Université Paris-Saclay - L3 Mathématiques
Analyse théorique et numérique des EDO - Année 2023-2024

TD1 (suite) : équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et systèmes d'équations linéaires.

Exercice 1. EDO d'ordre 2
Résoudre les edo suivantes en utilisant l'équation caractéristique.

1. $y'' - y' - 6y = 0$.
2. $y'' - y' - 6y = t^2$.
3. $y'' + y' + y = 0$.
4. $y'' + y' + y = \cos(2t)$
5. $y'' - 4y' + 3y = e^{-2t}$
6. $y'' - 4y' + 3y = e^t$.
7. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
8. $y'' - 4y' + 4y = e^t$.

Exercice 2. Systèmes différentielles linéaires - cas d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système d'équations différentielles linéaire $Y' = AY$.
Supposons que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$: il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, tel que $A = PDP^{-1}$.

1. Soient $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs correspondant aux colonnes de P, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les scalaires correspondant à la diagonale de A. Justifier pourquoi $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et rappeler le lien entre les vecteurs U_i et les scalaires $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$.
2. Soit $V = P^{-1}Y$. Écrire le système différentiel vérifié par V et donner l'ensemble de ses solutions. En déduire que Y est solution de $Y' = AY$ si et seulement si
$$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} U_n,$$
où $C_1, \dots, C_n$ sont des constantes réelles, et conclure que l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est un espace vectoriel de dimension n.
3. Soit $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On considère le système linéaire non homogène
$$(E_B) \qquad Y'(t) = AY(t) + B(t).$$
   (a) Soit $Y_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (E_B). Montrer que l'ensemble des solutions de (E_B) est l'ensemble
$$\{t \mapsto C_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} U_n + Y_p(t),\ C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}\}.$$
   (b) Montrer que l'on peut construire une solution Y_p de (E_B) par la *méthode de la variation des constantes*, c'est-à-dire en choisissant une fonction Y_p de la forme
$$Y_p(t) = C_1(t) e^{\lambda_1 t} U_1 + \cdots + C_n(t) e^{\lambda_n t} U_n,$$
   $C_1, \dots, C_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 3. Systèmes différentielles linéaires - cas d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire tel qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, tel que $A = PDP^{-1}$. On remarque que comme A est à coefficients réels, si $U \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}$ sont tels que $AU = \lambda U$, on a $A\overline{U} = \overline{\lambda U}$.

1. Soient $U = U_1 + iU_2 \in \mathbb{C}^n$, $(U_1,\ U_2 \in \mathbb{R}^n)$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, tels que $AU = \lambda U$.Montrer que (U_1, U_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $Y(t) = e^{\lambda t}U$ est une solution à valeurs complexes de $Y' = AY$ et que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des solutions à valeurs réelles de $Y' = AY$.
3. En déduire que

$$Y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)U_1 - \sin(\beta t)U_2) \text{ et } Y_2(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)U_1 + \cos(\beta t)U_2),$$

sont deux solutions à valeurs réelles de $Y' = AY$ linéairement indépendentes.

Exercice 4. Des EDO d'ordre 2 aux systèmes d'ordre 1.
Résoudre les edo suivantes de deux façons en vous ramenant à un système différentiel d'ordre 1.

1. $y'' - y' - 6y = 0.$
2. $y'' - y' - 6y = t^2.$
3. $y'' + y' + y = 0.$

Exercice 5. Systèmes différentiels d'ordre 1.
Résoudre les systèmes différentiels d'ordre 1 suivants

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 4x - 2y \\ y' & = & x + y \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 8y + e^t \\ y' & = & 2x + y + e^{-3t} \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + z \\ y' & = & x \\ z' & = & x + y + z \end{array} \right.$