# 线性代数 (同济四版) 习题参考答案

黄正华

Email: huangzh@whu.edu.cn

武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430072

WUHAN UNIVERSITY

# 目　录

# 第一章　行列式

课后的习题值得我们仔细研读. 本章建议重点看以下习题: 5.(2), (5); 7; 8.(2). (这几个题号建立有超级链接.) 若您发现有好的解法, 请不吝告知.

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

**解**: (1)

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}\\ &= 2\times(-4)\times 3 + 0\times(-1)\times(-1) + 1\times 1\times 8 - 0\times 1\times 3 - 2\times(-1)\times 8 - 1\times(-4)\times(-1)\\ &= -24+8+16-4\\ &= -4.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb + bac + cba - bbb - aaa - ccc = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - ba^2 - cb^2 = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(4)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} &= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - y^3 - (x+y)^3 - x^3\\ &= 3xy(x+y) - y^3 - 3x^2y - 3y^2x - x^3 - y^3 - x^3\\ &= -2(x^3+y^3).\end{aligned}$$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;　(2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1;　(4) 2 4 1 3;

(5) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ 2\ 4 \cdots (2n)$;

(6) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ (2n)\ (2n-2) \cdots 2$.

**解**

(1) 逆序数为 0.

(2) 逆序数为 4: 4 1, 4 3, 4 2, 3 2.

(3) 逆序数为 5: 3 2, 3 1, 4 2, 4 1, 2 1.
(4) 逆序数为 3: 2 1, 4 1, 4 3.
(5) 逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$:

3 2 ........................................ 1 个
5 2, 5 4 ........................................ 2 个
7 2, 7 4, 7 6 ........................................ 3 个
........................................................
$(2n-1)$ 2, $(2n-1)$ 4, $(2n-1)$ 6, ..., $(2n-1)$ $(2n-2)$ ............ $(n-1)$ 个

(6) 逆序数为 $n(n-1)$:

3 2 ........................................ 1 个
5 2, 5 4 ........................................ 2 个
7 2, 7 4, 7 6 ........................................ 3 个
........................................................
$(2n-1)$ 2, $(2n-1)$ 4, $(2n-1)$ 6, ..., $(2n-1)$ $(2n-2)$ ............ $(n-1)$ 个
4 2 ........................................ 1 个
6 2, 6 4 ........................................ 2 个
........................................................
$(2n)$ 2, (2n) 4, (2n) 6, ..., (2n) $(2n-2)$ ............ $(n-1)$ 个

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.
**解**: 由定义知, 四阶行列式的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4},$$

其中 $t$ 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数.

由于 $p_1=1$, $p_2=3$ 已固定, $p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□, 即 1324 或 1342. 对应的逆序数 $t$ 分别为

$$0+0+1+0=1, \text{ 或 } 0+0+0+2=2.$$

所以, $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4. 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

**解**: (1)

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+15r_2]{r_4+7r_2}\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=17\times 9\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&1&5\\0&0&1&5\end{vmatrix}=0.$$

(2)

$$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{c_4-c_2}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_2}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\2&1&4&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&0\\3&-1&2&2\\1&2&3&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0.$$

(3)

$$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}=-adfbce\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}=4abcdef.$$

(4)

$$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix}0&1+ab&a&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}}(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1+ab&a&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+dc_2}\begin{vmatrix}1+ab&a&ad\\-1&c&1+cd\\0&-1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 3 行}}(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1+ab&ad\\-1&1+cd\end{vmatrix}=abcd+ab+cd+ad+1.$$

5. 证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;

**证明**

$$\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}a^2&ab-a^2&b^2-a^2\\2a&b-a&2b-2a\\1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}ab-a^2&b^2-a^2\\b-a&2b-2a\end{vmatrix}=(b-a)(b-a)\begin{vmatrix}a&b+a\\1&2\end{vmatrix}=(a-b)^3.$$

(2) $\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$;

**证明**:
$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal[\text{分裂开}]{\text{按第 1 列}} a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{裂开}]{\text{再次}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{裂开}]{\text{再次}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

此题有一个“经典”的解法:

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3(-1)^2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

这个解法“看上去很美”, 实则是一个错解! 我们强调, 行列式不能作这种形式上的加法:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$

**证明**:
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,4]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{两列成比例}} 0.$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$

**证明**:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[j=2,3,4]{c_j-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2(b+a) & c^2(c+a)-b^2(b+a) & d^2(d+a)-b^2(b+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (c^2+bc+b^2)+a(c+b) & (d^2+bd+b^2)+a(d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$

**证明**: 方法一. 设法把主对角线上的 $x$ 变为 0, 再按第一列展开.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-1}+xc_n} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_{n-2}+xc_{n-1}}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^3+a_1x^3+a_2x+a_3 & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_j+xc_{j-1}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

方法二. 设法把 $-1$ 全部变为 0, 得到一个下三角矩阵.

若 $x=0$, 则 $D_n=a_n$. 等式成立.

若 $x\neq 0$, 则

$$D_n\xlongequal{c_2+\frac{1}{x}c_1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+\frac{1}{x}c_2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ a_n & a_{n-1}+\frac{a_n}{x} & a_{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_n}{x^2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{vmatrix}$$

这里,

$$P_2=a_2+\frac{a_3}{x}+\frac{a_4}{x^2}+\cdots++\frac{a_n}{x^{n-2}},$$

$$P_1 = x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots + + \frac{a_n}{x^{n-1}}.$$

得到下三角阵, 所以

$$D_n = x^{n-1} \cdot P_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

方法三. 用递归法证明. 记

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

则

$$D_n \xlongequal{\text{展开 } c_1} x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$
$$= xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n.$$

所以, $D_n = xD_{n-1} + a_n$. 由此递归式得

$$D_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

方法四. 按最后一行展开. 先看 $a_{n-i}$ 的代数余子式. 因为

$$D_n = \left| \begin{array}{ccccc|c|cccc} x & -1 & & & & & & & & \\ & x & -1 & & & & & & & \\ & & x & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & -1 & & & & & \\ & & & & x & -1 & & & & \\ \hline & & & & & x & -1 & & & \\ & & & & & & x & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & -1 & \\ & & & & & & & & x & -1 \\ \hline a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-(i-1)} & a_{n-i} & a_{n-(i+1)} & & a_2 & x+a_1 \end{array} \right|$$

划掉 $a_{n-i}$ 所在的行和所在的列, 左上角是 $i \times i$ 的方块, 右下角是 $(n-i-1) \times (n-i-1)$ 的方块, 余下全为 0.

则 $a_{n-i}$ 的代数余子式为 (注意到 $a_{n-i}$ 处在第 $n$ 行、$i+1$ 列)

$$(-1)^{n+i+1} \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & x \end{vmatrix}_{i \times i} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & \\ & & x & -1 \end{vmatrix}_{(n-i-1)\times(n-i-1)} = x^i$$

所以, $D_n$ 按最后一行展开, 得到

$$D_n = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_{n-i}x^i + \cdots + a_2 x^{n-2} + (x+a_1)x^{n-1}$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

方法五. 针对 $c_1$ 作变换.

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+xc_2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+x^2c_3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ P & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix},$$

这里, $P = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n$.

再按第一列展开, 得

$$D_n = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

6. 设 $n$ 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 $D$ 上下翻转、或逆时针旋转 $90°$、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$, $D_3 = D$.

**证明:**

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第一行}]{n-1 \text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{使 } r_n \text{ 换到第二行}]{n-2 \text{ 次行的相邻互换}} (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

同理可证

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D.$$

$$D_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D = (-1)^{n(n-1)}D = D.$$

7. 计算下列各行列式 ($D_k$ 为 $k$ 阶行列式):

(1) $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中对角线上元素都是 $a$, 未写出的元素都是 0;

**解**: 方法一. 将 $c_n$ 作 $n-1$ 次列的相邻对换, 移到第二列:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$$

再将 $r_n$ 作 $n-1$ 次行的相邻对换, 移到第二行:

$$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} = (a^2-1)a^{n-2}.$$

方法二.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_1} a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + 1\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } r_1} a^n + (-1)^{n+1} \times 1 \times (-1)^{(n-1)+1} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$= a^n - a^{n-2}.$$

(2) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

**解**: 方法一. 将第一行乘 $(-1)$ 分别加到其余各行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix},$$

再将各列都加到第一列上, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

方法二. 将各列都加到第一列得

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以 $(-1)$ 分别加到其余各行, 得

$$D_n = \big[x+(n-1)a\big] \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

方法三. 升阶法.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

若 $x=a$, 则 $D_n=0$. 若 $x\neq a$, 则将 $\frac{1}{x-a}c_j$ 加到 $c_1$, $j=2,3,\cdots,n+1$:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\frac{a}{x-a}n & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$
$$=\left(1+\frac{na}{x-a}\right)(x-a)^n=\big[x+(n-1)a\big](x-a)^{n-1}.$$

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$; (提示: 利用范德蒙德行列式的结果. )

**解**: 从第 $n+1$ 行开始, 第 $n+1$ 行经过 $n$ 次相邻对换, 换到第 1 行; 第 $n$ 行经 $(n-1)$ 次对换换到第 2 行. 经 $n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次行交换, 得 (或者直接由题 6 的结论)

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix},$$

此行列式为范德蒙德行列式.

对照范德蒙德行列式的写法知, 这里的 $a=x_1$, $a-1=x_2$, $\ldots$, $a-(n-1)=x_n$, $a-n=x_{n+1}$. 则 $x_i=a-(i-1)$, $x_j=a-(j-1)$. 所以

$$\begin{aligned} D_{n+1}&=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j) \\ &=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[(a-i+1)-(a-j+1)\big] \\ &=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\big[-(i-j)\big] \\ &=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\times(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\times\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j) \\ &=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j). \end{aligned}$$

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & 0 & & & b_n \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a_1 & & b_1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c_1 & & d_1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c_n & & & 0 & & & d_n \end{vmatrix}$;

**解**: 方法一. 将 $c_{2n}$ 作 $2n-1$ 次列的相邻对换, 移到第二列; 再将 $r_{2n}$ 作 $2n-1$ 次行的相邻对换, 移到

第二行:

$$D_{2n}=(-1)^{2n-1}(-1)^{2n-1}\begin{vmatrix} a_n & b_n & & & & & & \\ c_n & d_n & & & & & & \\ & & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & c_1 & d_1 & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},$$

又 $n=1$ 时 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$, 所以

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)\cdots(a_1d_1-b_1c_1)=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

这个方法与教材 P.15 的例 11 相同. 本题的第 (1) 小题也用到了此方法.

方法二.

$$D_{2n}\xlongequal{\text{展开 } r_1}a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \iddots & & \\ 0 & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & 0 & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & d_n \end{vmatrix}+(-1)^{2n+1}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & 0 & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & \iddots & \\ 0 & \vdots & & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & \iddots & & \ddots & \\ 0 & c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开 } c_{2n-1}}a_nd_nD_{2n-2}-b_nc_nD_{2n-2}.$$

由此得递推公式:

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2},$$

即 $D_{2n}=\prod\limits_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2$.

