Université Paris-Sud - Topologie et Calcul Différentiel
Année 2022-2023

CORRIGÉ du Partiel du mardi 21 Février 2023

Début 13h45 Durée : 3 heures

Je remets les questions pour que vous vous y retrouviez. Le barème initial était 5+5,5+4+5,5, mais j'ai ajouté un peu.

Dans cet énoncé, $\mathbb{R}^n$ est automatiquement muni de la norme euclidienne $||\cdot|| = ||\cdot||_2$, et de la distance euclidienne. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (donc e_j a toutes ses coordonnées nulles, sauf la j-ième qui vaut 1).

Exercice 1.
On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de la distance euclidienne, et on note $L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = 0\}$ et $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x = 0\}$, et enfin $L = L_1 \cup L_2$.
Puis on note, pour $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta_1(M) = \mathrm{dist(M, L_1)} = \inf\limits_{\mathrm{N\in L_1}} \mathrm{||M-N||}$,
$\delta_2(M) = \mathrm{dist(M, L_2)} = \inf\limits_{\mathrm{N\in L_2}} \mathrm{||M-N||}$, et $\delta(M) = \mathrm{dist(M, L)} = \inf\limits_{\mathrm{N\in L}} \mathrm{||M-N||}$.

1. Calculer $\delta_1(M)$ et $\delta_2(M)$ en fonction de x et y.
2. Calculer $\delta(M)$ en fonction de x et y.
3. Démontrer que le complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus L$ de L est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
4. Vérifier que δ est différentiable en tout point $M \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ tel que $|x| \neq |y|$.
5. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$, δ n'est pas différentiable au point (x,x).

Avant tout, il était recommandable de faire un dessin ; les formules pour les deux distances pouvaient alors se deviner. Mais pas mal d'entre vous ont des problèmes avec les bornes inférieures.

Pour 1. On se donne donc $M = (x,y)$ et on veut calculer

$$\delta_1(M) = \mathrm{dist(M, L_1)} = \inf_{\mathrm{N\in L_1}} \mathrm{||M-N||}.$$

Les points de L_1 sont les points de la forme $N = (x', 0)$, où $x' \in \mathbb{R}$. J'ai mis x' parce que la lettre x est déjà prise par la première coordonnée de M, et qu'il n'y a aucune raison que $x = x'$ (déjà une première source d'erreurs : attention aux notations qui vous mènent droit dans le mur). Donc $\delta_1(M) = \inf_{N\in L_1} ||M-N|| = \inf_{x'\in\mathbb{R}} ||(x,y)-(x',0)||$.

Ensuite $||(x,y)-(x',0)|| = \sqrt{(x'-x)^2+y^2}$ par définition de la norme. Et on veut calculer la borne inférieure de cette quantité. Soit on se rend compte tout de suite que cette quantité est minimale quand $x' = x$, soit on peut carément étudier la fonction $x' \mapsto \sqrt{(x'-x)^2+y^2}$. On gagne donc un peu de temps en disant que $x' = x$ donne la plus petite valeur de $(x'-x)^2$, donc de $\sqrt{(x'-x)^2+y^2}$. Donc cette valeur minimale est $\sqrt{y^2} = |y|$. En bref $\delta_1(M) = |y|$.

Pour δ_2, pas la peine de tout refaire en échangeant x et y : si vous dites juste que par la même démonstration, on trouve que $\delta_1(M) = |x|$, on vous croira.

Pour 2. La formule générale est que pour une union $L = L_1 \cup L_2$, on a toujours $\mathrm{dist(M, L_1\cup L_2)} = \min(\mathrm{dist(M, L_1)}, \mathrm{dist(M, L_2)})$. En effet $\mathrm{dist(M,N)} \geq \min(\mathrm{dist(M, L_1)}, \mathrm{dist(M, L_2)})$ pour tout $N \in L$, puisque soit $N \in L_1$ et alors $\mathrm{dist(M,N)} \geq \mathrm{dist(M, L_1)}$, soit $N \in L_2$ et alors $\mathrm{dist(M,N)} \geq \mathrm{dist(M, L_2)}$. Dans les deux cas $\mathrm{dist(M,N)}$ est plus grande que le minimum. Ensuite on prend la borne inférieure sur N, et cela reste $\geq \min(\mathrm{dist(M, L_1)}, \mathrm{dist(M, L_2)})$. Donc $\mathrm{dist(M, L_1 \cup L_2)} \geq \min(\mathrm{dist(M, L_1)}, \mathrm{dist(M, L_2)})$.

