Complementi di Matematica

Cristian Baldi, Luca Chiodini

A.A. 2015/2016

Indice

Capitolo 1

Matrici

1.1 Definizione

Una matrice con p righe e q colonne è una tabella di numeri reali così disposti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,q} \end{bmatrix}$$

I parametri p e q sono detti dimensioni della matrice.
L'elemento $A_{i,j}$ della matrice è l'elemento che si trova alla i-esima riga e alla j-esima colonna.

1.2 Matrici quadrate

Una matrice che ha dimensione (n, n) è detta matrice quadrata. Questa matrice avrà un numero uguale di righe e di colonne.

$$A_{\text{quadrata 2x2}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.3 Diagonale principale

Per ogni matrice quadrata $A_{n \times n}$ è possibile individuare gli elementi della diagonale principale, cioè tutti gli $a_{i,i}$ con i che varia da 1 a n.

1.4 Matrice triangolare superiore

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ si dice triangolare superiore se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli.

$$A_{\text{Diag. Sup.}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

1.5 Matrice diagonale

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ è detta diagonale se tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono nulli.

1.6 Matrice simmetrica

Una matrice quadrata si dice simmetrica se i suoi elementi in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale sono uguali.

1.7 Matrice identità

Chiamiamo matrice unità (o matrice identica o matrice identità) di ordine n la matrice quadrata $I_{n \times n}$ avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0.
La matrice identica è una matrice diagonale.

1.8 Operazioni con matrici

1.8.1 Matrice trasposta

Presa una matrice A chiamiamo A^T la trasposta di A la matrice avente come elemento di posto (i, j) l'elemento (j, i) della matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1.8.2 Somma tra matrici

Consideriamo due matrici A e B. Le due matrici sono sommabili se e solo se sono dello stesso tipo, cioè se e solo se hanno lo stesso numero di righe e di colonne.
$C = A + B$ è una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne delle due matrici di partenza, in cui ogni termine $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ -9 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+7 & 5+(-5) & (-3)+2 \\ (-9)+1 & (-2)+4 & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.8.3 Moltiplicazione per uno scalare

La moltiplicazione di una matrice $A = (a_{i,j})$ per uno scalare λ è ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per lo scalare stesso.

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})$$

1.8.4 Prodotto tra matrici

Definizione. *Siano A, B due matrici. È possibile calcolare il prodotto $C = A \cdot B$ solo se $colonne(A) = righe(B)$.*

$$C_{ij} := A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \ldots + A_{iq} \cdot B_{qj}$$

1.8.5 Inversa di una matrice

Teorema. *Una matrice è invertibile se e solo se ha rango massimo.*

Quindi una matrice ammette inversa se $det(A) \neq 0$

Teorema. *Sia A una matrice quadrata invertibile di ordine n. L'inversa $A^{-1} = (x_{ij})$ si può calcolare in questo modo:*

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot det(A_{ji})}{det(A)}$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta eliminando da A la riga i-esima e la colonna j-esima.

1.9 Rango

Definizione. *Il rango di una matrice è il massimo ordine di sottomatrice quadrata con determinante diverso da 0 che posso estrarre dalla matrice stessa.*

Definizione. *Il rango di una matrice ridotta a scala è il numero di righe diverse da 0.*

Una matrice rettangolare $A_{m \times n}$ può avere rango al massimo uguale al minimo tra il numero di righe e il numero di colonne della matrice. Cioè:

$$rk(A) \leq \min(m, n)$$

Nel caso in cui il rango coincida con il minimo tra m ed n, cioè $rk(A) = \min(m, n)$, diremo che la matrice ha rango massimo.

1.10 Riduzione a scala

Definizione. *Una matrice A si dice a scala se il numero degli zeri che precede il primo elemento diverso da zero di ogni riga aumenta precedendo dalla prima riga verso l'ultima, fino a che non restano, eventualmente, solo righe nulle.*

1.11 Determinante

Definizione. *Il determinante è un numero associato ad una matrice A e si indica come $|A|$ oppure con $\det(A)$.*

1.11.1 Calcolare il determinante

Matrice 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

Matrice 3×3

Attraverso la regola di Sarrus

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

Matrici n×n

Consideriamo una matrice quadrata di ordine n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e denotiamo con A_{ij} la matrice che si ottiene eliminando dalla matrice A la riga i e la colonna j.

Definizione. *Sviluppo di Laplace per righe*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

(ci si muove lungo la riga i-esima).

Definizione. *Sviluppo di Laplace per colonne*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

(ci si muove lungo la colonna j-esima).

1.11.2 Proprietà del determinante

Proprietà. *Una matrice quadrata con due righe o due colonne uguali ha determinante nullo.*

Proprietà. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora $det(A) = -det(B)$. Un'analoga proprieta vale per lo scambio di colonne.*

Proprietà. *Se una matrice quadrata A ha una riga multipla di un'altra, allora $det(A) = 0$. Un'analoga proprieta vale per le colonne.*

Proprietà. *Sia A una matrice quadrata di ordine n e k un numero reale. Si ha allora:*

$$\det(kA) = k^n \cdot \det A$$

Proprietà. *Sia A una matrice diagonale, allora il determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale.*

Teorema (di Binet)**.** *Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B si ha:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Teorema. *Se A è una matrice invertibile allora $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.*

1.12 Dipendenza Lineare

Le righe $A_1, A_2, \ldots, A_m$ di una matrice si dicono linearmente dipendenti se esistono dei k_n non tutti nulli per cui

$$k_1 \cdot A_1 + k_2 \cdot A_2 + \cdots + k_m A_m = 0$$

Proprietà. *Una matrice quadrata A ha $\det(A) = 0$ se e solo se le righe (o le colonne) di A sono linearmente dipendenti.*

Definizione (Combinazione Lineare)**.** *Si dice che una riga A_i è combinazione lineare delle altre righe se esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che*

$$A_i = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_{i-1} A_{i-1} + a_{i+1} A_{i+1} + \cdots + a_n A_n$$

Teorema. *Sia A una matrice $m \times n$ allora le righe di A sono linearmente dipendenti se e solo se una riga di A è combinazione lineare delle altre righe.*

Capitolo 2

Sistemi Lineari

2.1 Equazione lineare

Definizione. *Si chiama equazione lineare su $\mathbb{R}$ ogni equazione del tipo*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono dette le variabili dell'equazione lineare.
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono detti i coefficienti dell'equazione lineare.
b è il termine noto.