而 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$, 得 $D_{2n}=\prod\limits_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$.

(5) $D_n=\det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$;

**解**: 由 $a_{ij}=|i-j|$ 得

$$D_n=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_j + c_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & 2n-5 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

(6) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

**解**: 升阶法.

$$D_n = \left|\begin{array}{c:cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hdashline 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{array}\right|_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal{c_1 + \frac{1}{a_1} c_2} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots]{c_1 + \frac{1}{a_j} c_{j+1}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$=(a_1 a_2 \cdots a_n)\Big(1+\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big).$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0; \end{cases}$

**解**:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 142 \end{vmatrix}=-142.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ -2 & -3 & 5 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ 0 & -5 & -18 \\ -2 & 5 & 28 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -4 & 0 & 10 \\ 23 & 0 & -22 \end{vmatrix}=-142;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 11 \\ 0 & 0 & 39 & 31 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -284 \end{vmatrix}=-284;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426; \qquad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142.$$

所以,

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1\,,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2\,,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3\,,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=-1.$$

(2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2 =1, \\ x_1+5x_2+6x_3 =0, \\ x_2+5x_3+6x_4 =0, \\ x_3+5x_4+6x_5=0, \\ x_4+5x_5=1. \end{cases}$

**解**: 系数行列式

$$D_{5\times 5}=\begin{vmatrix} 5 & 6 & & & \\ 1 & 5 & 6 & & \\ & 1 & 5 & 6 & \\ & & 1 & 5 & 6 \\ & & & 1 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_1}5D_{4\times 4}-\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=5D_{4\times 4}-6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5D_{4\times 4}-6D_{3\times 3}.$$

由递归式 $D_{5\times 5}=5D_{4\times 4}-6D_{3\times 3}$ 知,

$$D_{3\times 3}=5D_{2\times 2}-6D_{1\times 1}=5(25-6)-6\times 5=65,$$
$$D_{4\times 4}=5D_{3\times 3}-6D_{2\times 2}=5\times 65-6\times 19=211,$$

$$D_{5\times5}=5D_{4\times4}-6D_{3\times3}=5\times211-6\times65=665.$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_1}D_{4\times4}+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$=D_{4\times4}+6^4=211+6^4=1507.$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_2}\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+2}\begin{vmatrix}5&0&0&0\\1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_2}-D_{3\times3}-5\times6^3=-65-1080=-1145.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_3}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+3}\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_2}D_{2\times2}-6\times6\times D_{2\times2}=703.$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_4}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+(-1)^{5+4}\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{展开}c_4}-5-6D_{3\times3}=-5-6\times65=-395.$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{展开}c_5}(-1)^{1+5}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=1+D_{4\times4}=1+211=212.$$

所以,

$$x_1=\frac{1507}{665},\quad x_2=-\frac{1145}{665},\quad x_3=\frac{703}{665},\quad x_4=-\frac{395}{665},\quad x_5=\frac{212}{665}.$$

9. 问 $\lambda,\mu$ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0.\end{cases}$ 有非零解?

**解**: 系数矩阵

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=\mu(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\mu(1-\lambda).$$

要使齐次线性方程组有非零解, 则 $D=0$, 即

$$\mu(1-\lambda)=0,$$

得 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$.

10. 问 $\lambda$ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2 + x_3=0,\\ x_1 + x_2+(1-\lambda)x_3=0.\end{cases}$ 有非零解?

**解**: 系数矩阵

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda & 4\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3+\lambda & 4\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1-\lambda & -3+\lambda\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(\lambda-3)-4(1-\lambda)+(1-\lambda)^3-2(1-\lambda)(-3+\lambda)\\ &=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3\\ &=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).\end{aligned}$$

齐次线性方程组有非零解, 则 $D=0$, 即

$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda)=0.$$

得 $\lambda=0, \lambda=2$ 或 $\lambda=3$.

# 第二章　矩阵及其运算

1. 已知线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3, \end{cases}$$

求从变量 $x_1, x_2, x_3$ 到变量 $y_1, y_2, y_3$ 的线性变换.

**解**: 方法一. 用消元法解方程, 得出 $y_1$, $y_2$, $y_3$. 略.

方法二. 解矩阵方程. 由已知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

方法三. 用克拉默法则解方程. 系数矩阵

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 - 2c_3]{c_1 - 2c_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -7 & -9 & 5 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

所以,

$$y_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 1 & 5 \\ x_3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3\ ;$$

同理得 $y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3$, $y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$.

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 $z_1$, $z_2$, $z_3$ 到 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 的线性变换.

**解**: 方法一. 直接代入. 比如:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + y_3 \\ &= 2(-3z_1 + z_2) + (-z_2 + 3z_3) \\ &= -6z_1 + z_2 + 3z_3. \end{aligned}$$

方法简单, 但我们应尽可能使用本章学习的矩阵知识.

方法二. 由已知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

所以,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

3. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

求 $3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

**解:**

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{A} &= 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下列乘积:

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(2) $(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2)$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

**解**: (1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 7 + 3\times 2 + 1\times 1 \\ 1\times 7 + (-2)\times 2 + 3\times 1 \\ 5\times 7 + 7\times 2 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$.

(2) $(1,\ 2,\ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1) = (10) = 10.$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1,\ 2) = \begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times 2 \\ 1\times(-1) & 1\times 2 \\ 3\times(-1) & 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

(5)

$$\begin{aligned} & (x_1,\ x_2,\ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ =& (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ =& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

5. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ 吗?

**解**: (1) 因为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

所以,

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}.$$

(2) 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 29 \end{pmatrix},$$

但

$$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 15 & 27 \end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2.$$

(3) 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

而

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2.$$

当然, 一个简单的说法是, 在得到 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ 之后, 直接有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} - \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2.$$

6. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AY}$, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$.

**解**: (1) 取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, 但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$.

(2) 取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$.

(3) 取 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{AY}$ 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$.

题 5 和题 6 看上去很简单, 实则是再次提醒我们注意矩阵运算不满足交换律, 不满足零律, 不满足消去律. 这是线性代数初学者最容易犯的几个错误之一, 为数不少的人会一直犯这个错误.

我们要注意, 虽然矩阵也有所谓的 "加法"、"乘法", 但是这和我们熟知的实数加法、乘法是完全不同的. 运算的对象不同, 运算的内容不同, 当然, 运算的规律也不同. 这是两个不同的讨论范围里的不同运算, 相同的只不过是沿用了以前的称谓或记号而已, 我们不要被这一点 "相同" 而忘记二者本质的不同.

这种不同的讨论范围里的 "加法"、"乘法", 还有很多很多, 在现代数学里非常广泛和一般.

7. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \cdots, \boldsymbol{A}^k$.

**解**: 由计算

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}.$$

猜测: $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$. 下用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 显然成立. 假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(k+1)\lambda&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法知: $A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$.

8. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$, 求 $A^k$.

**解**: 方法一. 首先计算

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}.$$

猜测: $A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix},\quad (n\geqslant 2).$

下用数学归纳法证明:

当 $n=2$ 时, 显然成立.

假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}A^{k+1}=A^k\cdot A&=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^{k-1}&\frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\0&\lambda^{k+1}&(k+1)\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^{k+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由数学归纳法得证: $A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{pmatrix}$.

上面的猜测其实是不容易得到的. 这里另有一个解法.

方法二. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\triangleq\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}.$$

则[1]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n\\&=(\lambda\boldsymbol{E})^n+C_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\boldsymbol{B}^n.\end{aligned}$$

注意到

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{B}^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad(k\geqslant3).$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n\\&=(\lambda\boldsymbol{E})^n+C_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n\lambda^{n-1}&0\\0&0&n\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵.

**证明**: 即要证 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 由公式 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}&=\big((\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\big)^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\\&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

得证 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称阵.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶对称矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

**证明**: 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$, 要证

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

[1]注意对一般的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 并不能对 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n$ 得到牛顿二项式展开式. 比如最简单的情形

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2,$$

我们就知道其不一定成立. 除非 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换. 而这里的 $\lambda\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 当然是可交换的.

充分性: 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 又

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA},$$

所以, $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 即 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

必要性: $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$. 又

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA},$$

所以, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

11. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

**解**: (1) 由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 又

$$A_{11}=5,\quad A_{21}=2\times(-1),\quad A_{12}=2\times(-1),\quad A_{22}=1.$$

得

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

建议记住教材 P.44 **例** 10 的结论:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

其中 $ad-cb\neq 0$.

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

**解**: $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1$, 由上述结论得

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

**解**: $|\boldsymbol{A}|=2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 又

$$\begin{aligned} &A_{11}=-4, && A_{21}=2, && A_{31}=0,\\ &A_{12}=-13, && A_{22}=6, && A_{32}=-1,\\ &A_{13}=-32, && A_{23}=14, && A_{33}=-2. \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, $(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$.

**解**: 由对角矩阵的性质知

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

12. 解下列矩阵方程:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

**解**: (1) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

**解**:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

**解**:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

**解**:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

13. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+2x_2+5x_3=2,\\3x_1+5x_2+x_3=3;\end{cases}$

**解**: (1) 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=0,\\x_3=0.\end{cases}$$

(2) $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=2,\\2x_1-x_2-3x_3=1,\\3x_1+2x_2-5x_3=0.\end{cases}$

**解**: 方程组可表示为

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{cases}x_1=5,\\x_2=0,\\x_3=3.\end{cases}$$

14. 设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ ($k$ 为正整数), 证明

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

**证明**: 验证

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{E}$$

即可. 下略.

15. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

**证明**: 直接求逆即可.

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow \boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).\end{aligned}$$

又由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}-3(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}\\&\Rightarrow (\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

这类题目的解法就是要“凑”出要求逆的式子. 比如本题, 要从 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 中凑出式子 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$, 求 $\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right|$.

**解**: 由

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right|&=\left|\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right| && (|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|)\\&=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}-5\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\right| && ((\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\tfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1})\\&=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-5\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}\right|\\&=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\frac{5}{2}\boldsymbol{E}\right| && (|\boldsymbol{A}|=\tfrac{1}{2})\\&=|-2\boldsymbol{E}|\\&=(-2)^3\,|\boldsymbol{E}| && (|k\boldsymbol{A}|=k^n\,|\boldsymbol{A}|)\\&=-8.\end{aligned}$$

得

$$\left|(2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right|=-16.$$

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

**证明**: 验证 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\boldsymbol{E}$ 即可.

因为

$$(\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E},$$

而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,\quad \text{即 } \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^* \qquad (\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E} && \left(\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{*}=\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\boldsymbol{E}\right)\\
&= \boldsymbol{E}. && \left(|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=1\right)
\end{aligned}
$$

得证矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^*$.

18. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$, 证明:
(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$;
(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
**证明**: (1) 用反证法证明. 假设 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$, 则有 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{E}$.
由此得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1} && (\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{E})\\
&= |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^*)^{-1} && (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*)=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E})\\
&= \boldsymbol{O}. && (|\boldsymbol{A}|=0)
\end{aligned}
$$

这与 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾, 故当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时有 $|\boldsymbol{A}^*|=0$.
(2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}$ 取行列式得到:

$$
|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*|=\big|\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}\big|=|\boldsymbol{A}|^n\,.
$$

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 由 (1) 知 $|\boldsymbol{A}^*|=0$ 此时命题也成立.
故有

$$
|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\,.
$$

19. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 求 $\boldsymbol{B}$.
**解**: 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 得

$$
(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}.
$$

故

$$
\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}.
$$

20. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$. 求 $\boldsymbol{B}$.
**解**: 由

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}\\
\Longrightarrow\ &\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\\
\Longrightarrow\ &(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),
\end{aligned}
$$

又

$$
|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0,
$$

知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆. 所以

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

21. 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,\ -2,\ 1)$, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

**解**: 由 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,\ -2,\ 1)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$|\boldsymbol{A}|=-2.$$

由

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}\\
\Longrightarrow\ &\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{A}^{-1} && (\text{上式两边右乘 } \boldsymbol{A}^{-1})\\
\Longrightarrow\ &|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{E} && (\text{上式两边左乘 } \boldsymbol{A})\\
\Longrightarrow\ &-2\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-8\boldsymbol{E} && (|\boldsymbol{A}|=-2)\\
\Longrightarrow\ &\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E},
\end{aligned}$$

又

$$\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)=\mathrm{diag}(2,\ -1,\ 2),$$
$$\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)^{-1}=\mathrm{diag}(\frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{2},)$$

所以

$$\boldsymbol{B}=4\big(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\big)^{-1}=\mathrm{diag}(2,\ -4,\ 2).$$

22. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{E}$. 求 $\boldsymbol{B}$.

**解**: 解法与上题相似.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{E}\\
\Longrightarrow\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A} && (\text{上式两边右乘 } \boldsymbol{A})\\
\Longrightarrow\ &|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} && (\text{上式两边左乘 } \boldsymbol{A}^*)\\
\Longrightarrow\ &\big(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\big)\boldsymbol{B}=3\,|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

由公式 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 又计算得 $|\boldsymbol{A}^*|=8$, 所以

$$|\boldsymbol{A}|^3=8,\ \text{即}\ |\boldsymbol{A}|=2.$$

得

$$\big(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\big)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}.$$

又

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix},$$

$$\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{B}=6\left(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

**解**: $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$. 所以

$$\boldsymbol{A}^{11}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{11}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

又

$$|\boldsymbol{P}|=3,\qquad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}.$$

24. 设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8(5\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

**解**: 由题设得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 注意到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵, 则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. 又

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=5\boldsymbol{A}^8-6\boldsymbol{A}^9+\boldsymbol{A}^{10}\\&=\boldsymbol{P}\left(5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}\right)\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,\,1,\,5)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}^8&=\mathrm{diag}(1,\,1,\,5^8),\\\boldsymbol{\Lambda}^9&=\mathrm{diag}(-1,\,1,\,5^9),\\\boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(1,\,1,\,5^{10}),\\5\boldsymbol{\Lambda}^8-6\boldsymbol{\Lambda}^9+\boldsymbol{\Lambda}^{10}&=\mathrm{diag}(12,\,0,\,0).\end{aligned}$$

25. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆, 证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆, 并求其逆阵.

**证明**: 由 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} &= \left[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\right]^{-1} \\ &= (\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} \\ &= \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

26. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

**解**:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) &\triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

27. 取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}=D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 验证

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & |\boldsymbol{B}| \\ |\boldsymbol{C}| & |D| \end{vmatrix}.$$

**解**: 因为

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \xlongequal[r_2-r_4]{r_1-r_3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

而

$$\begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & |\boldsymbol{B}| \\ |\boldsymbol{C}| & |D| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} |\boldsymbol{A}| & |\boldsymbol{B}| \\ |\boldsymbol{C}| & |D| \end{vmatrix}.$$

28. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{matrix} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$, 求 $\left|\boldsymbol{A}^8\right|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$.

**解**: 记 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

则

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^8 = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{aligned} \left|A^8\right| &= \left|A_1^8\right| \left|A_2^8\right| = |A_1|^8 |A_2|^8 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^8 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^8 \\ &= 10^{16}. \end{aligned}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} 2^4 & 0 \\ 2^6 & 2^4 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

29. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 及 $s$ 阶矩阵 $B$ 都可逆, 求

(1) $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}$;

**解**: 设

$$\begin{pmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{s\times s} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

其中 $C_1$ 为 $s\times n$ 矩阵, $C_2$ 为 $s\times s$ 矩阵, $C_3$ 为 $n\times n$ 矩阵, $C_4$ 为 $n\times s$ 矩阵. 又

$$\begin{pmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{s\times s} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_3 & AC_4 \\ BC_1 & BC_2 \end{pmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{cases} AC_3 = E_n & \Rightarrow\ C_3 = A^{-1}, \\ AC_4 = O & \Rightarrow\ C_4 = O, \qquad (A^{-1}\ \text{可逆}) \\ BC_1 = O & \Rightarrow\ C_1 = O, \qquad (B^{-1}\ \text{可逆}) \\ BC_2 = E_s & \Rightarrow\ C_2 = B^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}$;

**解**: 设

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = E.$$

又

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & AA_2 \\ CA_1 + BA_3 & CA_2 + BA_4 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E} & \Rightarrow \ \boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O} & \Rightarrow \ \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{O} & \Rightarrow \ \boldsymbol{A}_3=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{E} & \Rightarrow \ \boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{B}^{-1}. \end{cases}$$

故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

30. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

**解**: 由分块对角阵的性质知

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ \hdashline & & 8 & 3 \\ & & 5 & 2 \end{array}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \\ & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & & \\ -2 & 5 & & \\ & & 2 & -3 \\ & & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

**解**: 记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 又

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

# 第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

本章的重要题型有两个:

- 解矩阵方程的新方法, 习题 4, 5. 例题见教材 P.65 **例** 3.
- 方程组解的讨论, 习题 15, 16, 17. 例题见教材 P.76 **例** 12.

1. 把下列矩阵化为行最简形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

**解**: (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\underset{r_3-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2\div(-1)}{\underset{r_3\div(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_3\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+3r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2}{\underset{r_1+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2\times 2-3r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3+r_2}{\underset{r_1+3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{r_2-3r_1}{\underset{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2\div(-4)}{\underset{\substack{r_3\div(-3) \\ r_4\div(-5)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\underset{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2}{\underset{\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-2r_2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3-8r_1\\ r_4-7r_1}}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-1&1&1&1\\1&0&2&0&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2\times(-1)\\ r_4-r_3}}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2. 设 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

**解**: 可以按照求矩阵方程的一般方法求解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&2&3\\1&0&0&4&5&6\\0&0&1&7&8&9\end{array}\right)\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&4&5&6\\0&1&0&1&2&3\\0&0&1&7&8&9\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\\ \hdashline 4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{array}\right)\overset{c_3-c_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hdashline 4&5&2\\1&2&2\\7&8&2\end{array}\right)$$

得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&5&2\\1&2&2\\7&8&2\end{pmatrix}$$

或者有下面的解法.

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 两边乘以的是初等矩阵, 可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换 $r_1\leftrightarrow r_2$ 和 $c_3+c_1$ 得到的. 所以要得到 $\boldsymbol{A}$, 需要将 $\boldsymbol{B}$ 进行初等变换 $c_3-c_1$ 和 $r_1\leftrightarrow r_2$. 即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\overset{c_3-c_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&2\\7&8&2\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}4&5&2\\1&2&2\\7&8&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

还有一种看法是把 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 变为单位阵, 这相当于在 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

两边分别左乘、右乘了相应的初等矩阵, 那么矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 也要进行相应的行变换、列变换, 即:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} && \text{(两边同时 } r_1 \leftrightarrow r_2\text{)} \\
\Longrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} && \text{(两边同时 } c_3 - c_1\text{)} \\
\Longrightarrow &\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3 . 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**解**: (1)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - r_3/2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div 2]{r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \div 3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

即逆矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(2)

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_1} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-4r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_4+2r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-r_4\\r_1+2r_4}]{r_3-r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-3&0&4&2&-11&-20\\0&1&2&0&-2&-1&6&11\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+3r_3]{r_2-2r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&0&0&1&-1&-2&-2\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{array}\right)$$

故逆矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$.

4. (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$ 使 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$.

**解**: (1)

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&1&2&9&5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&2&3&6&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&0&-1&-12&-4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2+2r_3\\r_3\times(-1)}]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\\\hline 1&2&3\\2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\left(\begin{array}{ccc}1&2&0\\3&-1&2\\-4&3&-3\\\hline 3&2&1\\1&-3&2\end{array}\right)\xrightarrow{c_2-2c_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\3&-7&2\\-4&11&-3\\\hline 3&-4&1\\1&-5&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_2+4c_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\3&1&2\\-4&-1&-3\\\hdashline 3&0&1\\1&3&2\end{array}\right)\xrightarrow{c_3-2C_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\3&1&0\\-4&-1&-1\\\hdashline 3&0&1\\1&3&-4\end{array}\right)\xrightarrow[c_1-4c_3,\ c_3\times(-1)]{c_2-c_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\3&1&0\\0&0&-1\\\hdashline -1&-1&1\\17&7&-4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1-3c_2}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 2&-1&-1\\-4&7&4\end{array}\right).$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}.$$

> 本题解法与教材 P.65 **例 3** 相同, 是解矩阵方程的一个重要方法, 也是一个必须掌握的题型.
> 在解题中有一处细节要注意: 不要在解题的开始就写上
>
> $$\text{已知 } \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\ \text{所以 } \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$
>
> 因为 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆, 此时还是未知的. 严格地讲就不能出现该写法.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

**解**: 由 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$$

又

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&-2&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&0&-2&-2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\div(-2)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&-1&0&1&-1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right)$$

所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

. 在秩是 $r$ 的矩阵中, 有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 $r$ 阶子式?

**解**: 由矩阵秩的定义, 在秩是 $r$ 的矩阵中, 至少存在一个不等于 0 的 $r$ 阶子式, 而且所有阶数高于 $r$ 的子式全等于 0. 由此可知, 在秩是 $r$ 的矩阵中, 可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式 (但是不能全等于 0), 也可能存在等于 0 的 $r$ 阶子式.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A})=3$, 其中存在等于 0 的 3 阶子式和 2 阶子式.

7. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 问 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的秩的关系怎样?

**解**: 不妨把题设改为: 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

记划去的那一列为 $\boldsymbol{a}$, 则

$$\boldsymbol{A}\sim(\boldsymbol{B},\,\boldsymbol{a}).$$

从而,

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B},\,\boldsymbol{a}).$$

由矩阵秩的性质 5,

$$R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{B},\,\boldsymbol{a})\leqslant R(\boldsymbol{B})+1,$$

所以,

$$R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})+1.$$

即, $R(\boldsymbol{A})$ 等于 $R(\boldsymbol{B})$ 或者 $R(\boldsymbol{B})+1$.

8. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1,\,0,\,1,\,0,\,0),\quad(1,\,-1,\,0,\,0,\,0).$$

**解**: 符合条件的矩阵有很多, 比如

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\text{或者}\quad\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

这两个矩阵容易分别变换为行阶梯型、列阶梯型矩阵, 非零行有 4 行.

9. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$.

**解**: (1)

$$\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-3r_1}{\overset{r_3-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2;

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$, 为一个最高阶非零子式.

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \overset{r_1 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-7r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -15 \end{pmatrix} \overset{r_3-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 2;

二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$, 为一个最高阶非零子式.

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_4}{\overset{r_1-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2-r_3 \\ r_3 \div 2}}{\overset{r_1 \div 4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_3-r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵秩为 3;

三阶子式 $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \neq 0$, 为一个最高阶非零子式.

10. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

**证明**: 必要性即教材 P.68 定理 3. 只需证明充分性.

设 $R(\boldsymbol{A}) = r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的标准型矩阵为 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

同样, $\boldsymbol{B}$ 的标准型矩阵也为 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 即

$$\boldsymbol{B} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

由矩阵等价的传递性, 得

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}.$$

11. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

问 $k$ 为何值, 可使

(1) $R(\boldsymbol{A}) = 1$; (2) $R(\boldsymbol{A}) = 2$; (3) $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

**解**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_3 \div 3}{\overset{c_2 \div 2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{r_3 - kr_1}{\overset{r_2 + r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix},$$

所以, 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

当 $k = 1$ 时, $\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A}) = 1$.

当 $k = -2$ 时, $\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

另解: 由 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 3$, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2+r_1]{r_3-kr_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k^2 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{r_3-r_2} 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = -6(k-1)^2(k+2).$$

所以, 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 3$.

余下的讨论与前相同.

12. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

**解**: (1) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_2-r_1}{\overset{r_3-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{r_1-r_2-r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_1\div 3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{r_2+r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_2 = -3x_4, \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $c$ 为任意实数.

(2) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{r_2\div(-4)}{\overset{r_3-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到原方程的等价形式

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

故方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1$, $c_2$ 为任意实数.

(3) 对系数矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$
\underset{\substack{r_3-4r_1\\ r_2-2r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 9 & -19 & 34 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{pmatrix}
\underset{7r_3-9r_2}{\overset{r_4-r_2}{\sim}}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & -43 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{r_3+43r_4}{\sim}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 327 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

所以方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

(4) 对系数矩阵实施行变换:

$$
\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\underset{r_4-r_1-2r_2}{\overset{r_3-2r_1+r_1}{\sim}}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{3r_2-2r_1}{\sim}
\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

即得 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$

所以方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1$, $c_2$ 为任意实数.

13 . 求解下列非齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2; \end{cases}$

**解**: (1) 对系数的增广矩阵实施行变换, 有

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{4r_2-3r_1}{\overset{r_3-2r_1-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

看见

$$R(\boldsymbol{A})=2,\ \text{而}\ R(\boldsymbol{B})=3,$$

故方程组无解.

(2) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \underset{r_4-r_1-2r_2}{\overset{r_3-2r_1+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_2-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

即得

$$\begin{cases} x=-2z-1, \\ y=z+2, \\ z=z. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c$ 为任意实数.

(3) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}, \\ y=y, \\ z=z, \\ w=0. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1$, $c_2$ 为任意实数.

(4) 对系数的增广矩阵实施行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2r_2-3r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \\ z = z, \\ w = w. \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_1$, $c_2$ 为任意实数.

14. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组.

**解**: 把解的形式改写为 $\begin{cases} x_1 = 2c_1 - 2c_2, \\ x_2 = -3c_1 + 4c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

得一个所求的方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

15. $\lambda$ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解?

**解**: (1) 记系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时方程组有惟一解. 由

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

得 $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq -2$ 时方程组有惟一解.

(2) $\lambda = -2$ 时,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < R(\boldsymbol{B}) = 3$, 此时方程组无解.

(3) $\lambda = 1$ 时,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 1$, 此时方程组有无限多解.

我们强调, 这一类的题型是必须掌握的. 更一般的解法是, 通过行变换, 讨论 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$ 的关系. 比如这一题,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

当 $(1-\lambda)(2+\lambda) = 0$, 且 $(1-\lambda)(1+\lambda)^2 \neq 0$, 即 $\lambda = -2$ 时, 方程组无解. 其他的讨论类似.

16. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

当 $\lambda$ 取何值时有解? 并求出它的解.

**解**:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix}.$$

要使方程组有解, 须 $(1-\lambda)(\lambda+2)=0$, 得

$$\lambda=1,\ \text{或}\ \lambda=-2.$$

当 $\lambda=1$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-2$ 时, 方程组解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}.$$

17. 设

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1, \end{cases}$$

问 $\lambda$ 为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

**解**: 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 有惟一解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+2r_3]{r_2+4r_1}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 0\\ 2 & 9-\lambda & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4\\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$ 时, 有惟一解.

当 $\lambda=10$ 时, 增广矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix}\underset{r_3+r_2}{\overset{r_1+4r_2}{\sim}}\begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 & 9\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}\overset{r_1-2r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2$, $R(\boldsymbol{B})=3$, 此时方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时, 增广矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组有无限多解. 且原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},\quad (c_1,\, c_2\in\mathbb{R}).$$

18. 证明 $R(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 $\boldsymbol{a}$ 及非零行向量 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

**证明**: (充分性) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$. 由矩阵秩的性质 7 有

$$R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a}). \tag{3.1}$$

又 $R(\boldsymbol{a})=1$, 所以

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant 1. \tag{3.2}$$

但是 $R(\boldsymbol{A})\neq 0$, 因为非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 分别至少存在一个非零元素, 记为 $a_i$, $b_j$. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个非零元 $a_ib_j$(即 $\boldsymbol{A}$ 的一阶非零子式), 从而

$$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1. \tag{3.3}$$

综合 (3.2), (3.3), 所以 $R(\boldsymbol{A})=1$.

(必要性) 设 $R(\boldsymbol{A})=1$. 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1,\,0\,\cdots,\,0)\,\boldsymbol{Q}.$$

记

$$\boldsymbol{a}\triangleq\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}\triangleq(1,\,0\,\cdots,\,0)\,\boldsymbol{Q},$$

注意到 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 其中不可能有全为零的行或列, 从而 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 即是满足条件的非零向量.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 证明

(1) 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$;

(2) 方程 $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$.

**证明**: (1) 由教材 P.78 定理 7, 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}_m$ 有解的充分必要条件是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{E}_m).$$

$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant m.$$

而由矩阵秩的性质 5,

$$m=R(\boldsymbol{E}_m)\leqslant R(\boldsymbol{A},\,\boldsymbol{E}_m)=R(\boldsymbol{A}).$$

所以, $R(\boldsymbol{A})=m$.

(2) 方程 $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n$ 两边作转置, 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n.$$

此时 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵, 由 (1) 的证明知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$ 有解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=n$. 从而原命题得证.

. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 证明: 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, 且 $R(\boldsymbol{A})=n$, 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

**证明**: 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=0.$$

又 $R(\boldsymbol{A})=n$, 由教材 P.78 定理 9, 则矩阵方程 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=0$ 只有零解, 即

$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\equiv 0.$$

得证

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}.$$

# 第四章　向量组的线性相关性

1. 设 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ 及 $3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3$.

**解**:

$$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0\\1-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$3\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+2\times0-3\\3\times1+2\times1-4\\3\times0+2\times1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

2. 设 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$, 求 $\boldsymbol{a}$, 其中

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

**解**: 由 $3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$ 得

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10\\1\\5\\10\end{pmatrix}-\frac{5}{6}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

3. 已知向量组

$$A:\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix};\quad B:\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

证明 $B$ 组能由 $A$ 组线性表示, 但 $A$ 组不能由 $B$ 组线性表示.

**证明**: 要证 $B$ 组能由 $A$ 组线性表示, 由 P.85 定理 2, 即要证矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$ 的秩. 由

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\2&1&0&1&1&1\\3&2&1&2&1&3\end{array}\right)\underset{r_4-3r_2}{\overset{r_3-2r_2}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&3&2&2&0&4\\1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&2&-8&-1&7&-9\end{array}\right)$$

$$\underset{r_4-2r_3}{\overset{r_1-3r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&20&5&15&25\\1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&3&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&3&1&-2&4\\0&1&-6&-1&5&-7\\0&0&4&1&3&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

可见, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$, 因此, $B$ 组能由 $A$ 组线性表示.

又

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&4\\1&-2&4\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-r_3\\r_4-2r_3}}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&-3&3\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=2$. 而 $R(\boldsymbol{A})=3$, 所以 $A$ 组不能由 $B$ 组线性表示. (因为若 $A$ 组能由 $B$ 组线性表示, 则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$. 见教材 P.86 **定理** 3.)

4. 已知向量组

$$A:\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\quad B:\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

证明 $A$ 组与 $B$ 组等价.

**证明**: 方法与教材 P.86 **例** 2 相同. 下证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:ccc}0&1&-1&1&3\\1&1&0&2&2\\1&0&1&1&-1\end{array}\right)\overset{r_2-r_1-r_3}{\sim}\left(\begin{array}{cc:ccc}0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\\1&0&1&1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:ccc}1&0&1&1&-1\\0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$. 又由上述初等变换知

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=2$. 得到 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. 即证 $A$ 组与 $B$ 组等价.

**另证**. 易见

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2,$$

及

$$\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2),\quad \boldsymbol{a}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_1).$$

知 $A$ 组与 $B$ 组等价.

5. 已知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2$, $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$, 证明

(1) $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

**证明**: (1) 由 $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$, 知 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关. 从而向量组 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关 (整体无关则部分也无关. 见 P.90 **定理** 5(1)).

又 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=2<3$, 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关. 由 P.90 **定理** 5(3) 知 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

(2) 假设 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示. 已证 $\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示, 所以 $\boldsymbol{a}_4$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示. 这与 $R(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=3$ 矛盾.

得证 $\boldsymbol{a}_4$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示.

6. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

**解**: (1) 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{pmatrix}\underset{r_3+r_1}{\overset{r_2+3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&7&7\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2$, 所以该向量组是线性相关的.

**或者**: 由

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},$$

知线性相关.

(2) 因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\overset{r_2\times 2-3r_1}{\sim}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&11&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{B})=3$, 所以该向量组是线性无关的.

7. 问 $a$ 取什么值时下列向量组线性相关?

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}.$$

**解**: 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关的充要条件是 $R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)<3$, 即 $|\boldsymbol{A}|=0$, 这里 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-ar_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&a+1&1-a^2\\0&a+1&-1-a\\1&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2).$$

所以, $a=-1$ 或 $a=2$ 时向量组线性相关.

**更常规的思路是**: 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $k_1, k_2, k_3$ 使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}.$$

即线性方程组

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}.$$

有非零解.