Et dans l'autre sens $\mathrm{dist(M, L_1\cup L_2)} \leq \mathrm{dist(M, L_1)}$ (la distance à L est plus petite, puisqu'il y a plus de points dans L pour tester, ou autrement dit on prend un inf sur un ensemble plus grand), et pareillement $\mathrm{dist}(\mathrm{M}, \mathrm{L}_1 \cup \mathrm{L}_2) \leq \mathrm{dist}(\mathrm{M}, \mathrm{L}_2)$, donc $\mathrm{dist}(\mathrm{M}, \mathrm{L}_1 \cup \mathrm{L}_2)$ est inférieur au minimum.

En fait, dans notre cas, les choses étaient plus simples, puisque les deux distances (à L_1 et à L_2) étaient atteintes : puisqu'on connait le point de L_1 le plus proche (à savoir $(0, y)$) et le point de L_1 le plus proche (à savoir $(x, 0)$), il ne restait plus qu'à savoir lequel de ces deux points était le plus proche. En tout cas, on trouvait

$$\delta(M) = \min(|y|, |x|). \tag{1}$$

Ce n'est pas une trop jolie formule, mais sans elle on ne peut pas calculer les différentielles !

Pour 3. C'est plus pratique de vérifier, en passant au complémentaire, que L est fermé. Et comme F est l'union (finie) de L_1 et L_2, que chacun des deux est fermé. Soit on sait (et on l'affirme bien clairement) qu'une droite est une ensemble fermé du plan, soit on le redémontre. On peut y arriver en montrant qu'une suite de points $\{N_k\}$ de L_1 qui converge dans le plan doit converger vers un point de L_1 (parce que la seconde coordonnée reste nulle à la limite), soit on gagne un peu de temps en disant que $L_1 = \pi_2^{-1}(\{0\})$, où π_2 est la projection linéaire définie par $\pi_2(x, y) = y$. Or π_2 est continue, et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc son image réciproque L_1 est fermée (dans $\mathbb{R}^2$). C'est le plus rapide, et une astuce à utiliser souvent.

Pour 4. Je plaide coupable : il y a trop de cas différents qu'il faudrait traiter, même s'ils sont tous pareils. On se donne $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L$, et on veut montrer que δ est différentiable en M.

Et le plus rapide est de distinguer les 8 cas tout de suite. Comme $x \neq 0$ puisque $M \notin L_2$ et pareillement $y \neq 0$ puisque $M \notin L_1$, les deux cas principaux sont parce que soit $0 < |x| < y$, soit $0 < |y| < |x|$.

Et dans chacun de ces cas, une fois qu'on s'est donné $|x|$ et $|y|$, il y a encore 4 cas suivant les signes de x et y. Dans un tel cas, ne vous démontez pas, commencez par un cas. Je vais prendre le plus facile. Ensuite il sera temps de voir si les autres sont pareils. De toute façon, si vous ne savez pas traiter le premier cas, vous aurez du mal à traiter le cas général. Mais évidemment ne choisissez pas le cas le plus particulier (comme $(0, 0)$, sauf si vous avez de bonne raisons de penser que les autres sont pareils), vous risqueriez de perdre du temps.

Donc on commence par supposer que $0 < x < y$, disons. On veut étudier $\delta(M')$, où $M' = (x', y') = (x + h, y + k)$, au voisinage de M, donc quand $h \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ sont tous les deux très petits.

