L3 École Universitaire **Année 2021-22**

Examen du 2 Juin 2022

Probabilités

Durée 3 heures

Les calculettes, téléphones, avions en papier, sarbacanes et tout autre moyen de communication avec autrui sont prohibés.

On insiste sur l'importance d'introduire les notations (exemple : pour tout t dans..., ou il existe t dans...) d'avoir une écriture soignée, des résultats soulignés. Toute infraction à ces règles élémentaires peut entraîner l'annulation de la question entière !

Vous avez le droit d'admettre des résultats de questions que vous n'arrivez pas à traiter.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ et 4 réels positifs ou nuls a, b, c, d tels que $a+b+c+d=1$, tels que

$$P(X=0, Y=0)=a, \quad P(X=0, Y=1)=b,$$

$$P(X=1, Y=0)=c, \quad P(X=1, Y=1)=d.$$

1 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que les variables X et Y ne soient pas corrélées.

2 - Montrer que, dans ce cas, cette condition entraîne l'indépendance des variables X et Y.

Exercice 2

1 - Rappeler la définition des convergences en loi, en probabilité, dans L^p ($p>0$) et p.s. pour une suite de variables aléatoires.

2 - Montrer que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

3 - Montrer que la convergence dans L^p ($p>0$) entraîne la convergence en probabilité.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par la densité de probabilité,

$$f_X(x)=1_{[0,\frac{1}{2}[}(x)+\frac{1}{4}1_{[1,3]}(x).$$

1 - Donner la fonction de répartition de X et tracer son graphique.

2 - Calculer $P(X \in [\frac{1}{4}, \frac{5}{4}])$.

3 - Calculer la moyenne et la variance de X.

4 - Donner la loi de $\frac{1}{X+1}$.

Exercice 4

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois gaussiennes centrées et réduites.

1 - Calculer la densité de la loi du couple $(U, \frac{U}{V})$.

2 - Est ce que les variables U et $\frac{U}{V}$ sont indépendantes ?

3 - Quelle est la loi de $\frac{U}{V}$?

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de carré intégrable. Simplifier les expressions suivantes :

1 • $E[X^2 + Y^2 \,|\, \sigma(X)]$ lorsque Y est distribuée uniformément sur $[0, 1]$.

2 • $E[\frac{X+Y}{X^2+Y} \,|\, \sigma(X)]$ lorsque Y est distribuée uniformément sur $[0, 1]$.

3 • $E[\frac{X+Y}{X^2+Y} \,|\, \sigma(X)]$ lorsque Y est distribuée suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

4 • $E[\frac{X+Y}{X^2+Y} \,|\, \sigma(X, Y)]$.

Exercice 6

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f_{(X,Y)}(x, y)$.

1- *Montrer* que, pour toute fonction g mesurable bornée, la fonction mesurable h_g telle que

$$E[g(Y) \,|\, \sigma(X)] = h_g(X)$$

est définie par

$$h_g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} dy. \end{array}$$

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C\,xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

.

2 - Calculer C pour que $f_{(X,Y)}$ soit bien une densité de probabilité.

3 - Appliquer la question 1 pour calculer $E[Y \mid X]$.