Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel - Année 2022-2023

Corrigé de l'Examen du mardi 25 Avril 2023

Durée : 3 heures

Comme c'est plus pratique, je garde l'énoncé dans le texte. Attention, je ne relis pas forcément, et vous savez que je fais des fautes de frapppe.

Exercice 1.
On considère les fonctions f_1 et f_2, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules

$$f_1(x,y,z,t) = \exp(x+y) + \exp(z+t) \tag{1}$$

$$f_2(x,y,z,t) = x^3 - y^3 + z^3 - t^3. \tag{2}$$

1. Calculer les deux vecteurs $\nabla f_1(x,y,z,t)$ et $\nabla f_2(x,y,z,t)$. Que valent ces deux vecteurs au point $(1,1,1,1)$?
2. Expliquez, sans faire de calcul supplémentaire, pourquoi f_1 et f_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

   On pose $F = (f_1, f_2)$, et $w = F(1,1,1,1) = (2e^2, 0) \in \mathbb{R}^2$.
3. Enoncer le théorème des fonctions implicite (pour F au point $(1,1,1,1)$) et en déduire qu'il existe une fonction φ, définie au voisinage de $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et un voisinage de $(1,1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^4$, dans lequel l'équation $F(x,y,z,t) = w$ est équivalente au fait que $(x,y) = \varphi(z,t)$.
4. On note φ_1 et φ_2 les deux coordonnées de φ. Déduire de la question précédente que $F(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t) = w$ au voisinage de $(1,1)$.
5. Calculer alors $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1)$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1)$.

Pour 1, pas de difficulté particulière. On trouve $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z,z) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z,z) = \exp(x+y)$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z,z) = \frac{\partial f_1}{\partial t}(x,y,z,z) = \exp(z+t)$, et pour f_2, le transposé de $\nabla f_2(x,y,z,t)$ est $(3x^2, -3y^2, 3z^2, -3t^2)$ (come d'habitude je transpose pour pouvoir l'écrire plus facilement sur une ligne, mais $\nabla f_2(x,y,z,z)$ est un vecteur colonne. On remplace et on trouve en $X = (1,1,1,1)$ les vecteurs transposés de (e^2, e^2, e^2, e^2) et $(3, -3, 3, -3)$ (demandés parce qu'on en aura besoin plus tard.

Pour 2, dire que les dérivées partielles trouvées sont continues, donc comme f_1 et f_2 ont des dérivées partielles continues, elles sont différentiables et donc de classe C^1.

Pour 3, voir le cours (cette partie était à apprendre par coeur, vous le saviez pourtant). On sait que la condition principale était la vérification de la condition d'inversibilité de la restriction de la différentielle de F par rapport aux seconde variables, ici z et t. Donc il fallait vérifier qu'au point X, la matrice composée de $\frac{\partial f_1}{\partial z}(X)$, $\frac{\partial f_1}{\partial t}(X)$, et de $\frac{\partial f_2}{\partial z}(X)$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}(X)$. Déterminant simple à calculer, qui était bien non nul.

Pour 4, qui est surtout une question préparatoire à la suivante, on observe que si (z,t) est assez proche de $(1,1)$ (dans le petit voisinage U de $(1,1)$ donné dans le cours), alors $\varphi(z,t)$ est bien défini, et $F(\varphi(z,t), z, t) = F(X) = w$. En écrivant $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, on trouve bien que $F(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t) = w$. De manière encore plus explicite, pour (z,t) assez proche de $(1,1)$, on a

$$f_1(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t) = 2e^2 \tag{3}$$

et

$$f_2(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t) = 0. \tag{4}$$

Or (question 5), par le théorème des fonctions implicites cité plus haut, on sait que φ_1 et φ_2 sont C^1 au voisinage de $(1,1)$, donc par composition $(z,t) \mapsto f_1(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t)$ et $(z,t) \mapsto f_2(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t)$

sont de classe C^1 aussi au voisinage de $(1,1)$, avec des dérivées partielles qu'on peut calculer. Ainsi, pour f_1 (et en notant $\partial_1, \partial_2, \partial_3, d_4$ les quatre dérivées partielles de f_1 pour éviter des confusion de notations),