Et là il y a une remarque importante à faire. On s'est donné x, y avec $0 < x < y$. Alors, pour x' assez proche de x et y' assez proche de y, on a encore $0 < x' < y'$. Et c'est bien pratique, car alors $\delta(M') = \min(|x'|, |y'|) = x'$. Donc, dans un voisinage de M, la fonction δ est simple : c'est la fonction $(x', y') \mapsto x'$, une des deux fonctions coordonnées. Et cette fonction est différentiable, car c'est un polynôme. Même pas la peine de calculer la différentielle, on ne vous le demandait pas. On a utilisé le fait que si f coincide avec une fonction différentiable dans un voisinage de M, alors elle est différentiable aussi au point M.

Voici pour le premier cas, parmi 8, où $0 < x < y$. Surtout ne vous lancez pas dans les 7 autres cas, si vous voulez passer à une autre question. A ce stade, il convient de dire que les autres cas sont pareils. Le point principal est que pour tout choix de M, avec des signes de x, y, et $|x| - |y|$ donnés, il y a un petit voisinage de M où ces signes restent les mêmes. Cà, c'est parce que les trois quantités sont continues en fonction de x et y. Et ensuite, dans ce petit voisinage, δ est donnée par une formule $\delta(x', y') = \pm x'$, ou $\delta(x', y') = \pm y'$, avec un ccoix fixe de la formule. Chacune des formules donne une vonction différentiable (c'est une fonction affine), donc on peut conclure comme précédemment. Dit de menière plus compliquée, on a pu découper $\mathbb{R}^2 \setminus L$ en 8 ouverts, et sur chacun d'eux δ est différentiable parce qu'elle est donnée par une fonction affine.

Ne vous inquiétez pas, dans un cas comme ça, on ne vous demandera jamais de faire tous les cas. Déjà en identifant le problème (est-ce qu'on a la même formule pour M' que pour M), vos aviez largement les points.

Pour 5. En fait plus facile. Maintenant on se place en $M = (x, x)$ et on veut montrer que δ n'est pas différentiable en M. Noter que $x \neq 0$ puisque $(x, x) \notin L$ Pour savoir quoi faire, on regarde un peu son dessin. Le long de la direction donnée par x, on a $\delta(x', x') = x'$, et il y a bien une dérivée directionnelle. Donc c'est logique de regarder dans une autre direction. Et le plus simple (et qui marche) est d'essayer de montrer qu'il n'y a pas de dérivée partielle $\partial_1 f$ en M. On auait pu être tenté de faire encore plus fort, en essayant de démontrer qie δ n'est pas continue en M, mais ce serait trop : vous savez sans doute qu'une fonction constante, c'est limschitzien.

Donc on veut démontrer que $\partial_1 f(M)$ n'existe pas. Donc on essaie de calculer $\delta(x + h, x)$ pour $h \in \mathbb{R}$ petit. Et à cause de la formule (2), on trouve que $\delta(x + h, x) = x$ pour $h > 0$ et $\delta(x + h, x) = x + h$ (qui est plus petit que x) pour $h < 0$. Donc en remplaçant, on trouve une demidérivée à droite $\lim_{h\to 0_+} \frac{\delta(x+h,x)-\delta(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{x-x}{h} = 0$, et une demi-dérivée à gauche $\lim_{h\to 0_-} \frac{\delta(x+h,x)-\delta(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{h}{h} = 1$. Bref, pas de dérivée partielle en M, donc encore moins de différentielle.

Pareil quand $x < 0$. La démonstration est la même, et (si c'est vrai) on ne vous en voudra jamais de le dire : on n'a pas envie de lire deux fois la même chose avec des erreurs de recopiage en plus.

Exercice 2.
On considère l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par ses deux coordonnées f_1 et f_2, où

$$f_1(x, y, z) = x^2 + 3xy + \cos(x + y + z) \quad \text{et} \quad f_2(x, y, z) = x^2 y^3 z^4 \tag{2}$$

pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de f_1 et f_2 au point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. La fonction F est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^3$? Pourquoi ?
3. Ecrire la matrice $J(x, y, z)$ de la différentielle $DF(x, y, z)$ au point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   On considère maintenant la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par ses trois coordonnées

   $$z_1(t) = t\,, \quad z_2(t) = t^2\,, \quad \text{et} \quad z_3(t) = t^3. \tag{3}$$

4. Calculer la dérivée de z au point t.
5. Dire pourquoi $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est différentiable en tout $t \in \mathbb{R}$, et expliquer qui est sa différentielle $Dz(t)$ au point t.
6. Calculer, <u>en utilisant les questions précédentes</u>, la différentielle de $F \circ z$ au point t.
7. Ecrire directement les deux coordonnées de $F \circ z(t)$ et utiliser ces formules pour vérifier le résultat de la question précédente.

