Université Paris-Saclay - L3 Mathématiques
Analyse théorique et numérique des EDO - Année 2023-2024

Exercice 1. Équations linéaires scalaires d'ordre 1 **et équations à variables séparées.**

1. (**Équations linéaires d'ordre 1).** Résoudre les équations différentielles suivantes.
   (a) $y' - 5y = 0$.
   (b) $y' = ty$
   (c) $y' = e^t y$
   (d) $y' + \tan(t)y = 0$
   (e) $y' + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}y = 0$
   (f) $y' + \frac{t}{e^t}y = 0$
   (g) $y' = \sin(t)\cos(t)y$
2. On considère l'équation différentielle
$$(E) \qquad y' - 2ty = t.$$
   (a) Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E), définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction A de classe C^1 sur I tel que la fonction $z(t) = e^{A(t)}y(t)$ est solution d'une équation de la forme
$$(\tilde{E}) \qquad z'(t) = g(t),$$
   où g est une fonction que l'on déterminera.
   (b) Résoudre l'équation $(\tilde{E})$. En déduire la forme de l'expression de y.
   (c) Vérifier que toute fonction de cette forme est solution de (E) et donner l'ensemble des solutions de (E).
3. (**Équations linéaires d'ordre 1 non homogènes).** Résoudre les équations différentielles suivantes.
   (a) $y' + y = e^t$
   (b) $y' + y = te^t - 2$
   (c) $y' - y = \sin(t)$
   (d) $y' + \frac{2}{t}y = t^2$
   (e) $y' - ty = t^3$
4. **(Équations à variables séparées)**. Donner les solutions des équations suivantes.
   (a) $y' = y^2$.
   (b) $y' = t\sqrt{y}$
   (c) $y' = te^{t^2-y}$
   (d) $y' = \frac{1+y^2}{1+t^2}$

Exercice 2.
Donner les solutions de l'équation $y' = te^{t^2-y}$ qui vérifient $y(0) = 0$.

Exercice 3.
D'après la loi de Newton, un objet à température T mis dans un environnement à température T_e verra sa température changer à une vitesse qui est proportionelle à la différence entre T_e et sa température.

1. Donner l'équation différentielle décrivant l'évolution de la température de l'objet, en supposant que la température de l'environnement T_e n'est pas affectée.
2. *Application :* Un oeuf dur à 98° est mis à refroidir sous l'eau courante à 16°. Après 5 minutes, sa température est de 35°. Combien de temps faut-il encore attendre pour que la température de l'oeuf arrive à 20° ?

Exercice 4.
On considère l'équation non linéaire

$$\text{(E)} \qquad x' + \cos(t)x + e^{t+\sin(t)}x^2 = 0.$$

Supposons que x est une solution de (E) qui ne s'annule pas. Vérifier que $y = \frac{1}{x}$ est solution d'une équation linéaire, qu'on écrira. Résoudre cette équation linéaire et donner la forme des solutions de (E).

Exercice 5.

1. Montrer que le problème
$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 1, \\ y(1) = 4, \end{cases}$$
admet une et une unique solution y définie sur $\mathbb{R}$, et la donner.
2. Utiliser *1.* pour résoudre le problème
$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \frac{1}{x(t)}), \\ x(1) = -2, \end{cases}$$

Exercice 6. (**Équation de Bernoulli**). Soient $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ et a, b des fonctions continues. On considère l'équation différentielle

$$y' = a(t)y + b(t)y^n.$$

1. Montrer que si $t \mapsto y(t)$ est une solution de l'équation ci-dessus, alors $t \mapsto (y(t))^{1-n}$ est solution d'une équation linéaire que l'on donnera.
2. Trouver les solutions des équations :
   (a) $ty' = y + ty^3$;
   (b) $y' = \frac{t}{1+t^2}y + ty^2$