$$\frac{\partial}{\partial z}\big[f_1(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t)\big] = \partial_1 f_1(\cdot)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(z,t) + \partial_2 f_1(\cdot)\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(z,t) + \partial_3 f_1(\cdot) + \partial_4 f_1(\cdot) \tag{5}$$

où j'ai aussi remplacé $(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t)$ par "$\cdot$" pour simplifier les notations. A nouveau, formule vue plusieurs fois en cours et TD, et il est quand même important que vous sachiez dériver une fonction composée! Notez au passage que tout ceci dépend de (z,t). Bon, comme à cause de (3), $\frac{\partial}{\partial z}\big[f_1(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t)\big] = 0$, on trouve une première équation

$$\partial_1 f_1(\cdot)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(z,t) + \partial_2 f_1(\cdot)\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(z,t) + \partial_3 f_1(\cdot) + \partial_4 f_1(\cdot) = 0. \tag{6}$$

Elle est vraie pour tout (z,t) est assez proche de $(1,1)$, donc en particulier pour $(z,t) = (1,1)$. Noter qu'alors $(\varphi_1(z,t), \varphi_2(z,t), z, t) = X$. Donc on peut remplacer dans (6) en se souvenant que $\partial_1 f_1(X) = ... = \partial_4 f_1(X) = e^2$, et on trouve que

$$0 = \partial_1 f_1(X)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) + \partial_2 f_1(X)\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1) + \partial_2 f_1(X) + \partial_4 f_1(X) = e^2\big[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1) + 2\big]. \tag{7}$$

C'est une première équation. Ce qu'on a fait avec la première coordonnée f_1, on peut le faire aussi avec la seconde coordonnée f_2, et on trouve comme en (7) que

$$\partial_1 f_2(\cdot)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(z,t) + \partial_2 f_2(\cdot)\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(z,t) + \partial_3 f_2(\cdot) + \partial_4 f_2(\cdot) = 0. \tag{8}$$

A nouveau, en particulier ceci est vrait quand $(z,t) = (1,1)$, et alors, compte tenu du calcul de $\nabla f_2(X)$ fait plus haut, on trouve que

$$0 = \partial_1 f_2(X)\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) + \partial_2 f_2(X)\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1) + \partial_2 f_2(X) + \partial_4 f_2(X) = 3\big[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1)\big]. \tag{9}$$

Il reste à résoudre (et on sait à l'avance qu'on va trouver) : (9) donne $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1)$, donc par (7) on trouve $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1,1) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1,1) = -1$. Sauf erreur de calcul de ma part.

Exercice 2.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x-1)^2(x+1)^2 + \operatorname{ch}(x+y-1) \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{10}$$

On rappelle que $\operatorname{ch}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi f est (au moins) de classe C^2.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Déterminer les points critiques de f. Indication : il y en a 3.
4. Calculer la matrice $H(x,y)$ des dérivées secondes de f au point (x,y).
5. Démontrer que $H(1,0)$ est définie positive. Indication : écrire la forme quadratique comme somme de deux carrés, ou utiliser déterminant et trace.
6. Peut-on en déduire immédiatement que f a un minimum **global** au point $(1,0)$?
7. Vérifier que $f(1,0) = f(-1,2) = 1$ et démontrer directement que f a un minimum global en $(1,0)$ et en $(-1,2)$.
8. Calculer $H(0,1)$ et vérifier que son déterminant est < 0. Est-ce que f peut avoir un extremum local en $(0,1)$?
9. Déduire de ce qui précède que f n'a pas de maximum local.

Pour 1, le plus simple est de dire que c'est une combinaison de polynômes et d'exponentielles, mais on vous incitait surtout à dire qu'on peut calculer des dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et que ces dérivées partielles sont continues.