Pour 1. Vous savez tous faire mieux que moi.

Pour 2. On note que les six dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont continues, et on applique le théorème du cours qui dit que quand F a toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 qui sont continues sur un ouvert, alors F est différentiable en tout point de U (et donc est de classe C^1 sur U). Ici, $U = \mathbb{R}^n$, et dans l'ensemble vous avez répondu ce qu'on attendait.

Pour 3. On range les 6 dérivées partielles dans une matrice $J(z)$ qui a deux lignes (une pour f_1 et une pour f_2, et trois colonnes. Donc c'est comme si on rangeit les trois gradients (des vecteurs colonnes) à coté les uns des autres. Je n'écris pas par flemme d'aller chercher les instructions en $te\chi$.

Pour 4. Pour calculer la dérivée de z, on dérive chaque coordonnée (par rapport à la seule variable t). On trouve $z_1'(t) = 1$, $z_2'(t) = 2t$, et $z_3'(t) = 3t^2$. Pour faire joli, on présente $z'(t)$ comme un vecteur colonne avec ces trois coordonnées.

Pour 5. Là on s'est mal compris. Oui, je repose la même question d'une façon différente. On a bien dit en cours que pour que z soit différentiable en t, il faut et il suffit que chaque coordonnée soit déiiiférentiable, et c'est bien le cas par la question précédente. Il n'y a même pas besoin de dire que les dérivée partielles sont continues, puisqu'il s'agit d'une fonction d'une seule variable pour laquelle dérivabilité et diférentibilité sont équivalents.

Je demandais surtout qui est la différentielle $Dz(t)$ de z au point t. Ici, $t \in \mathbb{R}$, et z est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, donc on veut une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Et le cours dit que chacune des coordonnées L_j de L est la différentielle de la coordonée z_j de z. Et la différentielle de L_j est l'application linéaire $L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui correspond à la dérivée $z_j'(t)$. Ensuite, l'application linéaire $L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est l'application donnée par $L_j(h) = z_j'(t)h$. C'est juste ici en principe qu'il fallait faire attention : en dimension 1, une forme linéaire, c'est toujours une application du type $h \mapsto \lambda h$, pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ qui est aussi $L_j(1)$ (parce que $\mathbb{R}$ est un espace verctoriel de dimension 1 dont 1 est une base). Donc, on est arrivé à $L_j(h) = z_j'(t)h$.

Ou, dit autrement, $L = Dz(t)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $h \in \mathbb{R}$ associe le vecteut $hz'(t)$ (multiplier un vecteur par un scalaire, on sait faire !).

Enfin, sans doute que vous préférez travailler avec les matrices. Alors, la matrice $J_z(t)$ de $Dz(t)$ est la matrice-colonne $z'(t)$.

Pour 6. Muni de la question 5 ; la question 6 devait se faire tout seul. Bien entendu, on se souvient absolument que la composée de deux fonctions différentiables est différentiable. Et avec la formule suivante pour la différentielle de la composée :

$$D(f \circ z)(t) = Df(z(t)) \circ Dz(t) \tag{4}$$

Vous avez bien retenu (souvent) que ca ressemble à la formule de composition de fonctions d'une variable, mais maintenant l'ordre des termes est important, parce qu'on compose (on ne multiplie pas deux applications linéaires). Notez bien que $Dz(t)$ envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et que $Df(z(t))$ envoie $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Et c'est bien normal que la composée (donc $D(f \circ z)$) envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Vérifiez toujours ça avant de vous lancer dans les calculs.

Maintenant, pour calculer vous savez que c'est mieux de remplacer la composition des applications linéaires par la multiplication de leurs matrices. Donc ici, la matrice de $D(f \circ z)$ est le produit $Jf(z(t))Jz(t)$. C'est une matrice à une ligne et deux colonnes qu'on vous demandait de calculer (et vous aviez tout pour le faire, et en plus une question derrière pour vous aider à vérifier les calculs).

