Université Saclay-Paris-Sud **Feuille de TD 9** **M303**

Exercice 1 Soient $1 \leq k \leq n$ deux entiers et soient $(a_1, \ldots, a_k)$ un k-cycle et σ une permutation de S_n.

1. Calculer $\sigma(a_1, \ldots, a_k)\sigma^{-1}$.
2. Montrer que les k-cycles sont tous conjugués dans S_n.
3. Notons $\sigma = \prod_{i=1}^{r} \gamma_i$ sa décomposition en produit de cycles à supports deux à deux disjoints. On note pour tout i, d_i l'ordre de γ_i et on suppose les γ_i ordonnés de sorte que $d_i \leq d_{i+1}$. On appelle le r-uplet $(d_1, \ldots, d_r)$ *le type* de σ. Déterminer la classe de conjuguaison de σ en fonction de son type.

Exercice 2 Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer que le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i; i+1)_{1 \leq i \leq n-1}$.
2. Montrer que si l'on omet l'une de ces transpositions l'ensemble de celles qui restent n'engendre plus S_n.
3. Mêmes questions pour les transpositions $(1; i)_{2 \leq i \leq n}$.
4. Montrer que S_n est engendré par (12) et le cycle $c := (1, \ldots, n)$.

Exercice 3 Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Déterminer l'ordre du produit $s_1 s_2$ en fonction des ordres respectifs de s_1 et s_2 pour deux éléments s_1 et s_2 du groupe symétrique S_n dont les supports sont disjoints.
2. Généraliser, pour un entier $p > 2$ quelconque, le résultat précédent au produit de p éléments $(s_i)_{1 \leq i \leq p}$ du groupe symétrique S_n de supports deux à deux disjoints.
3. Pour $s := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 8 & 10 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{11}$, calculer s^{2022}.

Exercice 4 Dans le groupe symétrique S_{11}, y a-t-il un élément d'ordre 12 ? d'ordre 20 ? d'ordre 22 ? d'ordre 24 ? Justifier en donnant explicitement une telle permutation ou en expliquant pourquoi elle ne peut pas exister.

Exercice 5 Soit σ la permutation de S_n suivante : $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer σ^{2021}.
2. Montrer que σ est conjuguée dans S_9 à $\sigma' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Donner explicitement une permutation g telle que $\sigma' = g\sigma g^{-1}$.

Exercice 6 Soient

$$s_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 5 & 10 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 2 & 10 & 8 & 11 & 7 & 3 & 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

des permutations dans S_{11}.

1. Décomposer les permutations s_1 et s_2 en produits de cycles à supports deux à deux disjoints.
2. Déterminer l'ordre de s_1 et s_2 dans le groupe S_{11}.
3. Calculer la signature de s_1 et s_2.
4. Calculer s_1^{2022} et s_2^{2022}.
5. Les permutations s_1 et s_2 sont elles conjuguées dans S_{11}?
6. Les permutations s_1 et s_2 sont elles des éléments de A_{11}? Sont elles conjuguées dans A_{11} ?

Exercice 7 Soit G le sous-groupe de S_8 engendré par $\sigma := (123)(45)$ et $\tau := (78)$. Décrire les orbites et les stabilisateurs (dans G) d'un point de chaque orbite et calculer l'ordre de G.

Exercice 8 Soit n un entier.

1. Si n est impair, montrer qu'il existe exactement deux classes de conjugaison de n-cycles dans A_n qui contiennent chacune $\frac{(n-1)!}{2}$ éléments.
2. Si n est pair, montrer qu'il existe exactement deux classes de conjugaison de $n-1$-cycles dans A_n qui contiennent chacune $\frac{n(n-2)!}{2}$ éléments.