Definizione. *La n-upla ordinata $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è detta soluzione del sistema lineare se*

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$$

2.2 Sistema lineare

Definizione. *Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è detto sistema lineare.*

Definizione. *Un sistema lineare è detto omogeneo se tutte le m equazioni lineari che lo compongono hanno termine noto $b = 0$.*

È possibile rappresentare i sistemi sotto forma di matrici. In questo modo sarà possibile scrivere il sistema come $A \cdot X = B$.

2.3 Soluzioni di un sistema lineare

Definizione. *La n-upla ordinata $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è detta soluzione del sistema se essa soddisfa tutte le m equazioni del sistema.*

Definizione. *Ogni soluzione è detta soluzione particolare del sistema.*

Definizione. *Tutte le soluzioni del sistema sono dette soluzioni generali.*

2.4 Teorema di Rouché - Capelli

Teorema. *Un sistema lineare ha soluzioni se e sole se il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa AB.*

2.5 Regola di Cramer

Sia dato un sistema lineare di n equazioni ed n incognite.

Teorema (Teorema di Cramer). *Un sistema lineare ha una e una sola soluzione se il determinante della matrice incompleta A è diverso da 0.*

Teorema (Regola di Cramer). *Preso un sistema lineare con $\det(A) \neq 0$, la componente i-esima dell'unica soluzione $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ di tale sistema è data da:*

$$k_i = \frac{det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, B, A^{i+1}, \ldots, A^n)}{det(A^1, A^2, \ldots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \ldots, A^n)}$$

2.6 Sulle soluzioni

Esempio. *Prendiamo un sistema lineare con determinante uguale a 0.*
Non possiamo applicare la regola di Cramer.
Calcoliamo quindi il rango della matrice completa e della matrice incompleta.
Supponiamo siano entrambi uguali, quindi per Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni.
Selezioniamo le equazioni linearmente indipendenti del sistema (il rango ci dice quante sono, basta trovare una sottomatrice $r \times r$ con determinante diverso da zero).
Dal nuovo sistema parametrizziamo (spostiamo le incognite aggiuntive in B) e risolviamo con Cramer, ottenendo infinite soluzioni parametriche.

2.6.1 Metodo di Gauss

Si riduce la matrice completa a scala tramite operazioni elementari.
Verifico se il sistema ha soluzioni: cioè applico Rouché-Capelli, guardando se il rango di A è uguale al rango di AB
Se esistono, trovo le solzioni: diventerà particolarmente semplice trovarle vista la matrice ridotta a scala.

2.6.2 Sistemi lineari omogenei

Proprietà. *In un sistema lineare omogeneo il rango della matrice incompleta A è uguale al rango della matrice completa AB.*

Proprietà. *Se il rango della matrice completa è uguale al numero di incognite allora il sistema ha, per il teorema di Cramer, una ed una sola soluzione, quella nulla.*

Proprietà. *Se il rango r è minore del numero di incognite n, allora il sistema ammette infinite (∞^{n-r}) soluzioni, ottenute parametrizzando $n - r$ incognite.*

Capitolo 3

Vettori

3.1 Introduzione

Definizione. *Si chiama vettore applicato e si indica con $\vec{AB}$ una coppia ordinata di punti A e B del piano o dello spazio.*

Definizione. *A viene detto punto di applicazione del vettore e B punto finale.*

3.2 Caratteristiche

- Verso, cioè se fa $A \to B$ o $B \to A$.
- Direzione, cioè la retta che passa da A e B.
- Norma, o modulo, la lunghezza del vettore

Definizione. *Due vettori si dicono equivalenti se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza.*

Definizione (Norma). *È detta norma (o modulo) del vettore $A = (a_1, a_2)$ il numero reale*

$$||A|| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Definizione (Versore). *E' detto versore del vettore A il vettore corrispondente di modulo 1, così ottenuto:*

$$vers(A) = \frac{A}{||A||}$$

Definizione. *Il vettore che ha norma uguale a 0 è detto vettore nullo.*

3.3 Vettori Complanari

A è un vettore complanare a B e C se esistono n e m per cui

$$A = nB + mC$$

Esempio. *Trovare i vettori A complanari a $B = (3, 3, 2)$ e $C = (4, 2, 6)$.*
Sia $A = (x, y, z)$,

$$A = nB + mC$$

Quindi

$$(x, y, z) = nB + mC = (3n + 4m, 3n + 2m, 2n + 6m)$$

3.4 Prodotto Scalare

Definizione. *Il prodotto scalare tra due vettori $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ è dato da*

$$A \circ B = ac + bd$$

3.4.1 Proprietà

- $A \circ B = B \circ A$
- $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$
- $\alpha A \circ B = \alpha(A \circ B)$

3.4.2 Perpendicolarità tra due vettori

Teorema. *Due vettori A e B non nulli sono perpendicolari solo se $A \circ B = 0$*

3.4.3 Angolo tra due vettori

Teorema. *Siano A e B due vettori non nulli e sia θ l'angolo fra A e B. Vale*

$$\cos(\theta) = \frac{A \circ B}{||A|| \cdot ||B||}$$

3.5 Prodotto Vettoriale

Definizione. *Siano dati due vettori dello spazio*

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

e

$$\vec{w} = (a_1, b_1, c_1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

Definiamo come prodotto vettoriale tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ il seguente vettore:

$$v \wedge w = (bc_1 - b_1c)\vec{i} - (a_1c - ac_1)\vec{j} - (ab_1 - a_b)\vec{k}$$