所以 $|\boldsymbol{A}|=0$, 这里 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 同前面的方法, 得到 $a$ 的值.

8. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关, 求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

**解**: 设 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$. 由 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关, 则存在不全为零的 $x_1, x_2$ 使得

$$x_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+x_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

代入 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$, 得

$$\big[x_1(k_1+1)+x_2k_1\big]\boldsymbol{a}_1+\big[x_1k_2+x_2(k_2+1)\big]\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}. \tag{4.1}$$

由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 得

$$\begin{cases}x_1(k_1+1)+x_2k_1=0,\\x_1k_2+x_2(k_2+1)=0.\end{cases} \tag{4.2}$$

要使 $x_1, x_2$ 不全为零, 则方程组 (4.2) 中系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} k_1+1 & k_1 \\ k_2 & k_2+1 \end{vmatrix} = k_1+k_2+1=0.$$

所以

$$\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=k_1\boldsymbol{a}_1-(1+k_1)\boldsymbol{a}_2,$$

或者记为

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(1+c)\boldsymbol{a}_2, \quad (c\in\mathbb{R}).$$

9. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 也线性相关, 问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.

**解**: 不一定. 比如取

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},$$

此时 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 也线性相关, 但是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是线性无关的.

10. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的, 则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立, 则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时, 等式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

才能成立, 则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关, 则有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}, \quad \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

同时成立.

**解**: (1) 设

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3=\cdots=\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},$$

满足 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 但 $\boldsymbol{a}_1$ 不能由 $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 由有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}, \tag{4.3}$$

上式可化为

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1)+\cdots+\lambda_m(\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m)=\boldsymbol{0}. \tag{4.4}$$

取

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{e}_m,$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 为单位向量, 则 (4.4) 式成立, 而 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(3) 由仅当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 全为 0 时,

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{a}_m + \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{b}_m = \mathbf{0},$$

得 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{b}_m$ 线性无关.

取 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$, 取 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 为线性无关组, 满足以上条件. 但不能说 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 是线性无关的.

(4) 取 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2 = (2, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}_1 = (0, 3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}_2 = (0, 4)^{\mathrm{T}}$,

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1\boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{b}_2 \ = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{4}\lambda_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

与题设矛盾.

11. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

**证明**: 设有 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 使得

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 = \mathbf{0}, \tag{4.5}$$

则 $x_1(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + x_2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) + x_3(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4) + x_4(\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1) = \mathbf{0}$, 即

$$(x_1 + x_4)\boldsymbol{a}_1 + (x_1 + x_2)\boldsymbol{a}_2 + (x_2 + x_3)\boldsymbol{a}_3 + (x_3 + x_4)\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}. \tag{4.6}$$

(a) 若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性相关, 则 (4.6) 式中 $x_1 + x_4, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4$ 不全为零.

从而 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 不全为零, 即 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

(b) 若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 则 (4.6) 式中

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

由

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

知齐次方程组 (4.7) 存在非零解.

从而存在不全为零的数 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 使得 (4.5) 式成立, 即 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

综上得证.

上述证明只是一个一般思路. 其实这个题用一句话就可以证明了: 因为

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4,$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

12. 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_r$, 且向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

**证明**: 设

$$k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_r=\mathbf{0}, \tag{4.8}$$

则

$$(k_1+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_1+(k_2+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(k_i+\cdots+k_r)\boldsymbol{a}_i+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=\mathbf{0}. \tag{4.9}$$

因向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_r=0, \\ \qquad k_2+\cdots+k_r=0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad k_r=0. \end{cases} \tag{4.10}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, 故方程组 (4.10) 只有零解. (**或者**通过回代可直接解得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.)

即, 要使 (4.8) 成立当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$. 所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

> 这是一个常见的题型, 使用的解法也是很典型的. 解法同教材 P.89 **例** 6 的**证一**.

**另证**. 由题设知向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性表示; 又 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{b}_r-\boldsymbol{b}_{r-1}$, 知向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 可由向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性表示. 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 等价. 从而,

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r).$$

又 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关, 知

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r)=r.$$

所以, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

**另证**. 记矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=&(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r)\\ &\underset{c_2-c_1}{\underset{\cdots}{\overset{c_r-c_{r-1}}{\sim}}}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r),\end{aligned}$$

从而,

$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r).$$

以下同上一证法, 知 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

13. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

(1) $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}=(1, 2, 1, 3), \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}=(4, -1, -5, -6), \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}=(1, -3, -4, -7)$.

**解**: (1) 由

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 100 & 10 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \underset{r_2 - 9r_1}{\overset{r_3 + 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 82 & 19 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 秩为 2, 一组最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ (或者 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$).

**或者**: 注意到 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_3$ 对应坐标成比例, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关. (这就已经告诉我们这个向量组的秩至多为 2 了.) 而 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 不成比例, 两者线性无关, 知向量组的秩为 2, 最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ (或者 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$).

(2) 由

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix} \underset{r_2 - 4r_1}{\overset{r_3 - r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知向量组 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2, 最大线性无关组为 $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}$.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

(1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

**解**: (1) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3 - 3r_1 \\ r_4 - r_1}}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{r_3 - r_2}{\overset{r_4 - r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{r_4 - r_1}{\overset{r_3 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\overset{r_3 + r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

所以第 1、2、3 列构成一个最大无关组.

15. 设向量组

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 $a, b$.

**解**: 依次记这 4 个向量为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$, 并记此向量组为 $A$. 易见 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关 (因这两个向量对应坐标不成比例), 而已知向量组 $A$ 的秩为 2, 所以 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 是向量组 $A$ 的一个最大无关组. 则 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 可以由向量组 $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性表示.

设

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

得 $x = 0, y = 1$, 从而 $a = 2$.

用同样的方法可以计算得 $b=5$.

16. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 $n$ 维向量, 已知 $n$ 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示, 证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

**证明**: 不妨设:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= k_{11}\boldsymbol{a}_1 + k_{12}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_{1n}\boldsymbol{a}_n, \\ \boldsymbol{e}_2 &= k_{21}\boldsymbol{a}_1 + k_{22}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_{2n}\boldsymbol{a}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &= k_{n1}\boldsymbol{a}_1 + k_{n2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_{nn}\boldsymbol{a}_n. \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

两边取行列式, 得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{vmatrix}.$$

由

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

即 $n$ 维向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 所构成矩阵的秩为 $n$.

所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

**另证**. 向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \leqslant R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n). \qquad \text{(P.86 定理 3)}$$

而

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n, \ \text{且}\ R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \leqslant n,$$

所以

$$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = n.$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

**更为简单的说法是**: 注意 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 当然是可以由单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示的, 再加上已知条件, 知两向量组等价. 所以

$$R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = n,$$

得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

17. 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是一组 $n$ 维向量, 证明它们线性无关的充分必要条件是: 任一 $n$ 维向量都可由它们线性表示.

**证明**: (充分性) 设任一 $n$ 维向量都可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示, 则 $n$ 维单位向量组 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示. 由上一题得 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

(必要性) 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关. 任给 $n$ 维向量 $\boldsymbol{b}$, 则向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关 ($n+1$ 个 $n$ 维向量是线性相关的).

由 P.90 定理 5(3), 则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示 (且表示式是惟一的).

**必要性的另一个说法**: 若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关, 注意到这是一组 $n$ 维向量, 则它们是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以任一 $n$ 维向量都可由它们线性表示.

18. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k$ $(2 \leqslant k \leqslant m)$, 使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

**证明**: 假设不存在这样的 $\boldsymbol{a}_k$. 则 $\boldsymbol{a}_2$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1$ 线性表示, 从而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{a}_3$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性表示, 又向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性无关, 所以向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

依次类推, 可以得到向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关. 这与题设矛盾. 假设不成立. 得证.

19. 设向量组 $B$: $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 能由向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示为

$$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为 $s \times r$ 矩阵, 且 $A$ 组线性无关. 证明 $B$ 组线性无关的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的秩 $R(\boldsymbol{K}) = r$.

**证明**: (必要性) 设 $B$ 组线性无关.

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r)$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$ 则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}. \tag{4.11}$$

由秩的性质知

$$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}) \leqslant R(\boldsymbol{K}). \tag{4.12}$$

而由 $B$ 组线性无关知 $R(\boldsymbol{B}) = r$, 故 $R(\boldsymbol{K}) \geqslant r$.

又 $\boldsymbol{K}$ 为 $r \times s$ 阶矩阵, 则 $R(\boldsymbol{K}) \leqslant \min\{r, s\} \leqslant r$.

综上知 $R(\boldsymbol{K}) = r$.

(充分性) 若 $R(\boldsymbol{K}) = r$. 令

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{0}. \tag{4.13}$$

下证方程 (4.13) 只有零解. 为方便记方程 (4.13) 为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.14}$$

代入 (4.11) 式则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.15}$$

由向量组 $A$: $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关, 有 $R(\boldsymbol{A}) = r$. 所以方程 (4.15) 只有零解:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{4.16}$$

又 $R(\boldsymbol{K}) = r$, 所以方程 (4.16) 只有零解:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

充分性的证明过程, 就是在本章习题 12 中提到的 "典型解法", 这里只是改用矩阵的方式在说问题. 或者说, 表达方式同教材 P.89 **例** 6 的**证二**.

20. 设

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 \quad\quad + \boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n, \\ \quad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_{n-1}. \end{cases}$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

**证明**: 由题设知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示. 下面只需证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示即可.

由题设得

$$\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n = (n-1)(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n),$$

所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n.$$

得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n = (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_n)/(n-1) - \boldsymbol{\beta}_n. \end{cases}$$

得证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

综上, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

**另一个思路**: 先说明系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

再得两向量组等价.

21. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, (1) 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$; (2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

**解**: (1) 由 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (\text{由 } \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶方阵, 又向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关, 所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$, 两边取行列式得,

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0.$$

22. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0.\end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\ 8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0.\end{cases}$

(3)$nx_1+(n-1)x_2+\cdots 2x_{n-1}+x_n=0.$

**解**: (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&20&-15&-5\\0&32&-24&-8\end{pmatrix}\underset{r_3\div 8}{\overset{r_2\div 4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&4&-3&-1\\0&4&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1+2r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&4&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_2\div 4}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases}x_1=-4x_3,\\ x_2=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4,\end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-4\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-4\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$, 或者写为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-16\\3\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$.

(2)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\3&5&4&-2\\8&7&6&-3\end{pmatrix}\underset{2r_2-3r_1}{\overset{r_3-r_1-2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\0&19&14&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\div 19}{\overset{r_1\div 2+\frac{3}{38}r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{19}&-\frac{1}{19}\\0&1&\frac{14}{19}&-\frac{7}{19}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以原方程组等价于 $\begin{cases}x_1=-\frac{2}{19}x_3+\frac{1}{19}x_4,\\ x_2=-\frac{14}{19}x_3+\frac{7}{19}x_4.\end{cases}$ 即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\frac{2}{19}\\-\frac{14}{19}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{19}\\\frac{7}{19}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

因此基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{19}\\-\frac{14}{19}\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{19}\\\frac{7}{19}\\0\\1\end{pmatrix}$, 或者写为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\-14\\19\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}$.