Exercice 9

1. Donner un élément $s \in S_8$ tel que : $s^2 = \mathrm{Id}$ et tel que pour tout $1 \leq i \leq 8$, $s(i) \neq i$.
2. Quels sont l'ordre et la signature de l'élément s donné ci-dessus ?
3. Notons E l'ensemble des éléments comme ci-dessus. Les éléments de E ont-ils tous même ordre ?
4. Les éléments de E ont-ils tous même signature ?
5. Les éléments de E sont-ils tous conjugués ?
6. Combien l'ensemble E a-t-il d'éléments ?
7. L'ensemble E est-il un sous-groupe de S_8 ?
8. Existe-t-il un élément $s \in S_8$ tel que $s^3 = \mathrm{Id}$ et tel que pour tout $1 \leq i \leq 8$, $s(i) \neq i$?

Exercice 10 (Extrait de l'examen de janvier 2021 ; sur 4 points) Soit $n \geq 3$ impair.

1. On rappelle que A_n est simple pour $n \geq 5$. Soit $\phi : S_n \to A_{n+1}$ un morphisme injectif. On note H son image. En faisant agir A_{n+1} sur l'ensemble quotient A_{n+1}/H par translation aboutir à une contradiction : il n'existe pas de tel morphisme injectif.
2. Donner une preuve alternative de la question précédente pour $n \notin \{3, 5\}$ en utilisant que pour ces entiers n on sait par le cours que : dans S_{n+1} les sous-groupes d'indice $n+1$ sont tous conjugués et sont les stabilisateurs d'un point $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, notés $S(i)$ (avec i variable).
3. Montrer que dans A_4, si c_1 et c_2 sont deux cycles d'ordre 3 alors il existe $\sigma \in A_4$ telle que
$$c_1 = \sigma c_2 \sigma^{-1} \quad \text{ou} \quad c_1 = \sigma c_2^2 \sigma^{-1}.$$
4. On rappelle qu'un sous-groupe H d'indice 2 d'un groupe G est automatiquement distingué dans G. Montrer, avec ce qui précède, que aussi pour $n = 3$ on ne peut pas avoir un morphisme injectif de S_3 vers A_4.

Exercice 11 (Extrait de l'examen de janvier 2021, sur 11 points) Soit G le sous-groupe de S_7 engendré par les deux permutations $\alpha = (1,2,5)(3,4,6)$ et $\beta = (1,7)(2,6)$. Le but ultime (que nous n'atteindrons pas) serait de montrer que G est de cardinal 168 et est simple.

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe alterné A_7. Quel est l'ordre de α, de β ?
2. Calculer $\alpha\beta\alpha^{-1}$ puis $u = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ et montrer que u est d'ordre 4.
3. On note K le sous-groupe de G engendré par u et β.
   (a) Montrer que le groupe engendré par u, noté $\langle u \rangle$ est un sous-groupe distingué de K et que tout élément de K s'écrit sous la forme $\beta^i u^r$ avec $i \in \{0,1\}$ et $r \in \{0,1,2,3\}$.
   (b) Montrer que $K/\langle u \rangle$ est d'ordre 2 et en déduire l'ordre de K.
   (c) Montrer que K n'est pas un sous-groupe distingué de G.
4. Déterminer les éléments d'ordre 7 de S_7. Combien a-t-on d'éléments d'ordre 7 dans A_7 ?
5. Combien A_7 a-t-il de 7-sous-groupes de Sylow ?
6. Le *normalisateur d'un sous-groupe* H dans un groupe G' est le sous-groupe de G' formé des éléments g tels que $gHg^{-1} = H$. Montrer que si p est un nombre premier divisant l'ordre de G', l'indice du normalisateur d'un p-groupe de Sylow est égal au nombre de p-groupes de Sylow. En déduire que l'ordre du normalisateur dans A_7 d'un 7-sous-groupe de Sylow de A_7 est 21.
7. Soit G' un groupe et H un sous-groupe distingué de G'. On suppose que H contient un p-sous-groupe de Sylow T_p de G'. Montrer qu'il contient tous les p-sous-groupes de Sylow de G'.
8. On pose $v = \alpha\beta$. Quel est l'ordre de v ? Posons $u := (1,2,4,5,7,3,6)$. Montrer que $\langle v \rangle = \langle u \rangle$.
9. Montrer que les deux groupes $\langle (1,2,7,5,4,6,3) \rangle$ et $\langle v \rangle$ sont différents.
10. Montrer que ce sont deux sous-groupes de G (on pourra calculer $\alpha v \alpha^{-1}$).
11. Montrer que 168 divise l'ordre de G.
12. On suppose que G possède exactement 8 sous-groupes de Sylow d'ordre 7. Quel peut être l'ordre du normalisateur de $\langle v \rangle$ dans G ? En utilisant le calcul de l'ordre du normalisateur de $\langle v \rangle$ dans A_7, en déduire que G est d'ordre 168.