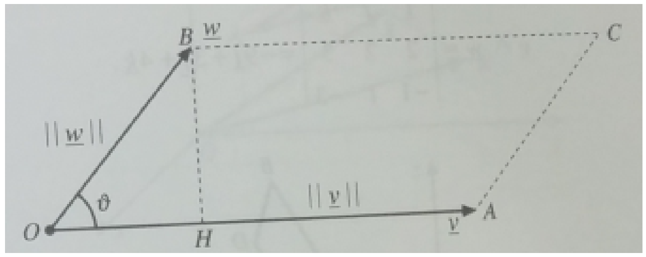
Il prodotto vettoriale può anche essere calcolato come il determinante della matrice seguente:

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

3.5.1 Proprietà

- $v \wedge w = -w \wedge v$
- $v \wedge (w + u) = v \wedge w + v \wedge u$
- $(\alpha v) \wedge w = \alpha(v \wedge w)$
- $v \circ (v \wedge w) = 0$, il prodotto vettoriale è perpendicolare sia a v sia a w, quindi se v e w non sono paralleli allora $v \wedge w$ è perpendicolare al piano individuato da v e w
- $(\alpha v) \wedge v = 0$, il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo
- se $v \wedge w = 0$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $w = \alpha v$ oppure $v = \alpha w$. Infatti, se due vettori hanno prodotto vettoriale nullo allora sono paralleli.

3.5.2 Significato Geometrico



Inanzitutto

$$||\vec{v} \wedge \vec{w}|| = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \sin(\theta)$$

Visto che

$$||\vec{w}|| \cdot \sin(\alpha) = BH$$

allora

$$||v \wedge w|| = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \sin(\theta) = OA \cdot BH$$

cioè il modulo del prodotto vettoriale corrisponde all'area del parallelogramma $OACB$.

3.6 Prodotto Misto

Definizione. *Presi*

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{w} = (a_1, b_1, c_1) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$

$$\vec{u} = (a_2, b_2, c_2) = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

Definiamo prodotto misto dei tre vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ il numero

$$v \circ (w \wedge u)$$

Questo numero è equivalente a il determinante di:

$$v \circ (w \wedge u) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3.6.1 Proprietà

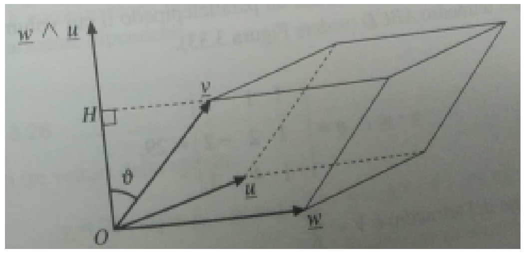
Proprietà. *Il prodotto misto è 0 se 3 vettori sono complanari.*

Infatti

Proprietà. *Se almeno due di questi vettori sono paralleli, allora due righe sono proporzionali, quindi il determinante della matrice è 0.*

Proprietà. *Se i tre vettori non sono paralleli esistono costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha w + \beta u$, cioè una riga è combinazione lineare delle altre; quindi il determinante della matrice è 0.*

3.6.2 Significato Geometrico



Il modulo del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo individuato dai vettori w, u, v.

3.7 Dipendenza Lineare

Definizione. *I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono dei k_n non tutti nulli per cui*

$$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + \cdots + k_v v_n = 0$$

Definizione (Combinazione Lineare). *Si dice che un vettore v è combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ se esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che*

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

Proprietà. *Dei vettori sono linearmente dipendenti solo se almeno uno è combinazione lineare degli altri.*

Proprietà. *Due vettori del piano o dello spazio sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli.*

Proprietà. *Tre vettori dello spazio sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.*

Teorema. *Siano dati tre vettori non complanari dello spazio, allora ogni altro vettore dello spazio è combinazione lineare degli altri 3.*

Definizione. *Dei vettori formano una base se non sono linearmente indipendenti, quindi non complanari.*

Proprietà. *s vettori in uno spazio r-dimensionale, con $s > r$, sono sempre linearmente dipendenti.*

3.8 Spazi vettoriali

Definizione (Spazio vettoriale). *Sia V un insieme di elementi. Definiamo su questo insieme due operazioni, una di addizione e una di moltiplicazione per uno scalare. Valgono inoltre le seguenti proprietà:*

- *commutativa*
- *associativa*
- *esistenza di un elemento nullo (vettore nullo, 0)*
- *esistenza di un opposto per ogni elemento*
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta(v))$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta(v))$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v)$
- $1 \cdot v = v$

Diciamo allora che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e chiameremo i suoi elementi vettori.

3.8.1 Sottospazi vettoriali

Definizione. *Sia V uno spazio vettoriale e S un sottoinsieme non vuoto di V, si dice che S è un sottospazio di V se valgono le seguenti proprietà:*

- *se $u, v \in S$ allora $u + v \in S$*
- *se $u \in S$ allora $\alpha u \in S$*

Esempio. *In ogni spazio V, 0 e V stesso sono sottospazi. V è sottospazio improprio, 0 è sottospazio banale.*

Definizione (Sottospazio generato)**.** *Si dice sottospazio di V generato da n vettori l'inseme di tutte le possibili combinazioni di quegli n vettori.*

Definizione (Base)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimenione finita; l'insieme dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V è detto una base dello spazio V se questi vettori generano V (cioè ogni elemento di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$) e sono linearmente indipendenti.*

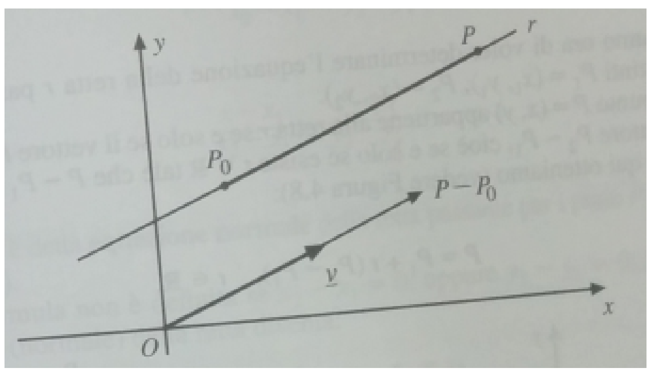
Capitolo 4

Geometria Analitica

4.1 Retta nel piano

4.1.1 Equazione della retta

Supponiamo di avere un vettore $v = (l, m)$ non nullo e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del piano. Vogliamo determinare tutti i punti P appartententi alla retta r, passante per il punto P_0 e parallela al vettore v.



