1 | Proprietà delle relazioni

Una **relazione binaria** R (con Dominio S) puo' soddisfare le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**, cioè $\langle x, x\rangle \in R$ per ogni $x \in S$, cioè ogni x è in relazione con se stesso
- **Irriflessiva**, cioè $\langle x, x\rangle \notin R$ per ogni $x \in S$, cioè nemmeno un x è in relazione con se stesso
- **Simmetrica**, cioè ogni volta che esite $\langle x, y\rangle \in R$ esiste anche $\langle y, x\rangle \in R$
- **Asimmetrica**, cioè ogni volta che eiste $\langle x, y\rangle \in R$ non esiste mai $\langle y, x\rangle \in R$
- **Antisimmetrica**, cioè che se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, x\rangle \in R$ possiamo dire che $x = y$

- **Transitiva**, cioè se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle y, z\rangle inR$ c'è anche $\langle x, z\rangle \in R$

1.1 Chiarimenti sulla proprietà Antisimmetrica

Se x in relazione con y e y in relazione con x allora $x = y$

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'" la relazione non e' antisimmetrica: infatti se Maria abita nella stessa citta' di Carlo e Carlo abita nella stessa citta' di Maria non segue che Carlo e' uguale a Maria

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a" La relazione e' antisimmetrica perche' perche' se un numero e' maggiore od uguale ad un secondo numero ed il secondo e' maggiore uguale del primo allora i due numeri sono uguali

Nella rappresentazione a Grafi si capisce che è antisimmetrica perchè ha cicli di lunghezza massima 1 (Solo cappi ammessi)

1.2 Proposizioni derivate dalle proprietà

Dalla *riflessiva*:

- Se R è riflessiva anche R^{-1} (l'inversa) è riflessiva
- R è riflessiva se e solo se $\bar{R}$ è irriflessiva
- Se R e R' sono riflessive anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive

Dalla *simmetrica*:

- R è simmetrica se e solo se $R = R^{-1}$
- se R è simmetrica anche R^{-1} e $\bar{R}$ sono simmetriche
- se R e R' sono simmetriche anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche

Dall' *antisimmetrica*:

- R è antisimmetrica se e solo se $R \cap R^{-1} \subseteq \varphi S$
- R è antisimmetrica se e solo se $R \cup R^{-1} = \emptyset$

Dalla *transitiva*:

- Se R e R' sono transitive anche $R \cap R'$ è transitiva

2 | Metodi di rappresentazione delle relazioni

2.1 Tabella

Le **relazioni n-arie** (cioè di *arietà pari a n*) possono essere *sempre* rappresentate mediante una **tabella**. La tabella ha n colonne. In particolare se la relazione da rappresentare (che chiamiamo R) è un sottoinsieme del prodotto cartesiano S *todo*

2.2 Matrice

Operazioni su Matrici Booleane

2.3 grafo bipartito

2.4 Grafo orientato

Con **grafo orientato** (o grafo *diretto* o *disgrafo*) intendiamo un metodo di rappresentare una relazione binaria G definitia su un solo insieme V tale che $G \subseteq V \times V$.

Un grafo viene generalmente raffigurato sul piano da punti, che rappresentano i nodi; archi o spigoli sono rappresentati da segmenti o curve che
collegano due nodi. In questo caso, il posizionamento dei nodi e la forma degli archi o spigoli è irrilevante, dal momento che a contare sono solo i nodi e le relazioni tra essi. In altri termini, lo stesso grafo può essere disegnato in molti modi diversi senza modificarne le proprietà.

2.4.1 Nodi e archi

Gli elementi di V sono detti **nodi** (o vertici), gli elementi di G sono detti **archi**.

Un arco che va da vi a vj si dice **uscente** da vi ed **entrante** in vj, o più generalmente **incidente** da vi a vj (e quindi vi e vj sono detti **adiacente** tra loro).

Il **numero di archi uscenti** da un nodo è detto il **grado di uscita** del nodo. Il **numero di archi entranti** da un nodo è detto il **grado di entrata** del nodo.

Nodo Sorgente se non ha archi entranti. **Nodo Pozzo** se non ha archi uscenti.

Aggiungere cose sulle matrici

Un nodo è detto **isolato** se non ha archi entranti o uscenti.

2.4.2 Cammini e cicli

Un **cammino** tra due nodi vin e $vfin$ è una sequenza finita di nodi $\langle vin, v2, v3, ..., vfin\rangle$ dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco uscente dal primo ed entrante nel secondo.

Un **semicammino** tra due nodi vin e $vfin$ è una sequenza finita di nodi $\langle vin, v2, v3, ..., vfin\rangle$ dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco di direzione arbitraria.

Si dice **lunghezza** di un cammino il numero di archi che lo compongono. La lunghezza di un cammino è uguale al numero di nodi che lo compongono meno 1.

Un grafo si dice **connesso** se dati due nodi qualunque **esiste sempre** un **semicammino** che li connette. Un grafo si dice **fortemente connesso** se dati due nodi qualunque **esiste sempre** un **cammino** che li connette.

Un **ciclo** intorno ad un nodo v di un grafo è un cammino in cui $v = vin = vfin$ Un **semiciclo** intorno ad un nodo v di un grafo è un semicammino in cui $v = vin = vfin$.

Se il **ciclo di lunghezza 1** esso viene chiamato **cappio**, che è un arco che esce dal nodo per poi subito rientrare.

Il minimo numero di archi che compongono un cammino tra due nodi vin e $vfin$ è detta distanza tra i due nodi.

2.4.3 Grafo etichettato

Un **grafo etichettato** è una funzione che **associa ad ogni arco** del grafo **un'etichetta**, cioè una sorta di nome.v

2.4.4 Grafo completo

Si ha un grafo completo quando ogni coppia di vertici del grafo ha un arco che li unisce.

2.4.5 Grafi e proprietà delle relazioni

G è una relazione binaria.

- Se G è **riflessiva** allora il grafo di G avrà un **cappio intorno ad ogni nodo**. Similmente se G è **irriflessiva** non c'è **mai un cappio nel grafo** associato.
- Se G è **simmetrica** allora ogni volta che nel grafo c'è un arco tra due nodi c'è anche quello che va in direzione opposta. Similmente se è **asimmetrica** se un arco congiunge due nodi non c'è mai il suo opposto.
- Se G è **transitiva** allora ogni volta che nel grafo associato abbiamo una situazione $v1- > v2, v2- > v3$ (si potrebbe dire che ci sono archi di fila tra tre nodi) ci sarà per forza anche un arco che collega v1 a v3 (che chiude il triangolo v1,v2,v3).

3 | Relazioni Particolari

3.1 DAG

Chiamiamo **DAG** (o "Grafo Diretto Aciclico") un **grafo diretto senza cicli**.

Un DAG è riconoscibile perchè nella sua rappresentazione **gli archi vanno tutti verso una sola direzione** e non essendoci cicli non possono andare nella direzione opposta.

Ad esempio tutti gli archi uscenti dai vari nodi puntano ad elementi disposti graficamente piu' in basso.

L'esempio più comune di DAG è dato dalla particolare relazione che chiamiamo **alberi**.

3.2 Alberi

Un **albero** è un DAG connesso che ha un solo node sorgente (che per comodità chiamiamo **radice**). Tutti i nodi dell'albero, ad eccezione della radice, hanno **uno ed un solo arco entrante**. **La radice non ha archi entranti ma solo archi uscenti**. I nodi di un albero possono avere **da 0 a N archi uscenti**. I nodi con 0 archi uscenti sono detti **foglie** dell'albero.

Un particolare tipo di albero è l'**albero binario**, particolare relazione per cui **ogni nodo ha al massimo 2 nodi figli** che per comodità denominiamo **figlio destro** e **figlio sinistro**

Graficamente, quando disegnamo un albero, è possibile evitare di disegnare le frecce che connettono i nodi: infatti riconoscere la radice è semplice, basta trovare il nodo che non ha archi entranti. Una volta trovata la radice si sa che, essendo l'albero un DAG, tutti gli archi che "coinvolgono" un nodo vanno nella stessa direzione e mai nel senso opposto degli altri. Non ci sono quindi ambiguità. E' generalmente consigliabile mettere le frecce nel disegnare gli alberi.

Preso un nodo dell'albero possiamo determinare la sua **profondità** all'interno dell'albero: il numero di archi necessari per andare dalla radice dell'albero al nodo stesso.

Si dice invece **altezza** di un albero il valore di profondità massima raggiungibile dai nodi degli alberi, cioè la distanza massima che c'è da una foglia, tra tutte le foglie, e la radice dell'albero.

3.3 Relazioni di Equivalenza

Diciamo che R è una **relazione di equivalenza** su un insieme S se e solo se R è **binaria su** S**, riflessiva, simmetrica e transitiva**.

3.3.1 Esempio

Un esempio di relazione di equivalenza è data dalla seguente.

$R = \langle a, b \rangle Z | a^2 = b^2$

Essa infatti è:

- *binaria* (ci sono due "termini" coinvolti nella relazione, a e b)
- *riflessiva* ($n^2 = n^2$ per ogni nZ)
- *simmetrica* (se $n^2 = m^2$ anche $m^2 = n^2$ per ogni m, nZ)
- *transitiva* (se $n^2 = o^2$ e $m^2 = o^2$ allora $n^2 = o^2$ per ogni m, n, oZ)

3.3.2 Classe di Equivalenza

Data una relazione di equivalenza R su un insieme S, la **classse di equivalenza** di un elemento xS è definita come

$[x] = y | \langle x, y \rangle R$

Cioè la **classe di equivalenza** di un elemento xR è **l'insieme degli elementi di** R **con cui** x **si relaziona**.

Se R è una relazione di equivalenza su S allora le classi di equivalenza generate da R partizionano S. (Vedere i capitoli precedenti per la definizione di *classe di equivalenza*).

3.4 Relazioni Composte

Date due relazioni $R1$ e $R2$ con $R1$ definita su $S \times T$ e $R2$ definita su $T \times Q$ è possibile definire una nuova relazione che chiamiamo di composizione tra $R1$ e $R2$ su $S \times Q$ tale che $\langle a, c \rangle R2 \circ R1$ se e solo se esiste un bT tale che $\langle a, b \rangle R1$ e $\langle b, c \rangle R2$.

$R2 \circ R1$ è detta composizione di $R1$ e $R2$.

Aggiungere considerazioni sul dominio

3.4.1 Proprietà della composizione

Scrivere $R2 \circ R1$ è diverso dallo scrivere $R1 \circ R2$, **la composizione non è un'operazione commutativa**.

La composizione è un'**operazione è associativa**.

Prese due relazioni $R1$ e $R2$ con $R1$ definita su $S \times T$ e $R2$ definita su $T \times Q$, si ha che $(R1 \circ R2)^{-1} = R1^{-1} \circ R2^{-1}$.

4 | Strutture Relazionali

Definiamo una *struttura relazionale* (SR) come una n-upla ($\langle ... \rangle$) in cui il primo elemento è un insieme non vuoto S, chiamato dominio o universo di SR, e i rimanenti elementi sono relazioni (che possono avere arietà varia) definite su S.

I casi da noi studiati sono solitamente caratterizzati dall'avere un insieme S (richiesto per definizione) ed una sola relazione associata, generalmente binaria.

4.0.2 Esempio

Insieme Universo

U = Insieme N (dei numeri naturali)

Relazioni

$R1 = n2 = m$ = relazione che associa ad ogni numero il suo quadrato

$R2 = n + m = o$ = relazione che associa a due numeri la loro somma

$SR = \langle U, R1, R2 \rangle$

4.1 Strutture Relazionali Notevoli

4.1.1 Preordine

Un **preordine** è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R \rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione **binaria**, **riflessiva** e **transitiva** su S

4.1.2 Quasi-ordine

Un **quasi-ordine** è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R \rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione **binaria**, **irriflessiva** e **transitiva** su S.

4.1.3 Poset

Un **poset** (chiamato anche *ordine parziale* o *semiordinamento*) è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R \rangle$ in cui S è un insieme e R è una relazione **binaria**, **riflessiva**, **antisimmetrica** e **transitiva**.

4.1.4 Ordinamento

Particolare semiordinamento che esiste se e solo se per ogni x, yS una ed una sola delle seguenti condizioni è soddisfatta:

- $ x = y $
- $ € R $
- $ € R $

Detto semplicemente, in un ordinamento **presi due elementi** dell'insieme di partenza/universo **questi sono confrontabili**: posso dire se sono ugali o chi è il maggiore e il minore tra i due.

L'ordinamento prende anche il nome di **ordine totale**.

4.1.5 Buon Ordinamento

todo

4.1.6 Oridini Totali vs Ordini Parziali

Possiamo facilmente distingurere tra un poset (ordine parziale) e un ordinamento (ordine totale) osservando la rappresentazione del grafo associato ad entrambe le strutture. Nel caso di un ordine totale tutti gli elementi della struttura relazionale sono collegati e confrontabili tra loro, cosa che non è vera per gli ordini parziali, in cui alcuni elementi sono completamente isolati dagli altri.

4.2 Reticoli

I reticoli sono poset in cui per ogni coppia di $\langle x, y \rangle S$ esistomo un mimino maggiorante e un massimo minorante.

5 | Poset

5.1 Definizione

Un **poset** (chiamato anche *ordine parziale* o *semiordinamento*) è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R \rangle$ in cui S è un insieme e R è una relazione **binaria**, **riflessiva**, **antisimmetrica** e **transitiva**.

5.2 Rappresentazione grafica

Rappresentato il grafo di un poset ci si accorge di alcune caratteristiche distintive:

- il grafo di un poset non ha cicli di lunghezza maggiore di 1 (antisimmetria della relazione)
- ma più precisamente il grafo ha solo cicli di lunghezza 1 (antisimmetria della relazione e riflessività)

La rappresentazione classica ha pero' degli elementi superflui, non necessariamente utili alla comprensione del poset e che la rendono pesante da disegnare e comprendere.

Per risolvere tale problema vengono in aiuto i **Diagrammi di Hasse** particolari rappresentazioni di Poset basate su delle convenzioni comuni.

In particolare:

- si eliminano i cappi dalla rappresentazione, si sa a prescindere che esistono visto che si sta lavorando con un poset (riflessivo)
- si eliminano gli archi della transitività, come sopra, sono superflui, se $a- > beb- > c$ non rappresentiamo l'arco $a- > c$ anche se per definizione dovrebbe esserci. Tale operazione è chiamata riduzione transitiva.
- eliminiamo completamente le frecce che indicano la direzione degli archi rimasti. Se dobbiamo rappresentare $\langle a, b \rangle$ metteremo a più in basso di b, in modo che tutte le

eventuali frecce puntassero verso l'alto.

In conclusione:

- gli unici archi che rimangono sono quelli che indicano le coperture tra gli elementi

5.2.1 Copertura

Il concetto di copertura torna particolarmente utile quando si disegnano i diagrammi di Hasse, ma non per questo è limitato solo ad essi.

Diamo per prima cosa una definizione generica.

Presi tre elementi diversi x, y, z appartenenti alla relazione R. Si dice che y è una copertura di x se $\langle x, y \rangle R$ (cioè se x è in relazione con y) e allo stesso tempo non esiste che $ € R& e non esiste che $ € R&.

A parole potremmo dire che x$ è copertura di y se non esiste z che si mette in mezzo tra il confronto di x e y.

A partire da un grafo, per ottenre tutte le possibili coperture basta fare l'operazione di riduzione transitiva.

Esempio

$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

R è espressa dalla proprietà $\langle x, y \rangle$ tale che x è divisibile per y

Quindi 4 è copertura di 8.

Come anche 2 è copertura di 4.

2 pero' non è copertura di 8, perchè anche se 8 è divisibile per 2, esiste comunque 4 (che sta in mezzo tra il 2 e l'8) che è divisore (e copertura) di 8.

5.3 Elementi estremali

In un poset è possibile individuare alcuni particolari elementi che godono di determinate proprietà chiamati elementi estremali.

5.3.1 Minimale e Massimale

Dato un poset S, s_min è detto elemento minimale di S se per ogni elemento $s'S$ $s\_min < s'$.

Dato un poset S, s_max è detto elemento massimale di S se per ogni elemento $s'S$ $s\_max > s'$.

Dato un poset S, esiste almeno un elemento massimale e uno minimale.

5.3.2 Minorante e Maggiorante

Dato un poset S e un sottoinsieme $A \subseteq S$, è detto **minorante** di A un elemento di $SS tale che per ogni aA $s \leq x$. Possono esistere piu' minoranti.

Dato un poset S e un sottoinsieme $A \subseteq S$, è detto **maggiorante** di A un elemento di $SS tale che per ogni aA $s \geq x$. Possono esistere piu' maggioranti.

5.3.3 Massimo Minorante e Minimo Maggiorante

Dato un poset S e un sottoinsieme $A \subseteq S$, è detto massimo minorante (greatest lower bound) di A un elemento di $SS che è minorante di A ed è maggiore o uguale di tutti gli altri minoranti di A.

Dato un poset S e un sottoinsieme $A \subseteq S$, è detto minimo maggiorante (least upper bound)di A un elemento di $SS che è maggiorante di A ed è minore o uguale di tutti gli altri maggioranti di A.

Dao un poset S, ogni $sottoinsime $A \subseteq S$ ha al massimo un minimo maggiorante e un massimo minorante.

5.3.4 \leq-massimo e \leq-minimo

E' detto $\leq$-massimo l'elemento $\geq$ di tutti gli altri elementi di un poset S.

E' detto $\leq$-minimo l'elemento $\leq$ di tutti gli altri elementi di un poset S.

Dato un poset s, esiste al piu un $\leq$-minimo e un $\leq$-massimo.

6 | Reticoli

6.1 Definizione

I reticoli sono poset in cui per ogni coppia di $\langle x, y \rangle S$ esistomo un mimino maggiorante (che chiamiamo $join$ e che indichiamo con il simbolo $\sqcup$) e un massimo minorante (che chiamiamo meet e che indichiamo con il simbolo $\sqcap$).

6.2 Proprietà e proposizioni dei reticoli

6.2.1 Complemento di un elemento

Preso un reticolo L, un elemento $a' L$ è detto complemento di aL se a e a' hanno lo stesso meet e join. (Il libro dice se hanno lo stesso minimo minorante e massimo maggiorante)

6.3 Reticoli particolari

6.3.1 Reticolo Completo

Si chiama reticolo completo un reticolo L in cui ogni sottoinsieme A di L ha un minimo maggiorante (non vuoto) e un massimo minorante (non vuoto).

6.3.2 Reticolo Limitato

Si chiama reticolo limitato un reticolo L in cui esiste un elemento massimo ed uno minimo.

6.3.3 Reticolo distributivo

Si chiama reticolo distributivo un reticolo L in cui per ogni terna di elementi x, y, zL valgono le seguenti proprietà, che chiamiamo distributive:

- $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$
- $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

7 | Induzione

L'induzione è un metodo di ragionamento che è utile per:

- Verificare proprietà di strutture di dati
- Definire strutture dati
- Definire procedimenti di calcolo su strutture dati attraverso la ricorsione

7.1 Definizione

7.1.1 Principio di Induzione Matematica

Sia $A(n)$ una asserzione (proprietà da verificare) per ogni elemento dell'insieme dei numeri naturali N. Supponendo che:

- $A(n)$ è vera
- per ogni kN, se A(k) é vera, allora è vera anche $A(k+1)$

Allora per ogni nN, $A(n)$ è vera.

7.1.2 Principio di Induzione Matematica Completo

Sia $A(n)$ una asserzione (proprietà da verificare) per ogni elemento dell'insieme dei numeri naturali N. Supponendo che:

- $A(n)$ è vera
- per ogni mN, se A(k) é vera per ogni k, con $0 < k < m$, ne segue che è vera A(m)

Allora per ogni $nNen > 0$, $A(n)$ è vera.

7.2 Esempi di Dimostrazione per Induzione

7.3 Dichiarazione di insiemi tramite l’induzione