Chapitre 1 - Calcul Matriciel

$\mathcal{F}.\mathcal{J}$

19 janvier 2024

1 Produits scalaires réels et complexes

1.1 Cas réel

Définition 1. On se place dans un espace vectoriel réel ($\mathbb{R}$), appelons E.
Un produit scalaire (PS) sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, $i.e$ une application $p : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétées suivantes :

1. Bilinéarité ;
2. Symétrie ;
3. Positivité.

✎ Le nom de produit scalaire évoque à la fois la bilinéarité et le fait que ses valeurs soient "scalaires", $i.e$ appartiennent au corps de base (ici $\mathbb{R}$) de l'espace vectoriel E.

Il est intéressant de se rappeler qu'un produit scalaire est entièrement déterminé par sa forme quadratique associée ; si p est le produit scalaire sur E, on a $P : E \to \mathbb{R}$ sa forme quadratique, définie par : $P(x) = p(x, x),\ (x \in E)$. En utilisant la bilinéarité et la symététrie on se ramène par "polarisation" au produit scalaire à partir de la forme quadratique.

Une conséquence de la **positivité** du produit scalaire, est l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 1 (Cauchy-Schwarz)**.** Considérons un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E. Alors, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a :

$$p(x, y)^2 \leq p(x, x)p(y, y);$$

On a égalité si et seulement si (x, y) est lié.

Démonstration : Une preuve simple consiste à prendre un scalaire et à développer :

$$p(x + \lambda y, x + \lambda y).$$

Ne pas oublier le cas d'égalité ! ■

✎ De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit l'existence d'une norme canoniquement associée à un produit scalaire :

Proposition 2 (Norme canonique)**.** Soit p un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E. L'application

$$x \mapsto N(x) = \sqrt{p(x,x)}$$

est une norme sur E.

Définition 2. Soit E un espace vectoriel réel :

1. Si E est muni d'un produit scalaire p, on dit que (E,p) est un **espace préhilbertien réel**.
2. Si E est de dimension finie, on dit que (E,p) est un **espace euclidien**.

Proposition 3 (Théorème de Pythagore)**.** Soit E un espace préhilbertien réel. **Deux** éléments $x, y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

1.2 Cas complexe

Définition 3. On considère cette fois le corps des complexes :
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire hermitien sur E une forme :

$$p : E \times E \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto \langle x \mid y \rangle_{\mathbb{C}}$$

1. p est $\mathbb{C}$-linéaire en y (parfois en x) : $\langle x \mid \lambda y_1 + \alpha y_2 \rangle = \lambda \langle x \mid y_1 \rangle + \alpha \langle x \mid y_2 \rangle$;
2. p possède la symétrie hermitienne : $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$;
3. p est définie positive : $\langle x \mid x \rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Attention :

Il résulte de cette définition que le produit scalaire hermitien est *antilinaire* (on dit aussi $\mathbb{C}$ - linéaire par rapport à la première variable.

Attention :

Sur $E = \mathbb{C}^n$ le produit scalaire hermitien "standard" est : $\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j t_j$ (**ou** parfois : $\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{t}_j$)

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit $\langle . \mid . \rangle_{\mathbb{C}}$ un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe E. On a alors, pour tout couple (x,y) d'éléments de E,

$$|\langle x \mid y \rangle|^2 \leq \langle x \mid x \rangle \times \langle y \mid y \rangle$$

Avec égalité si et seulement si (x,y) est lié.

Démonstration : idem que dans le cas réel.
Toujours bien penser au cas d'égalité. ■

Proposition 5 (Norme induite)**.** Soit E un espace vectoriel complexe et soit $\langle . \mid . \rangle_{\mathbb{C}}$ un produit scalaire hermitien sur E. L'application

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle_{\mathbb{C}}}$$

Démonstration : 1. Comme $\langle x \mid x\rangle_{\mathbb{C}} = 0$ entraîne $x = 0$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;