Ovviamente il punto P che cerchiamo (generalizzando al caso specifico di un punto solo) appartiene alla retta r se e solo se il vettore $P - P_0$ è parallelo al vettore $\vec{v}$, cioè se esiste una t tale che $P - P_0 = t\vec{v}$.
Visto che $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ e $v = (l, m)$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

che è l'equazione parametrica della retta r passante per il punto P_0 e parallela al vettore $\vec{v}$.

4.1.2 Retta tra due punti

Supponiamo di voler determinare l'equazione della retta r passante per due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$.
Un punto $P = (x, y)$ appartiene a r se e solo se il vettore $P - P_1$ è parallelo al vettore $P_2 - P_1$. Cioè solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P - P_1 = t(P_2 - P_1)$. Da questo otteniamo

$$P = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

Sostituendo le coordinate di P_1, P_2 e P nell'espressione precedente della retta r si ottiene la seguente

$$r = \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Al variare di t si ottengono tutti i punti della retta r passante per P_1, P_2.
Al variare di $t \in [0, 1]$ si ottengono tutti i punti della retta r passante appartenenti al segmento P_1P_2.
È possibile ricavare t in questo modo:

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Definizione. *L'equzione normale della retta passante per P_1, P_2 è:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Se $x_2 - x_1 = 0$ o $y_2 - y_1 = 0$ allora l'equazione diventa

$$x - x_1 = 0 \text{ se } x_2 = x_1$$

$$y - y_1 = 0 \text{ se } y_2 = y_1$$

4.1.3 Equazione Cartesiana

Per due punti

Dall'equazione normale si ottiene che

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

cioè

$$x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) + y_1x_2 - y_2x_1 = 0$$

Perpendicolare ad un vettore

Vogliamo trovare l'equazione della retta r passante per P_0 e perpendicolare al vettore $n = (a, b)$.
Cioè se $(P - P_0) \circ n = 0$.
cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

4.1.4 Parallelismo tra rette

Date due rette r e r_1 di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, esse sono parallele se e solo se i vettori $n = (a, b)$ e $n_1 = (a_1, b_1)$, direttori delle rette, sono paralleli, cioè se eiste un k tale per cui $kn = n_1$.

4.1.5 Perpendicolarità tra rette

Date due rette r e r_1 di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, esse sono parallele se e solo se il prodotto scalare dei vettori $n = (a, b)$ e $n_1 = (a_1, b_1)$, direttori delle rette, è nullo.

$$aa_1 + bb_1 = 0$$

4.1.6 Angolo tra due rette

Date

$$r = \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

$$r_1 = \begin{cases} x = x_1 + l_1 t \\ y = y_1 + m_1 t \end{cases}$$

l'angolo tra le rette r, r_1 è uguale all'angolo tra i vettori v_r e v_{r_1}, cioè

$$\arccos(\pm(v_r \circ v_{r_1}))$$

4.1.7 Equazione in forma esplicita

Sia data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$. Supponiamo $b \neq 0$, allora

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$ si ottiene $y = mx + q$.
Questa formula fornisce l'equazione di tutte le rette del piano, eccetto le rette $x = k$, parallele all'asse y.
m è detto il coefficiente angolare della reta.
Ponendo $x = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = q + mt \end{cases}$$

Inoltre $m = \tan(\theta)$

4.1.8 Distanza punto - retta

Siano dati nel piano una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e un punto $P = (x_0, y_0)$.
Sia H il piede della perpendicolare lla retta r condotta da P_0.
La misura del segmento P_0H ovvero il numero $\gamma = ||P_0 - H||$ è la distanza del punto P_0 dalla retta r.
Poichè $H \in r$ allora $ax_H + by_h + c = 0$.
$P_0 - H$ è un vettore parallelo a $v = (a, b)$ (perpendicolare alla retta r), quindi

$$|(P_0 - H) \circ v| = ||(P_0 - H)|| \cdot ||v||$$

cioè

$$\gamma = ||P_0 - H|| = \frac{|(P_0 - H) \circ \vec{v}|}{||\vec{v}||}$$

che alla fine è

$$\gamma = \frac{|ax + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza rette parallele

$$\gamma = \frac{|-c_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

4.2 Retta nello spazio

4.2.1 Equazione parametrica

Siano dati un punto P_0 nello spazio e un vettore non nullo v. Un punto P appartiene alla retta r passante per P_0 e parallela a v se e solo se il vettore $P - P_0$ è parallelo al vettore v, ossia se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

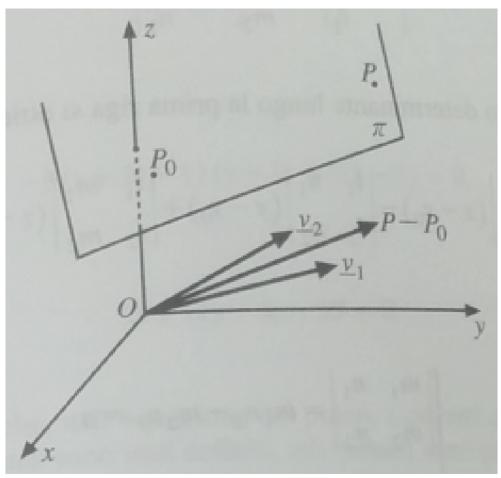
$$P - P_0 = tv$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

4.2.2 Retta tra due punti

Si ragiona in modo analogo a quanto fatto nel piano, considerando chiaramente un punto in più.

