Résumé de Cours d'Analyse, chapitre II, année 2023

1 Boréliens de $\mathbb{R}$ et mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Tribu de $\mathbb{R}$

On appelle tribu de $\mathbb{R}$, ou σ-algèbre de $\mathbb{R}$, tout ensemble S de parties de $\mathbb{R}$ vérifiant les trois axiomes suivants:

1. $\mathbb{R} \in S$
2. Si $E \in S$ alors son complémentaire dans $\mathbb{R}$ l'est aussi.
3. Toute réunion dénombrable d'éléments de S est aussi dans S. Ainsi par passage au complémentaire, toute intersection dénombrable d'éléments de S est aussi dans S.

Les éléments d'une tribu sont dits ensembles mesurables: sur c'est sur ces ensembles que l'on définit la mesure de Borel-Lebesgue. Il existe des sous ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas mesurables: l'ensemble de Vitali en est un exemple, mais ils sont très rares.

Proposition:

Il existe une plus petite tribu de $\mathbb{R}$ contenant les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$: on l'appelle tribu des Boréliens. L'ensemble triadique de Cantor est un exemple d'ensemble borélien, fermé et d'intérieur vide.

Théorème:

Il existe une unique mesure λ, la mesure de Lebesgue, fonction positive définie sur les ensembles mesurables de $\mathbb{R}$, vérifiant les 3 axiomes suivants:

1. **Normalisation:** Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\lambda([a, b]) = (b - a)$.
2. **σ-additivité**: pour toute suite de sous ensembles mesurables $(E_i)_{i\geq 1}$ disjoints deux à deux, $E_i \cap E_J = \emptyset$ si et seulement si $i \neq j$, on a:
$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(E_i).$$
3. **Invariance par translation:** pour tout $r \in \mathbb{R}$ et pour tout E sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, on a:
$$\lambda(E + r) = \lambda(E)$$
où $E + r = \{x + r, \ \ x \in E\}$.

De même que la mesure de Lebesgue n'est définie que sur les ensembles mesurables, l'intégrale de Lebesgue, définie ci-après, ne pourra s'appliquer qu'à un ensemble particulier de fonctions: les fonctions mesurables.

2 Fonctions mesurables et fonctions boréliennes.

Définition des fonctions mesurables et fonctions boréliennes.
Supposons $\mathbb{R}$ muni d'une tribu S. Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dite mesurable si et seulement si $f^{-1}(E) \in S$ pour tout $E \in S$. Plus particulièrement, si l'on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des Boréliens, on dira que f est borélienne, si et seulement si $f^{-1}(E)$ est borélien pour tout ensemble E borélien.

Exemple
Toute fonction f s'écrivant de la manière suivante:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \, 1_{E_i}$$

où $(E_i)_{i=1..n}$ est une suite finie de boréliens et $(a_i)_{i=1..n}$ une suite finie de nombres réels, est dite fonction étagée. Alors toute fonction étagée est borélienne.

Proposition

1. Une fonction f est borélienne de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty,\, a[) = \{x \in \mathbb{R},\;\; f(x) < a\}$$

   est un borélien.

2. Toute fonction continue, continue par morceaux, réglée est borélienne.
3. Toute somme, produit, Sup et Inf de fonctions boréliennes est une fonction borélienne.
4. Toute limite simple d'une suite de fonctions boréliennes est borélienne.
5. Le Sup et le Inf d'une suite de fonctions boréliennes est borélienne.
6. Une fonction Riemann intégrable sur un segment $[a,\, b]$, ($a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) est mesurable.

Dans toute la suite du cours, $\mathbb{R}$ sera muni de la tribu des Boréliens et nous ne considérerons que des ensembles boréliens ou mesurables, ainsi que des fonctions boréliennes, ou mesurables. Il ne sera jamais demandé de prouver la nature borélienne ou mesurable d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ ou d'une fonction.

3 Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives.

