Exo EDO

$\mathcal{F}.\mathcal{J}$

11 décembre 2023

Exercice 1. On considère le schéma du point milieu pour approcher la solution de (PC) dans l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$, qui est défini par la suite :

$$y^{n+1} = y^n + hf\Big(t_n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} f(t_n, y^n)\Big), \quad n = 0, \dots, N, \quad y^0 \text{ donné.}$$

On suppose ici que f est de classe C^2.
On rappelle que pour un schéma à un pas explicite de la forme

$$(S) \quad y^{n+1} = y^n + h\Phi(t_n, y^n, h),$$

approchant l'équation $y' = f(t, y)$, l'erreur de consistance à l'itération n, relative à une solution y de l'équation $y' = f(t, y)$, est la quantité

$$\varepsilon^n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\Phi(t_n, y(t_n), h), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

1. Donner l'expression de l'erreur de consistance locale pour le schéma du point milieu et montrer que la suite $(y(t_0), \dots, y(t_N))_N$ vérifie

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf\Big(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))\Big) + \varepsilon^n, \quad n = 0, \dots, N, \quad y(t_0) = y^0.$$

2. Montrer que le schéma du point milieu est consistante avec l'équation $y' = f(t, y)$, en montrant qu'il existe une constante C indépendante de h tel que

$$\|\varepsilon^n\| \le Ch^2, \quad \forall\, n = 0, \dots, N-1.$$

Indication : Utiliser des développements de Taylor faisant apparaître des restes d'ordre 2. On peut procéder comme suit : développer $y(t_{n+1}) = y(t_n + h)$ autour de t_n puis développer $f\big(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n))\big)$ d'abord en t autour de t_n puis en y autour de $y(t_n)$ (et on remarque que comme ce terme est multiplié par h il suffit d'obtenir des restes d'ordre 1 dans ces développements).
Remarque. *On peut montrer en réalité que*

$$\|\varepsilon^n\| \le Ch^3, \quad \forall\, n = 0, \dots, N-1,$$

avec C indépendante de h, en faisant des développements jusqu'à l'ordre 3 et en utilisant que la solution y de $y' = f(t, y)$ vérifie

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y''(t) &= \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t)) y'(t) \\ &= \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t, y(t)) f(t, y(t)). \end{aligned}$$

3. Montrer que si f est à dérivées bornées, le schéma du point milieu est stable, en montrant que si

$$y^{n+1} = y^n + hf\Big(t_n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} f(t_n, y^n)\Big), \quad n = 0, \dots, N, \quad y^0 \text{ donné.}$$

et

$$z^{n+1} = z^n + hf\Big(t_n + \frac{h}{2}, z^n + \frac{h}{2} f(t_n, z^n)\Big) + \rho^n, \quad n = 0, \dots, N, \quad z^0 \text{ donné,}$$

alors $|z^{n+1} - y^{n+1}| \leq (1 + Mh)|z^n - y^n| + |\rho^n|$, avec M une constante indépendante de h. En déduire une estimation sur l'erreur globale du schéma

$$\max_{n=0,\dots,N} |y(t_n) - y^n|$$

4. Sous quelle condition suffisante sur f, le schéma du point milieu converge-t-il ?