“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

工程数学
线性代数

第六版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

本书第三版获2000年中国高校科学技术二等奖

□ 高等数学 第七版 上册	同济大学数学系
□ 高等数学 第七版 下册	同济大学数学系
□ 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济・第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 上册 同济・第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 下册 同济・第七版	同济大学数学系
■ 工程数学——线性代数 第六版	同济大学数学系
□ 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济・第六版	同济大学数学系
□ 工程数学——概率统计简明教程 第二版	同济大学数学系
□ 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版	同济大学数学系
□ 工程数学——新编统计学	同济大学数学系

数字课程账号

高等教育出版社
明码 1154 1792 2168 7521
增值服务

数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/39661
http://abook.hep.edu.cn/39661

ISBN 978-7-04-039661-4
9 787040 396614 >
定价 17.10 元

“十二五”普通高等教育

工程数学
线性代数
第六版

同济大学数学系 编

GONGCHENG SHUXUE XIANXING DAISHU

高等教育出版社·北京

内容提要

本书由同济大学数学系多位教师历经近两年时间反复修订而成。此次修订依据工科类本科线性代数课程教学基本要求（以下简称教学基本要求），参照近年来线性代数课程及教材建设的经验和成果，在内容的编排、概念的叙述、方法的应用等诸多方面作了修订，使全书结构更趋流畅，主次更加分明，论述更通俗易懂，因而更易教易学，也更适应当前的本科线性代数课程的教学。

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换六章，各章均配有相当数量的习题，书末附有习题答案。一至五章(除用小字排印的内容外)完全满足教学基本要求，教学时数约34学时。一至五章中用小字排印的内容供读者选学，第六章带有较多的理科色彩，供对数学要求较高的专业选用。

本书可供高等院校各工程类专业使用，包括诸如管理工程、生物工程等新兴工程类专业，也可供自学者、考研者和科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.线性代数/同济大学数学系编.--6版.--北京:高等教育出版社,2014.6
ISBN 978-7-04-039661-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①同… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第099716号

策划编辑 王 强　　责任编辑 蒋 青　　封面设计 王凌波　　版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅　　责任校对 宗小梅　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×960mm　1/16		
印　　张	11.25	版　　次	2007年5月第1版
字　　数	200千字		2014年6月第6版
购书热线	010-58581118	印　　次	2014年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	17.10元

物 料 号　39661-00

第六版前言

这次修订的主要工作是:(1) 适当调整一些章节的编排和内容,使全书结构更趋合理;(2) 对一些较为深刻且重要的概念增加了一些引导性和解说性的文字,增强了可读性;(3) 弥补了几处疏漏,使推理、解题更为顺畅;(4) 习题也作了少量的增删。总之,这次修订在保持原有体系和框架的基础上,在满足工科类本科数学基础课程教学基本要求的前提下,使本书更加易教易学,更加贴近于当前的教学实践。

这次修订工作由同济大学数学系骆承钦、胡志庠、靳全勤三位同志承担。

同济大学邵嘉裕教授和单海英、张莉同志以及同济大学浙江学院潘雪军同志对本书第五版提出了许多修改意见,谨在此对他们表示深切的谢意。

本书已入选第一批“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。对于教育部有关部门、高等教育出版社和同济大学有关部门对本书的关心和扶植,谨在此表示衷心的感谢。

编　者

2013 年 4 月

目　录

第1章　行　列　式

行列式是线性代数中常用的工具. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法.

§1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1)中的位置，排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}, \end{array} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的二阶行列式，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

数 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素或元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j

列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(4)的(i,j)元.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

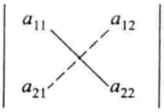

图 1.1

利用二阶行列式的概念,(2)式中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第 1 列的元素 a_{11},a_{21}所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第 2 列的元素 a_{12},a_{22}所得的二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

二、三阶行列式

定义 1　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{6}$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线,三条虚线看做是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

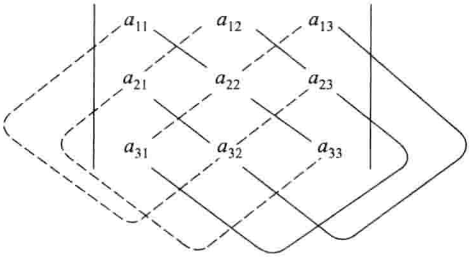

图 1.2

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4- \\ &\quad 1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &=-4-6+32-4-8-24=-14. \end{aligned}$$

例 3　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解　方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$　解得　$x = 2$ 或 $x = 3$.