4.3 Piano



Dato un punto P_0 e due vettori non paralleli dello spazio $v_1 = l_1 i + m_1 j + n_1 k$ e $v_2 = l_2 i + m_2 j + n_2 k$
Un punto P appartiene al piano π passante per P_0 e parallelo ai vettori v_1 e v_2 se e sole se il vettore $P - P_0$ è complanare con i vettori v_1 e v_2 ovvero se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$P - P_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Da qui otteniamo l'equazione parametrica del piano

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha l_1 + \beta l_2 \\ y = y_0 + \alpha m_1 + \beta m_2 \\ z = z_0 + \alpha n_1 + \beta n_2 \end{cases}$$

4.3.1 Appartenenza al piano

Consideriamo la seguente matrice

$$\begin{matrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}$$

La prima riga è combinazione lineare delle altre due, quindi il determinante è uguale a zero.
Un punto P appartiene al piano se e solo se il determinante della matrice è uguale a 0.
Cioè

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}(x-x_0) - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}(z-z_0) = 0$$

Ponendo

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = a \\ -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = b \\ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = c \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di tutti i piani passanti per P_0.

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

4.3.2 Equazione piano alternativa

Siano dati un punto P_0 dello spazio e un vettore u.
Un punto P appartiene al piano passante per P_0 e perpendicolare a u se e solo se il vettore $P-P_0$ è perpendicolare a u, cioè

$$(P-P_0) \circ u = 0$$

Poiché $P - P_0 = (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k$ allora

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

4.3.3 Piano per tre punti

Se

$$\left| P_{generico} - P_1 P_2 - P_1 p_3 - P_1 \right| = 0$$

4.3.4 Parallelismo e perpendicolarità tra piani

Due piani sono paralleli se e solo se i vettori $u\, u_1$, perpendicolari al piano, sono paralleli, cioè se e solo se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$u = ku_1$$

4.3.5 Perpendicolarità tra piani

Due piani sono paralleli se e solo se i vettori $u\, u_1$, perpendicolari al piano, sono paralleli, cioè se e solo se il loro prodotto scalare è 0.

4.3.6 Intersezione di due piani

Quando due piani si intersecano danno origine ad una retta.

$$r = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

4.3.7 Fasci di piani

Esisono infiniti piani che passano per una retta r. L'insieme di tutti questi piani si chiama fascio di piani di asse r. Se

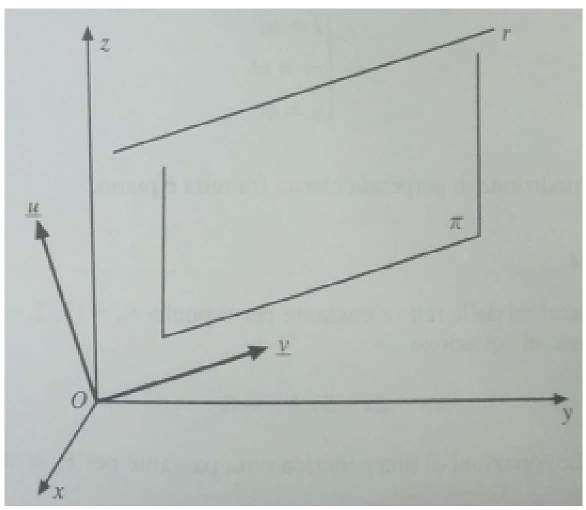
$$r = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

allora il fascio di piani individuato è dato da

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

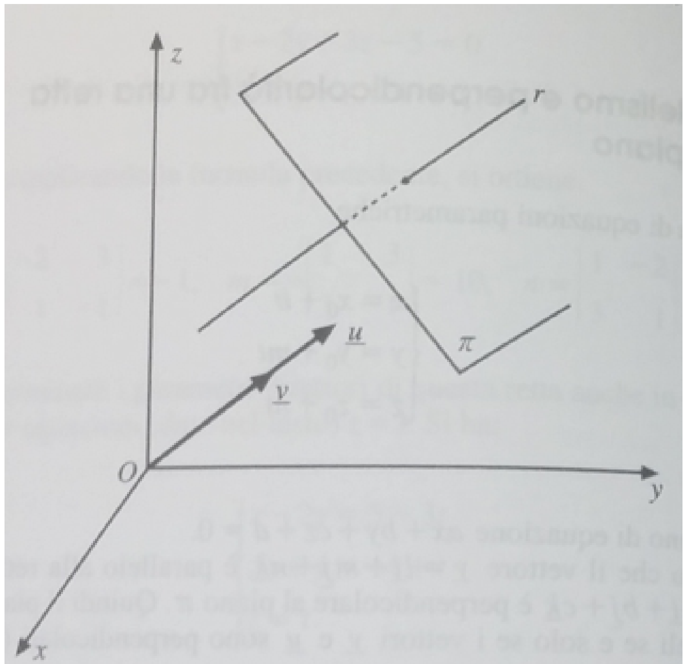
4.3.8 Parallelismo e perpendicolarità tra una retta e un piano

Parallelismo



Il prodotto scalare dei due vettori direttori deve essere 0.

Perpendicolarità



I due vettori direttori devono essere proporzionali.

4.3.9 Angolo tra due piani

È l'angolo tra i due vettori direttori normali ai due piani.

$$\cos(\alpha) = \frac{|a \circ b|}{||a|| \cdot ||b||}$$

4.3.10 Angolo tra una retta e un piano

Siano dati una retta r di parametri direttori l, m, n e un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$; supponiamo che r e π non siano perpendicolari. L'angolo θ fra il piano π e la retta r è l'angolo *acuto* che la retta r forma con la sua proiezione ortogonale r' sul piano π.

Quindi θ è l'angolo formato dal vettore $\underline{v}$ parallelo alla retta r e dal vettore $\underline{v}'$ parallelo alla retta r' (vedere Figura 5.14).

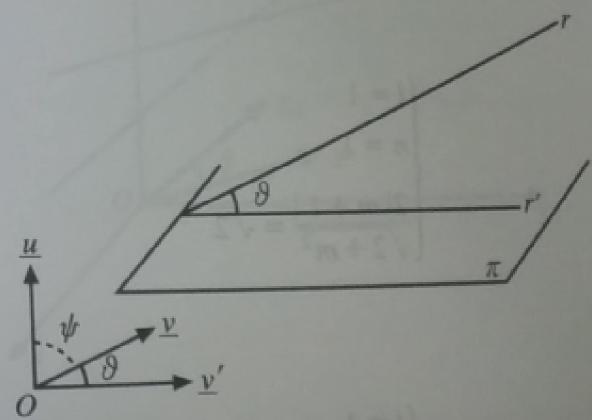


Figura 5.14

Si vede subito che l'angolo θ è il complementare dell'angolo acuto ψ formato dai vettori $\underline{v} = l\underline{i} + m\underline{j} + n\underline{k}$ e $\underline{u} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$, che è un vettore perpendicolare al piano π (se tale angolo ψ fosse ottuso, allora si prenderebbe il suo supplementare).

Quindi, essendo $\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi) = \cos\psi$, si ha:

$$\sin\theta = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

4.3.11 Rette sghembe

Due rette si dicono sghembe se non sono complanari, quindi né incidenti né parallele.
Quindi il sistema associato non ha soluzione e i vettori direttori non sono proporzionali.

Capitolo 5

Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione e in cui sono presenti una o più derivate della funzione incognita.
Un esempio di equazione differenziale è $f'(x) + f(x) = x$. Soluzione di questa equazione sono tutte le funzioni che sommate alla propria derivata primma danno come risultato x.

Definizione (Ordine di un'equazione differenziale)**.** *Il massimo ordine di derivazione che compare in un' equazione differenziale.*

Esempio. $f'(x) = x$
Quali sono le funzioni la cui derivata prima è x?
Tutte le funzioni $\frac{x^2}{2} + c = \int x \,\mathrm{d}x$

5.1 Tipologie e metodi risolutivi

5.1.1 Equazioni differenziali elementari

In questi casi basta integrare n volte, dove n è l'ordine dell'equazione differenziale.

Esempio.

$$y' = 3e^{2x} \to y = \int 3e^{2x} \,\mathrm{d}x \to y = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

Esempio.

$$\begin{aligned} y'' = 2 - \cos(x) &\implies y' = \int 2 - \cos(x) \,\mathrm{d}x \\ y' = 2x - \sin(x) + c &\implies y = \int 2x - \sin(x) + c_1 \,\mathrm{d}x \\ &\quad\; y = x^2 - \cos(x) + c_1 x + c \end{aligned}$$

5.1.2 Equazioni differenziali a variabili separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Esse si risolvono seguendo i seguenti passaggi:

1. Separare le variabili
2. Integrare ciascun membro
3. Ricavare $y(x)$

Esempio.

$$y' = y^2 \ln(x) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \ln(x) \implies \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Posso spezzare $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$.
Ora integro.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \ln(x)\,\mathrm{d}x \implies \frac{-1}{y} = x\ln(x) + c$$

Esplicito la y

$$y(x) = \frac{1}{x\ln(x) - x + c}$$

Se trovo un t tale che $g(t) = 0$ allora $y(x) = t$ è anche soluzione.

5.1.3 Equazioni differenziali lineari

Vediamo per ora quelle del primo ordine, cioè nella forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Procediamo nel seguente modo:

1. Calcolo la primitiva di $a(x) = A(x)$
2. Moltiplico entrambi i membri per $e^A(x)$. Quindi a sinistra ho $[y(x)e^{A(x)}]'$
3. Integro entrambi i membri. $y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c$
4. Moltiplico sia a destra che a sinistra per $e^{-A(x)}$. Ottengo $y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c$

Esempio.

$$y'(x) - xy(x) = 2x$$

$a(x) = -x$, $f(x) = 2x$
Calcolo $\int a(x) = \frac{-x^2}{2}$
Moltiplico tutto per $e^{\frac{-x^2}{2}}$
Ottengo quindi

$$y(x) \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \int 2x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + c$$

Moltiplico per $e^{-A(x)}$.
Ottengo

$$y(x) = -2 + c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Teorema (Soluzione generale)**.**

$$y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c \cdot e^{-A(x)}$$

5.2 Problema di Cauchy

Definiamo problema di Cauchy un sistema del tipo

$$\begin{cases} \text{Equazione differenziale} \\ \text{Condizioni iniziali} \end{cases}$$

Esempio.

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$y = e^{-x} + c$$

Quindi sostituisco $y = f(x)$ *e* $x = 0$

$$3 = e^{-0} + c \to c = 2$$

Quindi $y(x) = e^{-x} + 2$ *è la soluzione al problema di Cauchy.*

5.2.1 Esistenza ed unicità della soluzione

Supponiamo di avere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ g(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora:

- Se $f(x, y)$ è continua allora esiste almeno una soluzione.
- Se $f_y(x, y)$ è continua allora esiste una ed una sola soluzione.

Capitolo 6

Funzioni a due variabili

6.1 Insieme aperti e chiusi

Definizione (Insieme aperto). *Un insieme A è aperto se per ogni $x \in A$ (ed un $r > 0$) esiste l'intorno $B_r(x) \subseteq A$.*

Esempio (Insieme aperto). $x^2 + y^2 < 1$

Definizione (Insieme chiuso). *Un insieme è chiuso se è il complementare di un insieme aperto.*

Esempio (Insieme chiuso). $x^2 + y^2 >= 1$

6.2 Generalità

6.3 Limiti

Diciamo che $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se:

- ogni intorno di (a, b) contenga altri punti del dominio di f, differenti da (a, b)
- per ogni numero positivo ϵ esiste un numero positivo $\gamma(\epsilon)$ tale che $|f(x,y) - L| < \epsilon$ vale ogni volta che (x, y) è nel dominio di f e soddisfa $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \gamma$

6.3.1 Proprietà dei limiti

Sia $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$. Valgono allora le seguenti proprietà:

- Se il limite esiste, esso è unico.
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = L \pm M$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = LM$
- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ purché

6.4 Continuità

Una funzione $f(x, y)$ si dice continua in un punto (x_0, y_0) se:

- È definita in (x_0, y_0)
- Esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ed è uguale a $f(x_0, y_0)$

Quindi non è detto che se esiste il limite di una funzione in un punto allora la funzione è definita in quel punto.

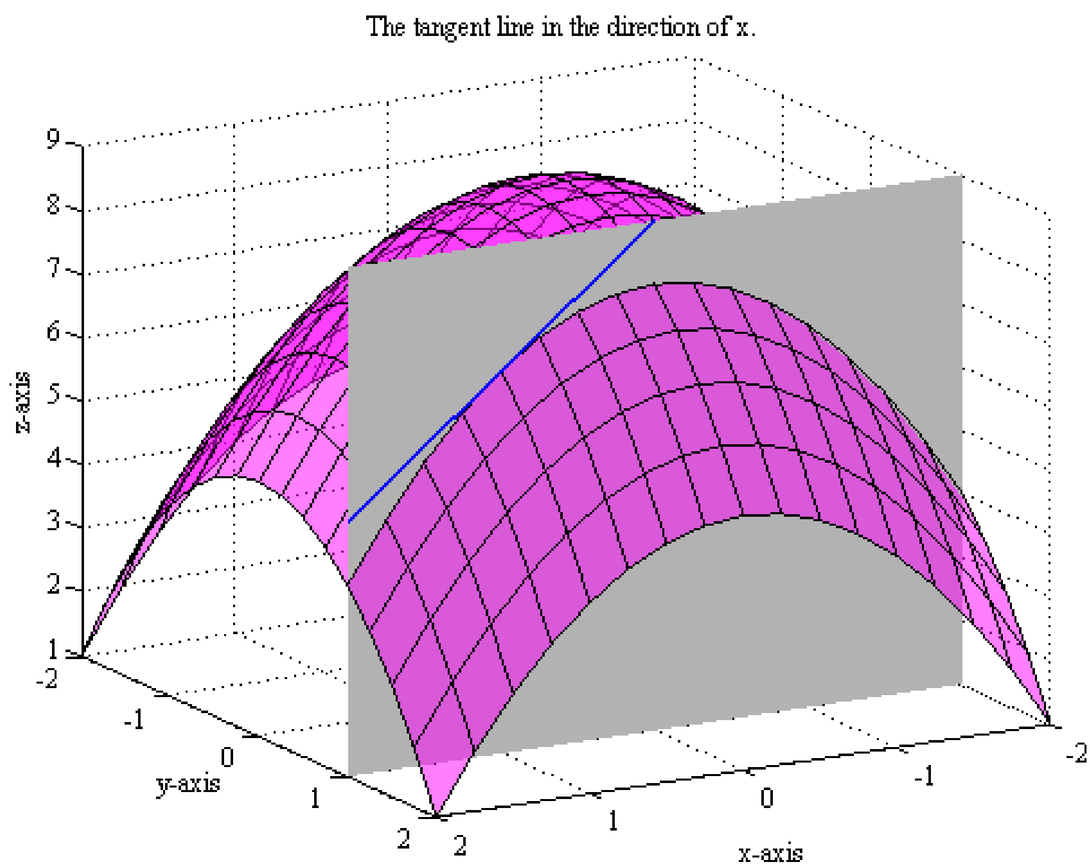
6.5 Derivabilità

6.5.1 Derivata in $\mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

6.5.2 Derivate Parziali

Calcolate solo rispetto all'asse x o all'asse y.



Limite di un quoziente di Newton rispetto a una delle due variabili.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

6.5.3 Derivata direzionale

Ci forniscono la rapidità di variazione di $f(x, y)$ lungo una generica direzione (a, b).
Calcolata rispetto ad una qualsiasi retta/direzione.
Fissato un qualunque versore $v = (v_1, v_2)$ posso calcolare:

$$f_v(a,b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + v_1 h, b + v_2 h) - f(a,b)}{h}$$

La derivata direzionale è anche uguale a

$$\nabla f(a,b) \circ V$$

6.5.4 Sviluppo di Taylor

Rappresenta la migliore funzione polinomiale di grado n che approssima la funzione f in un intorno di (x_0, y_0).

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y0)^2] + \\ o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \end{aligned}$$

6.6 Piano tangente

6.6.1 Vettore normale in un punto

$$n = f_x(a,b)i + f_y(a,b)j - k$$

6.6.2 Piano tangente

Il piano tangente che passa per $P = (a, b, f(a,b))$ è

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

cioè

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

6.7 Linearizzazione

6.7.1 In $\mathbb{R}$

La retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $x = a$ fornisce un' approssimazione dei valori di $f(x)$ per x vicino ad a

$$f(x) \sim L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

6.7.2 In $\mathbb{R}^2$

Il piano tangente al grafico di $z = f(x,y)$ in (a,b) è $z = L(x,y)$ dove

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

è la linearizzazione di $f(x,y)$ in (a,b). La funzione $L(x,y)$ può essere usata per approssimare i valori di $f(x,y)$ vicino a (a,b):

$$f(x,y) \sim L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

6.8 Differenziabilità

6.8.1 Differenziabilità in $\mathbb{R}$

Una funzione f è differenziabile in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

per $h \to 0$.

6.8.2 Generalità

Si dice che la funzione $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) se vale che:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - hA - kB}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

dove $A = f_x(x_0, y_0)$ e $B = f_y(x_0, y_0)$

6.8.3 Condizioni per la differenziabilità

Per essere differenziabile una funzione deve essere continua e deve ammettere derivate parziali in (a, b) lungo ogni direzione $V \in \mathbb{R}^2$ (e quindi anche le derivate parziali).
Una funzione è differenziabile se e solo se la superficie $z = f(x, y)$ ha un piano tangente non verticale in (a, b).

6.9 Gradiente

Chiamiamo $\nabla f(x_0, y_0)$ il gradiente della funzione f calcolato in (x_0, y_0).

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Il vettore gradiente calcolato in un punto è anche detto **differenziale** della funzione in quel punto.