Bon, en fait, si vous n'aimez pas les applications linéaires, il y a aussi la méthode des physiciens, qui marche très bien. On pose $G(t) = (f \circ z)(t)$, et on veut calculer sa dérivée. On va même faire le calcul comme si z partait de $\mathbb{R}^m$, parce que ca marche pareil et que vous pourriez en avoir besoin. On veut donc calculer n'importe quelle dérivée partielle $\frac{\partial G}{\partial x_i}$. Ici il n'y en a qu'une, la détivée par rapport à t. Et on écrit que

$$\frac{\partial G}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial}{\partial t_i}(G(t)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f(z(t))) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(f(z(t)))\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(t). \tag{5}$$

Ici, i est fixe, et on somme sur tous les numéros des coordonnées de z, qui sont aussi les numéros variables dans f (donc il y en a 3). Vous devez vous imaginer des petites variations des z_j, puis les petites variations de $f(z_1, z_2, z_3)$ qui en découlent, et additionner tout ça.

Pour 7, c'était en principe facile (et c'est même décevant que dans ce cas, le calcul avec les différentielles nous complique juste la vie). On prenait la défnition de $G(t) = (f \circ z)(t) = f(z(t))$, qui a donc deux coordonnées, $f_1(z(t))$ et $f_2(z(t))$. On trouve $G_1(t) = f_1(z(t)) = z_1(t)^2 + 3z_1(t)z_2(t) + \cos(z_1(t) + z_2(t) + z_3(t))$; On remplace $z_1(t)$, $z_2(t)$, et $z_3(t)$ par leurs valeurs, et on simplifie l'expression. C'est pas dur, vous savez faire.

Et ensuite on dérivait G, et on devait trouver les deux coordonnées de la matrice trouvée au 6, et s'exclamer qu'on avait de la chance. En y regardant de près, on pouvait voir qu'on faisait en gros deux fois le même calcul.

Exercice 3.
On note $O = (0,0)$ l'origine de $\mathbb{R}^2$ et on se donne une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que les dérivées partielles de f s'annulent en O et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O) = 1$, et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O) = 5$.

1. Ecrire la matrice Hessienne H de f en O. Dites au passage pourquoi on a supposé f de classe C^2 et pas seulement l'existence de dérivées partielles d'ordre 2.
2. Ecrire la formule de Taylor (une formule de Taylor de votre choix) d'ordre 2 pour f au point O.
3. Vérifier que $4u^2 + 5v^2 + 2uv \geq 3u^2 + 4v^2$ pour tout choix de $u, v \in \mathbb{R}$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe $r > 0$ tel que $f(x,y) - f(O) \geq (x^2 + y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)|| \leq r$, puis que $f(x,y) > f(O)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < ||(x,y)|| \leq r$.

Pour 1. C'est la matrice 2×2 avec les dérivées secondes dedans. Donc $(4,1)$ pour la première ligne et $(1,5)$ pour la seconde. Et on peut l'écrire ainsi parce que comme on a supposé f de classe C^2, le théorème de Schwarz dit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O)$, ce qui permet de compléter la matrice et de ne pas se poser de problème de symétrie.

Pour 2. Voir le cours. Très déçu que vous ne sachiez pas ça. Il me semble que c'était au programme (même si on sera forcé de faire des exos dessus, et qu'on y reviendra)

Pour 3. Un calcul facile que vous avez fait, utilisant que $(u+v)^2 \geq 0$.

Pour 4. On écrit la formule de Taylor, qui ici donne

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{1}{2}\Big\{4x^2 + 2xy + 5y^2\Big\} + ||(x,y)||^2 \varepsilon(x,y) \tag{6}$$

sans terme d'ordre 1 puisqu'on avait supposé qu'ils étaient nuls, et ou

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0. \tag{7}$$

On pouvait gagner un peu d'espace en écrivant $o(||(x,y)||^2$ à la place de $||(x,y)||^2 \varepsilon(x,y)$, mais à la fin c'était bien de traduire de toute façon.

