**L3 École Universitaire** **Année 2021-22**

**Partiel du 28 Octobre 2021**

**Probabilités**

**Durée 3 heures**

*Les calculettes, téléphones, pigeons voyageurs, avions en papier, sarbacanes et tout autre moyen de communication avec autrui sont prohibés.*

*Les correcteurs apprécieront sous forme de points toute forme d'égard : des arguments bien exposés, une présentation soignée, des résultats soulignés.*

*Vous avez le droit d'admettre des résultats de questions que vous n'arrivez pas à traiter.*

*On rappelle l'inégalité de Cauchy -Schwarz pour toutes variables $X$ et $Y$ de carré intégrable i.e. telles que $E[X^2] < \infty$ et $E[Y^2] < \infty$ : $E[XY]^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$.*

*On rappelle que le coefficient de corrélation de deux variables $X$ et $Y$ est donné par le quotient : $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}}$.*

**Exercice 1**

On définit l'univers $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1 - Donner la liste des 8 parties de $\Omega$ qui constituent la plus petite tribu $\mathcal{F}$ contenant les parties $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5\}$ et $\{4, 5, 6\}$.

2 - Soit $X$ la fonction de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$, par $X(\omega) = 1$ si $\omega$ est impair et 0 si $\omega$ est pair. La fonction $X$ est elle une variable aléatoire pour la tribu $\mathcal{F}$ ?

3 - Combien existe-t-il de variables aléatoires pour la tribu $\mathcal{F}$, à valeurs dans $\{0, 1\}$ ?

**Exercice 2**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un espace muni d'une tribu $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que :

1 - La fonction $X^2$ est une variable aléatoire.

2 - La fonction $\max(X, Y)$ est une variable aléatoire.

**Exercice 3**

Soit $X$ une variable aléatoire positive qui admet une espérance finie et $\theta \in ]0,1[$.

1 - En écrivant que $X = X1_{\{X<\theta E[X]\}} + X1_{\{X\geq\theta E[X]\}}$, montrer que

$$E[X] \leq \theta E[X] + E[X1_{\{X\geq\theta E[X]\}}].$$

2 - En déduire, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$(1-\theta)^2 \frac{E[X]^2}{E[X^2]} \leq P(\{X \geq \theta E[X]\})$$

où le terme de droite est égal à 0 si $E[X^2] = +\infty$.

3 - Traduire l'inégalité précédente lorsque $X$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et vérifier par le calcul qu'elle est bien vraie dans ce cas particulier.

4 - Montrer en utilisant l'inégalité de Markov que

$$P(\{X \geq \theta E[X]\}) \leq \frac{E[X^2]}{\theta^2 E[X]^2}.$$

**Exercice 4**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de valeur absolue majorée par 1 presque sûrement.

1 - Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E[\frac{X^{2n}}{1+X^{2n}}] = \frac{1}{2}(P(X=1) + P(X=-1))$.

2 ($\star$) - À quelle condition la suite $E[\frac{X^n}{1+X^n}]$ a-t-elle une limite ?

**Exercice 5**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$.

1 - Rappeler la densité de probabilité de la loi de $X$.

2 - Montrer par le calcul que la moyenne est bien $m$ et que la variance est bien $\sigma^2$.

**Exercice 6**

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par la densité de probabilité,

$$f_X(x) = x1_{[0,1]}(x) + C1_{[1,3]}(x)$$

pour un certain $C > 0$

1 - Préciser $C$ pour que $f_X$ soit une densité.

2 - Donner la fonction de répartition de $X$ et tracer son graphique.

2 - Calculer $P(X \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$.

3 - Calculer l'espérance de $X$.

4 - Donner la loi de $\frac{1}{X}$.

**Exercice 7**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes dont la loi du couple est donnée par

$$P((X,Y)=(1,1))=1/8, \quad P((X,Y)=(1,2))=1/8, \quad P((X,Y)=(1,3))=1/4$$

$$P((X,Y)=(2,1))=1/6, \quad P((X,Y)=(2,2)=1/6, \quad P((X,Y)=(2,3))=1/6.$$

1 - Donner la loi de $X$ et de $Y$.

2 - Calculer le coefficient de corrélation de $X$ et $Y$.

**Exercice 8**

Soit $D := \{(x,y) : x > 0\,,\, 0 < y < e^{-3x}\}$.

Soit $(X,Y)$ un couple de va réelles dont la loi est donnée, pour une certaine constante $C$, par la densité de probabilité,

$$f_{X,Y}(x,y) = C1_D(x,y).$$

1 - Trouver la valeur de la constante $C$.

2 - Donner les lois de $X$ et de $Y$.

3 - Calculer $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$, $Cov(X,Y)$ puis le coefficient de corrélation de $X$ et $Y$.

4 - Que vaut $P(X < 1, Y < 1)$ ?