Pour 2, se souvenir que la dérivée de $\operatorname{ch}(x)$ est $\operatorname{sh}(x)$ (mais sinon, vous pouviez encore dériver les exponentielles). Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1) + \operatorname{sh}(x+y-1) = 2(x-1)(x+1)[(x+1)+(x-1)+\operatorname{sh}(x+y-1)] = 4x(x-1)(x+1) + \operatorname{sh}(x+y-1)$. C'est toujours une bonne idée de simplifier quand on peut aisément, ça fait plus propre, et de toute manière vous en aviez besoin plus tard !

Et plus simplement $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sh}(x+y-1)$. Vous pouviez mettre ceci ensemble dans un vecteur et écrire ainsi $\nabla f(x,y)$.

Pour 3, par définition (à rappeler !) les points critiques sont les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que que $\nabla f(x,y) = 0$, c'est-à-dire, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

On trouve donc les deux équations $\operatorname{sh}(x+y-1) = 0$ et $4x(x-1)(x+1) + \operatorname{sh}(x+y-1) = 0$. Ou de manière équivalente $\operatorname{sh}(x+y-1) = 0$ et $4x(x-1)(x+1) = 0$. Pour la première, on vérifie que $\operatorname{sh}(u) = 0$ ssi $u = 0$ (soit on le sait, soit on résout $e^u = e^{-u}$ en utilisant le fait que l'exponentielle est injective. Donc la première équation est équivalente à $x+y-1 = 0$, ou $x+y = 1$. Quand à la seconde équation $4x(x-1)(x+1) = 0$, elle est satisfaite ssi $x = -1, 0$, ou 1 (produit de facteurs nul). Ca donne donc les 3 possibilités $(-1,2)$, $(0,1)$, et $(1,0)$. La suite de l'énoncé vous permettait de deviner ces valeurs.

Pour 4, le calcul donne la matrice

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 + \operatorname{ch}(x+y-1) & \operatorname{ch}(x+y-1) \\ \operatorname{ch}(x+y-1) & \operatorname{ch}(x+y-1) \end{pmatrix} \tag{11}$$

les malin pouvaient noter que C^2 permet de ne pas calculer les deux dérivée croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et noter que $4x(x-1)(x+1) = 4x(x^2-1)$ vous faisait gagner quelque secondes dans le calcul.

Pour 5, on trouve que $H(1,0) = \begin{pmatrix} 12 - 4 + \operatorname{ch}(0) & \operatorname{ch}(0) \\ \operatorname{ch}(0) & \operatorname{ch}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont il faut vérifier qu'elle est définie positive. On sait que cela signifie que les deux valeurs propres (qui sont des réels, puisque la matrice est symétrique) sont strictement positives. Or le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 8$. On peut bien sûr résoudre, mais on se souvient plutôt, que la somme des racines est la trace de la matrice (à savoir 10) et leur produit est le déterminant de la matrice (à savoir 8). Donc les racines sont de même signe, et strictement positives toutes les deux.

Si vous n'aimez pas les valeurs propres, vous pouvez écrire la forme quadratique asociée à $H(1,1)$, à savoir $Q(x,y) = 9x^2 - 2xy + y^2$. Et il reste à voir que $Q(x,y) > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Or, en sortant un carré pour s'occuper du terme rectangle, $Q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 8x^2 = (x+y)^2 + 8x^2$, qui est ≥ 0, et de plus n'est nul que si $x + y = x = 0$, donc $x = y = 0$.

Pour 6, le fait que $H(1,0)$ est définie positive dit seulement que f a un minimum local en $(1,0)$, et ne dit pas si f a un minimum global en $(1,0)$.

Pour 7, comme on calcule que $f(1,0) = f(-1,2) = 1$, pour savoir que f a un minimum global en ces points, il suffit (et il faut en fait) de montrer que $f(x,y) \geq 1$ pour tout choix de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mais c'est facile, parce que $\operatorname{ch}(x+y-1) \geq 1$ partout (étudiez la fonction ch si vous ne vous souvenez plus, mais ce serait décevant), donc $f(x,y) = (x-1)^2(x+1)^2 + \operatorname{ch}(x+y-1) \geq (x-1)^2(x+1)^2 + 1 \geq 0$ (le produit de carrés est ≥ 0). On peut même vérifier qu'il y a inégalité stricte sauf si $(x,y) = (1,0)$ ou $(x,y) = (-1,2)$.

