Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2021-2022

Examen du mardi 7 Juin 2021

Début 8h30 Durée : 3 heures

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Documents et appareils électroniques interdits.

Dans tout cet énoncé, $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne, notée $||\ ||$, et de la distance euclidienne. Donc $||x|| = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\}^{1/2}$. On notera $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire euclidien entre $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = (a + \cos(x))^2 + (a + \cos(y))^2 + \sin^2(z)$$

pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Expliquer pourquoi f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées partielles en (x, y, z).
2. Dites (précisément) qui est la différentielle $Df(x, y, z)$ de f au point $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$.
3. Vérifier que $0 = (0, 0, 0)$ est un point critique pour f, et expliquer pourquoi, rien qu'en regardant la variable z, on peut dire que f n'a pas de maximum local en 0.
4. Calculer (en fonction de a) les dérivées partielles secondes de f en (x, y, z).
5. Ecrire (en fonction de a) la matrice Hessienne de f en $0 = (0, 0, 0)$.
6. Déterminer, dans chacun des trois cas suivant, si f a un minimum local en 0 :
   (a) Quand $a > -1$
   (b) Quand $a < -1$
   (c) Quand $a = -1$.

Exercice 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par ses coordonnées

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \cos(x) + 4\sin(y) + \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \\ F_2(x, y) &= 2x + 3y - \sin(x + y). \end{aligned}$$

1. Démontrer que F est différentiable et calculer ses dérivées partielles.
2. Calculer $F(0, 0)$. Vérifier que $DF(0, 0)$ est inversible.
3. Démontrer, en utilisant la question précédente, qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout choix de $h \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $h^2 + k^2 \leq r_0$, le système d'équations
$$\begin{cases} F_1(x, y) &= 2 + h \\ F_2(x, y) &= k \end{cases} \tag{1}$$
a au moins une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dites rapidement pourquoi je n'ai pas dit une solution unique (mais n'essayez pas de chercher un couple (h, k) tel que (1) ait deux solutions).
4. Vérifier que $|2x| \leq 1 + x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis que $\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2$, $\left|\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right| \leq 5$, $\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)\right| \leq 3$, et $\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)\right| \leq 4$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $||\nabla F_1(x, y)|| \leq \sqrt{29}$ et $||\nabla F_2(x, y)|| \leq 5$ (on note $||\cdot||$ la norme euclidienne).
6. En déduire que F_1 est $\sqrt{29}$-Lipschitzienne et F_2 est 5-Lipschitzienne.

7. En déduire que F est $\sqrt{54}$-Lipschitzienne.
8. Utiliser un théorème important du cours pour montrer qu'il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{F(x,y)}{100} = (x,y)$.

Exercice 3. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 16x$.

1. Déterminer les points critiques de g.
2. Démontrer que $|2xy| \leq x^2 + y^2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $|16x| \leq 16\sqrt{x^2+y^2} \leq x^2 + y^2$, pour tout (x,y) tel que $\sqrt{x^2+y^2} \geq 16$.

On pose $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 16^2\big\}$, puis

$$m_1 = \inf\big\{g(x,y)\,;\,(x,y) \in K\big\} \text{ et } m_2 = \inf\big\{g(x,y)\,;\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

3. Montrer qu'il existe $(x_0,y_0) \in K$ tel que $g(x_0,y_0) = m_1$.
4. Vérifier que $m_2 \leq m_1 \leq 0$.
5. Vérifier que $m_2 = m_1$.
6. En déduire que g atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2$, déterminer (x_0,y_0), et calculer m_2.

Exercice 4. On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour f différentiable (sur $\mathbb{R}^2$), on définit $L_+(f)$ par $L_+(f)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $L_-(f)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Lorsque f a des dérivées partielles d'ordre 2 (en tout point de $\mathbb{R}^2$), on définit $H(f)$ par $H(f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que pour f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, $L_+(L_-(f))$ et $L_-(L_+(f))$ sont bien définies, et que $L_+(L_-(f)) = L_-(L_+(f)) = H(f)$. Pourquoi (en une ligne) ai-je demandé que f soit de classe C^2 ?
2. On se donne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Démontrer que la fonction f définie par $f(x,y) = g(x-y)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, calculer $L_+(f)$, et en déduire que $H(f) = 0$.

   Démontrer de même que la fonction φ définie par $\varphi(x,y) = g(x+y)$ est de classe C^2 et vérifie l'équation $H(\varphi) = 0$.
3. Utiliser les questions précédentes pour trouver deux fonction F et $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que $H(F) = H(G) = 0$ et $F(x,0) = G(x,0) = 12x^7 + 44$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (un peu de compacité dans $\mathbb{R}^n$).

1. On se donne une suite $\{x_k\}$, $k \geq 0$, de points de $\mathbb{R}^n$, et on suppose que la suite converge vers une limite $x \in \mathbb{R}^n$. On se donne également une suite $\{y_k\}$, $k \geq 0$, de points de $\mathbb{R}^n$, et on suppose que la suite converge vers une limite $y \in \mathbb{R}^n$. Démontrer (à la main !) que la suite $\{x_k + y_k\}$ converge vers $x + y$. On pourra commencer par le cas où $n = 1$.

On se donne maintenant deux parties compactes E et F de $\mathbb{R}^n$, et on considère l'ensemble $S = \big\{x + y\,;\, x \in E \text{ et } y \in F\big\}$. On veut démontrer que S est compact, et pour ceci on se donne une suite $\{z_n\}$ à valeurs dans S.

2. Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on peut trouver $x_n \in E$ et $y_n \in F$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
3. Démontrer qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $\{x_{\varphi(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$, converge vers une limite x.
4. Démontrer qu'il existe une application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $\{y_{\varphi(\psi(j))}\}$, $j \in \mathbb{N}$, converge vers une limite y.
5. Expliquer pourquoi $\{x_{\varphi(\psi(j))}\}$, $j \in \mathbb{N}$, converge vers x.
6. Vérifier que $x \in E$, $y \in F$, et $x + y \in S$.
7. En déduire que S est compact.