Espaces affines, notes

$\mathcal{F}.\mathcal{J}$

25 novembre 2023

1 Espace affine

1.1 Définition

Définition 1. Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un **espace affine** sur $\vec{E}$ losqu'il existe une *loi de composition externe* (notée $+$) de $E \times \vec{E}$ dans E qui vérifie :

1. $\forall A \in E, A + \vec{0} = A$;
2. $\forall A \in E, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$, on a $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$;
3. $\forall A \in E$, l'application $\vec{u} \mapsto A + \vec{u}$ est une **bijection** de $\vec{E}$ sur E.

✎

⋆ Les éléments de E sont souvent appelés **points**,
alors que les éléments de $\vec{E}$ sont appelés **vecteurs**.
⋆ On dit que $\vec{E}$ est l'espace vectoriel associé à E,
ou encore que c'est la **direction** de E.

Attention :

⋆ Le symbole $+$ entre deux vecteurs désigne l'addition des vecteurs, celle qui fait de $(\vec{E}, +)$ un groupe abélien.
⋆ Entre un point et un vecteur en revanche, il s'agit de la loi de composition externe dont on a besoin pour définir un espace affine.
☞ Bien remarquer de quelle loi on parle dans le 2. de la définition.

✎

Un espace affine n'est pas seulement un ensemble :
c'est une structure ;

1. l'ensemble ;
2. l'espace vectoriel ;
3. la L.C.E *(loi de composition externe)*.

☞ En pratique on confond souvent l'espace affince $(E, \vec{E}, +)$ avec l'ensemble sous-jacent E.

† En utilisant le vocabulaire des actions de groupe, on peut traduire la définition par : Le groupe additif $(\vec{E}, +)$ opère librement et transitivement sur $\vec{E}$.
† Lorsque $\vec{u}$ est l'unique vecteur tel que $B = A + \vec{u}$, on notera $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$.

1.2 Premières propriétés

Proposition 1. Pour tout $A, B, C \in E$, on a la relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Démonstration : On peut écrire cette relation sous la forme : $(B - A) + (C - B) = C - A$.
En appliquant 2. puis la définition de $\overrightarrow{XY}$, on a :

1. $A + (\vec{AB} + \vec{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \vec{AC}$.
2. On peut conclure grâce au fait que l'application $\vec{x} \mapsto A + \vec{x}$ est injective, que $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. ■

Proposition 2. Pour tout $X \in E$ on a $\overrightarrow{XX} = \vec{0} = X - X$.

Démonstration : C'est une conséquence de $X + \vec{0} = X$ et de la définition de $\overrightarrow{XX}$. ■

Proposition 3. Pour tout $x, y \in E$, on a $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$; ("Trivialement : $Y - X = -(X - Y)$.)

Démonstration : Il suffit d'appliquer la relation de Chasles : $\vec{0} = \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX}$. ■

Proposition 4. Pour tout $X, Y, Z \in E$, on a $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{ZY}$; ("*trivialement*" :(Y-X) - (Z-X) = Y-Z.)

Démonstration : Conséquence immédiate de la relation de Chasles. ■

✎ On peut retenir que toutes les simplifications "triviales" dans les soustractions de points sont légitimes, c'est pourquoi il n'est pas gênant d'utiliser les notations + et -.

1.3 Translations

Proposition 5. Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application $A \mapsto A + \vec{u}$ est une bijection de E dans lui même appelée translation de vecteur $\vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.

Attention :

Bien faire la différence avec l'application du point 3. de la définition de l'espace affine : « $\forall A \in E$, l'application $\vec{u} \mapsto A + \vec{u}$ est une **bijection** de $\vec{E}$ sur E. »

Démonstration : Pour tout $B \in E$, on peut considérer le point $A = B + (-\vec{u})$; en utilisant 2. puis 1. on a $A + \vec{u} = (B + (-\vec{u})) + \vec{u} = B + (-\vec{u} + \vec{u} = B + \vec{0} = B$, donc $t_{\vec{u}}$ est surjective.
SI $t_{\vec{u}}(A) = t_{\vec{u}}(A') = B$, on a $A + \vec{u} = A' + \vec{u}$, donc $(A + \vec{u}) + (-\vec{u}) + (-\vec{u})$ et on en déduit $A = A + \vec{0} = A + (\vec{u} - \vec{u}) = A' - (\vec{u} - \vec{u}) = A' + \vec{0} = A'$, et $t_{\vec{u}}$ est injective. ■