Pour 8, $H(0,1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est strictement négatif. Donc les valeurs propres de $H(0,1)$ sont non nulles et de signes différents, et on a vu dans le cours que ceci implique que $(0,1)$ est un point de selle, et n'est donc ni un minimum ni un maximum.

Ou directement la forme quadratque est ici $Q(x,y) = -3x^2 + 2xy + y^2$, qui prend des valeurs strictement négatives (par exemple pour $x = 1$ et $y = 0$) et des valeurs srtictement positives (par exemple pour $x = 0$ et $y = 1$).

Pour 9, juste besoin d'une petite discussion : si par hasard f avait un minimum local en (x_0, y_0), ce serait un point critique, donc l'un de nos trois points étudiés plus haut. Aucun n'est un maximum local (les deux maxima ne conviennent pas, puisqu'ils sont des minima stricts !).

Exercice 3.

On considère l'application $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F_1(x, y) = \frac{9x}{10} + \frac{1}{10}\cos(x + y) \quad \text{et} \quad F_2(x, y) = \frac{11y}{10} + \frac{1}{10}\cos(x - y)$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que $\frac{8}{10} \leq \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) \leq 1$, $\left|\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{10}$, $\left|\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)\right| \leq \frac{1}{10}$, et $1 \leq \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \leq \frac{12}{10}$ en tout point.
2. Déduire de ce qui précède que la fonction F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On notera $DF(x, y)$ sa différentielle au point (x, y).
3. Ecrire la matrice de $DF(x, y)$. Calculer son déterminant $J(x, y)$ (sans chercher à simplifier le produit de sinus), et démontrer que $J(x, y) \geq \frac{8}{10} - \frac{1}{100} > \frac{1}{2}$.
4. Démontrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe un voisinage ouvert V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, et un voisinage ouvert W de $F(x_0, y_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $F : V \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^1.

   On se propose maintenant de démontrer que F est en fait bijective sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, On définit la fonction $G_{\alpha,\beta}$ par

   $$G_{\alpha,\beta}(x, y) = (x + \alpha, y + \beta) - F(x, y) = \big(x + \alpha - F_1(x, y), y + \beta - F_2(x, y)\big)$$

   pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $G_{\alpha,\beta}$ est différentiable (on ne demande pas de le vérifier).
5. Ecrire la matrice de la différentielle $DG_{\alpha,\beta}(x, y)$ au point (x, y).
6. Démontrer l'inégalité triangulaire pour les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, à savoir que pour tout choix d'applications linéaires L_1, L_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on a $|||L_1 + L_2||| \leq |||L_1||| + |||L_2|||$. On commencera évidemment par rappeler la définition de la norme d'opérateur $|||L_i|||$ de L_i.
7. En déduire que si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $|||L||| \leq |a| + |b| + |c| + d|$.
8. Montrer que que $|||DG_{\alpha,\beta}(x, y)||| \leq \frac{6}{10}$ (on pourrait faire mieux, mais on n'en aura pas besoin).
9. Démontrer que $||G_{\alpha,\beta}(x, y) - G_{\alpha,\beta}(x', y')||_2 \leq \frac{6}{10}||(x', y') - (x, y)||_2$ pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$.
10. En déduire que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $G_{\alpha,\beta}(x, y) = (x, y)$ a une solution unique dans $\mathbb{R}^2$.
11. En déduire que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection.
12. Déduire de ce qui précède que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme de classe C^1. Indication : on pourra utiliser la question 4, non sans vérifier que l'inverse de $F : V \to W$ est bien la restriction à W de F^{-1}.
13. Quelle est la différentielle de la réciproque F^{-1} au point $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = F(0, 0)$?