(3) 原方程即为

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2-\cdots-2x_{n-1}.$$

或者

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_1, \\ x_2 = \qquad\qquad x_2, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = \qquad\qquad\qquad x_{n-1}, \\ x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \cdots - 2x_{n-1}. \end{cases}$$

所以基础解系为

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -n & -n+1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 $4 \times 2$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 且

$$R(\boldsymbol{B}) = 2.$$

**解**: 由于 $R(\boldsymbol{B}) = 2$, 所以可设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. 则由

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

解此非齐次线性方程组可得惟一解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

故所求矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{或者} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 11 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

此题中满足条件的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 显然不止一个. 比如在

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$$

两边同时右乘某个初等矩阵, 则等式右边的 $\boldsymbol{O}$ 不变, 而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 被进行列变换而发生了改变.

这也是为什么把 $\boldsymbol{B}$ 设为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

而不需要设为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{pmatrix}$$

的原因.

24. 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (3, 2, 1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

**解**: 显然原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

即

$$\begin{cases} x_1 = 3k_2, \\ x_2 = k_1 + 2k_2, \\ x_3 = 2k_1 + k_2, \\ x_4 = 3k_1. \end{cases}$$

消去 $k_1, k_2$ 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

此即所求的齐次线性方程组.

25. 设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad \mathrm{II}: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求: (1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

**解**: (1) 因为

$$\mathrm{I} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

所以 I 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由

$$\mathrm{II} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = -x_2 + x_3; \end{cases}$$

所以 II 的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 联立方程组 I 和 II 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

由

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_4 + r_2}{\overset{r_3 - r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_4 + r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_2, \\ x_4 = x_2; \end{cases}$$

得方程组 I 与 II 的公共解为

$$\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

26. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵, 证

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n.$$

**提示**: 利用矩阵性质 6 和 8.

**证明**: 因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 所以由矩阵秩的性质 8(P.71), 知

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \leqslant n.$$

又由矩阵秩的性质 6(P.71), 有

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \geqslant R(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{E}) = n.$$

所以 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = n$.

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵 $(n \geqslant 2)$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 证明

$$R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } R(\boldsymbol{A}) \leqslant n - 2. \end{cases}$$

**解**: (1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$. 又 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 从而矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 得 $R(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式, 从而矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素非零, 得

$$R(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1. \tag{4.17}$$

又由 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 知 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}.$$

由矩阵性质 8 知

$$R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n.$$

代入 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$, 得

$$R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1. \tag{4.18}$$

综合 (4.17) 式和 (4.18) 式得

$$R(\boldsymbol{A}^*) = 1.$$

(3) 若 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$. 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所以 $n-1$ 阶子式全为零, 这使得 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 所以

$$R(\boldsymbol{A}^*) = 0.$$

28 . 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$

**解**: (1)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 5r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \underset{r_2 \times (-1)}{\overset{r_3 - 2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \div -2}{\overset{r_2 - r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - r_1 - 2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -4 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \leftrightarrow r_2}{\overset{r_3 \div 14}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 + 5r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

29. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量. 且

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求该方程组的通解.

**解**: 由于矩阵的秩为 3, 方程组有 4 个未知量, $n - r = 4 - 3 = 1$, 故其对应的齐次线性方程组的基础解系含有一个向量, 且由于 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 均为方程组的解, 由非齐次线性方程组解的结构性质得

$$2\boldsymbol{\eta}_1 - (\boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

为其基础解系向量, 其中 $\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3$ 为对应的齐次方程组的解. 故此方程组的通解为:

$$\boldsymbol{x} = c\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, (c \in \mathbb{R}).$$

30. 设有向量组 $A$ : $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 及向量 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, 问 $\alpha, \beta$ 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $A$ 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式惟一;

(3) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

**解**: 设

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b},$$

即

$$\begin{cases} \alpha x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = \beta, \\ 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases} \tag{4.19}$$

往下讨论方程组 (4.19) 的解即可. 因为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 - 4r_2}{\overset{r_1 + r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} \alpha+2 & -1 & 0 & 1+\beta \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 2 & 1 & 0 & -1-4\beta \end{pmatrix} \underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 + r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} \alpha+4 & 0 & 0 & -3\beta \\ 0 & 0 & 1 & 5\beta+1 \\ 2 & 1 & 0 & -1-4\beta \end{pmatrix}$$

(1) 当 $\alpha + 4 = 0$ 且 $-3\beta \neq 0$ 时, $R(\boldsymbol{A}) = 2 \neq R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 方程组 (4.19) 无解. 即, 当 $\alpha = -4$ 且 $\beta \neq 0$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 $A$ 线性表示;

(2) 当 $\alpha+4\neq 0$ 时, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=3$, 方程组 (4.19) 有惟一解. 即, 当 $\alpha\neq -4$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式惟一;

(3) 当 $\alpha+4=0$ 且 $-3\beta=0$ 时, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2\leqslant 3$, 方程组 (4.19) 有无限多解. 此时方程组 (4.19) 等价于

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-2x_1-1, \\ x_3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=c, \\ x_2=-2c-1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

即, 当 $\alpha=-4$ 且 $\beta=0$ 时, 向量 $\boldsymbol{b}$ 能有由量组 $A$ 线性表示, 且表示式不惟一, 其一般表示式为

$$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \quad (c\in\mathbb{R}).$$

31. 设

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1: \ a_1x+b_1y+c_1=0, \\ l_2: \ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ l_3: \ a_3x+b_3y+c_3=0. \end{cases} \qquad (a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3)$$

相交于一点的充分必要条件为: 向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

**证明**: 三直线相交于一点的充分必要条件为方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0. \end{cases} \qquad (a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,\ 2,\ 3) \tag{4.20}$$

有惟一解. 记方程组 (4.20) 为

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}. \tag{4.21}$$

方程组 (4.21) 有惟一解的充要条件是

$$R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=2.$$

即向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性无关, 且向量组 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性相关.

32. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$, 其中 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, 求方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

**解**: 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3+\boldsymbol{a}_4x_4=\boldsymbol{b}.$$

代入 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$, 整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{a}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{a}_3+(x_4-1)\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}.$$

又 $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3=0, \\ -x_1+x_3=0, \\ x_4-1=0. \end{cases} \tag{4.22}$$

方程组 (4.22) 等价于

$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 3, \\ x_3 = x_1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

得方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

33. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个解, $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

**证明**: (1) 假设 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关. 而由基础解系的定义, 知 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是线性无关的, 则 $\boldsymbol{\eta}^*$ 可以由 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示. 从而 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 这与 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解矛盾. 所以假设不成立. 即 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 易知向量组 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 与向量组 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 等价. 又由本题 (1) 的结论, $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 知

$$R(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = R(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = n - r + 1.$$

所以, $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

**另证**. (1) 反证法. 假设 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关, 则存在着不全为 0 的数 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-r}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \boldsymbol{0}. \tag{4.23}$$

其中, $k_0 \neq 0$, 否则, $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关, 这与基础解系是线性无关的产生矛盾.

由于 $\boldsymbol{\eta}^*$ 为特解, $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为基础解系, 故得

$$\boldsymbol{A}(k_0\boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}) = k_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^* = k_0\boldsymbol{b}.$$

而由 (4.23) 式可得

$$\boldsymbol{A}(k_0\boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}) = \boldsymbol{0}.$$

故 $\boldsymbol{b} = 0$, 而题中方程组为非齐次线性方程组, 有 $\boldsymbol{b} \neq 0$.

与题设产生矛盾, 假设不成立, 故 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 反证法. 假设 $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关. 则存在着不全为零的数 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-r}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\eta}^* + k_1(\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_1) + \cdots + k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^* + \boldsymbol{\xi}_{n-r}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.24}$$

即 $(k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r})\boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} = \boldsymbol{0}$.

若 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$, 由于 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是线性无关的一组基础解系, 故 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-r} = 0$, 由 (4.24) 式得 $k_0 = 0$, 此时

$$k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-r} = 0,$$

与假设矛盾.

若 $k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} \neq 0$ 由本题 (1) 知, $\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 故

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_{n-r} = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0,$$

与假设矛盾,

综上, 假设不成立, 原命题得证.

34. 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $s$ 个解, $k_1, \cdots, k_s$ 为实数, 满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$$

也是它的解.

**证明**: 由于 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $s$ 个解. 故有 $\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{b}$, $(i=1, \cdots, s)$.

而

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)\\=&k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\eta}_s\\=&\boldsymbol{b}(k_1+\cdots+k_s)=\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)$.

从而 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是方程的解.

35. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 $r$, $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解 (由题 33 知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解). 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}, \quad (\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

**证明**: 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关且均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. 取

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1. \tag{4.25}$$

则它们均为齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 下用反证法证明: $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

假设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-r}$ 使得

$$l_1\boldsymbol{\xi}_1+l_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

代入 (4.25) 式整理得

$$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})\boldsymbol{\eta}_1+l_1\boldsymbol{\eta}_2+l_2\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+l_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性无关, 知

$$-(l_1+l_2+\cdots+l_{n-r})=l_1=l_2=\cdots=l_{n-r}=0,$$

与假设矛盾, 故假设不成立. 所以 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关, 为齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基.

由于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 所以 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1$ 为齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 则 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1$ 可由

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

线性表示, 设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_1&=k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r-1}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\\&=k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_3(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r+1}(\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}-\boldsymbol{\eta}_1),\end{aligned}$$

整理得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1(1-k_2-k_3-\cdots-k_{n-r+1})+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}=\boldsymbol{0}.$$

令 $k_1 = 1 - k_2 - k_3 - \cdots - k_{n-r+1}$, 则 $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$, 而且

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}.$$

证毕.

36. 设

$$V_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\},$$
$$V_2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}.$$

问 $V_1, V_2$ 是不是向量空间? 为什么?

**证明**: 集合 $V$ 成为向量空间只需满足条件:

若 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V$;

若 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V$.

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\beta} \in V$, 设

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0,$$
$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 0.$$

则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)^{\mathrm{T}}$, 且

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\\ =&(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\\ =&0.\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in V_1. \tag{4.26}$$

对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \cdots, \lambda\alpha_n).$$

因为

$$\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_n = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

故

$$\lambda\boldsymbol{\alpha} \in V_1. \tag{4.27}$$

综合 (4.26) 和 (4.27) 式, 得证 $V_1$ 是向量空间.

(2) $V_2$ 不是向量空间, 因为:

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\\ =&(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\\ =&1 + 1\\ =&2.\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \notin V_2.$$

37. 试证: 由 $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间就是 $\mathbb{R}^3$.

**证明**: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, 因为

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

知 $R(\boldsymbol{A}) = 3$, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关.

由于 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 均为三维, 且秩为 3, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为此三维空间的一组基, 故由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 所生成的向量空间就是 $\mathbb{R}^3$.