6.9.1 Interpretazione geometrica

Per quali versori di V la derivata direzionale risulta Massima o Minima?

$$f_V(x_0) = |\nabla f(x_0)| \cdot |v| \cdot \cos(\theta)$$

Visto che stiamo trattando versori allora $|v| = 1$.
Quindi è la derivata direzionale è massima per $\cos(\theta) = 1 \implies \theta = 0$
Quindi è la derivata direzionale è minima per $\cos(\theta) = 0 \implies \theta = \pi$
La direzione del gradiente calcolato in un punto indica la retta seguendo la quale si trova il massimo incremento della funzione f nell'intorno del punto in cui è calcolato.

6.9.2 Differenziale

Se le derivate prime esistono, possiamo definire il differenziale: il differenziale di una funzione quantifica la variazione infinitesimale della funzione rispetto ad una variabile indipendente.

6.10 Matrice Jacobiana

La matrice jacobiana di una funzione è la matrice i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione. La sua importanza è legata al fatto che, nel caso la funzione sia differenziabile, la jacobiana rappresenta la migliore approssimazione lineare della funzione vicino a un punto dato.
Sia $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione definita su un insieme aperto U dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. La matrice jacobiana della funzione $J\mathbf{f}$ in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è la matrice delle derivate parziali prime della funzione calcolate in $\mathbf{x}$:

$$J\,\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (\,J\,\mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

6.11 Funzione omogenea

Definizione. *Una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ è detta positivamente omogenea di grado k se, per ogni punto $(x_1, \dots, x_n)$ del suo dominio e qualunque numero realte $t > 0$ si ha*

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

6.11.1 Esempi

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

6.12 Valori Estremi

6.12.1 Punti a cui prestare attenzione

- Punti critici (detti anche stazionari) in cui $\nabla f(a, b) = 0$
- Punti singolari, punti in cui $\nabla f(a, b)$ non esiste
- Punti di contorno del dominio di f

6.12.2 Classificazione formale

Se (a, b) è punto critico allora guardo il segno di

$$\delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

6.12.3 Classificazione tramite matrice hessiana

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Sia $P = (a, b)$ un punto stazionario per f. Allora valgono le seguenti:

- Se $H(a, b)$ è definita positiva, allora f ha un minimo locale in P
- Se $H(a, b)$ è definita negativa, allora f ha un massimo locale in P
- Se $H(a, b)$ è indefinita, allora f ha un punto di sella in P
- Se $H(a, b) = 0$, allora questo test è inconcludente

Capitolo 7

Integrali doppi

7.1 Generalità

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

A è l'insieme (zona) di integrazione ed è un **sottoinsieme limitato** del piano.
$f(x,y) : A \to R$ è una funzione limitata. Esiste cioè un M tale che $|f(x,y)| \leq M\ \forall(x,y) \in A$.

7.2 Significato geometrico

7.2.1 In $\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

L'integrale è interpretabile geometricamente come l'area con segno della parte di piano sottesa dalla funzione $f(x)$.

7.2.2 In $\mathbb{R}^2$

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Se $f(x,y) \geq 0$ allora l'integrale è il volume della parte di spazio compresa tra il piano xy ed il grafico di $f(x,y)$, limitata dalle *pareti verticali* che si proiettano sul bordo di A.
Altrimenti, se $f(x,y)$ ha segno variabile in A, "le parti" al di sotto del piano xy contano con il segno $-$.

7.3 Definizione

7.3.1 Funzioni costanti su un rettangolo

$A = [a,b] \times [c,d]$
Cioè A è un rettangolo delimitato dai lati ab e cd.
$f(x,y) = \lambda$, cioè una costante.
Quindi l'integrale è semplicemente

$$\lambda \cdot (b-a) \cdot (d-c)$$

ovvero il volume con segno del parallelepipedo.

7.3.2 Funzioni costanti su più rettangoli

Sia A un'unione disgiunta di rettangoli (intuitivamente come tanti grattacieli uno vicino all'altro).
$f(x, y)$ è costante all'interno di ciascun rettangolo, ma può variare da rettangolo a rettangolo.
$f(x, y) = \lambda_i \, \forall (x, y) \in Rett_i$.
Quindi l'integrale é

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \text{Area}(Rett_i)$$

7.3.3 Funzioni non costanti su un rettangolo

Sia D un rettangolo chiuso, con lati paralleli agli assi, $f(x, y)$ è una funzione qualsiasi definita sul dominio D.
Supponiamo che D vari tra a e b sull'asse x e tra c e d sull'asse y.
Possiamo quindi partizionare il dominio in dei rettangoli più piccoli, individuando dei punti in questo modo:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d$$

In sostanza si individuano $m \cdot n$ rettangoli $Rett_{ij}$.
L'area di ogni rettangolo è

$$\delta A_{ij} = \delta x_i \delta y_1$$

La lunghezza della diagonale è

$$\sqrt{(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2}$$

Scelto un punto arbitrario (x_{ij}, y_{ij}) in ciascuno dei rettangoli individuiamo la somma di Riemann:

$$R(f, P_{artizione}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \delta A_{ij}$$

In sostanza base per altezza di un parallelepipedo.
Facendo il limite

$$\lim_{(n,m)\to(\infty,\infty)} R(f, P_{artizione})$$

otteniamo l'integrale doppio di f su D, cioè il volume sopra D e sotto il grafico di f.

7.4 Funzioni integrabili

Definizione. *Si dice che f è integrabile sul rettangolo D e che ha integrale doppio*

$$I = \iint_D f(x, y) \, \mathrm{d}A$$

se, per ogni numero positivo ϵ, esiste un numero $\gamma(\epsilon)$ tale che

$$R(f, P) - I < \epsilon$$

vale per ogni P di D tale che $|P| < \gamma$ e per tutte le scelte di punti (x_{ij}, y_{ij}).

Proprietà. *Se una funzione è continua su D allora è integrabile su D. Ovviamente, non è detto che se f è integrabile allora è continua.*

7.5 Integrali doppi su domini generali

Potrebbe anche essere necessario calcolare un integrale su un dominio D che non è un rettangolo ma un'area qualunque del piano.