Pour 1, on devait calculer les dérivées partielles (que je mets dans une matrice ci-dessous), puis estimer, puis dire pour 2 que ces dérivées partielles sont continues, ce qui rend f de classe C^1, et enfin calculer la matrice de $Df(x, y)$ en recopiant les dérivées partielles. Je donne le résultat :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} - \frac{1}{10}\sin(x + y) & -\frac{1}{10}\sin(x - y) \\ -\frac{1}{10}\sin(x + y) & \frac{11}{10} + \frac{1}{10}\sin(x - y) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Pour les estimations, on utilise le fait que $|\sin(x + y)| \leq 1$ et $|\sin(x - y)| \leq 1$, on fait bien attention de ne pas soustraire deux inégalités ni multiplier deux inégalités avec des nombres négatifs dedans, et tout va bien.

Pour le déterminant, on écrivait la matrice $M(x,y)$ de $DF(x,y)$ comme $M(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis $J(x,y) = ad - bc \geq ad - |bc|$, puis en utilisant la question précédente que $ad \geq \frac{8}{10} \times 1 = \frac{8}{10}$ alors que $|bc| \leq \frac{1}{100}$.

Pour 4, on fixe n'importe quel $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme le détermonant $J(x,y)$ de $DF(x,y)$, l'application linéaire $DF(x,y)$ est inversible (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$), donc on peut appliquer le théorème d'incersion locale (voir l'énoncé dans le cours !) qui donne exactement la conclusion.

Pour 5 on pouvait calculer directement, mais observons ici que $G_{\alpha,\beta} = X_{\alpha,b} - F$, ou $X_{\xi,\beta}(x,y) = (x,y) + (\alpha,\beta)$ est la fnction identité sur $\mathbb{R}^2$, plus ine constante. On en déduit aisément que $DG_{\alpha,\beta}(x,y) = I - DF(x,y)$, et sa matrice est $I - M(x,y)$, où j'ai noté I à la fois l'application linéaire identique et sa matrice. On pouvait recopier.

Pour 6, rappeler d'abord que pour $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire, sa norme d'opérateut est

$$|||L||| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2; ||(x,y)|| \leq 1} ||L(x,y)||.$$

On a utilisé le préambule qui dit que $\mathbb{R}^2$ est automatiquement muni par priorité de sa norme euclidienne.

Noter qu'en particulier, donc, $||L(x,y)|| \leq |||L|||$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)|| \leq 1$ (et aussi, on n'en a pas besoin, que $||L(x,y)|| \leq |||L|||\,||x||$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

Maintenant, on se donne L_1 et L_2, et on note qu'à cause de la remarque ci-dessus, $||L_1(x,y)|| \leq |||L_1|||$ et $||L_2(x,y)|| \leq |||L_2|||$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)|| \leq 1$. Alors en notant $L = L_1 + L_2$, on a que $||L(x,y)|| = ||L_1(x,y) + L_2(x,y)|| \leq ||L_1(x,y)|| + ||L_2(x,y)|| \leq |||L_1|| + |||L_2||$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)|| \leq 1$, où bien entendu on a utilisé l'inégalité triangulaire. Ceci est vrai pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)|| \leq 1$; on prend la borne supérieure (qui est $|||L|||$) et on trouve bien que $|||L||| \leq |||L_1|| + |||L_2||$.

J'ai oublié de demander aussi de dire que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $|||\lambda L||| \leq |\lambda|\,|||L|||$, ce qui aurait aussi pu vous simplifier la vie dans la suite. Ca se démontre pareil (en plus simple).

Pour la question 7, on vous incitait à découper la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de L en quatre morceaux, à savoir $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et à montrer que par exemple la norme de l'opérateur linéaire L_a de matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est au plus $|a|$. C'est assez facile, puisque $L_a(x,y)$ a les coordonnées ax et 0, donc $||L_a(x,y)|| = \sqrt{(ax)^2 + 0} = |a||x| \leq |a|\,||(x,y)||^2$, qui est inférieur à $|a|$ si $||(x,y)|| \leq 1$. On trouve que les autres opérateurs associés aux autres matrices de la somme ont des normes au plus $|b|$, $|c|$, et $|d|$ (mêmes calculs), et en utilisant la question précédente que $|||L||| \leq |a| + |b| + |c| + |d|$.

