Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel - Année 2022-2023

Examen du mardi 25 Avril 2023

Début 13h45 Durée : 3 heures

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Les documents et tout autre appareil électronique sont interdits.

Dans cet énoncé, $\mathbb{R}^n$ est automatiquement muni de la norme euclidienne $|| \ ||_2$, et de la distance euclidienne. On note $\langle x; y\rangle$ le produit scalaire entre x et $y \in \mathbb{R}^n$. Et on n'hésitera pas à noter 0 au lieu de $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 1.
On considère les fonctions f_1 et f_2, de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules

$$f_1(x, y, z, t) = \exp(x + y) + \exp(z + t) \tag{1}$$

$$f_2(x, y, z, t) = x^3 - y^3 + z^3 - t^3. \tag{2}$$

1. Calculer les deux vecteurs $\nabla f_1(x, y, z, t)$ et $\nabla f_2(x, y, z, t)$. Que valent ces deux vecteurs au point $(1, 1, 1, 1)$?
2. Expliquez, sans faire de calcul supplémentaire, pourquoi f_1 et f_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^4$.

   On pose $F = (f_1, f_2)$, et $w = F(1, 1, 1, 1) = (2e^2, 0) \in \mathbb{R}^2$.
3. Enoncer le théorème des fonctions implicite (pour F au point $(1, 1, 1, 1)$) et en déduire qu'il existe une fonction φ, définie au voisinage de $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et un voisinage de $(1, 1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$, dans lequel l'équation $F(x, y, z, t) = w$ est équivalente au fait que $(x, y) = \varphi(z, t)$.
4. On note φ_1 et φ_2 les deux coordonnées de φ. Déduire de la question précédente que $F(\varphi_1(z, t), \varphi_2(z, t), z, t) = w$ au voisinage de $(1, 1)$.
5. Calculer alors $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z}(1, 1)$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}(1, 1)$.

Exercice 2.
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x - 1)^2(x + 1)^2 + \operatorname{ch}(x + y - 1) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

On rappelle que $\operatorname{ch}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi f est (au moins) de classe C^2.
2. Calculer $\nabla f(x, y)$.
3. Déterminer les points critiques de f. Indication : il y en a 3.
4. Calculer la matrice $H(x, y)$ des dérivées secondes de f au point (x, y).
5. Démontrer que $H(1, 0)$ est définie positive. Indication : écrire la forme quadratique comme somme de deux carrés, ou utiliser déterminant et trace.
6. Peut-on en déduire immédiatement que f a un minimum **global** au point $(1, 0)$?
7. Vérifier que $f(1, 0) = f(-1, 2) = 1$ et démontrer directement que f a un minimum global en $(1, 0)$ et en $(-1, 2)$.
8. Calculer $H(0, 1)$ et vérifier que son déterminant est < 0. Est-ce que f peut avoir un extremum local en $(0, 1)$?
9. Déduire de ce qui précède que f n'a pas de maximum local.

Exercice 3.
On considère l'application $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F_1(x,y) = \frac{9x}{10} + \frac{1}{10}\cos(x+y) \qquad \text{et} \qquad F_2(x,y) = \frac{11y}{10} + \frac{1}{10}\cos(x-y)$$

pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier que $\dfrac{8}{10} \leq \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) \leq 1$, $\left|\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{10}$, $\left|\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{10}$, et $1 \leq \dfrac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \leq \dfrac{12}{10}$ en tout point.
2. Déduire de ce qui précède que la fonction F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On notera $DF(x,y)$ sa différentielle au point (x,y).
3. Ecrire la matrice de $DF(x,y)$. Calculer son déterminant $J(x,y)$ (sans chercher à simplifier le produit de sinus), et démontrer que $J(x,y) \geq \frac{8}{10} - \frac{1}{100} > \frac{1}{2}$.
4. Démontrer que pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe un voisinage ouvert V de (x_0,y_0) dans $\mathbb{R}^2$, et un voisinage ouvert W de $F(x_0,y_0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que $F : V \to W$ soit un difféomorphisme de classe C^1.

   On se propose maintenant de démontrer que F est en fait bijective sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, On définit la fonction $G_{\alpha,\beta}$ par

   $$G_{\alpha,\beta}(x,y) = (x+\alpha, y+\beta) - F(x,y) = \big(x+\alpha - F_1(x,y), y+\beta - F_2(x,y)\big)$$

   pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi $G_{\alpha,\beta}$ est différentiable (on ne demande pas de le vérifier).
5. Ecrire la matrice de la différentielle $DG_{\alpha,\beta}(x,y)$ au point (x,y).
6. Démontrer l'inégalité triangulaire pour les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, à savoir que pour tout choix d'applications linéaires L_1, L_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on a $|||L_1+L_2||| \leq |||L_1|||+|||L_2|||$. On commencera évidemment par rappeler la définition de la norme d'opérateur $|||L_i|||$ de L_i.
7. En déduire que si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $|||L||| \leq |a| + |b| + |c| + d|$.
8. Montrer que que $|||DG_{\alpha,\beta}(x,y)||| \leq \frac{6}{10}$ (on pourrait faire mieux, mais on n'en aura pas besoin).
9. Démontrer que $||G_{\alpha,\beta}(x,y) - G_{\alpha,\beta}(x',y')||_2 \leq \frac{6}{10}||(x',y')-(x,y)||_2$ pour tous (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.
10. En déduire que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $G_{\alpha,\beta}(x,y) = (x,y)$ a une solution unique dans $\mathbb{R}^2$.
11. En déduire que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection.
12. Déduire de ce qui précède que l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme de classe C^1. Indication : on pourra utiliser la question 4, non sans vérifier que l'inverse de $f : V \to W$ est bien la restriction à W de f^{-1}.
13. Quelle est la différentielle de la réciproque F^{-1} au point $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = F(0,0)$?

Exercice 4. On se donne une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et on suppose de plus que f est convexe. Rappelons que cela signifie que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, tout $Y \in \mathbb{R}^2$, et tout $t \in (0,1)$,

$$f((1-t)X + tY) \leq (1-t)f(X) + tf(Y). \tag{4}$$

Pour tout vecteur non nul $e \in \mathbb{R}^2$, on note $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_e(z) = f(ze)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f_e est convexe.
2. Montrer que f_e est dérivable et que $f_e'(z) = \langle \nabla f(ze); e \rangle$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout $e \in \mathbb{R}^2$ non nul, $z \mapsto \langle \nabla f(ze); e \rangle$ est une fonction croissante.
4. On suppose à partir de maintenant que 0 est un point critique de f. Vérifier que $f_e'(0) = 0$. En déduire que $f_e'(z) \geq 0$ pour $z \geq 0$ et $f_e'(z) \leq 0$ pour $z \leq 0$, puis que $f_e(w) \geq f_e(0)$ pour tout $w \in \mathbb{R}$.
5. Déduire de ce qui précède que f a un minimum global en 0.