1 | Proprietà delle relazioni

Una **relazione binaria** R (con Dominio S) puo' soddisfare le seguenti proprietà:

- **Riflessiva**, cioè $\langle x, x \rangle \in R$ per ogni $x \in S$, cioè ogni x è in relazione con se stesso
- **Irriflessiva**, cioè $\langle x, x \rangle \notin R$ per ogni $x \in S$, cioè nemmeno un x è in relazione con se stesso
- **Simmetrica**, cioè ogni volta che esite $\langle x, y \rangle \in R$ esiste anche $\langle y, x \rangle \in R$
- **Asimmetrica**, cioè ogni volta che eiste $\langle x, y \rangle \in R$ non esiste mai $\langle y, x \rangle \in R$
- **Antisimmetrica**, cioè che se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$ possiamo dire che $x = y$

- **Transitiva**, cioè se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, z \rangle inR$ c'è anche $\langle x, z \rangle \in R$

1.1 Chiarimenti sulla proprietà Antisimmetrica

Se x in relazione con y e y in relazione con x allora $x = y$

Considero l'insieme degli abitanti dell'Italia e considero la relazione "abita nella stessa citta'" la relazione non e' antisimmetrica: infatti se Maria abita nella stessa citta' di Carlo e Carlo abita nella stessa citta' di Maria non segue che Carlo e' uguale a Maria

Considero i numeri naturali e considero la relazione "e' maggiore od uguale a" La relazione e' antisimmetrica perche' perche' se un numero e' maggiore od uguale ad un secondo numero ed il secondo e' maggiore uguale del primo allora i due numeri sono uguali

Nella rappresentazione a Grafi si capisce che è antisimmetrica perchè ha cicli di lunghezza massima 1 (Solo cappi ammessi)

1.2 Proposizioni derivate dalle proprietà

Dalla *riflessiva*:

- Se R è riflessiva anche R^{-1} (l'inversa) è riflessiva
- R è riflessiva se e solo se $\bar{R}$ è irriflessiva
- Se R e R' sono riflessive anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive

Dalla *simmetrica*:

- R è simmetrica se e solo se $R = R^{-1}$
- se R è simmetrica anche R^{-1} e $\bar{R}$ sono simmetriche
- se R e R' sono simmetriche anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche

Dall' *antisimmetrica*:

- R è antisimmetrica se e solo se $R \cap R^{-1} \subseteq \varphi S$
- R è antisimmetrica se e solo se $R \cup R^{-1} = \emptyset$

Dalla *transitiva*:

- Se R e R' sono transitive anche $R \cap R'$ è transitiva

2 | Metodi di rappresentazione delle relazioni

2.1 Tabella

Le **relazioni n-arie** (cioè di *arietà pari a n*) possono essere *sempre* rappresentate mediante una **tabella**. La tabella ha n colonne. In particolare se la relazione da rappresentare (che chiamiamo R) è un sottoinsieme del prodotto cartesiano S *todo*

2.2 Matrice

Operazioni su Matrici Booleane

2.3 Grafi

Con **grafo orientato** (o grafo *diretto* o *disgrafo*) intendiamo un metodo di rappresentare una relazione binaria G definitia su un solo insieme V tale che $G \subseteq V \times V$.

2.3.1 Nodi e archi

Gli elementi di V sono detti **nodi** (o vertici), gli elementi di G sono detti **archi**.

Un arco che va da vi a vj si dice **uscente** da vi ed **entrante** in vj.

Il **numero di archi uscenti** da un nodo è detto il **grado di uscita** del nodo. Il **numero di archi entranti** da un nodo è detto il **grado di entrata** del nodo.

Nodo Sorgente se non ha archi entranti. **Nodo Pozzo** se non ha archi uscenti.

Aggiungere cose sulle matrici

Un nodo è detto **isolato** se non ha archi entranti o uscenti.

2.3.2 Cammini e cicli

Un **cammino** tra due nodi vin e $vfin$ è una sequenza finita di nodi $\langle vin, v2, v3, ..., vfin\rangle$ dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco uscente dal primo ed entrante nel secondo.

Un **semicammino** tra due nodi vin e $vfin$ è una sequenza finita di nodi $\langle vin, v2, v3, ..., vfin\rangle$ dove ciascun nodo è collegato al successivo da un arco di direzione arbitraria.

Si dice **lunghezza** di un cammino il numero di archi che lo compongono. La lunghezza di un cammino è uguale al numero di nodi che lo compongono meno 1.

Un grafo si dice **connesso** se dati due nodi qualunque **esiste sempre** un **semicammino** che li connette. Un grafo si dice **fortemente connesso** se dati due nodi qualunque **esiste sempre** un **cammino** che li connette.

Un **ciclo** intorno ad un nodo v di un grafo è un cammino in cui $v = vin = vfin$ Un **semiciclo** intorno ad un nodo v di un grafo è un semicammino in cui $v = vin = vfin$.

Se il **ciclo di lunghezza 1** esso viene chiamato **cappio**, che è un arco che esce dal nodo per poi subito rientrare.