38. 由 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 $L_1$, 由 $\boldsymbol{b}_1 = (2, -1, 3, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ 所生成的向量空间记作 $L_2$, 试证 $L_1 = L_2$.

**证明**: 容易发现向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 等价. 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2), & \boldsymbol{a}_2 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2); \\ \boldsymbol{b}_1 &= -\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2. \end{aligned}$$

又由教材 P.105 例 23 知 “等价的向量组生成的向量空间相同”, 所以 $L_1 = L_2$.

39. 验证 $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 并把 $\boldsymbol{v}_1 = (5, 0, 7)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2 = (-9, -8, -13)^{\mathrm{T}}$ 用这个基线性表示.

**解**: 记矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$. 由于

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性无关, 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3. \end{aligned}$$

要求得 $k_1, k_2, k_3$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 即要求线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$ 的解. 由

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{array}\right) \overset{r_2 + r_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{array}\right) \\ &\overset{r_3 - r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{r_3 \div (-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ &\underset{r_1 - 3r_3}{\overset{r_2 - 4r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{r_2 \div 3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ &\overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right). \end{aligned}$$

求得方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$ 的解, 即

$$\begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 3, \\ k_3 = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = -3, \\ \lambda_3 = -2. \end{cases}$$

故

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3.$$

40. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 及 \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵.

**解**: 由过渡矩阵的定义知, 从基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

这里 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$. 因为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{r_3 - r_2}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\overset{r_3 + r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{r_3 \div 2}{\overset{r_2 - r_3/2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

所以

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 第五章　相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

(1) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;

(2) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**解**: (1) 由施密特正交化方法, 得

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1 - \frac{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得:

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(2) 由施密特正交化方法得

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1 - \frac{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

故正交化后得

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & \frac{3}{5} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交矩阵? 并说明理由.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

**解**: (1) 第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

(2) 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 $x$ 为 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$, 令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, 证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

**证明**: 注意到矩阵的转置运算满足 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{H}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称的. 又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} && (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1)\\&=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{H}$ 是正交阵.

综上得证 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是正交阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

**证明**: 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是正交阵, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}.$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**解**: (1) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+(\lambda+2)c_1}\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \lambda^2-2 \\ 5 & -3-\lambda & -5\lambda-7 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\overset{r_1+3r_3}{\underset{r_2+5r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. 所以 $k\boldsymbol{p}\ (k\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的全部特征值向量.

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时, 解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1-r_2}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\div(-3)}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 故 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_1=0$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_2=-1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, 故 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_2=-1$ 的全部特征值向量.

当 $\lambda_3=9$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\underset{r_2+r_3}{\overset{r_1+r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}-5&5&0\\5&-5&0\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, 故 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq 0)$ 是对应于 $\lambda_3=9$ 的全部特征值向量.

(3) 由

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|&=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}\\
&\xlongequal{\text{展开 } r_1}-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&-\lambda&1\\0&1&-\lambda\\1&0&0\end{vmatrix}\\
&=\lambda^2(\lambda^-1)-1\cdot(\lambda^2-1)=(\lambda^2-1)^2\\
&=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,\end{aligned}$$

得
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 \quad (k_1, k_2 \text{ 不同时为 } 0).$$

当 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以对应于 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 的全部特征向量为

$$k_3\boldsymbol{p}_3 + k_4\boldsymbol{p}_4 \quad (k_3, k_4 \text{ 不同时为 } 0).$$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

**证明**: 证明二者有相同的特征方程 (或特征多项式) 即可. 由性质 $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}|$, 知

$$\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \lambda\boldsymbol{E}\right| = \left|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|.$$

得证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值相同.

7. 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 满足 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

**证明**: 由 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) < n$, 有 $R(\boldsymbol{A}) < n$, 而

$$R(\boldsymbol{A}) < n \ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{A}| = 0 \ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{E}| = 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的特征值.}$$

同理, 0 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征值 0.

下证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有对应于 $\lambda = 0$ 的公共特征向量.

$$\boldsymbol{A} \text{ 与 } \boldsymbol{B} \text{ 有对应于 } \lambda = 0 \text{ 的公共特征向量}$$

$$\Leftrightarrow \text{存在非零向量 } \boldsymbol{p} \text{ 同时满足 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = 0\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{p} = 0\boldsymbol{p}$$
$$\Leftrightarrow \text{方程组} \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases} \text{有非零解}$$
$$\Leftrightarrow \text{方程组} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ 有非零解}$$

而

$$R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) + R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A} + R(\boldsymbol{B}) < n.$$

综上知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

8. 设 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

**证明**: 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则存在非零向量 $\boldsymbol{p}$ 使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p}.$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = \lambda^2\boldsymbol{p}. \tag{5.1}$$

又由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 得 $\boldsymbol{A}^2 = 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$, 所以

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p} = (3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = 3\lambda\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}. \tag{5.2}$$

综合 (5.1) 式和 (5.2) 式得

$$\lambda^2\boldsymbol{p} = 3\lambda\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}, \text{ 即 } (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得

$$\lambda = 1 \text{ 或 } 2.$$

得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

**另证**. 设 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ 是 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 的特征值[1]. 则存在非零向量 $\boldsymbol{p}$ 使

$$(\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p}.$$

又由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 代入上式得

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}.$$

而特征向量 $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$, 所以

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

解得 $\lambda = 1$ 或 2.

得证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

一个有缺陷的证明:

由 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 得 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$. 两边取行列式得

$$|(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})| = |\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0.$$

[1] 见 P.122 **例** 8 的推广结论.

所以

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0,$$

则 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

但是这样只是说明了 1 或 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否还有别的特征值没有得到证明, 这就不能下结论说 "$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2".

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 证明 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

**证明**: 即需证明 $\lambda=-1$ 满足特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$. 因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| &= \left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right| && (\boldsymbol{A}\text{ 为正交阵})\\ &= \left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{A}| \\ &= -\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right| && (|\boldsymbol{A}|=-1)\\ &= -\left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right| \\ &= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

所以 $2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$, 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$. 得证 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

10. 设 $\lambda\neq 0$ 是 $m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的特征值, 证明 $\lambda$ 也是 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

**证明**: 设 $\boldsymbol{p}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$ 的对应于 $\lambda$ 的特征向量, 则

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}. \tag{5.3}$$

上式两边同时左乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{p}$, 即

$$(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{Bp})=\lambda(\boldsymbol{Bp}).$$

下面证明 $\boldsymbol{Bp}$ 是非零的. 因为, 假如 $\boldsymbol{Bp}=\boldsymbol{0}$, 则 (5.3) 式中左边 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bp})=\boldsymbol{0}$; 但是 $\lambda\neq 0$, 且特征向量 $\boldsymbol{p}$ 是非零向量, 从而 $\lambda\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$. 假设不成立.

得证 $\lambda$ 也是 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值.

注意: 特征向量是非零的.

11. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3, 求 $\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|$.

**解**: (模仿 P.122 **例** 9 解题.) 设 $\lambda$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 记 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$, 则 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值. 又

$$\varphi(1)=3,\quad \varphi(2)=2,\quad \varphi(3)=3,$$

知 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 3, 2, 3, 所以

$$\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|=3\times 2\times 3=18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, −3, 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

**解**: 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全不为 0, 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 故 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$. 而 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-6$, 所以

$$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=-6\boldsymbol{A}^{-1}+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}.$$

把上式记作 $\varphi(\boldsymbol{A})$, 有 $\varphi(\lambda)=-\dfrac{6}{\lambda}+3\lambda+2$, 故 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值为

$$\varphi(1)=-1,\quad \varphi(2)=5,\quad \varphi(-3)=-5,$$

于是

$$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=(-1)\cdot 5\cdot(-5)=25.$$

**另解**. 注意到 $|\boldsymbol{A}|=-6$, 先计算 $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$, 即 $\left|-6\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\right|$. 易得 $-6\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1$, 10, 15, 所以

$$\left|-6\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\right|=(-1)\cdot 10\cdot 15=-150,$$

从而得 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=25$.

13. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

**证明**: 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{BA},$$

则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

14. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 $x$.

**解**: 解题依据: **定理** 4 (P.125), "$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量".

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=&\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix}\\=&(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-6),\end{aligned}$$

得 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

要使 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化, 则需 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

对应单根 $\lambda_1=1$, 可求得线性无关的特征向量恰有 1 个, 所以, 要使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化, 需对应重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有 2 个线性无关的特征向量, 即方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 2 个线性无关的解. 由 P.98 **定理** 7, 即

$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1.$$

由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得

$$x=3.$$

因此, 当 $x=3$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能对角化.

15. 已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 $a$, $b$ 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化? 并说明理由.

**解**: (1) 设特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值为 $\lambda$, 则 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$, 即

$$\boldsymbol{Ap}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

得

$$\lambda=-1,\quad a=-3,\quad b=0.$$

(2) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3,$$

得

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$$

要使 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够对角化, 需使重根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应 3 个线性无关的特征向量, 但这是不可能的. 因为 3 元齐次方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数为

$$n-r=3-R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),$$

而这里 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$, 即 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant 1$, 所以, 方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关解的个数不可能为 3.

因此, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称矩阵化为对角矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

**解**: (1) 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 $|\boldsymbol{A}|$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 由

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

解得

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

解得

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -2\end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 4$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

单位特征向量可取为 $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

得正交阵 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \boldsymbol{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (-2,\, 1,\, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (2,\, 0,\, 1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 正交化, 取 $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1$,

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{[\boldsymbol{\eta}_1,\, \boldsymbol{\xi}_2]}{[\boldsymbol{\eta}_1,\, \boldsymbol{\eta}_1]}\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再单位化得

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = 10$ 时, 由

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

单位化得 $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

得正交阵

$$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 $x$, $y$; 并求一个正交阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$.

**解**: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $5$, $-4$, $y$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 从而 $|\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E}| = 0$, $|\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}| = 0$. 由 $|\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}| = 0$ 得

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

计算得

$$x = 4.$$

下求 $y$. 由性质 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, 得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-4) \times y,$$

计算得

$$y = 5.$$

下求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2 = (0,\ -2,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

规范正交化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2,\ 0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,\ 2,\ -5)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_3 = -4$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得单位化基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{3}(2,\ 1,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{\eta}_3,\ \boldsymbol{\eta}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为所求的一个正交矩阵, 并满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

(注意 $\boldsymbol{P}$ 中特征向量的排列顺序, 是与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的对角元相对应的.)

**另解**(求 $x,\ y$). 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 则 $5,\ -4,\ y$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由特征值性质 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 和 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 可得

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1+x+1, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |\boldsymbol{A}|. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 1+y = 2+x, \\ -20y = -15x-40. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

18. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$; 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

**解**: 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

其中

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_2-c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_3-c_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \overset{c_1-c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -3 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$; 对应 $\lambda_1, \lambda_2$ 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$.