Définition-Théorème de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives:

A toute fonction mesurable positive, $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty]$, f pouvant prendre des valeurs infinies, on associe l'intégrale de Lebesgue de f notée $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ ou $\int f \, d\lambda$, vérifiant les trois axiomes suivants:

1. pour tout ensemble mesurable E on pose $\int 1_E d\lambda = \lambda(E)$. Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
$$\int 1_{[a,b]} d\lambda = \lambda([a,\, b]) = (b - a).$$
2. Croissance: pour toutes fonctions mesurables f et g positives telles que $f \leq g$ alors
$$\int f d\lambda \leq \int g d\lambda.$$
3. Linéarité positive: $\forall \alpha \geq 0$ et toutes fonctions mesurables f et g positives
$$\int (\alpha f + g) d\lambda = \alpha \int f d\lambda + \int g d\lambda.$$

Exemple

Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction étagée:
$$f = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \, 1_{E_i}$$
où $(E_i)_{i=1..n}$ est une suite finie de boréliens et $(a_i)_{i=1..n}$ une suite finie de nombres réels positifs. Alors
$$\int f \, d\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \, \lambda(E_i).$$

4 Théorème de convergence monotone

Théorème de convergence monotone, dit théorème de Beppo-Lévi (à savoir énoncer)

Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives définies sur $\mathbb{R}$, (i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) de limite simple f, ($f(x) = \sup_n f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$), alors f est mesurable positive et:
$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f d\lambda.$$

Remarques

Comme la suite (f_n) est croissante, f est à valeurs dans $[0, +\infty]$. De plus par croissance de l'intégrale, $\int f_n \, d\lambda$ est une suite de réels croissante donc converge dans $[0, +\infty]$.

Corollaire du théorème de convergence monotone appliqué aux séries de fonctions positives (savoir énoncer)

Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors la série $\sum_n u_n$ converge simplement vers une fonction u mesurable positive et l'on a:

$$\sum_n \int u_n d\lambda = \int (\sum_n u_n) d\lambda = \int u d\lambda.$$

Remarque

La linéarité (ou additivité) de l'intégrale permet seulement d'intervertir somme FINIE et intégrale. Pour intervertir somme INFINIE et intégrale, le théorème de convergence monotone est nécessaire.

5 Lien entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives.

On pourra utiliser pour résoudre certains exercices de la feuille 3, dès à présent les théorèmes suivants qui font le lien entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives. L'intégrale de Riemann d'une fonction f Riemann intégrable sur le segment $[a,\, b]$ est notée $\int_a^b f(t)dt$, l'intégrale de Lebesgue de f sur $[a,\, b]$ est notée $\int 1_{[a,\, b]} f \, d\lambda$.

Calcul de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction en escalier positive.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(d_0, d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et soit $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a,\, b]$, $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Ainsi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. On pose

$$f = \sum_{k=1}^{k=n} (c_k \, 1_{]x_{k-1},\, x_k[} + d_k \, 1_{\{x_k\}}) + d_0 \, 1_{\{x_0\}}.$$

Alors par linéarité positive on peut écrire:

$$\int f \, d\lambda = \sum_{k=1}^{k=n} (c_k \int 1_{]x_{k-1},\, x_k[} \, d\lambda + d_k \int 1_{\{x_k\}} \, d\lambda) + d_0 \int 1_{\{x_0\}} \, d\lambda.$$

Or $\int 1_{]x_{k-1},\, x_k[} \, d\lambda = x_k - x_{k-1}$ et $\int 1_{\{x_k\}} \, d\lambda = 0$. Donc

$$\int f \, d\lambda = \sum_{k=1}^{k=n} c_k (x_x - x_{k-1}) = \int_a^b f(t) dt.$$

Théorème: lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue des fonctions positives