2. Comme $\langle x \mid x\rangle_{\mathbb{C}} = |\lambda|^2\langle x \mid x\rangle_{\mathbb{C}}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
3. Enfin on a $\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x \mid x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y \mid y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}}\langle y \mid x\rangle_{\mathbb{C}} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}}\langle y \mid x\rangle_{\mathbb{C}} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}}} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(\langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}})$, on a $|Re(\langle x \mid y\rangle_{\mathbb{C}})| \leq \langle x \mid x\rangle_{\mathbb{C}}$, d'où, par Cauchy-Schwarz on a $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$. ■

1.3 Matrice et produit scalaire

Définition 4. Donnons quelques définitions de matrice :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définie sa **transposée** : $(A^t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A^t)_{ij} = A_{ij}$, pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ on définie son **adjointe** $A^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $A^*_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$ pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **symétrique** si $A = A^t$ (ou encore $A = A^*$).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **orthogonale** (ou unitaire) si $A^{-1} = A^*$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **normale** si $AA^* = A^*A$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que A est auto-adjointe ou **hermitienne** si $A = A^*$.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **définie positive** si $x^tAx > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$.
8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est **positive** si $x^tAx \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que A est **définie positive** si $\overline{x}^tAx > 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$ et $x \neq 0$.
10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que A est **positive** si $\overline{x}^tAx \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{C}^n$.

Proposition 6 (Caractérisation de la transposée par le produit scalaire réel)**.** Soit $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$\langle Au|v\rangle = \langle u|A^tv\rangle,\ \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

A^t est unique.

Proposition 7 (Caractérisation de l'adjointe par le produit scalaire hermitien ($\mathbb{C}$))**.** Soit $\langle .|. \rangle_{\mathbb{C}}$ le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$. Alors on a :

$$\langle Au|v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u|A^*v\rangle_{\mathbb{C}},\ \forall u, v \in \mathbb{C}^n.$$

A^* est unique.

Proposition 8 (Cas réel)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est **symétrique** si et seulement si

$$\langle Au|v\rangle = \langle u|Av\rangle,\ \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 9 (Cas complexe)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est **hermitienne** si et seulement si :

$$\langle Au|v\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u|Av\rangle_{\mathbb{C}},\ \forall u, v \in \mathbb{C}^n.$$

2 Réduction des matrices

2.1 Théorie spéctrale des matrices

On suppose ici que les matrices sont carrées et qu'elles vivent dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Définition 5. Quelques définitions à savoir :

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de A est défini sur $\mathbb{C}$ par $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$, c'est un polynôme de degré égal à n, il admet donc n racines dans $\mathbb{C}$, les racines sont appelé **valeurs propres** de A. La multiplicité d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que racine de $P_A(\lambda)$.
2. Soit λ une valeur propre de A. On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ, et on note E_λ, le sous-espace vectoriel défini par $E_\lambda = Ker(A - \lambda I_n)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle **rayon spectral** de A, et on note $\rho(A)$, le maximum des modules des valeurs propres de A : $\rho(A) := \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$

Exercice 1. Déterminer la nature des valeurs propres d'une matrice hermitienne

Proposition 10 (Cayly-Hamilton)**.** Soit $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$, le polynôme caractéristique de A. On a

$$P_A(A) = 0.$$

Proposition 11. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices semblables ($i.e$ qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Alors les valeurs propres de A et de B sont les mêmes $i.e$:

$$Sp(A) = Sp(B).$$

Proposition 12 (Nature des valeurs propres d'une matrice hermitienne ($i.e$ $A = A^*$))**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **symétrique** ou bien $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **hermitienne**.
On a :

$$Sp(A) \subset \mathbb{R}.$$

2.2 Trigonalisation des matrices

Il existe des classes de matrices particulièrement simples. Par exemple les matrices triangulaires supérieures $i.e$ telles que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$. Réduire une matrice c'est la transformer par un changement de base en une de ces formes particulières.

Définition 6. Une matrice A est dite triangulisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telle que

$$A = PTP^{-1}.$$

✎ On dit que les matrices A et T sont **semblables**.

Proposition 13. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulisable.

Démonstration : Par récurrence sur n. ■

Proposition 14 (Factorisation de Schur)**.** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe une matrice **unitaire** U ($i.e$ $U^{-1} = U^*$), telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire.