

Complementi di Matematica

Cristian Baldi, Luca Chiodini

A.A. 2015/2016

Indice

1	Matrici	4
1.1	Definizione	4
1.2	Matrici quadrate	4
1.3	Diagonale principale	4
1.4	Matrice triangolare superiore	4
1.5	Matrice diagonale	5
1.6	Matrice simmetrica	5
1.7	Matrice identità	5
1.8	Operazioni con matrici	5
1.8.1	Matrice trasposta	5
1.8.2	Somma tra matrici	5
1.8.3	Moltiplicazione per uno scalare	5
1.8.4	Prodotto tra matrici	6
1.8.5	Inversa di una matrice	6
1.9	Rango	6
1.10	Riduzione a scala	6
1.11	Determinante	6
1.11.1	Calcolare il determinante	6
1.11.2	Proprietà del determinante	7
1.12	Dipendenza Lineare	8
2	Sistemi Lineari	9
2.1	Equazione lineare	9
2.2	Sistema lineare	9
2.3	Soluzioni di un sistema lineare	9
2.4	Teorema di Rouché - Capelli	9
2.5	Regola di Cramer	10
2.6	Sulle soluzioni	10
2.6.1	Metodo di Gauss	10
2.6.2	Sistemi lineari omogenei	10
3	Vettori	11
3.1	Introduzione	11
3.2	Caratteristiche	11
3.3	Vettori Complanari	11
3.4	Prodotto Scalare	12
3.4.1	Proprietà	12
3.4.2	Perpendicolarità tra due vettori	12
3.4.3	Angolo tra due vettori	12
3.5	Prodotto Vettoriale	12
3.5.1	Proprietà	12
3.5.2	Significato Geometrico	13

3.6	Prodotto Misto	13
3.6.1	Proprietà	13
3.6.2	Significato Geometrico	14
3.7	Dipendenza Lineare	14
3.8	Spazi vettoriali	14
3.8.1	Sottospazi vettoriali	15
4	Geometria Analitica	16
4.1	Retta nel piano	16
4.1.1	Equazione della retta	16
4.1.2	Retta tra due punti	16
4.1.3	Equazione Cartesiana	17
4.1.4	Parallelismo tra rette	17
4.1.5	Perpendicolarità tra rette	17
4.1.6	Angolo tra due rette	18
4.1.7	Equazione in forma esplicita	18
4.1.8	Distanza punto - retta	18
4.2	Retta nello spazio	19
4.2.1	Equazione parametrica	19
4.2.2	Retta tra due punti	19
4.3	Piano	19
4.3.1	Appartenenza al piano	19
4.3.2	Equazione piano alternativa	20
4.3.3	Piano per tre punti	20
4.3.4	Parallelismo tra piani	20
4.3.5	Perpendicolarità tra piani	20
4.3.6	Intersezione di due piani	21
4.3.7	Fasci di piani	21
4.3.8	Parallelismo e perpendicolarità tra una retta e un piano	21
4.3.9	Angolo tra due piani	22
4.3.10	Angolo tra una retta e un piano	23
4.3.11	Rette sghembe	23
5	Equazioni differenziali	24
5.1	Tipologie e metodi risolutivi	24
5.1.1	Equazioni differenziali elementari	24
5.1.2	Equazioni differenziali a variabili separabili	24
5.1.3	Equazioni differenziali lineari	25
5.2	Problema di Cauchy	26
5.2.1	Esistenza ed unicità della soluzione	26
6	Funzioni a due variabili	27
6.1	Insieme aperti e chiusi	27
6.2	Generalità	27
6.3	Limiti	27
6.3.1	Proprietà dei limiti	27
6.4	Continuità	27
6.5	Derivabilità	28
6.5.1	Derivata in \mathbb{R}	28
6.5.2	Derivate Parziali	28
6.5.3	Derivata direzionale	28
6.5.4	Sviluppo di Taylor	29
6.6	Piano tangente	29
6.6.1	Vettore normale in un punto	29

6.6.2	Piano tangente	29
6.7	Linearizzazione	29
6.7.1	In \mathbb{R}	29
6.7.2	In \mathbb{R}^2	29
6.8	Differenziabilità	30
6.8.1	Differenziabilità in \mathbb{R}	30
6.8.2	Generalità	30
6.8.3	Condizioni per la differenziabilità	30
6.9	Gradiente	30
6.9.1	Interpretazione geometrica	30
6.9.2	Differenziale	30
6.10	Matrice Jacobiana	31
6.11	Funzione omogenea	31
6.11.1	Esempi	31
6.12	Valori Estremi	31
6.12.1	Punti a cui prestare attenzione	31
6.12.2	Classificazione formale	31
6.12.3	Classificazione tramite matrice hessiana	31
7	Integrali doppi	32
7.1	Generalità	32
7.2	Significato geometrico	32
7.2.1	In \mathbb{R}	32
7.2.2	In \mathbb{R}^2	32
7.3	Definizione	32
7.3.1	Funzioni costanti su un rettangolo	32
7.3.2	Funzioni costanti su più rettangoli	33
7.3.3	Funzioni non costanti su un rettangolo	33
7.4	Funzioni integrabili	33
7.5	Integrali doppi su domini generali	33

Capitolo 1

Matrici

1.1 Definizione

Una matrice con p righe e q colonne è una tabella di numeri reali così disposti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \dots & a_{p,q} \end{bmatrix}$$

I parametri p e q sono detti dimensioni della matrice.

L'elemento $A_{i,j}$ della matrice è l'elemento che si trova alla i -esima riga e alla j -esima colonna.

1.2 Matrici quadrate

Una matrice che ha dimensione (n, n) è detta matrice quadrata. Questa matrice avrà un numero uguale di righe e di colonne.

$$A_{\text{quadrata } 2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.3 Diagonale principale

Per ogni matrice quadrata $A_{n \times n}$ è possibile individuare gli elementi della diagonale principale, cioè tutti gli $a_{i,i}$ con i che varia da 1 a n .

1.4 Matrice triangolare superiore

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ si dice triangolare superiore se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli.

$$A_{\text{Diag. Sup.}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

1.5 Matrice diagonale

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ è detta diagonale se tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono nulli.

1.6 Matrice simmetrica

Una matrice quadrata si dice simmetrica se i suoi elementi in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale sono uguali.

1.7 Matrice identità

Chiamiamo matrice unità (o matrice identica o matrice identità) di ordine n la matrice quadrata $I_{n \times n}$ avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0. La matrice identica è una matrice diagonale.

1.8 Operazioni con matrici

1.8.1 Matrice trasposta

Preso una matrice A chiamiamo A^T la trasposta di A la matrice avente come elemento di posto (i, j) l'elemento (j, i) della matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1.8.2 Somma tra matrici

Consideriamo due matrici A e B . Le due matrici sono sommabili se e solo se sono dello stesso tipo, cioè se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

$C = A + B$ è una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne delle due matrici di partenza, in cui ogni termine $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$
$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & 5+(-5) & (-3)+2 \\ (-9)+1 & (-2)+4 & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.8.3 Moltiplicazione per uno scalare

La moltiplicazione di una matrice $A = (a_{i,j})$ per uno scalare λ è ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per lo scalare stesso.

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})$$

1.8.4 Prodotto tra matrici

Definizione. Siano A, B due matrici. È possibile calcolare il prodotto $C = A \cdot B$ solo se $\text{colonne}(A) = \text{righe}(B)$.

$$C_{ij} := A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots + A_{iq} \cdot B_{qj}$$

1.8.5 Inversa di una matrice

Teorema. Una matrice è invertibile se e solo se ha rango massimo.

Quindi una matrice ammette inversa se $\det(A) \neq 0$

Teorema. Sia A una matrice quadrata invertibile di ordine n . L'inversa $A^{-1} = (x_{ij})$ si può calcolare in questo modo:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})}{\det(A)}$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta eliminando da A la riga i -esima e la colonna j -esima.

1.9 Rango

Definizione. Il rango di una matrice è il massimo ordine di sottomatrice quadrata con determinante diverso da 0 che posso estrarre dalla matrice stessa.

Definizione. Il rango di una matrice ridotta a scala è il numero di righe diverse da 0.

Una matrice rettangolare $A_{m \times n}$ può avere rango al massimo uguale al minimo tra il numero di righe e il numero di colonne della matrice. Cioè:

$$rk(A) \leq \min(m, n)$$

Nel caso in cui il rango coincida con il minimo tra m ed n , cioè $rk(A) = \min(m, n)$, diremo che la matrice ha rango massimo.

1.10 Riduzione a scala

Definizione. Una matrice A si dice a scala se il numero degli zeri che precede il primo elemento diverso da zero di ogni riga aumenta precedendo dalla prima riga verso l'ultima, fino a che non restano, eventualmente, solo righe nulle.

1.11 Determinante

Definizione. Il determinante è un numero associato ad una matrice A e si indica come $|A|$ oppure con $\det(A)$.

1.11.1 Calcolare il determinante

Matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

Matrice 3×3

Attraverso la regola di Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Matrici $n \times n$

Consideriamo una matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e denotiamo con A_{ij} la matrice che si ottiene eliminando dalla matrice A la riga i e la colonna j .

Definizione. Sviluppo di Laplace per righe

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(ci si muove lungo la riga i -esima).

Definizione. Sviluppo di Laplace per colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(ci si muove lungo la colonna j -esima).

1.11.2 Proprietà del determinante

Proprietà. Una matrice quadrata con due righe o due colonne uguali ha determinante nullo.

Proprietà. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora $\det(A) = -\det(B)$. Un'analoga proprietà vale per lo scambio di colonne.

Proprietà. Se una matrice quadrata A ha una riga multipla di un'altra, allora $\det(A) = 0$. Un'analoga proprietà vale per le colonne.

Proprietà. Sia A una matrice quadrata di ordine n e k un numero reale. Si ha allora:

$$\det(kA) = k^n \cdot \det A$$

Proprietà. Sia A una matrice diagonale, allora il determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale.

Teorema (di Binet). Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B si ha:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Teorema. Se A è una matrice invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

1.12 Dipendenza Lineare

Le righe A_1, A_2, \dots, A_m di una matrice si dicono linearmente dipendenti se esistono dei k_n non tutti nulli per cui

$$k_1 \cdot A_1 + k_2 \cdot A_2 + \dots + k_m A_m = 0$$

Proprietà. Una matrice quadrata A ha $\det(A) = 0$ se e solo se le righe (o le colonne) di A sono linearmente dipendenti.

Definizione (Combinazione Lineare). Si dice che una riga A_i è combinazione lineare delle altre righe se esistono a_1, a_2, \dots, a_n tali che

$$A_i = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_{i-1} A_{i-1} + a_{i+1} A_{i+1} + \dots + a_n A_n$$

Teorema. Sia A una matrice $m \times n$ allora le righe di A sono linearmente dipendenti se e solo se una riga di A è combinazione lineare delle altre righe.

Capitolo 2

Sistemi Lineari

2.1 Equazione lineare

Definizione. Si chiama *equazione lineare* su \mathbb{R} ogni equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

x_1, x_2, \dots, x_n sono dette le variabili dell'equazione lineare.

a_1, a_2, \dots, a_n sono detti i coefficienti dell'equazione lineare.

b è il termine noto.

Definizione. La n -upla ordinata (k_1, k_2, \dots, k_n) è detta *soluzione del sistema lineare* se

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b$$

2.2 Sistema lineare

Definizione. Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è detto *sistema lineare*.

Definizione. Un sistema lineare è detto *omogeneo* se tutte le m equazioni lineari che lo compongono hanno termine noto $b = 0$.

È possibile rappresentare i sistemi sotto forma di matrici. In questo modo sarà possibile scrivere il sistema come $A \cdot X = B$.

2.3 Soluzioni di un sistema lineare

Definizione. La n -upla ordinata (k_1, k_2, \dots, k_n) è detta *soluzione del sistema* se essa soddisfa tutte le m equazioni del sistema.

Definizione. Ogni soluzione è detta *soluzione particolare del sistema*.

Definizione. Tutte le soluzioni del sistema sono dette *soluzioni generali*.

2.4 Teorema di Rouché - Capelli

Teorema. Un sistema lineare ha soluzioni se e sole se il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa AB .

2.5 Regola di Cramer

Sia dato un sistema lineare di n equazioni ed n incognite.

Teorema (Teorema di Cramer). *Un sistema lineare ha una e una sola soluzione se il determinante della matrice incompleta A è diverso da 0.*

Teorema (Regola di Cramer). *Preso un sistema lineare con $\det(A) \neq 0$, la componente i -esima dell'unica soluzione (k_1, k_2, \dots, k_n) di tale sistema è data da:*

$$k_i = \frac{\det(A^1, A^2, \dots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \dots, A^n)}{\det(A^1, A^2, \dots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \dots, A^n)}$$

2.6 Sulle soluzioni

Esempio. *Prendiamo un sistema lineare con determinante uguale a 0.*

Non possiamo applicare la regola di Cramer.

Calcoliamo quindi il rango della matrice completa e della matrice incompleta.

Supponiamo siano entrambi uguali, quindi per Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni.

Selezioniamo le equazioni linearmente indipendenti del sistema (il rango ci dice quante sono, basta trovare una sottomatrice $r \times r$ con determinante diverso da zero).

Dal nuovo sistema parametrizziamo (spostiamo le incognite aggiuntive in B) e risolviamo con Cramer, ottenendo infinite soluzioni parametriche.

2.6.1 Metodo di Gauss

Si riduce la matrice completa a scala tramite operazioni elementari.

Verifico se il sistema ha soluzioni: cioè applico Rouché-Capelli, guardando se il rango di A è uguale al rango di AB

Se esistono, trovo le soluzioni: diventerà particolarmente semplice trovarle vista la matrice ridotta a scala.

2.6.2 Sistemi lineari omogenei

Proprietà. *In un sistema lineare omogeneo il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa AB .*

Proprietà. *Se il rango della matrice completa è uguale al numero di incognite allora il sistema ha, per il teorema di Cramer, una ed una sola soluzione, quella nulla.*

Proprietà. *Se il rango r è minore del numero di incognite n , allora il sistema ammette infinite (∞^{n-r}) soluzioni, ottenute parametrizzando $n - r$ incognite.*

Capitolo 3

Vettori

3.1 Introduzione

Definizione. Si chiama vettore applicato e si indica con \vec{AB} una coppia ordinata di punti A e B del piano o dello spazio.

Definizione. A viene detto punto di applicazione del vettore e B punto finale.

3.2 Caratteristiche

- Verso, cioè se fa $A \rightarrow B$ o $B \rightarrow A$.
- Direzione, cioè la retta che passa da A e B .
- Norma, o modulo, la lunghezza del vettore

Definizione. Due vettori si dicono equivalenti se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza.

Definizione (Norma). È detta norma (o modulo) del vettore $A = (a_1, a_2)$ il numero reale

$$||A|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Definizione (Versore). È detto versore del vettore A il vettore corrispondente di modulo 1, così ottenuto:

$$\text{vers}(A) = \frac{A}{||A||}$$

Definizione. Il vettore che ha norma uguale a 0 è detto vettore nullo.

3.3 Vettori Complanari

A è un vettore complanare a B e C se esistono n e m per cui

$$A = nB + mC$$

Esempio. Trovare i vettori A complanari a $B = (3, 3, 2)$ e $C = (4, 2, 6)$.

Sia $A = (x, y, z)$,

$$A = nB + mC$$

Quindi

$$(x, y, z) = nB + mC = (3n + 4m, 3n + 2m, 2n + 6m)$$

3.4 Prodotto Scalare

Definizione. Il prodotto scalare tra due vettori $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ è dato da

$$A \circ B = ac + bd$$

3.4.1 Proprietà

- $A \circ B = B \circ A$
- $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$
- $\alpha A \circ B = \alpha(A \circ B)$

3.4.2 Perpendicolarità tra due vettori

Teorema. Due vettori A e B non nulli sono perpendicolari solo se $A \circ B = 0$

3.4.3 Angolo tra due vettori

Teorema. Siano A e B due vettori non nulli e sia θ l'angolo fra A e B . Vale

$$\cos(\theta) = \frac{A \circ B}{\|A\| \cdot \|B\|}$$

3.5 Prodotto Vettoriale

Definizione. Siano dati due vettori dello spazio

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

e

$$\vec{w} = (a_1, b_1, c_1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

Definiamo come prodotto vettoriale tra \vec{v} e \vec{w} il seguente vettore:

$$v \wedge w = (bc_1 - b_1c)\vec{i} - (a_1c - ac_1)\vec{j} - (ab_1 - a_b)\vec{k}$$

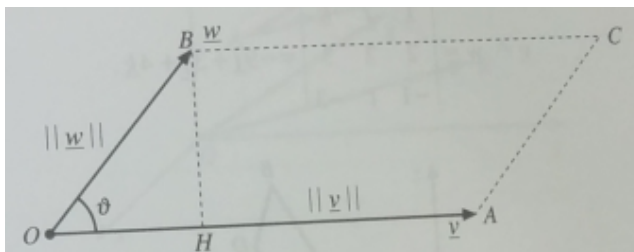
Il prodotto vettoriale può anche essere calcolato come il determinante della matrice seguente:

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

3.5.1 Proprietà

- $v \wedge w = -w \wedge v$
- $v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u$
- $(\alpha v) \wedge w = \alpha(v \wedge w)$
- $v \circ (v \wedge w) = 0$, il prodotto vettoriale è perpendicolare sia a v sia a w , quindi se v e w non sono paralleli allora $v \wedge w$ è perpendicolare al piano individuato da v e w
- $(\alpha v) \wedge v = 0$, il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo
- se $v \wedge w = 0$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $w = \alpha v$ oppure $v = \alpha w$. Infatti, se due vettori hanno prodotto vettoriale nullo allora sono paralleli.

3.5.2 Significato Geometrico



Inanzitutto

$$||\vec{v} \wedge \vec{w}|| = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin(\theta)$$

Visto che

$$||\vec{w}|| \cdot \sin(\alpha) = BH$$

allora

$$||\vec{v} \wedge \vec{w}|| = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin(\theta) = OA \cdot BH$$

cioè il modulo del prodotto vettoriale corrisponde all'area del parallelogramma $OACB$.

3.6 Prodotto Misto

Definizione. Presi

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{w} = (a_1, b_1, c_1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = (a_2, b_2, c_2) = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

Definiamo prodotto misto dei tre vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ il numero

$$v \circ (w \wedge u)$$

Questo numero è equivalente a il determinante di:

$$v \circ (w \wedge u) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3.6.1 Proprietà

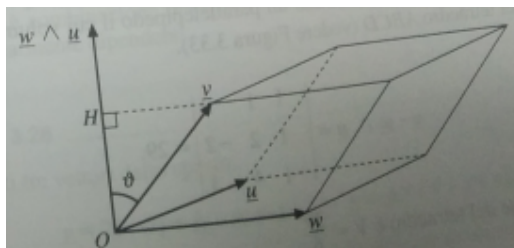
Proprietà. Il prodotto misto è 0 se 3 vettori sono complanari.

Infatti

Proprietà. Se almeno due di questi vettori sono paralleli, allora due righe sono proporzionali, quindi il determinante della matrice è 0.

Proprietà. Se i tre vettori non sono paralleli esistono costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha w + \beta u$, cioè una riga è combinazione lineare delle altre; quindi il determinante della matrice è 0.

3.6.2 Significato Geometrico



Il modulo del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai vettori w, u, v .

3.7 Dipendenza Lineare

Definizione. I vettori v_1, v_2, \dots, v_n si dicono *linearmente dipendenti* se esistono dei k_n non tutti nulli per cui

$$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \dots + k_n v_n = 0$$

Definizione (Combinazione Lineare). Si dice che un vettore v è *combinazione lineare* dei vettori v_1, \dots, v_n se esistono a_1, a_2, \dots, a_n tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Proprietà. Dei vettori sono *linearmente dipendenti* solo se almeno uno è *combinazione lineare* degli altri.

Proprietà. Due vettori del piano o dello spazio sono *linearmente dipendenti* se e solo se sono *paralleli*.

Proprietà. Tre vettori dello spazio sono *linearmente dipendenti* se e solo se sono *complanari*.

Teorema. Siano dati tre vettori non *complanari* dello spazio, allora ogni altro vettore dello spazio è *combinazione lineare* degli altri 3.

Definizione. Dei vettori formano una *base* se non sono *linearmente indipendenti*, quindi non *complanari*.

Proprietà. s vettori in uno spazio r -dimensionale, con $s > r$, sono sempre *linearmente dipendenti*.

3.8 Spazi vettoriali

Definizione (Spazio vettoriale). Sia V un insieme di elementi. Definiamo su questo insieme due operazioni, una di *addizione* e una di *moltiplicazione per uno scalare*. Valgono inoltre le seguenti proprietà:

- *commutativa*
- *associativa*
- *esistenza di un elemento nullo (vettore nullo, 0)*
- *esistenza di un opposto per ogni elemento*
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta(v))$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta(v))$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $1 \cdot v = v$

Diciamo allora che V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e chiameremo i suoi elementi *vettori*.

3.8.1 Sottospazi vettoriali

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale e S un sottoinsieme non vuoto di V , si dice che S è un sottospazio di V se valgono le seguenti proprietà:

- se $u, v \in S$ allora $u + v \in S$
- se $u \in S$ allora $\alpha u \in S$

Esempio. In ogni spazio V , 0 e V stesso sono sottospazi. V è sottospazio improprio, 0 è sottospazio banale.

Definizione (Sottospazio generato). Si dice sottospazio di V generato da n vettori l'insieme di tutte le possibili combinazioni di quegli n vettori.

Definizione (Base). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita; l'insieme dei vettori v_1, v_2, \dots, v_n di V è detto una base dello spazio V se questi vettori generano V (cioè ogni elemento di V è combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_n) e sono linearmente indipendenti.

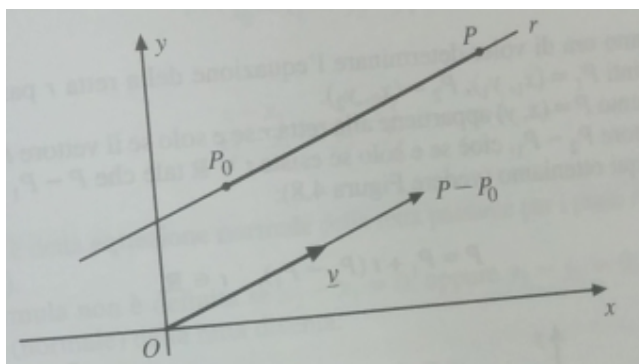
Capitolo 4

Geometria Analitica

4.1 Retta nel piano

4.1.1 Equazione della retta

Supponiamo di avere un vettore $v = (l, m)$ non nullo e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del piano. Vogliamo determinare tutti i punti P appartenenti alla retta r , passante per il punto P_0 e parallela al vettore v .



Ovviamente il punto P che cerchiamo (generalizzando al caso specifico di un punto solo) appartiene alla retta r se e solo se il vettore $P - P_0$ è parallelo al vettore \vec{v} , cioè se esiste una t tale che $P - P_0 = t\vec{v}$.

Visto che $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ e $v = (l, m)$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

che è l'equazione parametrica della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore \vec{v} .

4.1.2 Retta tra due punti

Supponiamo di voler determinare l'equazione della retta r passante per due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.

Un punto $P = (x, y)$ appartiene a r se e solo se il vettore $P - P_1$ è parallelo al vettore $P_2 - P_1$. Cioè solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P - P_1 = t(P_2 - P_1)$. Da questo otteniamo

$$P = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

Sostituendo le coordinate di P_1 , P_2 e P nell'espressione precedente della retta r si ottiene la seguente

$$r = \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Al variare di t si ottengono tutti i punti della retta r passante per P_1, P_2 .

Al variare di $t \in [0, 1]$ si ottengono tutti i punti della retta r passante appartenenti al segmento $P_1 P_2$.

È possibile ricavare t in questo modo:

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Definizione. L'equazione normale della retta passante per P_1, P_2 è:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Se $x_2 - x_1 = 0$ o $y_2 - y_1 = 0$ allora l'equazione diventa

$$x - x_1 = 0 \text{ se } x_2 = x_1$$

$$y - y_1 = 0 \text{ se } y_2 = y_1$$

4.1.3 Equazione Cartesiana

Per due punti

Dall'equazione normale si ottiene che

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

cioè

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + y_1 x_2 - y_2 x_1 = 0$$

Perpendicolare ad un vettore

Vogliamo trovare l'equazione della retta r passante per P_0 e perpendicolare al vettore $n = (a, b)$.

Cioè se $(P - P_0) \circ n = 0$.

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

4.1.4 Parallelismo tra rette

Date due rette r e r_1 di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, esse sono parallele se e solo se i vettori $n = (a, b)$ e $n_1 = (a_1, b_1)$, direttori delle rette, sono paralleli, cioè se esiste un k tale per cui $kn = n_1$.

4.1.5 Perpendicolarità tra rette

Date due rette r e r_1 di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, esse sono perpendicolari se e solo se il prodotto scalare dei vettori $n = (a, b)$ e $n_1 = (a_1, b_1)$, direttori delle rette, è nullo.

$$aa_1 + bb_1 = 0$$

4.1.6 Angolo tra due rette

Date

$$r = \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$
$$r_1 = \begin{cases} x = x_1 + l_1 t \\ y = y_1 + m_1 t \end{cases}$$

l'angolo tra le rette r, r_1 è uguale all'angolo tra i vettori v_r e v_{r_1} , cioè

$$\arccos(\pm(v_r \circ v_{r_1}))$$

4.1.7 Equazione in forma esplicita

Sia data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$. Supponiamo $b \neq 0$, allora

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ si ottiene $y = mx + q$.

Questa formula fornisce l'equazione di tutte le rette del piano, eccetto le rette $x = k$, parallele all'asse y .

m è detto il coefficiente angolare della retta.

Ponendo $x = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = q + mt \end{cases}$$

Inoltre $m = \tan(\theta)$

4.1.8 Distanza punto - retta

Siano dati nel piano una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Sia H il piede della perpendicolare alla retta r condotta da P_0 .

La misura del segmento P_0H ovvero il numero $\gamma = ||P_0 - H||$ è la distanza del punto P_0 dalla retta r .

Poichè $H \in r$ allora $ax_H + by_H + c = 0$.

$P_0 - H$ è un vettore parallelo a $v = (a, b)$ (perpendicolare alla retta r), quindi

$$|(P_0 - H) \circ v| = ||(P_0 - H)|| \cdot ||v||$$

cioè

$$\gamma = ||P_0 - H|| = \frac{|(P_0 - H) \circ \vec{v}|}{||\vec{v}||}$$

che alla fine è

$$\gamma = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza rette parallele

$$\gamma = \frac{|-c_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4.2 Retta nello spazio

4.2.1 Equazione parametrica

Siano dati un punto P_0 nello spazio e un vettore non nullo v . Un punto P appartiene alla retta r passante per P_0 e parallela a v se e solo se il vettore $P - P_0$ è parallelo al vettore v , ossia se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

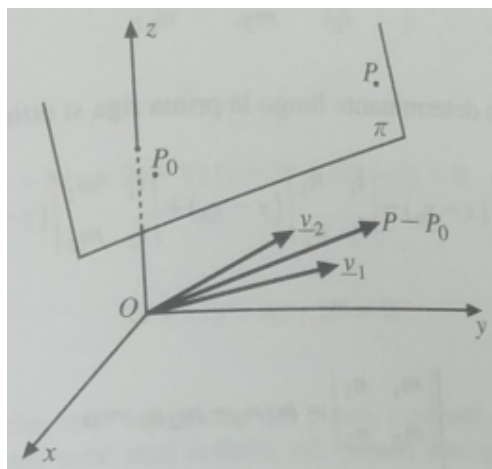
$$P - P_0 = tv$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

4.2.2 Retta tra due punti

Si ragiona in modo analogo a quanto fatto nel piano, considerando chiaramente un punto in più.

4.3 Piano



Dato un punto P_0 e due vettori non paralleli dello spazio $v_1 = l_1i + m_1j + n_1k$ e $v_2 = l_2i + m_2j + n_2k$. Un punto P appartiene al piano π passante per P_0 e parallelo ai vettori v_1 e v_2 se e solo se il vettore $P - P_0$ è complanare con i vettori v_1 e v_2 ovvero se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$P - P_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Da qui otteniamo l'equazione parametrica del piano

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha l_1 + \beta l_2 \\ y = y_0 + \alpha m_1 + \beta m_2 \\ z = z_0 + \alpha n_1 + \beta n_2 \end{cases}$$

4.3.1 Appartenenza al piano

Consideriamo la seguente matrice

$$\begin{array}{ccc} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{array}$$

La prima riga è combinazione lineare delle altre due, quindi il determinante è uguale a zero.

Un punto P appartiene al piano se e solo se il determinante della matrice è uguale a 0.

Cioè

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

Ponendo

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = a \\ - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = b \\ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = c \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di tutti i piani passanti per P_0 .

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

4.3.2 Equazione piano alternativa

Siano dati un punto P_0 dello spazio e un vettore u .

Un punto P appartiene al piano passante per P_0 e perpendicolare a u se e solo se il vettore $P - P_0$ è perpendicolare a u , cioè

$$(P - P_0) \circ u = 0$$

Poiché $P - P_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$, allora

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

4.3.3 Piano per tre punti

Se

$$\begin{vmatrix} P_{\text{generico}} - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ P_3 - P_1 \end{vmatrix} = 0$$

4.3.4 Parallelismo tra piani

Due piani sono paralleli tra loro se e solo se i vettori u e u_1 , perpendicolari al piano, sono paralleli, cioè se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$u = ku_1$$

4.3.5 Perpendicolarità tra piani

Due piani sono perpendicolari tra loro se e solo se i vettori u e u_1 , perpendicolari al piano, sono perpendicolari, cioè se e solo se il loro prodotto scalare è 0.

4.3.6 Intersezione di due piani

Quando due piani si intersecano danno origine ad una retta.

$$r = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

4.3.7 Fasci di piani

Esistono infiniti piani che passano per una retta r . L'insieme di tutti questi piani si chiama fascio di piani di asse r .
Se

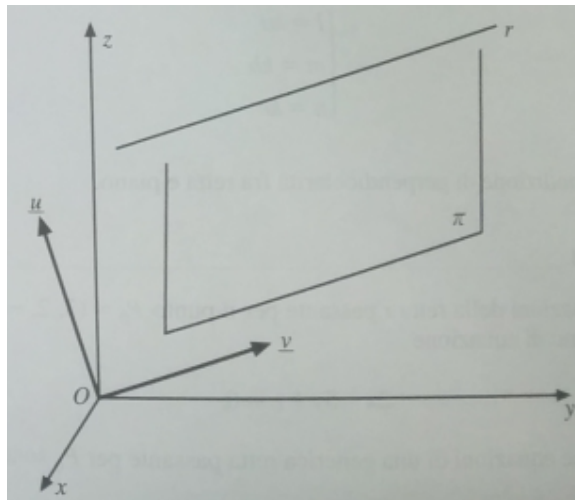
$$r = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

allora il fascio di piani individuato è dato da

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

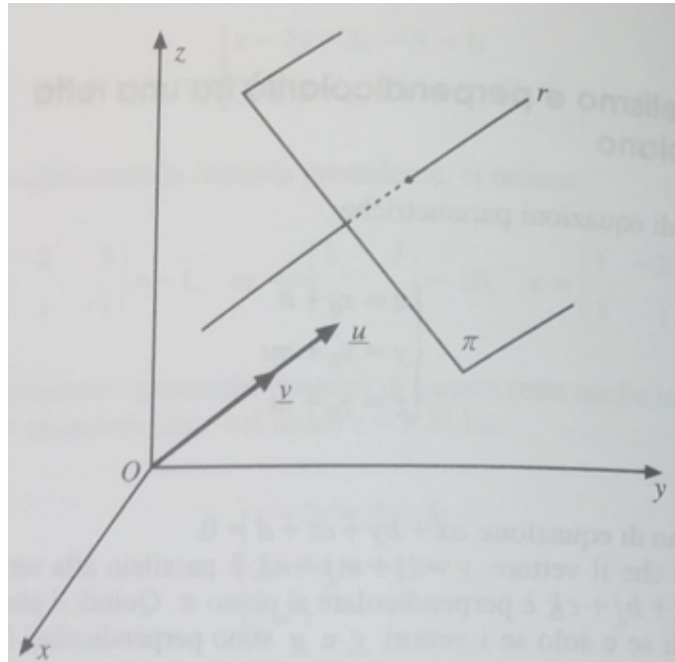
4.3.8 Parallelismo e perpendicolarità tra una retta e un piano

Parallelismo



Il prodotto scalare dei due vettori direttori deve essere 0.

Perpendicolarità



I due vettori direttori devono essere proporzionali.

4.3.9 Angolo tra due piani

È l'angolo tra i due vettori direttori normali ai due piani.

$$\cos(\alpha) = \frac{|a \circ b|}{||a|| \cdot ||b||}$$

4.3.10 Angolo tra una retta e un piano

Siano dati una retta r di parametri direttori l, m, n e un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$; supponiamo che r e π non siano perpendicolari. L'angolo θ fra il piano π e la retta r è l'angolo *acuto* che la retta r forma con la sua proiezione ortogonale r' sul piano π .

Quindi θ è l'angolo formato dal vettore \underline{v} parallelo alla retta r e dal vettore \underline{v}' parallelo alla retta r' (vedere Figura 5.14).

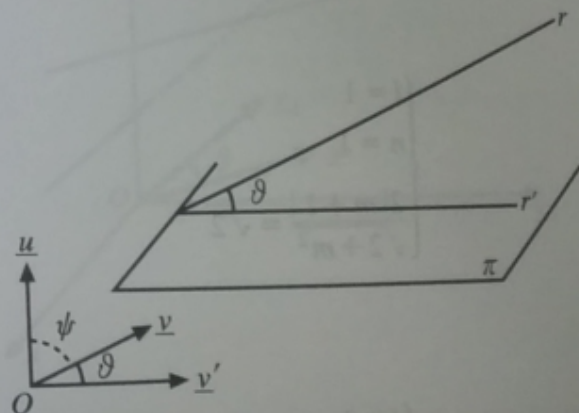


Figura 5.14

Si vede subito che l'angolo θ è il complementare dell'angolo acuto ψ formato dai vettori $\underline{v} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$ e $\underline{u} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$, che è un vettore perpendicolare al piano π (se tale angolo ψ fosse ottuso, allora si prenderebbe il suo supplementare).

Quindi, essendo $\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi) = \cos \psi$, si ha:

$$\sin \theta = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

4.3.11 Rette sghembe

Due rette si dicono sghembe se non sono complanari, quindi né incidenti né parallele. Quindi il sistema associato non ha soluzione e i vettori direttori non sono proporzionali.

Capitolo 5

Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione e in cui sono presenti una o più derivate della funzione incognita.

Un esempio di equazione differenziale è $f'(x) + f(x) = x$. Soluzione di questa equazione sono tutte le funzioni che sommate alla propria derivata prima danno come risultato x .

Definizione (Ordine di un'equazione differenziale). *Il massimo ordine di derivazione che compare in un'equazione differenziale.*

Esempio. $f'(x) = x$

Quali sono le funzioni la cui derivata prima è x ?

Tutte le funzioni $\frac{x^2}{2} + c = \int x \, dx$

5.1 Tipologie e metodi risolutivi

5.1.1 Equazioni differenziali elementari

In questi casi basta integrare n volte, dove n è l'ordine dell'equazione differenziale.

Esempio.

$$y' = 3e^{2x} \rightarrow y = \int 3e^{2x} \, dx \rightarrow y = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

Esempio.

$$\begin{aligned} y'' = 2 - \cos(x) &\implies y' = \int 2 - \cos(x) \, dx \\ y' = 2x - \sin(x) + c &\implies y = \int 2x - \sin(x) + c_1 \, dx \\ y &= x^2 - \cos(x) + c_1x + c \end{aligned}$$

5.1.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Esse si risolvono seguendo i seguenti passaggi:

1. Separare le variabili
2. Integrare ciascun membro
3. Ricavare $y(x)$

Esempio.

$$y' = y^2 \ln(x) \frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x) \implies \frac{dy}{y^2} = \ln(x) dx$$

Posso spezzare dx e dy .

Ora integro.

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \ln(x) dx \implies \frac{-1}{y} = x \ln(x) + c$$

Esplicito la y

$$y(x) = \frac{1}{x \ln(x) - x + c}$$

Se trovo un t tale che $g(t) = 0$ allora $y(x) = t$ è anche soluzione.

5.1.3 Equazioni differenziali lineari

Vediamo per ora quelle del primo ordine, cioè nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Procediamo nel seguente modo:

1. Calcolo la primitiva di $a(x) = A(x)$
2. Moltiplico entrambi i membri per $e^{A(x)}$. Quindi a sinistra ho $[y(x)e^{A(x)}]'$
3. Integro entrambi i membri. $y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)} dx + c$
4. Moltiplico sia a destra che a sinistra per $e^{-A(x)}$. Ottengo $y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx + c$

Esempio.

$$y'(x) - xy(x) = 2x$$

$$a(x) = -x, f(x) = 2x$$

$$\text{Calcolo } \int a(x) = \frac{-x^2}{2}$$

Moltiplico tutto per $e^{\frac{-x^2}{2}}$

Otengo quindi

$$y(x) \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \int 2x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} dx + c$$

Moltiplico per $e^{-A(x)}$.

Otengo

$$y(x) = -2 + c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Teorema (Soluzione generale).

$$y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

5.2 Problema di Cauchy

Definiamo problema di Cauchy un sistema del tipo

$$\begin{cases} \text{Equazione differenziale} \\ \text{Condizioni iniziali} \end{cases}$$

Esempio.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$
$$y = e^{-x} + c$$

Quindi sostituisco $y = f(x)$ e $x = 0$

$$3 = e^{-0} + c \rightarrow c = 2$$

Quindi $y(x) = e^{-x} + 2$ è la soluzione al problema di Cauchy.

5.2.1 Esistenza ed unicità della soluzione

Supponiamo di avere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ g(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora:

- Se $f(x, y)$ è continua allora esiste almeno una soluzione.
- Se $f_y(x, y)$ è continua allora esiste una ed una sola soluzione.

Capitolo 6

Funzioni a due variabili

6.1 Insieme aperti e chiusi

Definizione (Insieme aperto). Un insieme A è aperto se per ogni $x \in A$ (ed un $r > 0$) esiste l'intorno $B_r(x) \subseteq A$.

Esempio (Insieme aperto). $x^2 + y^2 < 1$

Definizione (Insieme chiuso). Un insieme è chiuso se è il complementare di un insieme aperto.

Esempio (Insieme chiuso). $x^2 + y^2 \geq 1$

6.2 Generalità

6.3 Limiti

Diciamo che $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ se:

- ogni intorno di (a,b) contiene altri punti del dominio di f , differenti da (a,b)
- per ogni numero positivo ϵ esiste un numero positivo $\delta(\epsilon)$ tale che $|f(x,y) - L| < \epsilon$ vale ogni volta che (x,y) è nel dominio di f e soddisfa $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

6.3.1 Proprietà dei limiti

Sia $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$. Valgono allora le seguenti proprietà:

- Se il limite esiste, esso è unico.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ purché $M \neq 0$

6.4 Continuità

Una funzione $f(x,y)$ si dice continua in un punto (x_0, y_0) se:

- È definita in (x_0, y_0)
- Esiste il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ ed è uguale a $f(x_0, y_0)$

Quindi non è detto che se esiste il limite di una funzione in un punto allora la funzione è definita in quel punto.

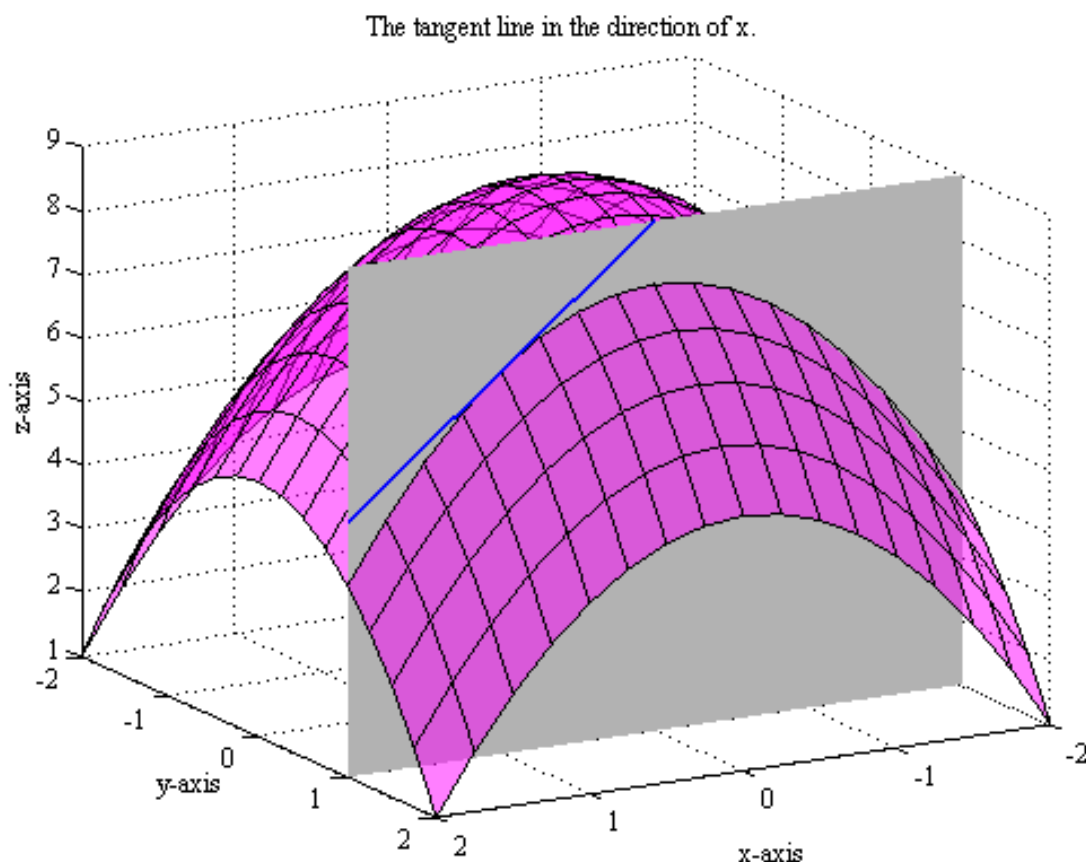
6.5 Derivabilità

6.5.1 Derivata in \mathbb{R}

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

6.5.2 Derivate Parziali

Calcolate solo rispetto all'asse x o all'asse y .



Limite di un quoziente di Newton rispetto a una delle due variabili.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

6.5.3 Derivata direzionale

Ci forniscono la rapidità di variazione di $f(x, y)$ lungo una generica direzione (a, b) .

Calcolata rispetto ad una qualsiasi retta/direzione.

Fissato un qualunque vettore $v = (v_1, v_2)$ posso calcolare:

$$f_v(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + v_1 h, b + v_2 h) - f(a, b)}{h}$$

La derivata direzionale è anche uguale a

$$\nabla f(a, b) \circ V$$

6.5.4 Sviluppo di Taylor

Rappresenta la migliore funzione polinomiale di grado n che approssima la funzione f in un intorno di (x_0, y_0) .

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

6.6 Piano tangente

6.6.1 Vettore normale in un punto

$$\mathbf{n} = f_x(a, b)\mathbf{i} + f_y(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

6.6.2 Piano tangente

Il piano tangente che passa per $P = (a, b, f(a, b))$ è

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

cioè

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

6.7 Linearizzazione

6.7.1 In \mathbb{R}

La retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $x = a$ fornisce un' approssimazione dei valori di $f(x)$ per x vicino ad a

$$f(x) \sim L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

6.7.2 In \mathbb{R}^2

Il piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ in (a, b) è $z = L(x, y)$ dove

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

è la linearizzazione di $f(x, y)$ in (a, b) . La funzione $L(x, y)$ può essere usata per approssimare i valori di $f(x, y)$ vicino a (a, b) :

$$f(x, y) \sim L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

6.8 Differenziabilità

6.8.1 Differenziabilità in \mathbb{R}

Una funzione f è differenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

per $h \rightarrow 0$.

6.8.2 Generalità

Si dice che la funzione $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) se vale che:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - hA - kB}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

dove $A = f_x(x_0, y_0)$ e $B = f_y(x_0, y_0)$

6.8.3 Condizioni per la differenziabilità

Per essere differenziabile una funzione deve essere continua e deve ammettere derivate parziali in (a, b) lungo ogni direzione $V \in \mathbb{R}^2$ (e quindi anche le derivate parziali).

Una funzione è differenziabile se e solo se la superficie $z = f(x, y)$ ha un piano tangente non verticale in (a, b) .

6.9 Gradiente

Chiamiamo $\nabla f(x_0, y_0)$ il gradiente della funzione f calcolato in (x_0, y_0) .

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Il vettore gradiente calcolato in un punto è anche detto **differenziale** della funzione in quel punto.

6.9.1 Interpretazione geometrica

Per quali versori di V la derivata direzionale risulta Massima o Minima?

$$f_V(x_0) = |\nabla f(x_0)| \cdot |v| \cdot \cos(\theta)$$

Visto che stiamo trattando versori allora $|v| = 1$.

Quindi è la derivata direzionale è massima per $\cos(\theta) = 1 \implies \theta = 0$

Quindi è la derivata direzionale è minima per $\cos(\theta) = 0 \implies \theta = \pi$

La direzione del gradiente calcolato in un punto indica la retta seguendo la quale si trova il massimo incremento della funzione f nell'intorno del punto in cui è calcolato.

6.9.2 Differenziale

Se le derivate prime esistono, possiamo definire il differenziale: il differenziale di una funzione quantifica la variazione infinitesimale della funzione rispetto ad una variabile indipendente.

6.10 Matrice Jacobiana

La matrice jacobiana di una funzione è la matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione. La sua importanza è legata al fatto che, nel caso la funzione sia differenziabile, la jacobiana rappresenta la migliore approssimazione lineare della funzione vicino a un punto dato.

Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione definita su un insieme aperto U dello spazio euclideo \mathbb{R}^n . La matrice jacobiana della funzione Jf in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è la matrice delle derivate parziali prime della funzione calcolate in \mathbf{x} :

$$Jf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (Jf)_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

6.11 Funzione omogenea

Definizione. Una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ è detta *positivamente omogenea di grado k* se, per ogni punto (x_1, \dots, x_n) del suo dominio e qualunque numero reale $t > 0$ si ha

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

6.11.1 Esempi

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

6.12 Valori Estremi

6.12.1 Punti a cui prestare attenzione

- Punti critici (detti anche stazionari) in cui $\nabla f(a, b) = 0$
- Punti singolari, punti in cui $\nabla f(a, b)$ non esiste
- Punti di contorno del dominio di f

6.12.2 Classificazione formale

Se (a, b) è punto critico allora guardo il segno di

$$\delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

6.12.3 Classificazione tramite matrice hessiana

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Sia $P = (a, b)$ un punto stazionario per f . Allora valgono le seguenti:

- Se $H(a, b)$ è definita positiva, allora f ha un minimo locale in P
- Se $H(a, b)$ è definita negativa, allora f ha un massimo locale in P
- Se $H(a, b)$ è indefinita, allora f ha un punto di sella in P
- Se $H(a, b) = 0$, allora questo test è inconcludente

Capitolo 7

Integrali doppi

7.1 Generalità

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$$

A è l'insieme (zona) di integrazione ed è un **sottoinsieme limitato** del piano.

$f(x, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata. Esiste cioè un M tale che $|f(x, y)| \leq M \, \forall (x, y) \in A$.

7.2 Significato geometrico

7.2.1 In \mathbb{R}

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

L'integrale è interpretabile geometricamente come l'area con segno della parte di piano sottesa dalla funzione $f(x)$.

7.2.2 In \mathbb{R}^2

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$$

Se $f(x, y) \geq 0$ allora l'integrale è il volume della parte di spazio compresa tra il piano xy ed il grafico di $f(x, y)$, limitata dalle *pareti verticali* che si proiettano sul bordo di A .

Altrimenti, se $f(x, y)$ ha segno variabile in A , "le parti" al di sotto del piano xy contano con il segno $-$.

7.3 Definizione

7.3.1 Funzioni costanti su un rettangolo

$$A = [a, b] \times [c, d]$$

Cioè A è un rettangolo delimitato dai lati ab e cd .

$f(x, y) = \lambda$, cioè una costante.

Quindi l'integrale è semplicemente

$$\lambda \cdot (b - a) \cdot (d - c)$$

ovvero il volume con segno del parallelepipedo.

7.3.2 Funzioni costanti su più rettangoli

Sia A un'unione disgiunta di rettangoli (intuitivamente come tanti grattacieli uno vicino all'altro).

$f(x, y)$ è costante all'interno di ciascun rettangolo, ma può variare da rettangolo a rettangolo.

$$f(x, y) = \lambda_i \quad \forall (x, y) \in \text{Rett}_i.$$

Quindi l'integrale è

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \text{Area}(\text{Rett}_i)$$

7.3.3 Funzioni non costanti su un rettangolo

Sia D un rettangolo chiuso, con lati paralleli agli assi, $f(x, y)$ è una funzione qualsiasi definita sul dominio D .

Supponiamo che D vari tra a e b sull'asse x e tra c e d sull'asse y .

Possiamo quindi partizionare il dominio in dei rettangoli più piccoli, individuando dei punti in questo modo:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d$$

In sostanza si individuano $m \cdot n$ rettangoli Rett_{ij} .

L'area di ogni rettangolo è

$$\delta A_{ij} = \delta x_i \delta y_j$$

La lunghezza della diagonale è

$$\sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_j)^2}$$

Scelto un punto arbitrario (x_{ij}, y_{ij}) in ciascuno dei rettangoli individuati la somma di Riemann:

$$R(f, P_{\text{artizione}}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \delta A_{ij}$$

In sostanza base per altezza di un parallelepipedo.

Facendo il limite

$$\lim_{(n,m) \rightarrow (\infty, \infty)} R(f, P_{\text{artizione}})$$

otteniamo l'integrale doppio di f su D , cioè il volume sopra D e sotto il grafico di f .

7.4 Funzioni integrabili

Definizione. Si dice che f è integrabile sul rettangolo D e che ha integrale doppio

$$I = \iint_D f(x, y) \, dA$$

se, per ogni numero positivo ϵ , esiste un numero $\gamma(\epsilon)$ tale che

$$R(f, P) - I < \epsilon$$

vale per ogni P di D tale che $|P| < \gamma$ e per tutte le scelte di punti (x_{ij}, y_{ij}) .

Proprietà. Se una funzione è continua su D allora è integrabile su D . Ovviamente, non è detto che se f è integrabile allora è continua.

7.5 Integrali doppi su domini generali

Potrebbe anche essere necessario calcolare un integrale su un dominio D che non è un rettangolo ma un'area qualunque del piano.