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关全排列的知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

§2　全排列和对换

一、排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（也简称排列）.

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，可计算如下：

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；

从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例如用 1,2,3 三个数字作排列，排列总数 $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$，它们是

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321.$$

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序），于是在这 n 个元素的任一排列中，当某一对元素的先后次序与标准次序不同时，就说它构成 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 p_i $(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 4 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中：

3 排在首位，逆序数 $t_1=0$；

2 的前面比 2 大的数有一个(3)，故逆序数 $t_2=1$；

5 是最大数，逆序数 $t_3=0$；

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5)，故逆序数 $t_4=3$；

4 的前面比 4 大的数有一个(5)，故逆序数 $t_5=1$，于是这个排列的逆序数为

$$t=\sum_{i=1}^{5} t_i=0+1+0+3+1=5.$$

二、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 仍不妨设元素为从 1 开始的自然数(从小到大为标准次序). 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\cdots,a_l$；$b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立. 证毕

§3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{6}$$

容易看出：

（i）(6)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，(6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标（行标）排成标准次序 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，对应(6)式右端共含 6 项.

（ii）各项的正负号与列标的排列对照.

带正号的三项列标排列是 123，231，312；

带负号的三项列标排列是 132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

定义 2　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{7}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如(7)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

按此定义的二阶、三阶行列式，与 §1 中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

主对角线以下（上）的元素都为 0 的行列式叫做上（下）三角形行列式；特别，主对角线以下和以上的元素都为 0 的行列式叫做对角行列式.

例 5　证明（1）下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

（2）对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证　（1）由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i}，其下标应有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1,\cdots,p_n\leqslant n$，而 $p_1+\cdots+p_n=1+\cdots+n$，因此 $p_1=1,\cdots,p_n=n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）由（1）即得.

§4　行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，即 D^{T} 的 (i,j) 元为 b_{ij}，则 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

下证 $D=D^{\mathrm{T}}$.

对于行列式 D 的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^{t_1}=-(-1)^t.$$

故

$$(-1)^t=-(-1)^{t_1}=(-1)^r(-1)^{t_1}=(-1)^{r+t_1},$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此. 于是，经过若干次对换，使

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 t）变为标准排列（逆序数为 0）；

行标排列则相应地从标准排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

又，如果上式左边乘积的第 i 个元素 a_{ip_i} 为 a_{ij}，那么它必定是上式右边乘积的第 j 个元素，即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j}$. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所惟一确定.

综上可知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D^{T} 中的某一项 $(-1)^s a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D^{T} 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D^{T} 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证毕

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行

成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　对换行列式的两行(列)，行列式变号.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到的，即当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

证毕

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 对换 i, j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，对换 i, j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　把这两行对换，有 $D=-D$，故 $D=0$.　　证毕

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘 k，记作 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{r_i\div k}{=\!=\!=} k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上(记作 r_j+kr_i),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j+kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

(以数 k 乘第 i 列加到第 j 列上,记作 c_j+kc_i.)

以上诸性质请读者证明之.

上述性质 5 表明:当某一行(或列)的元素为两数之和时,行列式关于该行(或列)可分解为两个行列式. 若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和,则它可分解成 2^n 个行列式. 例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 2,3,6 介绍了行列式关于行和关于列的三种运算,即 $r_i\leftrightarrow r_j$,$r_i\times k$,r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$,$c_i\times k$,c_i+kc_j,利用这些运算可简化行列式的计算,特别是利用运算 r_i+kr_j(或 c_i+kc_j)可以把行列式中许多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利

用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值. 请看以下几个例题.

