Université Paris-Sud - L3 MINT / DL MI-ME-MP / HEC
M309 - Calcul Différentiel et optimisation
Année 2019-2020

Feuille de TD n° 8 - Théorème des fonctions implicites.

Exercice 1.
Considérons, dans le plan, la courbe définie par $F(x,y) = 0$, où

$$F(x,y) = ye^x + e^y \sin(2x).$$

1. Montrer que cette équation définit, au voisinage du point $(0,0)$, y comme fonction de x, en montrant qu'il existe des ouverts $U,\ V \subseteq \mathbb{R}$ tels que $(0,0) \in U \times V$ et une fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que

$$(x,y) \in U \times V \text{ et } F(x,y) = 0 \iff x \in U \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de φ au point $(0, \varphi(0))$.

Exercice 2.
Considérons l'équation

$$4y^2 + x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x = 0.$$

1. Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ tel que $0 \in \Omega$ et une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\varphi(0) = 0$ et tel que

$$\forall y \in \Omega, \quad 4y^2 + (\varphi(y))^4 - 8(\varphi(y))^3 + 20(\varphi(y))^2 - 16\varphi(y) = 0.$$

   Montrer que $\varphi'(0) = 0$.
2. Calculer $\varphi''(0)$. La fonction φ admet-elle un extremum local en 0 ?

Exercice 3.
Considérons la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$, où $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x,y,z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3.$$

1. Montrer qu'au voisinage du point $(1,1,1)$ cette surface est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x,y)$, où ϕ est une fonction de classe C^1 définie dans un ouvert contenant le point $(1,1)$.
2. Calculer les dérivées partielles de ϕ au point $(1,1)$.

Exercice 4.
On considère le système

$$\begin{cases} v^2 - u^2 + 3x + 2y = 0, \\ uv + y - x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce système définit u et v comme fonctions de x et de y, dans un voisinage du point $(x,y,u,v) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 0\right)$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Pour s'exercer

Exercice 5.
Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \neq 0,\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'équation
$$(*) \quad F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0$$
définit z comme fonction de (x,y) au voisinage de chaque point (x_0, y_0, z_0) solution de $(*)$ tel que $y_0 \neq 0,\ z_0 \neq 0$.
2. Montrer que
$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy.$$