**解**: 设 $\lambda_3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 由 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, 知 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 正交. 则

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

由系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_2+r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

知方程组 (5.4) 的通解为

$$(x, y, z)^{\mathrm{T}} = k(-2, 2, -1)^{\mathrm{T}}.$$

可取

$$\boldsymbol{p}_3 = (-2, 2, -1)^{\mathrm{T}},$$

因 $\boldsymbol{A}$ 对称, 必有正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ} = \mathrm{diag}(1, -1, 0).$$

前面已经求得 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 正交, 再单位化, 即得

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(1, -1, 0)\,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=3$, 与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

**解**: 1° 先求出 $\lambda_2,\lambda_3$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$. 由定理 6, $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交. 设 $(x,\,y,\,z)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交, 则

$$x+y+z=0.$$

解方程得基础解系为

$$(-1,\,0,\,1)^{\mathrm{T}},\ (-1,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}.$$

所以可取

$$\boldsymbol{p}_2=(-1,\,0,\,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}_3=(-1,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}.$$

2° 下求矩阵 $\boldsymbol{A}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, 存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(6,\,3,\,3)$. 所以可以由 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 得到一组单位正交向量, 以构成正交阵 $\boldsymbol{Q}$.

将 $\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 正交化: 取 $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{p}_2$,

$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{p}_3-\frac{[\boldsymbol{p}_3,\,\boldsymbol{\eta}_2]}{[\boldsymbol{\eta}_2,\,\boldsymbol{\eta}_2]}\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

再将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{q}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交阵, 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(6,\,3,\,3)\,\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

21. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n)^{\mathrm{T}}$, $a_1\neq 0$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$,

(1) 证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 $n$ 个线性无关的特征向量.

**解**: (1) 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\cdots,\,\lambda_n)$ 相似, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

由习题三 18 题, 知 $R(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $R(\boldsymbol{\Lambda})=1$, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元只有一个非零, 即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

(2) 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 的对角线元素之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$; 又由特征值性质: $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, 已证 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值, 所以剩下的那个特征值只能是 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$.

已知 $a_1\neq 0$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$, 得证 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值 (且是惟一的).

下求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(a) 当 $\lambda=0$ 时, 求解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}\underset{\sim}{\overset{r_1\div a_1}{}}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}\underset{i=2,3,\cdots}{\overset{r_i-a_ir_1}{\sim}}\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda = 0$ 对应的全部特征向量为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1} \begin{pmatrix} -a_n/a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1,\, k_2,\, \cdots,\, k_{n-1} \text{ 不同时为 } 0).$$

(b) 当 $\lambda_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 时, 由 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\boldsymbol{a},$$

可见 $\lambda_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ 对应的特征值就是 $\boldsymbol{a}$.

22. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

**解**: (一般的解法) 先把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化. 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -5$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1,\, 0,\, 0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = (2,\, 1,\, 2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = -5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = -5$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (1,\, -2,\, 1)^{\mathrm{T}}$.

记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3)$, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1,\, 5,\, -5)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 所以

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}&=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}1&2\cdot5^{100}&5^{100}\\0&5^{100}&-2\cdot5^{100}\\0&2\cdot5^{100}&5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&5^{100}-1\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**另解.** (一个碰巧的解法) 由

$$
\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&24\\0&25&0\\0&0&25\end{pmatrix},
$$

而

$$
\begin{pmatrix}a&0&d\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&d\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0&(a+c)d\\0&b^2&0\\0&0&c^2\end{pmatrix},
$$

若 $d=c-a$, 则

$$
\begin{pmatrix}a&0&c-a\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&c-a\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0&c^2-a^2\\0&b^2&0\\0&0&c^2\end{pmatrix}
$$

$$\cdots\cdots$$

$$
\begin{pmatrix}a^n&0&c^n-a^n\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&c-a\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{n-1}&0&c^{n-1}-a^{n-1}\\0&b^{n-1}&0\\0&0&c^{n-1}\end{pmatrix}
$$

所以

$$
\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix}1&0&24\\0&25&0\\0&0&25\end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix}1&0&25^{50}-1\\0&25^{50}&0\\0&0&25^{50}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&5^{100}-1\\0&5^{100}&0\\0&0&5^{100}\end{pmatrix}.
$$

**注** 这个题型很重要. 解此类型的题目的时候, 不要一味地只想到使用对角化的方法, 要灵活地依据题目的特点求解. 比如下面的题目.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^5$.

**解法一** 注意到

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix},
$$

则

$$
\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\end{pmatrix}.
$$

而

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

所以

$$\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-3)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (-3)^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 81\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

**解法二** 由

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{A},$$

可知

$$\boldsymbol{A}^5 = (-3)^4\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -81 & 81 & 81 \\ 81 & -81 & -81 \\ 81 & -81 & -81 \end{pmatrix}.$$

再看一个题目.

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2006}$.

**解**: 注意到 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2006} &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)}_{2006\ \text{个}\ \boldsymbol{A}} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\underbrace{(1,\ 1,\ 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1)\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{2005\ \text{个}\ (a+b+c)\ \text{相乘}}(1,\ 1,\ 1) \\ &= (a+b+c)^{2005}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

23. 在某国, 每年有比例为 $p$ 的农村居民移居城镇, 有比例为 $q$ 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规律也不变. 把 $n$ 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 $x_n$ 和 $y_n$ $(x_n + y_n = 1)$.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

**解**: 由题设得

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-p)x_n + q y_n, \\ y_{n+1} = p x_n + (1-q) y_n. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

(2) 由递推关系式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

代入 $\binom{x_0}{y_0} = \binom{0.5}{0.5}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = 0.5\,\boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

下求 $\boldsymbol{A}^n$. 由

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\big[\lambda - (1-p-q)\big],$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-p-q$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 1$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \binom{q}{p}$.

当 $\lambda_2 = 1-p-q$ 时, 解方程 $\big(\boldsymbol{A} - (1-p-q)\boldsymbol{E}\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A} - (1-p-q)\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 1-p-q$ 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = \binom{-1}{1}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(1,\, 1-p-q)$. 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\, \mathrm{diag}(1,\, 1-p-q)\, \boldsymbol{P}^{-1}$, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q - (q-p)(1-p-q)^n \\ 2p + (q-p)(1-p-q)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

24. (1) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{10} - 5\boldsymbol{A}^9$;

(2) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{10} - 6\boldsymbol{A}^9 + 5\boldsymbol{A}^8$.

**解**: (1) 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 是实对称矩阵, 可找到正交相似变换矩阵 $\boldsymbol{P} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9\\&=\boldsymbol{P\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}-5\boldsymbol{P\Lambda}^9\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0\\0&5^{10}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}5&0\\0&5^{10}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 同 (1) 求得正交相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda},$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8\\&=\boldsymbol{A}^8(\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{A}^8(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\\&=\boldsymbol{P\Lambda}^8\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&2\\1&-3&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$.

**解**: (1)
$$f=(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(2)
$$f=(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\-2&-2&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(3)
$$f=(x_1,\;x_2,\,x_3,\,x_4)\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\-1&1&3&-2\\2&3&1&0\\-1&-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$; (2) $f(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

**解**: 对称地调整 $a_{ij}$ 与 $a_{ji}$ 的值, 使两者的和不变, 且 $a_{ij}=a_{ji}$ 即可.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$.

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$.

**解**: (1) 二次型 $f$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$. 由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\,\lambda_2=5,\,\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 由

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $\boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

且有

$$f = 2y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2.$$

(2) 二次型 $f$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时, 可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 时, 可得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

于是正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

且有

$$f = -y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz = 1$$

化成标准方程.

**解**: 把等式左边的二次型化为标准型即可. 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 10-\lambda & -5 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(11-\lambda),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 11$. 下求它们对应的特征向量.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, 由

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \overset{r_3 + r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r_1 - 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2 = 2$ 时, 由

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_3 + r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_2 - 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{r_1 + 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_2 = 2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2 = (4, -1, 1)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(4, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3 = 11$ 时, 由

$$\boldsymbol{A} - 11\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix} \overset{r_3 + r_2}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \overset{r_1 + 2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -11 & -11 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_2 + 5r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

可取 $\lambda_3 = 11$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3 = (1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$. 单位化得 $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{1}{3}(1, 2, -2)^{\mathrm{T}}$.

从而得正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

由正交变换 $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}(u, v, w)^{\mathrm{T}}$, 二次型 $3x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 10yz$ 化为标准型

$$2v^2 + 11w^2.$$

即二次曲面的标准方程为

$$2v^2 + 11w^2 = 1.$$

29. 证明: 二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

**证明**: 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{\Lambda}.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 不妨设 $\lambda_1$ 最大.

由 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, 且 $|\boldsymbol{P}| = 1$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}$. 则

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$.

当 $\|y\| = \|\boldsymbol{P}x\| = |\boldsymbol{P}|\,\|x\| = \|x\| = 1$, 即 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$ 时,

$$f = (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2) \leqslant (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2) = \lambda_1(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = \lambda_1.$$

故得证

$$\max_{\|x\|=1} f = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

30. 用配方法化下列二次型成规范型, 并写出所用变换的矩阵:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;

**解**: (1)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}\,(x_2 + x_3), \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2/\sqrt{2} + 3y_3, \\ x_2 = y_2/\sqrt{2} - y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

把 $f$ 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_2^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3, \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases}$$

把 $f$ 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned} f &= 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2 + 2x_3^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1 + x_3, \\ y_3 = \sqrt{2}\,x_3, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 - y_3/\sqrt{2}, \\ x_2 = y_1 - y_2 + \sqrt{2}\,y_3, \\ x_3 = y_3/\sqrt{2}, \end{cases}$$

把 $f$ 化为规范型 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 所用变换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型, 求 $a$.

**解**: 该二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

由正定的充要条件, 得

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

即

$$\begin{cases} 1 - a^2 > 0, \\ -a\,(5a + 4) > 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5} < a < 0.$$

32. 判定下列二次型的正定性:

(1) $f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

(2) $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$.

**解**: (1) $f$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{a}_{11}=-2<0,\quad \begin{vmatrix}-2&1\\1&-6\end{vmatrix}=11>0,\quad \begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{vmatrix}=-38<0,$$

根据定理 11 知 $f$ 为负定.

(2) $f$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{pmatrix},$$

由

$$\boldsymbol{a}_{11}=1>0,\quad \begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=2>0,\quad \begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0,\quad |\boldsymbol{A}|=24>0,$$

根据定理 11 知 $f$ 为正定.

33. 证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

**证明**: (充分性) 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$, 任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$, 且 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 则

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}.$$

(如果 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 由 $\boldsymbol{U}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 矛盾.)

对这个任取的 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\big[\boldsymbol{U}\boldsymbol{x},\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\big]=\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|^2>0.$$

从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的.

(必要性) 设对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的. 因 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵, 则存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{A}$ 对角化, 即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 而 $\boldsymbol{A}$ 为正定的, 所以 $\lambda_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$. 记对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}),$$

则

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})=\boldsymbol{\Lambda}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{U}=\big(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}_1\big)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{U}$ 可逆, 而且得到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.