2.3.3 Grafo etichettato

Un **grafo etichettato** è una funzione che **associa ad ogni arco** del grafo **un'etichetta**, cioè una sorta di nome.v

2.3.4 Grafi e proprietà delle relazioni

G è una relazione binaria.

- Se G è **riflessiva** allora il grafo di G avrà un **cappio intorno ad ogni nodo**. Similmente se G è **irriflessiva** non c'è **mai un cappio nel grafo** associato.
- Se G è **simmetrica** allora ogni volta che nel grafo c'è un arco tra due nodi c'è anche quello che va in direzione opposta. Similmente se è **asimmetrica** se un arco congiunge due nodi non c'è mai il suo opposto.
- Se G è **transitiva** allora ogni volta che nel grafo associato abbiamo una situazione $v1- > v2, v2- > v3$ (si potrebbe dire che ci sono archi di fila tra tre nodi) ci sarà per forza anche un arco che collega v1 a v3 (che chiude il triangolo v1,v2,v3).

3 | Relazioni Particolari

3.1 DAG

Chiamiamo **DAG** (o "Grafo Diretto Aciclico") un **grafo diretto senza cicli**.

Un DAG è riconoscibile perchè nella sua rappresentazione **gli archi vanno tutti verso una sola direzione** e non essendoci cicli non possono andare nella direzione opposta.

Ad esempio tutti gli archi uscenti dai vari nodi puntano ad elementi disposti graficamente piu' in basso.

L'esempio più comune di DAG è dato dalla particolare relazione che chiamiamo **alberi**.

3.2 Alberi

Un **albero** è un DAG connesso che ha un solo node sorgente (che per comodità chiamiamo **radice**). Tutti i nodi dell'albero, ad eccezione della radice, hanno **uno ed un solo arco entrante**. **La radice non ha archi entranti ma solo archi uscenti**. I nodi di un albero possono avere **da 0 a N archi uscenti**. I nodi con 0 archi uscenti sono detti **foglie** dell'albero.

Un particolare tipo di albero è l'**albero binario**, particolare relazione per cui **ogni nodo ha al massimo 2 nodi figli** che per comodità denominiamo **figlio destro** e **figlio sinistro**

Graficamente, quando disegnamo un albero, è possibile evitare di disegnare le frecce che connettono i nodi: infatti riconoscere la radice è semplice, basta trovare il nodo che non ha archi entranti. Una volta trovata la radice si sa che, essendo l'albero un DAG, tutti gli archi che "coinvolgono" un nodo vanno nella stessa direzione e mai nel senso opposto degli altri. Non ci sono quindi ambiguità. E' generalmente consigliabile mettere le frecce nel disegnare gli alberi.

3.3 Relazioni di Equivalenza

Diciamo che R è una **relazione di equivalenza** su un insieme S se e solo se R è **binaria su** S**, riflessiva, simmetrica e transitiva**.

3.3.1 Esempio

Un esempio di relazione di equivalenza è data dalla seguente.

$R = \langle a, b \rangle Z | a^2 = b^2$

Essa infatti è:

- *binaria* (ci sono due "termini" coinvolti nella relazione, a e b)
- *riflessiva* ($n^2 = n^2$ per ogni nZ)
- *simmetrica* (se $n^2 = m^2$ anche $m^2 = n^2$ per ogni m, nZ)
- *transitiva* (se $n^2 = o^2$ e $m^2 = o^2$ allora $n^2 = o^2$ per ogni m, n, oZ)

3.3.2 Classe di Equivalenza

Data una relazione di equivalenza R su un insieme S, la **classse di equivalenza** di un elemento xS è definita come

$[x] = y | \langle x, y \rangle R$

Cioè la **classe di equivalenza** di un elemento xR è **l'insieme degli elementi di** R **con cui** x **si relaziona**.

Se R è una relazione di equivalenza su S allora le classi di equivalenza generate da R partizionano S. (Vedere i capitoli precedenti per la definizione di *classe di equivalenza*).

3.4 Relazioni Composte

Date due relazioni $R1$ e $R2$ con $R1$ definita su $S \times T$ e $R2$ definita su $T \times Q$ è possibile definire una nuova relazione che chiamiamo di composizione tra $R1$ e $R2$ su $S \times Q$ tale che $\langle a, c \rangle R2 \circ R1$ se e solo se esiste un bT tale che $\langle a, b \rangle R1$ e $\langle b, c \rangle R2$.

$R2 \circ R1$ è detta composizione di $R1$ e $R2$.

Aggiungere considerazioni sul dominio

3.4.1 Proprietà della composizione

Scrivere $R2 \circ R1$ è diverso dallo scrivere $R1 \circ R2$, **la composizione non è un'operazione commutativa**.

La composizione è un'**operazione è associativa**.

Prese due relazioni $R1$ e $R2$ con $R1$ definita su $S \times T$ e $R2$ definita su $T \times Q$, si ha che $(R1 \circ R2)^{-1} = R1^{-1} \circ R2^{-1}$.

4 | Strutture Relazionali

Definiamo una *struttura relazionale* come