Mathématiques
Université Paris-Saclay

TD 2

MEU353
2022-2023

Rappels de Topologie (suite)

Exercice 1. Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ Rappelons la définition des normes usuelles sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, comme applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$: pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\},$$
$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que ces trois normes sont équivalentes.
3. Donner les trois distances dans l'ensemble $\mathbb{R}^n$ induites par les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On notera ces distances d_∞, d_1 et d_2.
4. Dessiner deux points distincts dans $\mathbb{R}^2$ et représenter leur distance au sens de d_1, d_2 et d_∞.
5. Dans $\mathbb{R}^2$, représenter les boules fermées $\overline{B}_{d_1}(0,1)$, $\overline{B}_{d_2}(0,1)$ et $\overline{B}_{d_\infty}(0,1)$.

Exercice 2. Représentation des formes linéaires. Notons $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que L est linéaire *si et seulement si* il existe un vecteur v dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L(x) = (v|x)$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Quelle est alors, dans la question ci-dessus, la norme de L?

Exercice 3. Exemples concrets. Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, x^3) \,:\, x < 1\},$$
$$B = \{(n, \frac{1}{n+1}) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x^2,\ y > x+1\}.$$

1. Représenter dans le plan chacun de ces ensembles.
2. Déterminer leur intérieur, leur frontière et leur adhérence.
3. Lesquels de ces ensembles sont compacts ?

Exercice 4. Limites. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(\frac{y^2}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

1. Montrer que f admet la même limite selon toutes les directions en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que les fonctions suivantes, notées g et h, sont continues au point $(0,0)$.

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} (x-y)\frac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$