Soit $a < b$ deux nombres réels, et f une fonction positive, Riemann intégrable sur $[a, b]$. Alors f est mesurable et

$$\int_a^b f(t) dt = \int 1_{[a,b]} f d\lambda.$$

Démonstration. On utilise tout d'abord le calcul précédent montrant que si ϕ est une fonction en escalier sur $[a,\, b]$ on a l'égalité:

$$\int_a^b \phi(t)dt = \int_{[a,\, b]} \phi\, d\lambda.$$

Soit f une fonction Riemann intégrable et positive. D'après la caractérisation des fonctions Riemann intégrables par les sommes de Darboux, on déduit qu'il existe deux suites de fonctions en escalier, (ϕ_n) et (ψ_n) définies sur $[a,\, b]$ telles que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$ on ait:

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n, \quad \int_a^b (\psi_n(t) - \phi_n(t))dt < \epsilon.$$

(la suite ϕ_n a pour intégrale la somme de Darboux inférieure de f pour une subdivision σ_n et ψ_n a pour intégrale la somme de Darboux supérieure de f pour la même subdivision σ_n).

Par croissance de l'intégrale on a:

$$0 \leq \int_{[a,\, b]} (f - \phi_n)\, d\lambda \leq \int_{[a,\, b]} (\psi_n - \phi_n)\, d\lambda$$

Or

$$\int_{[a,\, b]} (\psi_n - \phi_n)\, d\lambda = \int_a^b (\psi_n(t) - \phi_n(t))dt$$

donc

$$0 \leq \int_{[a,\, b]} (f - \phi_n)\, d\lambda < \epsilon.$$

Or par linéarité positive on a:

$$\int_{[a,\, b]} (f - \phi_n)\, d\lambda + \int_{[a,\, b]} \phi_n\, d\lambda = \int_{[a,\, b]} f\, d\lambda$$

et donc

$$\int_{[a,\, b]} (f - \phi_n)\, d\lambda = \int_{[a,\, b]} f\, d\lambda - \int_{[a,\, b]} \phi_n\, d\lambda$$

ce qui conduit à:

$$0 \leq \int_{[a,\, b]} f\, d\lambda - \int_{[a,\, b]} \phi_n\, d\lambda < \epsilon.$$

Or comme f est Riemann intégrable et par définition de l'intégrale de Riemann de f on a:

$$0 \leq \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b \phi_n(t)\, dt < \epsilon$$

soit

$$0 \leq \int_a^b f(t)\, dt - \int_{[a,\, b]} \phi_n(t)\, dt < \epsilon$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $\epsilon > 0$ on a bien:

$$\int_{[a,\,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Théorème: lien entre intégrale impropre (ou généralisée) de Riemann et intégrale de Lebesgue des fonctions positives.

Soit $a < b$ deux nombres réels, et f une fonction positive, Riemann intégrable sur tous les segments $[x, y] \subset]a,\, b[$. Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge dans $\mathbb{R}_+$ alors f est mesurable et

$$\int 1_{]a,b[} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Considérons deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (a_n, b_n) \in]a,\, b[^2$ avec (a_n) décroissante et (b_n) croissante. De plus supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Soit f une fonction positive et Riemann intégrable sur tout segment $[x, y] \subset]a,\, b[$. Alors les fonctions f_n définies par: $f_n = 1_{[a_n,\, b_n]} f$ forment une suite de fonctions positives définies sur $\mathbb{R}$, Riemann intégrables, donc mesurables et de limite simple égale à $1_{]a,\, b[} f$ (mesurable aussi). La fonction f étant positive, la suite (f_n) est croissante. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à cette suite, ainsi:

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n\,d\lambda = \int 1_{]a,\, b[} f\,d\lambda.$$

Or

$$\int f_n\,d\lambda = \int_a^b f_n(t)dt = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt$$

d'après le théorème précédent.

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

car l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge. On obtient donc le résultat par unicité de la limite:

$$\int 1_{]a,\, b[} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)dt.$$