Mathématiques
Université Paris-Saclay

TD 1

MEU353
2022-2023

Rappels de Topologie

Exercice 1. Exemples de distances

1. Rappeler la définition d'une norme et d'une distance. Vérifier que toute norme sur un espace vectoriel E définit une distance sur $E \times E$. La suite donne des exemples de distances qui ne viennent pas directement de normes.

2. Vérifier que les applications suivantes sont bien des distances.

$$\begin{aligned} d_1 :\ & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \min(1, |x-y|)\,, \\ d_2 :\ & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \sqrt{|x-y|} \quad \text{(et que se passse-t-il avec } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto |x-y|^2\text{?)}\,, \\ d_3 :\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{|x_1-y_1|} + \min(1, |x_2-y_2|)\,. \end{aligned}$$

3. Vérifier que les ouverts pour la distance d_1 et d_2 (resp. d_3) sont les mêmes que les ouverts pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2. Produit d'espaces métriques I

Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques.

1. Proposer (au moins) une distance d sur l'espace produit $E_1 \times E_2$.
2. Montrer que pour toute suite $(x_k, y_k) \in (E_1 \times E_2)^{\mathbb{N}}$, et pour tout $(x,y) \in E_1 \times E_2$,

$$(x_k, y_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (x,y) \text{ dans } (E_1 \times E_2, d) \quad \textit{ssi} \quad x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ dans } (E_1, d_1)\,, \text{ et } y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \text{ dans } (E_2, d_2)\,.$$

Exercice 3. Fonction continue dans un espace métrique

Soit $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$, et $x \in E_1$.

1. Montrer que f est continue au point x *ssi* pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B_1(x,\delta)\big) \subset B_2\big(f(x), \epsilon\big)\,.$$

2. Montrer que f est continue au point x *ssi* pour toute suite $\{x_k\}$ dans E_1 qui converge vers x dans E_1, la suite $\{f(x_k)\}$ converge vers $f(x)$ dans E_2.

Exercice 4. Équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$

Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une norme, et $\|\ \|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, définie on le rappelle par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \quad \text{pour } x = (x_i)_{1\le i\le n}\,.$$

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$N(x) \le M\|x\|\,.$$

2. Montrer alors que $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. *Remarque: On déduit de cette question que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est une application continue.*

Soit maintenant $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

3. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $m \leq N(x)$ pour tout $x \in S$.

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$m\|x\| \leq N(x)\,.$$

5. Soient N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N et N' sont équivalentes.

Exercice 5. Caractérisation des ouverts de $\mathbb{R}$. Munissons $\mathbb{R}$ de sa topologie la plus naturelle, à savoir celle qui vient de la valeur absolue $|\ |$.

1. Justifier le fait que toute réunion dénombrable d'intervalles ouverts est encore un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. Réciproquement, on va montrer que que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Considérons pour cela $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est une réunion (pas forcément dénombrable) d'intervalles ouverts.

   (b) Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour avoir une réunion dénombrable. Indication: On suppose $U \neq \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{Q} \cap U$, considérer l'intervalle $I_y =]y - d(y)/2, y + d(y)/2$, où $d(y) = \mathrm{dist(y, \mathbb{R} \setminus U)}$.

Exercice 6. *(Bonus)* **Produit d'espaces métriques II**

Soit $(E_j, d_j)_{j\geq 0}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Supposons que pour tout $j \geq 0$,

$$d_j(x_j, y_j) \leq 1 \quad \text{lorsque } (x_j, y_j) \in E_j \times E_j\,. \tag{1}$$

1. Montrer que
$$d : \big((x_j), (y_j)\big)_{j\geq 0} \in \Big(\prod_{j\geq 0} E_j\Big) \times \Big(\prod_{j\geq 0} E_j\Big) \longmapsto \sum_{j\geq 0} 2^{-j} d_j(x_j, y_j)$$
est une distance sur $\prod_{j\geq 0} E_j$.

2. Montrer que la suite $\{(x_j^{(k)})\}_k$ converge dans l'espace métrique produit $\big(\prod_j E_j, d\big)$ *ssi* chaque suite coordonnée $(x_j^{(k)})_k$ converge dans l'espace (E_j, d_j).

3. Que faire si l'on n'a pas (1) d'emblée

Exercice 7. *(Bonus)* **Caractérisation des compacts de** $]0\,,1[$

1. Quels sont les sous-ensembles compacts de $[0, 1]$? Ceux de $]0\,,1[$?