Il y avait aussi plus rapide, par exemple en vérifiant que l'application linéaire associée à $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ a une norme au plus $\max(|a|, |d|)$ et que l'application linéaire associée à $M' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ a une norme au plus $\max(|b|, |c|)$.

Pour 8, appliquer juste la question précédents, en notant que la somme des 4 valeurs absolue des coefficients de la matrice de $DG_{\alpha,\beta}(x,y)$ est $\leq \frac{6}{10}$.

Pour 9, dire que c'est une application de l'inégalité dite des accroissements finis qu'on a vue en cours, non sans avoir vérifié les hypothèses de ce résultat (domaine convexe, application différentiable sur le domaine, et norme de la différentielle inférieure à $\frac{6}{10}$ uniformément sur le domaine !

Pour 10, comme on vient de montrer que $G_{\alpha,\beta}$ est contractante, on déduit du théorème du point fixe que $G_{\alpha,\beta}(x,y)$ a un unique point fixe.

Pour 11, on dit que (x,y) est point fixe ssi $G_{\alpha,\beta}(x,y) = (x,y)$ ssi, puisque $G_{\alpha,\beta} = X_{\alpha,b} - F$ (voir plus haut), $[X_{\alpha,b} - F](x,y) = (x,y)$, ssi (en otant l'identité ux deux membres) $(\alpha,\beta) = F(x,y)$. Donc on trouve que pour tout choix de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $F(x, y) = (\alpha, \beta)$ a une solution unique (le point fixe ci-dessus). C'est bien dire que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective.

Pour 12, on note $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la bijection réciproque. On doit montrer que F^{-1} est aussi différentiable, et un théorème du cours dit que pour ceci il suffit de vérifier que F^{-1} est bien différentiable en tout point (après, le fait que sa différentielle soit de classe C^1 se déduit du fait que la différentielle de F^{-1} au point $Z = F(x, y)$ est l'inverse de $Df(x, y)$.

Donc regardons au point $Z = F(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A la question 4 on a trouvé un voisinage V de (x, y) et un voisinage W de Z tel que (la restriction) $F_V : V \to W$ est un difféo. Mais sa réciproque F_V^{-1} est bien la restriction de F^{-1} à W, puisque par définition $F_V^{-1}(\alpha, \beta)$ est le $(x', y') \in V$ tel que $F(x', y') = (\alpha, \beta)$. Alors $(x', y') = F^{-1}(\alpha, \beta)$ par défnition de F^{-1}. Donc la restriction de F^{-1} à W est bien de classe C^1, et comme c'est vrai dans un voisinage de chaque point $Z \in \mathbb{R}^2$, on en déduit bien que F^{-1} est de classe C^1.

C'est logique, mais je n'ai pas trouvé plus court immédiatement.

Pour 13, on doit calculer $D(F^{-1})(Z))$ au point $Z = F(0, 0)$. Et le cours dit que c'est l'inverse de DF au point $(0, 0)$. On calcule et on trouve.

Exercice 4. On se donne une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et on suppose de plus que f est convexe. Rappelons que cela signifie que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, tout $Y \in \mathbb{R}^2$, et tout $t \in (0,1)$,

$$f((1-t)X + tY) \leq (1-t)f(X) + tf(Y). \tag{13}$$

Pour tout vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^2$, on note $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_e(z) = f(ze)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f_e est convexe.
2. Montrer que f_e est dérivable et que $f_e'(z) = \langle \nabla f(ze); e\rangle$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout $e \in \mathbb{R}^2$ non nul, $z \mapsto \langle \nabla f(ze); e\rangle$ est une fonction croissante.
4. On suppose à partir de maintenant que 0 est un point critique de f. Vérifier que $f_e'(0) = 0$. En déduire que $f_e'(z) \geq 0$ pour $z \geq 0$ et $f_e'(z) \leq 0$ pour $z \leq 0$, puis que $f_e(w) \geq f_e(0)$ pour tout $w \in \mathbb{R}$.
5. Déduire de ce qui précède que f a un minimum global en 0.

