Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2020-2021

Test du mercredi 14 Avril 2021

Durée : 30 minutes

Les téléphones portables doivent obligatoirement être rangés éteints.
Documents et tout autre appareil électronique sont interdits.

Exercice 1.
On considère la fonction $F = (F_1, F_2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F_1(x, y) = e^x + 4xy$$

$$F_2(x, y) = \sin(y) + 6x + 3y.$$

1. Rappeler pourquoi F est de classe C^1.
2. Ecrire la matrice de la dérivée DF en $(0, 0)$
3. En déduire qu'il existe un voisinage de $(0, 0)$ dans lequel F est injective.

Exercice 2.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = xy^2 - 2y\cos(z) + xyz. \tag{1}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées partielles (dans l'ordre que vous voudrez).
2. On considère l'ensemble
$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, f(x, y, z) = 0\right\} \tag{2}$$
et le point $A = (2, 1, 0)$. Vérifier que $A \in \Sigma$ et calculer $\nabla f(A)$.
3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de A dans lequel Σ coincide avec le graphe d'une fonction $\Phi(x, y)$ de classe C^1 définie au voisinage de $(2, 1)$.
4. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ au point $(2, 1)$, en utilisant le fait que
$$f(x, y, \Phi(x, y)) = 0 \text{ au voisinage de } (2, 1) \tag{3}$$
Justifier rapidement (3).