L3 École Universitaire **Année 2020-21**

Partiel du 19 Octobre 2020

Probabilités

Durée 3 heures

Les calculettes, téléphones, pigeons voyageurs, avions en papier, sarbacanes et tout autre moyen de communication avec autrui sont prohibés.

Les correcteurs apprécieront sous forme de points toute forme d'égard : des arguments bien exposés, une présentation soignée, des résultats soulignés.

Vous avez le droit d'admettre des résultats de questions que vous n'arrivez pas à traiter.

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité dont la loi est donnée par

$$P(X=1)=\frac{1}{3} \quad P(X=2)=\frac{1}{3} \quad P(X=3)=\frac{1}{3}.$$

1 - Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel vit une variable aléatoire Y réelle ayant même loi que X. On définira bien les 3 objets Ω, $\mathcal{F}$ et P et l'application Y de Ω dans $\mathbb{R}$.

2 - Montrer que la tribu d'un espace de probabilité sur lequel vit une variable de même loi que X a un cardinal supérieur ou égal à 8.

3 - Exprimer la fonction de répartition de X et tracer son graphique.

4 - Donner les valeurs de la moyenne et de la variance de X.

5 - Étudier la fonction $a \mapsto E[(X-a)^2]$. Que remarquez-vous ?

6 - Montrer, *généralement*, que pour toute variable aléatoire Z de carré intégrable

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad E[(Z-a)^2] \geq \sigma^2(Z)$$

où $\sigma^2(Z)$ désigne la variance de Z.

7 - Montrer en interprétant de façon probabiliste en fonction de X les deux membres de l'inégalité ci-dessous, que

$$\forall p>1, \quad \frac{1+2^p+3^p}{3} \leq 2^p.$$

8 - Montrer plus généralement que

$$\forall n \geq 1, \forall p > 1, \quad \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n} \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^p.$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle.

Trouver la limite de $E[\cos(X)^{2n} + \cos(2X)^{2n}]$ lorsque n tend vers l'infini, lorsque :

1 - $P(X \in \pi\mathbb{Z}) = 0$.

2 - il existe $p_1 > 0$ tel que, $P(X \in \pi\mathbb{Z}) = p_1$.

Exercice 3

Soit $x_1, ..., x_n$, n réels strictement positifs distincts.
On définit les 3 moyennes :
- la moyenne arithmétique $A_n = \frac{x_1+...+x_n}{n}$,
- la moyenne géométrique $G_n = (x_1 x_2 ... x_n)^{\frac{1}{n}}$,
- la moyenne harmonique $H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$.

En introduisant une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = ... = P(X = x_n) = \frac{1}{n},$$

1 - Exprimer chacune des moyennes A_n, G_n et H_n en fonction d'une espérance d'une foncttion de X.

2 - En déduire que :

a - pour tout $n, x_1, ..., x_n$, $G_n \leq A_n$
b - pour tout $n, x_1, ..., x_n$, $H_n \leq G_n$.

3 - Soit $p_1, ..., p_n$ une suite de n réels strictement positifs tels que $p_1+...+p_n = 1$. Généraliser les inégalités de la question 2 en appliquant la même démarche à une variable Y dont la loi est donnée par : $\forall i = 1, ..., n \quad P(Y = x_i) = p_i$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par la densité de probabilité,

$$f_X(x) = \frac{1}{6}1_{[0,2]}(x) + \frac{1}{3}1_{[2,4]}(x).$$

1 - Donner la fonction de répartition de X et tracer son graphique.

2 - Calculer $P(X \in [1,3])$.

3 - Calculer la moyenne de X.

4 - Donner la loi de $\frac{1}{X}$.

Exercice 5

Soit (X, Y) un couple de va réelles dont la loi est donnée, pour une certaine constante C, par la densité de probabilité,

$$f_{X,Y}(x, y) = C \sin(x + y) 1_{[0, \frac{\pi}{2}]^2}(x, y).$$

1- Trouver la valeur de la constante C.

2 - Donner les lois de X et de Y.

3 - Montrer que X et $\frac{\pi}{2} - X$ ont même loi.

4 - En déduire sans calcul, la valeur de $E[X]$.

5 - Donner la loi de $\cos(X - \frac{\pi}{4})$ (attention aux questions de bijectivité dans les changements de variables !).

6 - (bonus) Que vaut $P(X < \frac{\pi}{4}, Y < \frac{\pi}{4})$?

Exercice 6

On rappelle (gentiment) la densité de la loi normale centrée réduite.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

1 - Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E[e^{tX}] = e^{t^2/2}.$$

(on pourra écrire $e^{tx - \frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2}}$.)

2 - En déduire que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(X > a) \leq e^{t^2/2 - ta}.$$

3 - En optimisant la majoration obtenue à la question 2, montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad P(X > a) \leq e^{-a^2/2}.$$