Pour 1, on doit montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, et ensuite $t \in [0,1]$, on a que

$$f_e((1-t)x + ty) \leq (1-t)f_e(x) + tf_e(y). \tag{14}$$

On pose $X = xe \in \mathbb{R}^2$ et $Y = ye$, et on utilise la définition, puis (13). On trouve que

$$f_e((1-t)x+ty) = f((1-t)xe+tye) = f((1-t)X+tY) \leq (1-t)f(X)+tf(Y) = (1-t)f_e(x)+tf_e(y)$$

comme prévu.

Pour 2, on sait que f_e est différentiable (donc ici dérivable, puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ et que dans ce cas différentiabilité et dérivabilité sont la même chose) comme composition des fonctions différentiables $z \mapsto ze$ et ensuite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

D'abord le calcul de la manière la plus formelle. La dfférentiele de la première fonction est l'application linéaire $L : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ qui envoie $x \in \mathbb{R}$ sur le vecteur xe (normal que la dérivée ressemble à la fonction, c'est une fonction linéaire). Ensuite on obtient la différentielle Df_e (au point z_0, disons) de la fonction composée f_e en composant avec la différentielle de f au point z_0e. On trouve $Df_e(z_0) = Df(z_0e) \circ L$ (ici L reste le même pour tous les z_0). On trouve que $Df_e(z_0)$ est l'application linéaire qui à $z \in \mathbb{R}$ associe $Df(z_0e)(L(z)) = Df(z_0e)(ze) = \langle \nabla f(z_0e), ze\rangle = z\langle \nabla f(z_0e), e\rangle$. Ou, dit en termes plus simple, la dérivée de f_e en z_0 est le nombre $\langle \nabla f(z_0e), e\rangle$ comme anoncé.

Ou alors, on utlise notre savoir faire pour calculer directement la dérivée. On pose $e = (\alpha, \beta)$, et on note que $f_e(z) = f(\alpha z, \beta z)$, ce qui permet de dériver directement (on aurait fait pareil pour des dérivées partielles s'il y avait eu plusieurs variables dans z, mais ici pas besoin) : la dérivée de $z \mapsto f_e(z) = f(\alpha z, \beta z)$ est bien $\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha z, \beta z) + \beta\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha z, \beta z)$, qui est bien le produit scalaire de $\nabla f(\alpha z, \beta z)$ avec e.

Pour 3, on a vu que f_e est convexe et différentiable. Le cours dit que sa dérivée (qui existe par hypothèse) est alors croissante. On en déduit le résultat.

Pour 4, puisque 0 est un point critique, $\nabla f(0) = 0$ et alors la formule pour f_e' donne $f_e'(0) = 0$. Comme f_e' est croissante, on en déduit bien que $f_e'(z) \geq 0$ pour $z \geq 0$ et $f_e'(z) \leq 0$ pour $z \leq 0$.

Enfin on doit vérifier que $f_e(w) \geq f_e(0)$ pour tout $w \in \mathbb{R}$. Soit on se souvient q'on sait étudier une fonction : on vient de montrer que f est décroissante, puis croissante, on en déduit qu'elle a son minimum en 0, et c'est ce qu'on voulait. Soit on a tout oublié, mais on sait encore appliquer le théorème des accroissements finis. Par exemple, si $w < 0$, on note que $f(w) = f(0) + (w-0)f'(\xi)$ pour un $\xi \in [w, 0]$, et comme $f'(\xi)$ et w sont négatifs, ceci donne $f(w) \geq f(0)$. Pareil en plus simple si $w \geq 0$.

Pour 5, on doit encore faire varier e. Les questions précédentes montrent que pour tout $e \in \mathbb{R}^2$ (non nul) et tout $w \in \mathbb{R}$, on a que $f(we) = f_e(w) \geq f_e(0) = f(0)$. En particulier, en prenant $w = 1$, on a que pour $e \neq 0$ dans $\mathbb{R}^2$, $f(e) \geq f(0)$. Maintenant on regarde la définition et on voit que f a un minimum global en 0.