例 6　计算 n 阶行列式

$$(1)\ D=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};\quad (2)\ \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}.$$

解　(1) 应注意 D 不是上(下)三角形行列式，但可以通过行的对换化为上三角形行列式. 先把 D 的第 n 行依次与第 $n-1$ 行……第一行对换(共 $n-1$ 次对换)，得行列式 D_1. 由性质 2，$D_1=(-1)^{n-1}D$，或 $D=(-1)^{n-1}D_1$，这里

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

再把 D_1 的第 n 行依次与第 $n-1$ 行……第二行对换(共 $n-2$ 次对换)，得一新的行列式……循此，D 经过共

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

次行的对换成为上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{1n} \end{vmatrix},$$

于是 $D=(-1)^{n-1}D_1=\cdots=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}\,a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$；

(2) 由(1)得

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 7　计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4\div 5]{r_3\div 2}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{1}{2}r_3}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&0&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=10\times 4=40.$$

在上述解法中，先用了运算 $c_1\leftrightarrow c_2$，其目的是把 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$，即可把 a_{i1} $(i=2,3,4)$ 变为 0. 如果不先作 $c_1\leftrightarrow c_2$，则由于原式中 $a_{11}=3$，需用运算 $r_i-\frac{a_{i1}}{3}r_1$ 把 a_{i1} 变为 0，这样计算时就比较麻烦. 第二步把 r_2-r_1 和 r_4+5r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

例 8　计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6. 今把第 2,3,4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第一行：

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 9　计算

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}.$$

解　从第 4 行开始，后行减前行，

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

上述诸例中都用到把几个运算写在一起的省略写法，这里要注意各个运算的次序一般不能颠倒，这是由于后一次运算是作用在前一次运算结果上的缘故. 例如

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}a+c&b+d\\-a&-b\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}a&b\\c-a&d-b\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}c&d\\c-a&d-b\end{vmatrix},$$

可见两次运算当次序不同时所得结果不同. 忽视后一次运算是作用在前一次运算的结果上，就会出错，例如

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_1]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}a+c&b+d\\c-a&d-b\end{vmatrix},$$

这样的运算是错误的，出错的原因在于第二次运算找错了对象.

此外还要注意运算 r_i+r_j 与 r_j+r_i 的区别，r_i+kr_j 是约定的行列式运算记号，不能写作 kr_j+r_i（这里不能套用加法的交换律）.

上述诸例都是利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，用归纳法不难证明（这里不证）任何 n 阶行列式总能利用运算 r_i+kr_j 化为上三角形行列式，

或化为下三角形行列式（这时要先把 $a_{1n},\cdots,a_{n-1,n}$ 化为 0）. 类似地，利用列运算 c_i+kc_j，也可把行列式化为上三角形行列式或下三角形行列式.

例 10　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证　对 D_1 作运算 $r_i+\lambda r_j$，把 D_1 化为下三角形行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

对 D_2 作运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D_2 化为下三角形行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}.$$

于是，对 D 的前 k 行作运算 $r_i+\lambda r_j$，再对后 n 列作运算 $c_i+\lambda c_j$，把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

故

$$D=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$

例 11　计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n},$$

其中未写出的元素为 0.

解　把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行……第 2 行对换(作 $2n-2$ 次相邻两行的对换),再把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列……第 2 列对换,得

$$D_{2n}=(-1)^{2(2n-2)}\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \\ 0 & 0 \\ & \\ \vdots & \vdots \\ & \\ & \\ 0 & 0 \end{matrix}\;\underbrace{\begin{matrix} 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 \\ a & & & & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ & & a & & b & & \\ & & c & & d & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ c & & & & & & d \end{matrix}}_{2(n-1)}\right|,$$

根据例 10 的结果,有

$$D_{2n}=D_2D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}.$$

以此作递推公式,即得

$$D_{2n}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n.$$

§5　行列式按行(列)展开

一般说来,低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便,于是,我们自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此,先引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij}叫做(i,j)元a_{ij}的代数余子式.

例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中$(3,2)$元a_{32}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

引理　一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除(i,j)元a_{ij}外都为零,那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证　先证$(i,j)=(1,1)$的情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这是例 10 中当 $k=1$ 时的特殊情形,按例 10 的结论,即有

$$D=a_{11}M_{11},$$

又

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11},$$

从而

$$D=a_{11}A_{11}.$$

再证一般情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了利用前面的结果,把 D 的行列作如下调换:把 D 的第 i 行依次与第 $i-1$ 行、第 $i-2$ 行……第 1 行对换,这样数a_{ij}就换成$(1,j)$元,对换的次数为$i-1$.