Exercice 12
1. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupe injectif de S_4 dans A_5 (On pourra raisonner sur le nombre d'éléments des groupes en question).
2. Plus généralement, montrer que si n est pair, il n'existe pas de morphisme injectif de S_n dans A_{n+1} (On pourra penser à utiliser les valuations 2-adiques).

Exercice 13 Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que le groupe symétrique S_n est isomorphe à un sous-groupe du groupe alterné A_{n+2} (on pourra considérer le morphisme naturel de S_n dans S_{n+2} qui envoie un élément s sur lui même et le modifier légérement de sorte à arriver dans A_{n+2}).

Exercice 14 (extrait de l'examen de juin 2021, sur 9 points)

1. Calculer le cardinal de $G = GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ en justifiant sommairement. Combien le plan $P = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ (sur le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) a-t-il de droites ? On note X l'ensemble des droites de P.

2. On fait opérer G sur X de manière naturelle (préciser quelle est l'action). L'action est-elle transitive ? Soit $\lambda : G \to S(X)$ l'homomorphisme associé. Calculer le noyau de λ (on rappelle qu'un endomorphisme laissant stable toutes les droites est une homothétie).
3. Soit H un sous-groupe de S_n d'indice n avec $n \geq 5$.
   (a) On fait opérer S_n sur $Y = S_n/H$ par multiplication à gauche. Montrer que l'homomorphisme associé de S_n dans $S(Y)$ est injectif. (Indication : On rappelle que A_n est le seul sous-groupe distingué non trivial de S_n.)
   (b) Calculer le stabilisateur de l'élément $y_0 = H$ de Y et montrer que H est isomorphe à S_{n-1}.
4. Montrer que $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \underset{\text{déf}}{=} GL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à S_5. (Indication : On pourra utiliser le résultat montré à la question précédente : un sous-groupe d'indice n de S_n est isomorphe à S_{n-1} pour $n \geq 5$.)
5. Montrer que le carré du déterminant se factorise en un homomorphisme de groupes de $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sur $\{\pm 1\}$ qui correspond à la signature $S_5 \to \{\pm 1\}$ par l'isomorphisme précédent.

Exercice 15 Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ (où $\mathbb{K}$ est un corps) muni d'une base $(v_1, \ldots, v_n)$.

1. Montrer que pour tout $s \in S_n$, il existe un unique endomorphisme $\phi(s)$ de V défini par

$$\forall 1 \leq i \leq n, \ \ \phi(s)(v_i) \ := \ v_{s(i)}.$$

2. Montrer que pour tout $s \in S_n$, l'élément $\phi(s)$ est inversible et que ϕ est un morphisme de groupes de S_n dans $\mathrm{GL}V$.
3. Le morphisme ϕ est-il injectif ? surjectif ?
4. La representation de S_n donnée par ϕ est-elle irréductible ou non ? Autrement dit existe-t-il un sous-espace $W \subset V$ tel que

$$W \ \neq \ V \ \text{ et } \ W \neq \{0\}, \ \text{ et tel que } \ \forall s \in S_n, \ \phi(s)(W) \subset W.$$