# Examen – MAG303

*Les exercices sont indépendants. Tout matériel électronique est interdit.*

**Exercice 1** Mettre sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini le groupe $\mathbb{Z}/900\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/540\mathbb{Z}$.

**Exercice 2** Dans $\mathbb{Z}^3$, on considère l'ensemble

$$B := \{(\lambda + 4\mu, 2\lambda + 5\mu, 3\lambda + 6\mu) \in \mathbb{Z}^3 \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Montrer que $B$ est un sous-groupe abélien libre de $\mathbb{Z}^3$ et déterminer son rang.
2. Ecrire $\mathbb{Z}^3/B$ sous la forme donnée par le théorème de structure.

**Exercice 3** Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Let but de cet exercice est d'étudier les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_p$. On dit qu'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ est transitif si son action naturelle sur $\{1, \ldots, p\}$ est transitive.

1. Montrer que tout conjugué d'un sous-groupe transitif est transitif.
2. Montrer qu'un sous-groupe $H \subset \mathfrak{S}_p$ est transitif ssi il contient un $p$-cycle.
3. En posant $X := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que l'on peut identifier $\mathfrak{S}_X$ à $\mathfrak{S}_p$.
4. On définit le groupe $GA_1$ comme

$$GA_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

   Quel est l'ordre de $GA_1$ ? Est-ce un groupe abélien ?
5. Montrer que l'applcation

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \right) \in GA_1 \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

   définit une action de groupe fidèle et transitive de $GA_1$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En déduire que $GA_1$ s'identifie naturellement à un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_p$.
6. On note $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GA_1$. Quelle est l'image de $\tau$ dans $\mathfrak{S}_p$ ?

On dit qu'un groupe fini $G$ est *résoluble* s'il existe une suite finie de sous-groupes distingués

$$1 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n = G,$$

telle que $G_i/G_{i+1}$ est abélien. On note $D(G)$ le groupe dérivé de $G$, i.e. sous-groupe engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$ : $D(G) :=< ghg^{-1}h^{-1}|g,h \in G >$, et $D^n(G) = D(D^{n-1}(G))$. On admettra que $G$ est résoluble si et seulement s'il existe $n \geq 1$ tel que $D^n(G) = \{1\}$.

7. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.
8. Pour quelles valeurs de $n$ le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est-il résoluble ?
9. Montrer que $GA_1$ est résoluble.
10. Soit $H$ un sous-groupe de $GA_1$ contenant $\tau$. Montrer que tout conjugué de $H$ dans $\mathfrak{S}_p$ est résoluble et transitif.

On va démontrer la réciproque à la question 10. Soit $H$ un sous-groupe résoluble transitif de $\mathfrak{S}_p$.

11. Montrer qu'il existe une suite finie de sous-groupes distingués

$$\{1\} \subsetneq H_1 \subset \cdots \subset H_n = H,$$

tels que pour tout $i$, $H_i/H_{i+1}$ est cyclique d'ordre premier.

12. Montrer que $H_1$ agit transitivement sur $\mathfrak{S}_p$.
(*Indication : Par récurrence descendante, pour* $1 \leq i \leq n-1$, *on pourra comparer l'orbite de* $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *sous les actions de* $H_i$ *et* $H_{i+1}$.)
13. En déduire que $H_1 \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
14. Montrer que si $g \in \mathfrak{S}_p$ vérifie $g\tau g^{-1} \in GA_1$ alors $g \in GA_1$.
15. En déduire que $H$ est conjugué à un sous-groupe de $GA_1$ qui contient $\tau$.
16. A conjugaison près, combien y a-t-il de sous-groupes résolubles transitifs de $\mathfrak{S}_p$ ?
17. Montrer qu'un élément non trivial d'un sous-groupe résoluble transitif de $\mathfrak{S}_p$ possède au plus un point fixe.