Et maintenant il s'agissait de gérer le terme d'erreur. Par définition, de (7) on sait que pour tout $\delta > 0$, il existe $r = r_\delta > 0$ tel que $|\varepsilon(x,y)| < \delta$ dès que $||(x,y)|| \leq r$. On prend $\delta = 1$ et on choisit r comme ceci, et on voit que dans ce cas (6) implique que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= \frac{1}{2}\Big\{4x^2 + 2xy + 5y^2\Big\} + ||(x,y)||^2 \varepsilon(x,y) \geq \frac{1}{2}\Big\{4x^2 + 2xy + 5y^2\Big\} - ||(x,y)||^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big\{4x^2 + 2xy + 5y^2\Big\} - x^2 - y^2 \end{aligned} \tag{8}$$

On calcule, on se rend compte qu'à cause de la question précédente il reste $f(x,y) - f(0,0) \geq (x^2 + y^2)$, et on conclut.

Exercice 4.
On considère une norme N sur $\mathbb{R}^n$, et l'on note $B_N = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, N(x) < 1\}$.

1. Rappeler la définition d'une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Vérifier que $N(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i)$, où l'on a noté $x = (x_1, \ldots, x_n)$, et les e_i sont les vecteurs de la base canonique (voir le préambule).
3. En déduire que N est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ (c.-à-d. qu'il existe un nombre $C \geq 0$ tel que $|N(x) - N(y)| \leq C||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$).
4. Vérifier que B_N est symétrique par rapport à l'origine, c.à-d. que $-x \in B_N$ pour tout $x \in B_N$.
5. Vérifier que B_N est convexe, ce qui signifie que $tx + (1-t)y \in B_N$ pour tout choix de $x \in B_N$, $y \in B_N$, et $t \in [0, 1]$.
6. Trouver un rayon $r > 0$, que l'on pourra calculer à partir des $N(e_i)$, tel que la boule euclidienne de centre $(0, \ldots, 0)$ et de rayon r est contenue dans B_N.
7. Démontrer que B_N est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Il y a une réciproque qu'on ne démontrera pas faute de temps : pour tout ensemble ouvert non vide convexe symétrique U de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver une norme N telle que $U = B_N$.

Pour 1. Vous savez. Mais attention, le fait que $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ ne signifie pas que N est linéaire. En fait aucune norme n'est linéaire, et aucune application linéaire non nulle n'est positive.

Pour 2. Utilisez les définitions qu'on vous a gentiment fait rappeler. Pour $x = \sum_i x_i e_i$, on a que

$$N(x) = N(\sum_i x_i e_i) \leq \sum_i N(x_i e_i) = \sum_i |x_i| N(e_i) \tag{9}$$

par application répétée de l'inégalité triangulaire, puis en appliquant l'homogénéité à chaque terme.

Pour 3. Il y avait deux morceaux. D'abord montrer que

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y). \tag{10}$$

La première fois, c'est déstabilisant (inégalité triangulaire inverse). Voici comment : on applique l'inégalité triangulaire en disant que $y = x + (y - x)$. On trouve que $N(y) = N(x + (y - x)) \leq N(x) + N(y - x)$. On passe de l'autre coté et on trouve que $N(y) - N(x) \leq N(x - y)$. En faisant pareil avec x et y échangés, on trouve $N(x) - N(y) \leq N(y - x) = N(y) - N(x - y)$. Et on compare à (10) pour voir qu'on a les deux inégalités. Souvenez-vous au moins que ca existe et que vous pouvez le retrouver à tout moment.

