelle $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Exercice XI

Soit E un espace euclidien. Soit $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On définit $q : E \to \mathbf{R}$ par la formule $q(x) = \lambda\|x\|^2 - \langle x, a\rangle^2$.

(1) Vérifier que q est une forme quadratique sur E.
(2) Justifier que tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $u+ta$ avec $u \in a^{\perp}$ et $t \in \mathbf{R}$. Calculer $q(u+ta)$.
(3) Notons $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ la forme bilinéaire symétrique associée à q. Calculer $\varphi(u+ta, u'+t'a)$ où u et u' sont des éléments de $a^{\perp}$, et t et t' des réels.
(4) On suppose que $\dim E \geq 2$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur λ est-ce que q est définie positive ?

Exercice XII

Décrire les courbes déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^2$:

a. $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$;
b. $3x^2 - 2xy - 3y^2 = 1$;
c. $3xy = 1$;

Exercice XIII

Décrire les surfaces déterminées par les équations cartésiennes suivantes dans $\mathbf{R}^3$:

a. $x + y + z = 3$;
b. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
c. $x^2 + y^2 = 1$;
d. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
e. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice XIV

On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$ sur $\mathbf{R}^3$. Soit A la matrice de q dans la base canonique.
(1) Déterminer A.
(2) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculer AU, AV, AW.
(3) Quelle est la signature de q ?
(4) Déterminer la matrice de q dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (correspondant aux vecteurs-colonnes U, V, W).
(5) Déterminer $q(x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w})$ en fonction des réels x', y' et z'.
(6) Appliquer la réduction de Gauss à la forme quadratique q.
(7) Quelle est la nature géométrique du cône isotrope de q ?