Une fois ceci fait il fallait encore vérifier que $N(x - y) \leq C||x - y||$. Vous pouviez vous contenter de dire, par équivalence des normes, mais ça aurait été dommage. On a vu que $N(x) \leq \sum_i N(e_i)|x_i|$; on peut par noter λ le plus grand des $N(e_i)$, en déduire que $N(x) \leq \lambda \sum_i |x_i| \leq \lambda \sum_i ||x|| \leq n\lambda||x||$, ou alors faire le malin, poser $A = \{\sum_i N(e_i)\}^{1/2}$, appliquer Cauchy-Schwarz, et trouver que

$$N(x) = \sum_i N(e_i)|x_i| = \langle e, \widetilde{x} \rangle \leq ||e|| ||\widetilde{x}|| = ||e|| ||x|| = A||x||,$$

où l'on a noté e le vecteur de coordonnées $N(e_i)$, et $\widetilde{x}$ le vecteur de coordonnées $|x_i|$. Enn tout cas on trouve $C \geq 0$ tel que $N(x) \leq C||x||$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On met ceci bout à bout avec (10) et on trouve $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq C||x - y||$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Erreur grave trouvée trop souvent : on a que $N(x) \leq \sum_i |x_i| N(e_i)$ et $N(y) \leq \sum_i |y_i| N(e_i)$,donc on soustrait (!!!) et on trouve $N(x) - N(y) \leq \sum_i (|x_i - y_i| N(e_i)$.

Pour 4. Si $x \in B_N$, alors $N(x) < 1$ par définition, donc $N(-x) = |-1|N(x) = N(x) < 1$ par homogénéité de la norme, donc $N(-x) < 1$, donc $-x \in B_N$ par définition.

Pour 5. Si x et y sont dans B_N, on a $N(x) < 1$ et $N(y) < 1$. Ensuite, pour $0 \leq t \leq 1$, on utilise l'inégalité triangulaire, l'homogénéité, et le signe positif de t et $1-t$ pour dire que

$$N(tx+(1-t)y) \leq N(tx)+N((1-t)y) = |t|N(x)+|1-t|N(y) = tN(x)+(1-t)N(y) \leq t+(1-t) \leq 1$$

C'est presque bon, sauf qu'on voulait $N(tx + (1-t)y) < 1$. On peut aller à la chasse pour voir si l'on a une inégalité stricte dans le tas (et ca marche bien sauf si $t = 0$ ou $t = 1$, qu'on peut traiter à part), ou alors ruser un peu, poser $\lambda = \max(N(x), N(y)) < 1$, et reprendre l'inégalité ci-dessus comme

$$N(tx + (1-t)y) \leq ... \leq tN(x) + (1-t)N(y) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda < 1,$$

Et voila, $N(tx + (1-t)y) < 1$ donc $tx + (1-t)y \in B_N$.

Pour 6. On a vu que l'on peut trouver $C > 0$ tel que $N(x) \leq C||x||$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Evidemment, si on a ceci avec $C = 0$ (en fait c'est impossible), c'est encore plus vrai avec $C = 1$. Et si on ne l'a pas démontré directement, on le déduit de la question 3 avec $y = 0$.

Alors montrons que si $r > 0$ est bien choisi, on a que $x \in B_N$ pour tout $x \in B(0, r)$ (la boule euclidienne). Autrement dit, que $N(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| < r$. Or dans ce cas $N(x) \leq C||x|| < Cr \leq 1$ dès qu'on a choisi $r \leq 1/C$.

Pour 7. C'est en fat lié à 6, mais pas une conséquence directe et brutale. On peut faire comme ceci : soit $x \in B_N$. On veut trouver $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset B_N$. On note $\alpha = 1 - N(x) > 0$. On prend $\rho = \alpha/(2C)$, avec α comme ci-dessus (ou comme plus haut on fait semblant de ne pas savoir et on choisit ρ à la fin). Et on note que pour $z \in B(x, \rho)$, on a $N(z) < 1$ donc $z \in B_N$, car en effet

$$N(z) \leq N(x) + N(z - x) \leq N(x) + C||z - x|| \leq N(x) + C\rho \leq N(x) + \alpha/2 < 1$$

par l'inégalité triangulaire, la question 3, et le choix de α et ρ.

Bon, en fait il y avait plus rapide. Puisque la fonction $x \mapsto N(x)$ est Lipschitzienne, elle est continue (de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, +\infty[$). Or B_N est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 1[$ par cette application continue, donc c'est un ouvert.

J'ai mis $]-\infty, 1[$, pour qu'il n'y ait pas de discussion possible, mais $[0, 1[$ marche aussi, parce que c'est un ouvert de $[0, +\infty[$.